MATEMÁTICA BÁSICA CLASE 14
DIVISION LARGA Y SINTÉTICA

TEOREMA DEL RESIDIO
Y DEL FACTOR

PROFESOR EFRÉN GIRALDO T.

INSTITUTO TECNOLÓGICO
METROPOLITAN0
MEDELLÍN ABRIL 2012

«La disciplina termina venciendo a la inteligencia»

Elaboró Efrén Giraldo Toro

Objetivos - Competencias

- Dominar la división larga y sintética.
- Valorar un polinomio en un valor dado a.
- Saber aplicar el teorema del residuo y del factor.

- Hallar la raíces ceros o soluciones de un polinomio


u21266601 fotosearch.com

RECOMENDACIÓN IMPORTANTE

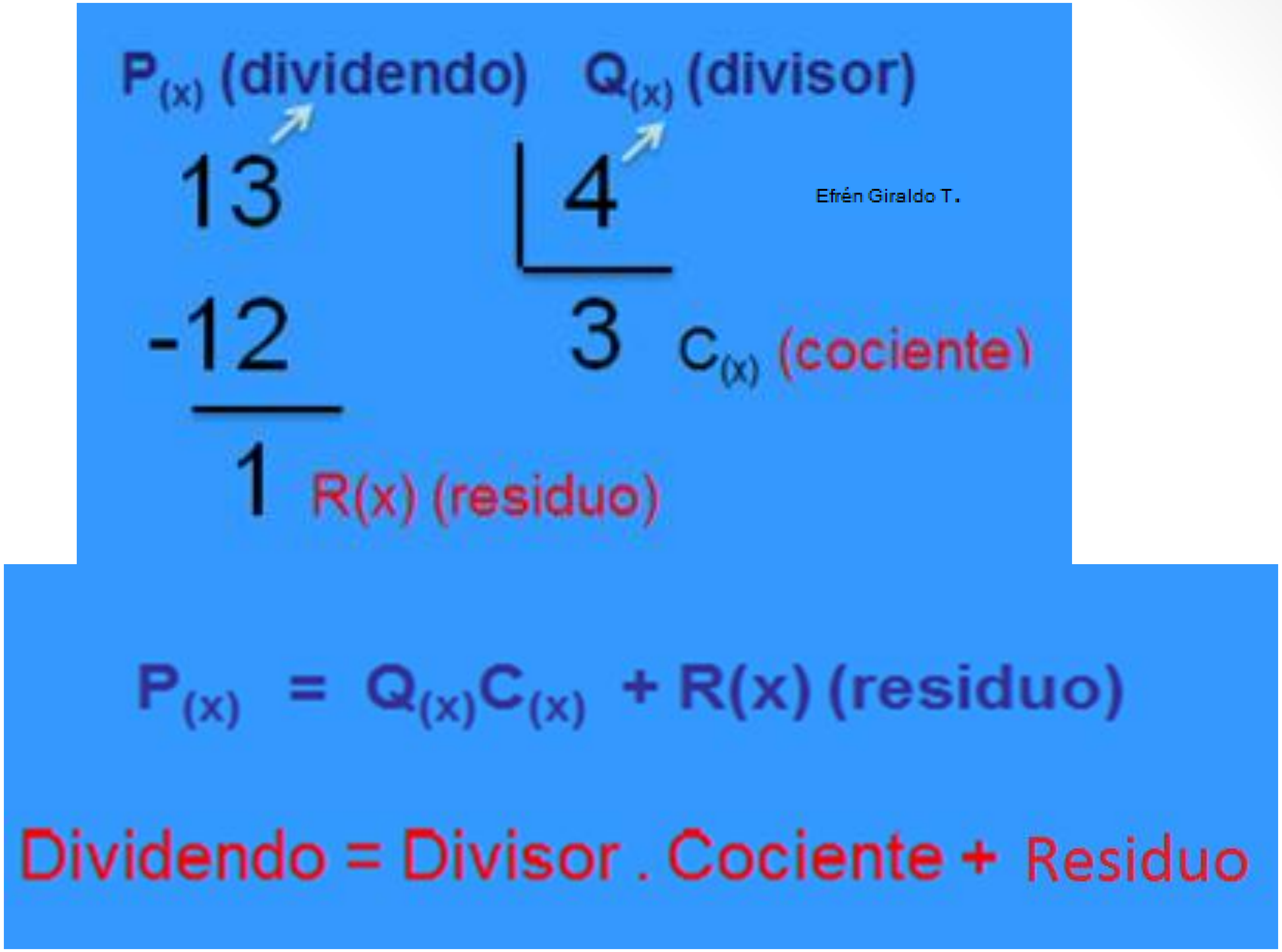
- Amigo estudiante:
- Este es otro peldaño más de la escalera de las matemáticas básicas. Si lo entiende y lo estudia bien, no tendrá problemas con su materia. Si no consulte con sus compañeros, con su profesor o en las asesorías.

