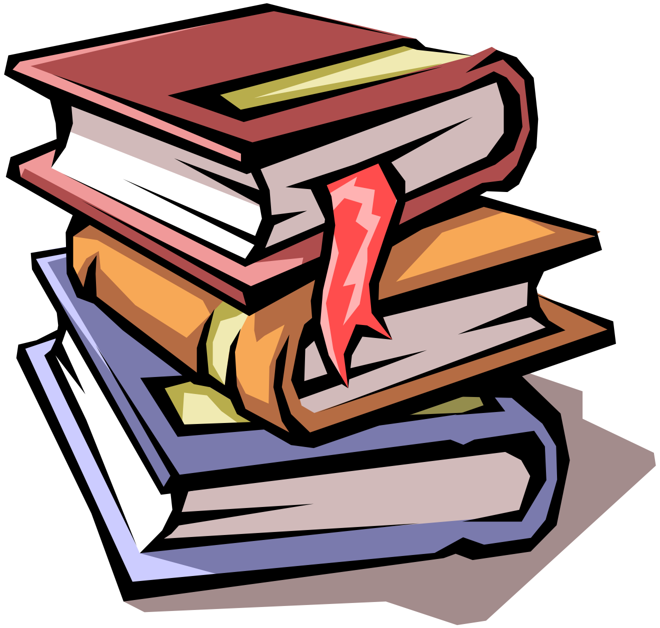
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS



- Una identidad trigonométrica es una igualdad que se cumple para **todos los valores de las variables involucradas**
- Se cumple para todos los valores de $\propto$

Conceptos Básicos

- El inverso o recíproco de un número a es 1/a

  el inverso de 5 es 1/5

  el inverso de 1/1000 es 1000

Identidades inversas

① $\text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{\csc\theta}$

② $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$

③ $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$

④ $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

⑤ $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

⑥ $\csc\theta = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}$

⑦ $\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

⑧ $\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \cot\theta$

tan Φ= 1/ cot Φ (9)

cot Φ = 1/ tan Φ (10)

IDENTIDAD FUNDAMENTAL

$$\boldsymbol{sen^2} \propto \ + \boldsymbol{cos^2} \propto = \mathbf{1}\ (\mathbf{11})$$

http://www.fic.umich.mx/~lcastro/identidades%20trigonometricas.pdf

- $sec^2\theta = tan^2\theta + 1$ (12) $\csc^2\theta = cot^2\theta + 1$ (13)

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

- (14) (15) (16)

http://www.fic.umich.mx/~lcastro/identidades%20trigonometricas.pdf

(STEWART,2007)

FÓRMULA	LOS 2 DESPEJES RESPECTIVOS
$sen^2 x + cos^2 x = 1$	$sen^2 x = 1 - cos^2 x$
	$cos^2 x = 1 - sen^2 x$
$tan^2 x + 1 = sec^2 x$	$1 = sec^2 x - tan^2 x$
	$tan^2 x = sec^2 x - 1$
$cot^2 x + 1 = csc^2 x$	$1 = csc^2 x - cot^2 x$
	$cot^2 x = csc^2 x - 1$

http://www.fic.umich.mx/~lcastro/identidades%20trigonometricas.pdf

- Con las anteriores identidades se trabaja para convertir términos más complicados a más sencillos

Ejemplo 1 Simplificación de una expresión trigonométrica

Simplifique la expresión $\cos t + \tan t \operatorname{sen} t$.

Solución Primero volvemos a escribir la expresión en términos de seno y coseno.

$$\cos t + \tan t \operatorname{sen} t = \cos t + \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right) \operatorname{sen} t$$ Identidad recíproca

$$= \frac{\cos t}{1} + \frac{\sin t^2}{\cos \propto} \quad = \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos t}$$ Denominador común

$$= \frac{1}{\cos t}$$ Identidad pitagórica

$$= \sec t$$ Identidad recíproca ■

(STEWART,2007)

Ejemplo 2 Simplificación mediante combinación de fracciones

Simplifique la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$.

Solución Combinamos las fracciones usando un denominador común.