¡Saque mínimo 8 horas semanales fuera de clase para estudiar matemáticas. No valen disculpas!.

¡*No deje para mañana lo que tiene que hacer hoy!*

DIVISIÓN LARGA y CEROS O RAÍCES DE UN POLINOMIO.

CONCEPTOS PREVIOS



- **Ahora si dividimos cada término de la ecuación anterior por el divisor queda:**

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}}$$

- Que es otra manera de expresar lo mismo

$P_{(x)}$ (dividendo (cociente) R(x) (residuo)

$$\frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4}$$

$R_{(x)}$ (residuo9

$Q_{(x)}$ (divisor)

$Q_{(x)}$ (divisor)

ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

Dividendo= Divisor. Cociente + Residuo

- Ahora si la división es exacta:
- 12 | 4
- -12   3
- o
- 12= 4*3 +0 como el residuo es 0

  12 es factorizable.
- En cambio 13 no es factorizable por 4 porque su residuo es 1.

- **Podemos concluir que siempre que el residuo es 0 el polinomio es factorizable.**
- **O sea que se tienen solo multiplicandos.**

- **¡No olvide esto para más adelante!**

CONCEPTO DE RAÍZ O CEROS

- Los valores para los cuales un polinomio se hace 0, se llaman las raíces, ceros o soluciones del polinomio.
- Sea $x^2 + 5x + 6$
- Si factorizo (x+2)(x+3) los valores de x=-2 y x=-3 hacen al
- polinomio 0
- Veamos -2+2=0 0(x+3)=0
- -3+3=0 (x+2)0=0
- Por tanto -2 y -3 hacen 0 a $x^2 + 5x + 6$ y son los ceros, raíces o soluciones del polinomio

- **NOTE QUE EL CONCEPTO DE O COMO NÚMERO REAL ES MUY DIFRENTE DEL CONCEPTO DE 0 COMO SOLUCIÓN O RAÍZ DE UN POLINOMIO TANTO ES ASÍ QUE NO ES O COMO REAL NECESARIAMENTE- ESTE CASO SON: -2 y -3**

Elaboró Efrén Giraldo Toro

Pasos para la división de polinomios

1. Dividir
2. Multiplicar
3. Cambiar el signo
4. Sumar
5. Comenzar en 1

Repetiremos el proceso hasta que el grado del primer monomio del dividendo sea menor que el grado del primer monomio del residuo

Division: Sean dos polinomios $P_{(x)}$ (dividendo) y $Q_{(x)}$ (divisor) tales que el grado del primero es mayor que el del segundo , buscamos el polinomio $C_{(x)}$ (cociente) tal que $P_{(x)}=Q_{(x)}C_{(x)} + R(x)$ (residuo)

Efrén Giraldo T.

División de polinomios

División Algebraica

Operación que se realiza entre polinomios que consiste en hallar dos polinomios llamados COCIENTE y RESIDUO, conociendo otros dos polinomios denominados DIVIDENDO y DIVISOR que se encuentra ligados por la relación:

$$\boxed{D(x) = d(x)\, q(x) + r(x)}$$

Donde:
- $D(x)$: Dividendo
- $d(x)$: Divisor
- $q(x)$: Cociente
- $r(x)$: Residuo o Resto

$7X^3+5X^4+10-4X \;\big|\; X^2+5$

Efrén Giraldo T.

- 1. Se ordena el dividendo P(x) en estricto orden descendente respecto al coeficiente de la X.(si no aparece un término se coloca 0)

Efrén Giraldo T.

Efrén Giraldo T.

$$5X^4+7X^3+0X^2-4X+10$$

- 2. Hallar el primer término del cociente así:

Dividir el signo del primer término del dividendo entre el signo del primer término del divisor

Efrén Giraldo T.

Dividir el coeficiente del primer término del dividendo 5 entre el primer término del divisor 1

5/1=5

- Ahora se procede a dividir x^4 entre x^2

$$\frac{x^4}{x^2} = x^2$$

- O lo que es lo mismo: como la base es la igual (la x) sencillamente se restan los exponentes 4-2=2

y este es el exponente del primer término del cociente.

Por tanto el primer término del cociente será: $5x^2$

Se halla el primer término del cociente así:

Efrén Giraldo T.

$$5X^4+7X^3+0X^2-4X+10 \,|\, \underline{X^2+5}$$

$$\frac{5X^4}{X^2}=5X^2 \longrightarrow 5X^2$$

Hallar un término tal que al Multiplicarlo por X^2 de $5X^4$ $\longrightarrow$

Procedimiento

-Se dividen los coeficientes 5/1

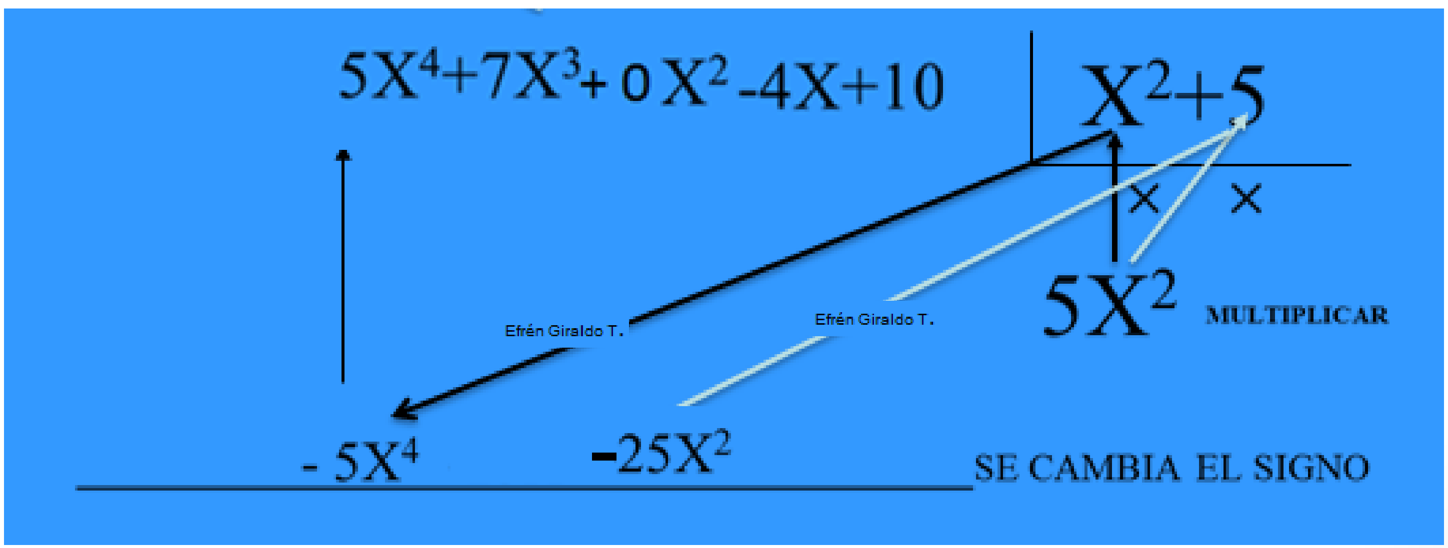
Efrén Giraldo T.