Destruir paréntesis

(Multiplicar en cruz y denominador por denominador)

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} \qquad \textit{Denominador común}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + \overbrace{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}^{=1}}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} \qquad \textit{Distribución de sen } \theta$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} \qquad \textit{Identidad pitagórica}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \qquad \textit{Cancelación y uso de la identidad recíproca}$$

(STEWART,2007)

Criterios para demostrar identidades trigonométricas

1. **Empezar con un miembro.** Elija un miembro de la ecuación y escríbalo. Su objetivo es transformarlo en el otro miembro. Por lo regular es más fácil iniciar con el lado más complicado.
2. **Aplicar identidades conocidas.** Use el álgebra y las identidades que conozca para cambiar el lado con el que empezó. Obtenga el común denominador de las expresiones, factorice y aplique las identidades fundamentales para simplificar las expresiones.
3. **Convertir en senos y cosenos.** Si encuentra difícil continuar, es útil volver a escribir todas las funciones en términos de senos y cosenos.

(STEWART,2007)

Ejemplo 3 Demostración de una identidad mediante la reescritura en términos de seno y coseno

Compruebe la identidad $\cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$.

Solución El primer miembro se ve más complicado, así que iniciamos con él y tratamos de transformarlo en el segundo miembro.

$$\cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta)$$

$$= \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) \qquad \text{Identidad recíproca}$$

$$\frac{\cancel{\cos}\,\theta(1 - cos^2\theta)}{\cancel{cos}\theta}$$

$$= 1 - \cos^2\theta \qquad \text{Desarrollo}$$

$$= \operatorname{sen}^2\theta = \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

(STEWART,2007)

Ejemplo 4 Demostración de una identidad mediante la combinación de fracciones

Verifique la identidad

$$2 \tan x \sec x = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$$

Solución Mediante un común denominador y la combinación de las fracciones en el segundo miembro de esta ecuación obtenemos

$$\frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{(1 + \operatorname{sen} x) - (1 - \operatorname{sen} x)}{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)} \qquad \text{Común denominador}$$

Destruir paréntesis y simplificar el numerador

$$= \frac{2 \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \qquad \text{Simplificación}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}\right) \qquad \text{Factorización}$$

$$= 2 \tan x \sec x \qquad \text{Identidades recíprocas}$$

Resolución de ecuaciones trigonométricas

Una ecuación que contiene funciones trigonométricas se denomina **ecuación trigonométrica**. Por ejemplo, las expresiones siguientes son ecuaciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \qquad \tan^2 2x - 1 = 0$$

Resolución de ecuaciones trigonométricas

Para resolver una ecuación trigonométrica, aplicamos las reglas del álgebra para aislar la función trigonométrica en un lado del signo igual. Luego usamos los conocimientos de los valores de las funciones trigonométricas para determinar la variable.

Ejemplo 1 **Resolución de una ecuación trigonométrica**

Resuelva la ecuación $2\ \text{sen}\ x - 1 = 0$.

Solución Empezamos por aislar sen x.

$$2\ \text{sen}\ x - 1 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$2\ \text{sen}\ x = 1 \qquad \text{Suma de 1}$$

$$\text{sen}\ x = \frac{1}{2} \qquad \text{División entre 2}$$

Puesto que el seno tiene un periodo de 2π, primero calculamos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$. Éstas son $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$. Para determinar todas las otras soluciones sumamos cualquier múltiplo entero de 2π a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero. En la figura 1 se ilustra una representación gráfica de las soluciones.

Ejemplo 2 Resolución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación $\tan^2 x - 3 = 0$.

Solución Empezamos por aislar a $\tan x$.

$$\tan^2 x - 3 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$
$$\tan^2 x = 3 \qquad \text{Suma de 3}$$
$$\tan x = \pm\sqrt{3} \qquad \text{Obtención de las raíces cuadradas}$$

Como la tangente tiene periodo π, primero determinamos las soluciones en el i valo $(-\pi/2, \pi/2)$, que son $x = -\pi/3$ y $x = \pi/3$. Para determinar todas las otra luciones, sumamos cualquier entero múltiplo de π a dichas soluciones. Por lo t las soluciones son

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \qquad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

donde k es cualquier entero.