-Se restan los exponentes 4-2=2

No olvide que para hallar el primer cociente :

1. Se dividen los signos del primer término del dividendo y del divisor
2. Luego se dividen los coeficientes
3. Y después se restan los exponentes

Se multiplica el término hallado($5x^2$) por el primer término del divisor (x^2) lo cual da $5x^4$ y se le cambia de signo. Luego el término hallado $5x^2$ por los otros términos del divisor y se cambia de signo. Se colocan debajo de los respectivos términos del dividendo en estricto orden.



LUEGO SE **SUMA TODO**

$$\begin{array}{rrrr|l} 5X^4 & +7X^3 & +0X^2 & -4X+10 & X^2+5 \\ \hline -5X^4 & & -25X^2 & & 5X^2 \\ \hline 0+ & 7X^3 & -25X^2 & -4X+10 & \end{array}$$

Efrén Giraldo T.

Efrén Giraldo T.

Nuevo dividendo

Elaboró Efrén Giraldo Toro

SE VUELVE A DIVIDIR EL PRIMER TÉRMINO DEL NUEVO DIVIDENDO($7X^3$) POR X^2 , LO CUAL DA 7X Y A MULTIPLICARLO POR X^2+5 Y CAMBIAR EL SIGNO, COLOCAR DEBAJO Y A SUMAR

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
5X^4 & +7X^3 & +0X^2 & -4X & +10 & X^2+5 \\ \cline{6-6}
-5X^4 & & -25X^2 & & & 5X^2+7X-25 \\ \cline{1-5}
 & +7X^3 & -25X^2 & -4X & +10 & \\
 & -7X^3 & & -35X & & \\ \cline{2-5}
 & & -25X^2 & -39X & +10 & \\
 & & +25X^2 & & +125 & \\ \cline{3-5}
 & & & -39X & +135 &
\end{array}
$$

Nuevo dividendo

SE VUELVE A DIVIDIR Y A MULTIPLICAR Y CAMBIAR EL SIGNO HASTA QUE EL GRADO DEL RESIDUO SEA MENOR QUE EL GRADO DEL DIVISOR- El grado de -39X(1) es menor que el grado de X^2+5.

Efrén Giraldo T.

- $P_{(x)}$ (dividendo) $\quad\quad$ $Q_{(x)}$(divisor)

$$5X^4+7X^3 \ \ -4X+10 \quad \underline{|\ X^2+5}$$

Efrén Giraldo T.

$$\underline{-39X+135} \quad\quad \underline{5X^2+7X-25}$$

R(x) (residuo) $\quad\quad$ **$C_{(x)}$ (cociente)**

$$5X^4+7X^3 -4X+10 = (X^2+5)(5X^2+7X-25) + (-39X+135)$$

$$P_{(x)} = Q_{(x)}C_{(x)} + R(x) \text{ (residuo)}$$

Dividendo = Divisor . Cociente + Residuo

Elaboró Efrén Giraldo Toro

$5x^3 + 7x^2 + 0X - 3 \;\underline{|\; x^2 + 2x - 1}$

$\underline{-5x^3 - 10x^2 + 5x}$ $5x - 3$

$/ \quad -3x^2 + 5x - 3$

$\underline{3x^2 + 6x - 3}$

 $/ \quad 11x - 6$

El cociente es $C_{(x)} = 5x - 3$, y el residuo $R_{(x)} = 11x - 6$.

http://www.slideshare.net/nelsonslm2011/polinomios-6938646?src=related_normal&rel=2700548

2. DIVISIÓN SINTÉTICA DE POLINOMIOS

DIIVISIÓN SINTÉTICA

- O MÉTODO DE RUFFINI

- LAS SIGUIENTES DIAPOSITIVAS FUERON TOMADAS Y ADAPTADAS DE:
  - Román Cisneros

http://schollaris.com.mx/010106divsintetica.php

Elaboró Efrén Giraldo Toro

CARACTERÍSTICAS:

- La división sintética es un método que simplifica las divisiones de polinomios muy largos.
- **Sólo puede usarse con un divisor de la forma (x –a) ó (x+a). a es un número real.**

Efrén Giraldo T.

Efrén Giraldo T.

Efrén Giraldo T.

- La división sintética es un procedimiento por medio del cual se puede dividir un polinomio de solo una incógnita, de exponente o grado n, entre un polinomio de grado 1 de la forma $x - a$ donde a es un número.

- Este procedimiento es puramente numérico (no se requiere manejo de letras) y resulta más fácil que la división larga de polinomios . Después de realizada la división se obtiene como cociente un polinomio de orden $n - 1$ y el residuo es un número.

- $2x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 10x + 6$ entre el polinomio $x - 3$.

1. **Se escriben horizontalmente los coeficientes del polinomio en estricto orden decreciente y se escriben separados por espacios y con su respectivo signo. Si falta el término correspondiente a algún orden, se coloca cero en su lugar.**

2. **Se escribe a la izquierda separado por una línea vertical el valor de *a* que es el término independiente del divisor con signo contrario a como aparece en x-a ó x+a).**

3. **Se dibuja una línea horizontal por debajo de *a*. Con esto queda planteada la división sintética, como se muestra en la figura.**

Efrén Giraldo T.
Efrén Giraldo T.
Efrén Giraldo T.

Schollaris la web que resuelve tus problemas. http://schollaris.com.mx/010106divsintetica.php

Como vamos a ÷ por x-3 coloco el 3 con signo contrario o sea +

	2	−3	−15	−10	6
3					

Efrén Giraldo T.

2. El primer término del polinomio se escribe tal cual debajo de la línea horizontal.

	2	−3	−15	−10	6
3					
	2				

Efrén Giraldo T.

3.Se multiplica el divisor 3 por el número 2 que se acaba de bajar a línea horizontal. El producto se escribe arriba de la línea horizontal en la fila correspondiente al orden siguiente.

	2	−3	−15	−10	6
3		6			
	2				

Efrén Giraldo T.

•4.Se suma el número que se acaba d e obtener con el de arriba .
El resultado se escribe debajo de la línea horizontal.

	2	−3	−15	−10	6
3		6			
	2	3			

5.Se multiplica el divisor a o sea 3 por el número obtenido de la suma anterior o sea 3 y nos da 9 y se coloca en la parte superior de línea, y así hasta terminar, si olvidar en cada caso hace la suma correspondiente.

	2	−3	−15	−10	6
3		6	9	−18	−84
	2	3	−6	−28	−78

6.Se interpreta el resultado de la división. El último número es el residuo y los números anteriores son los coeficientes de la x comenzando por un grado menos que el del dividendo (cociente de orden *n – 1*).

	2	−3	−15	−10	6
3		6	9	−18	−84
	2	3	−6	−28	−78

Cociente: $2x^3 + 3x^2 - 6x - 28$. Efrén Giraldo T. Residuo: -78

Efrén Giraldo T.

Aplico el algoritmo de la división:

$$2x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 10x + 6 = (x - 3)\,(2x^3 + 3x^2 - 6x - 28) - 78$$

Dividendo = Divisor . Cociente + Residuo

Ejemplo.

Dividir el polinomio $x^4 - 11x^3 + 26x^2 + 44x - 120$ entre el polinomio $x + 2$.

Efrén Giraldo T.

Los coeficientes del polinomio son [*1 -11 26 44 120*] y $a = -2$ porque $x + 2 = x - (-2) = x - a$.

La división sintética queda así

	1	−11	26	44	−120
−2		−2	26	−104	120
	1	−13	52	−60	$\boxed{0}$

Cociente: $x^3 - 13x^2 + 52x - 60$.

Residuo: *0*. Efrén Giraldo T.

la división es exacta, por eso el residuo es cero.

Elaboró Efrén Giraldo Toro

Ejemplo. Dividir el polinomio $x^3 + 1$ entre el polinomio $x - 1$.