Ley de senos

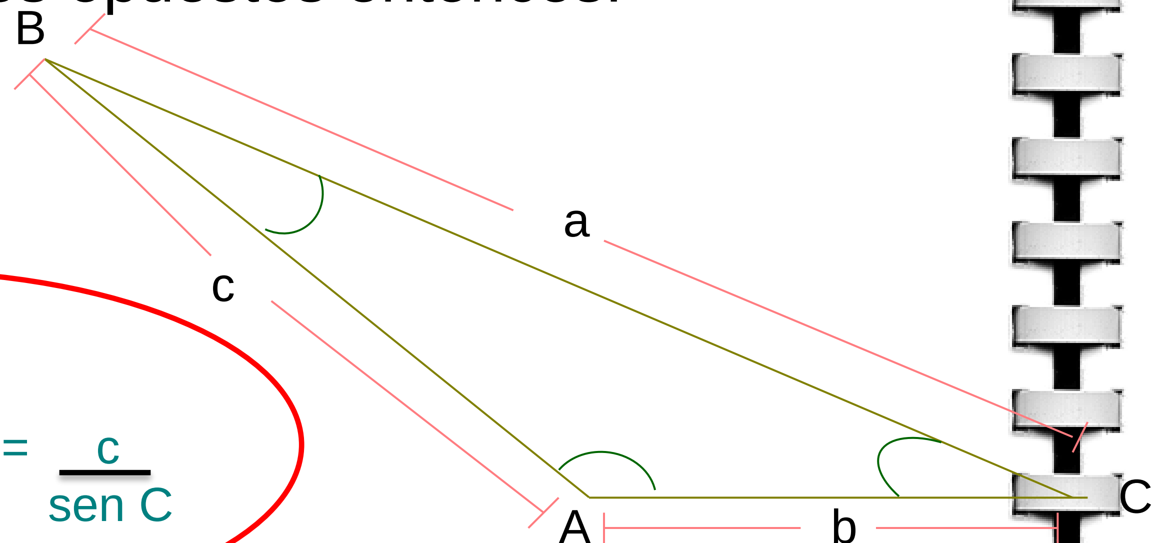
- **La Ley del Seno relaciona 3 igualdades que siempre se cumplen entre los lados y ángulos de un triángulo cualquiera.**

- La ley de senos es útil cuando se conocen dos ángulos y uno de los lados opuestos a uno de los ángulos conocidos.

Ley de senos

En todo triángulo un lado sobre el seno del ángulo opuesto es igual al otro lado sobre el respectivo seno del ángulo opuesto

- si llamamos A, B, C a los ángulos
- y a,b,c a los lados opuestos entonces:



$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

c

- **La Ley del seno sirve para resolver triángulos que NO necesariamente son triángulos rectángulos**

LEY DEL COSENO

La Ley del Coseno sirve para analizar y resolver triángulos que NO necesariamente son triángulos rectángulos.

En todo triángulo un lado al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos 2 por el producto de esos 2 lados por el coseno del ángulo que forman

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos B$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos C$$

LEY DEL COSENO

- Es decir, que la Ley del Coseno permite encontrar el valor de uno de los lados de un triángulo conociendo de antemano el ángulo opuesto a dicho lado y los valores de los otros dos lados.

- O conocer el ángulo si se conocen los 3 lados

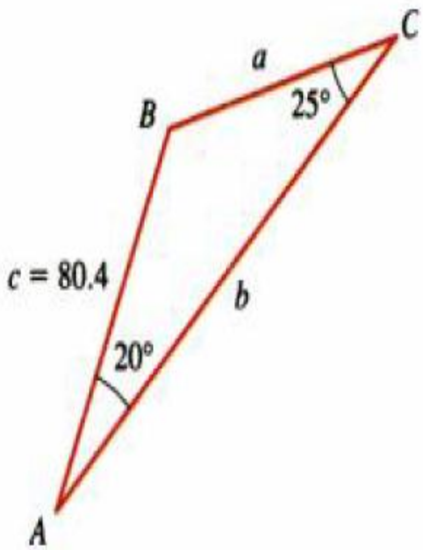


Figura 5

Ejemplo 2 Resolver un triángulo

Resuelva el triángulo de la figura 5.

Solución Primero, $\angle B = 180° - (20° + 25°) = 135°$. Puesto que se conoce el lado c, para hallar el lado a se usa la relación

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$a = \frac{c \text{ sen } A}{\text{sen } C} = \frac{80.4 \text{ sen } 20°}{\text{sen } 25°} \approx 65.1 \qquad \text{Despeje } a$$

De manera similar, para encontrar b utilizamos

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$b = \frac{c \text{ sen } B}{\text{sen } C} = \frac{80.4 \text{ sen } 135°}{\text{sen } 25°} \approx 134.5 \qquad \text{Despeje } b$$