Los coeficientes del polinomio son [1 0 0 1] (observar como se insertan ceros en las posiciones de los

términos con x^2 y x) y $a = 1$. La división sintética queda así:

	1	0	0	1
1		1	1	1
	1	1	1	2

Cociente: $x^2 + x + 1$. Residuo es 2

Residuo: 2.

Nota importante:

- **Desafortunadamente la división sintética sólo puede usarse con un divisor de la forma (x −a) ó (x+a), no sirve para divisores cuadráticos ni fraccionarios.**
- **No olvide que el número a colocar como divisor lleva signo contrario a como aparece en x-a ó en x+a**

- **Es de resaltar que la división sintética permite <u>sólo divisores de la forma (x+a) ó (x-a)</u>**

Evaluación de un polinomio P(x) en un valor dado *a ó* P(a)

- Es simplemente remplazar el valor dado *a en el polinomio, o sea hacer P(a)*

Efrén Giraldo T.

- Si $P(x)= 2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ *evaluar el polinomio en* $a = 3,2,1$ *es*

Efrén Giraldo T.

- *Sencillamente remplazar 3,2,1 en* $2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ *así:*

- $P(3)= 2.3^3 – 4.3^2 – 3.3 + 2 = 11$
- $P(2)= 2.2^3 – 4.2^2 – 3.2 + 2 = -4$
- $P(1) = 2.1^3 – 4.1^2 – 3.1 + 2 = -7$
- ***La evaluación de un polinomio en P(a) está ligada a la división sintética y por tanto a divisores de la forma (x+a) ó (x-a)***

$x^3 + 4x^2 - 5$

- Se tiene **P(x)=** $x^3 + 4x^2 - 5$
- Evalúe P(x) en 1 o sea P(1)
- Demuestre que P(1)=0

- Es sencillamente remplazar 1 en los sitios donde esta en

P(x)= $x^3 + 4x^2 - 5$ y si da 0 queda demostrado.

P(1)= $1^3 + 4.1^2 - 5$ = 1 +4 -5=0

Elaboró Efrén Giraldo Toro

3.Teorema del residuo

Tiene como base la división sintética o sea <u>divisores</u> de la forma (x+a) o (x-a)

Teorema del residuo

El teorema del residuo dice que no necesariamente se tiene que hacer la división por x-a, para hallar el residuo, sencillamente hallo P*(a) y ese es el residuo*.

Efrén Giraldo T.

El teorema del residuo indica que el resultado de evaluar numéricamente un polinomio en un valor *a* es igual al residuo que resulta de dividir el polinomio entre $x - a$.

Efrén Giraldo T.

Efrén Giraldo T.

Obviamente también puedo hallar el residuo haciendo la división sintética

Elaboró Efrén Giraldo Toro

- Del teorema del residuo se puede deducir el **dividendo**, el **divisor** y obviamente el **residuo.**
- **Par obtener el cociente si requerimos la división.**

Armada del divisor o primer factor a partir de P(a)

- Si volvemos al ejemplo de la diapositiva 41

- Se tiene **P(x)**= $x^3 + 4x^2 - 5$ vemos que si evaluamos el polinomio en 1 o sea P(1), eso da justamente 0; por el teorema del residuo podemos deducir o decir que el **residuo** de dividir $x^3 + 4x^2 - 5$ entre (x-1) es 0. O sea que el dividendo es $x^3 + 4x^2 - 5$, el divisor es (x-1) y el residuo es 0.

Miremos porqué (x-1):

Como el teorema del residuo se basa en divisores de la forma (x+a) ó (x-a), observamos que para hallar el divisor (x-1) a partir de P(1) sencillamente debo tomar x necesariamente, luego 1 con signo contrario a como aparece en P(1) o sea -1 y quedará por tanto (x-1)

Armada del divisor o primer factor

- Por tanto siempre que evalúo un polinomio en un valor dado por ejemplo 3 o sea P(3), el primer término del divisor necesariamente es **x** y el segundo termino del divisor es el valor por el que estoy haciendo la evaluación con signo contrario o sea en este caso **-3**. **(x-3)**

Si se tiene el polinomio de la diapositiva 40 tendremos:

Armada del divisor

- P$(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ *evaluar el polinomio en* $a = 3,2,1$ *es:*
- P$(3) = 2.3^3 - 4.3^2 - 3.3 + 2 = 11$ = *Residuo*
- P$(2) = 2.2^3 - 4.2^2 - 3.2 + 2 = -4$ = *Residuo*
- $P(1) = 2.1^3 - 4.1^2 - 3.1 + 2 = -7$ = *Residuo*
- Por tanto el dividendo es $2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$, el divisor es **x-3** y el residuo es 11
- El dividendo es $2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$, el divisor es **x-2** y el residuo es -4
- El dividendo es $2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$, el divisor es **x-1** y el residuo es -7

- Si dividimos el polinomio

P(x)= $2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ entre el polinomio $x - 3$

	2	−4	−3	2
3		6	6	9
	2	2	3	$\boxed{11}$

Si dividimos $2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ entre el polinomio $(x – 3)$ encontramos que el cociente es $2x^2 + 2x + 3$ y que el residuo es 11. Aplicando algoritmo de la división:

$2x^3 - 4x^2 - 3x + 2= (x-3)(2x^2 + 2x + 3) + 11$ vemos que el residuo es 11 comprobando lo que dijimos.

Por otra parte, si evaluamos numéricamente el polinomio P(x)= $2x^3$ - $4x^2$ - $3x$ + 2 en el valor x = 3, se obtiene:

Efrén Giraldo T.

$$P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$$
$$P(3) = 2(3)^3 - 4(3)^2 - 3(3) + 2$$
$$P(3) = 2(27) - 4(9) - 9 + 2$$
$$P(3) = 54 - 36 - 9 + 2$$

Efrén Giraldo T.

Efrén Giraldo T.

P(3) = 11 este será el residuo de dividir P(x) entre (x-3)

Elaboró Efrén Giraldo Toro

Si $P(x) = x^2 + x – 2$ se divide por división larga o sintética entre $(x-2)$ el residuo es 4 y el cociente es $(x+3)$.

Ahora el residuo también se puede hallar valorando el polinomio en 2 o sea $P(2) = 2^2 + (2) - 2 = 4$.

Este resultado es obvio si aplicamos el algoritmo de la división:

$P(x) = x^2 + x – 2= (x-2)(x+3) + 4$

La expresión anterior dice que 4 es el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $(x-2)$.

- El teorema del residuo sirve para encontrar de forma mas rapida el residuo de una division entre polinomios.
- Tambien sirve para encontrar factores de dicho polinomio, cuando el residuo es 0

- Hallar el residuo que resulta de dividir

x^3-2x^2+9 / $x+2$

- $x+2 = 0$ (se iguala el divisor a cero)
- $X = -2$; al residuo se le llamara $p(-2)$
- Se sustituye $p(x)$ por $p(-2)$
- Residuo = $(-2)^3-2(-2)^2+9$ =
- $-8-8+9 \rightarrow R = -7$

Elaboró Efrén Giraldo Toro

- Qué pasará cuando el residuo es 0?

- Vuelva a la diapositiva 11

Ejemplo 2

- x^2+x-2 / $x-1$
- $X = 1$
- $(1)^2+(1) - 2 = 0$
- $R = 0$
- Factor del polinomio $x^2+x-2 \rightarrow x-1$

- Ahora si hallo P(-2) también dará 0 por tanto

$$x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$$

- El teorema del residuo nos ayuda a encontrar los **factores de un polinomio cuando el residuo es 0**

- Para **P(x)=** $x^2 + x - 2$, $P(1) = 1^2 + (1) - 2 = 0$. Por lo tanto, no existe residuo al dividir entre (x-1), es decir, (x-1) es un factor.

- El otro factor lo puedo hallar al dividir el polinomio por división sintética por (x-1), lo que da (x+2)

-

Por tanto al aplicar el algoritmo de la división

$$P(x) = Q(x).\ C(x) + 0$$

$P(x) = Q(x).\ C(x)$ P(x) sólo tiene 2 multiplicandos o sea sólo 2 factores.

$$P(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

- Como se observa, (x-1) y (x+2) son factores, ceros o raíces y por tanto el polinomio es factorizable porque no tiene residuo.

Repaso

- Como se vio, una conclusión muy importante del teorema del residuo es que se puede evaluar numéricamente un polinomio valorándolo en a y esa evaluación da el residuo que resulta de dividir el polinomio entre (x-a).

- Si al evaluarlo en a da 0 o sea P*(a) = 0*, deducimos que el residuo es 0 y por tanto *(x – a)* es un factor del polinomio. El otro factor se halla por división sintética.

- **Cuando se encuentra un valor de *a* para el cual P(a) = 0 se ha encontrado, un cero, raíz o solución del polinomio.**

- $3x^5$+ $5x^4$-$4x^3$+7x+3   Hallar cociente y residuo al ÷ entre x+2
- A) por división sintética
- B) hallar residuo valorando el polinomio en -2 o sea P(-2)

Sencillamente tomo 2 con signo contrario o sea -2.

	3	+ 5	-4 +	0 +	7 +	3
-2		-6	2	4	-8	2
	3	-1	-2	4	-1	5

- Obviamente el divisor es (x+2)
- 5 es el residuo por ser el último número
- Cociente: ($3x^4$- x^3-$2x^2$ +4x-1)

- $3x^5$+ $5x^4$-$4x^3$+7x+3= (x+2) ($3x^4$- x^3-$2x^2$+4x-1) +5
- P(-2)= $3(-2)^5$+ $5(-2)^4$ -$4(-2)^3$+7(-2)+3= 5

- Manera tradicional de hallar los ceros, raíces o soluciones de un polinomio

1. Dejar el lado derecho igual a cero
2. Factorizar
3. Luego el producto de los factores = 0
4. Se hace cada factor = 0 por la propiedad del producto nulo
5. Se despeja la x para cada factor y los valor es que den, son los ceros, raíces o soluciones del polinomio.

Propiedad del producto nulo

$$AB = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad A = 0 \quad \text{o bien,} \quad B = 0$$

(Stewart,2007)

Hallar los ceros, raíces o soluciones del siguiente polinomio de manera tadiconal

$$x^2 + 5x = 24.$$

Solución Primero debemos volver a escribir la ecuación de modo que el segundo miembro sea igual a cero.

$$x^2 + 5x = 24$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0 \qquad \text{Resta de 24}$$

$$(x - 3)(x + 8) = 0 \qquad \text{Factorización}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 8 = 0 \qquad \text{Propiedad del producto nulo}$$

$$x = 3 \qquad\qquad x = -8 \qquad \text{Solución}$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -8$. ■

Estos son los ceros o raíces de x^2 +5x – 24=0

(Stewart,2007)

¿Se da cuenta por qué un lado de la ecuación debe ser 0 en el ejemplo ? Al factorizar la ecuación como $x(x + 5) = 24$ no ayuda a determinar la solución, puesto que 24 se puede descomponer en factores de infinitas maneras, como $6 \cdot 4$, $\frac{1}{2} \cdot 48$, $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot (-60)$, etcétera.

Una ecuación cuadrática de la forma $x^2 - c = 0$, donde c es una constante positiva, se factoriza como $(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$, así que las soluciones son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$. Con frecuencia abreviamos esto como $x = \pm\sqrt{c}$.

(Stewart,2007)

- Con lo visto por el **teorema del residuo** el paso 2 de factorizar por el método tradicional, se puede simplificar mucho en polinomios largos y de grados altos.

Efrén Giraldo T.

- Si lo aplicamos al caso anterior(que es sencillo)

Efrén Giraldo T.

x^2+ 5x-24=0

Se evalúa el polinomio en *a*= 3 o sea P(3) y da P(3) =0 por tanto es divisible por (x-3).

Se hace la división sintética y da el cociente que es el otro factor (x+8)

= $x^2 + 5x – 24 =$ (x-3)(x+8) por tanto 3 y 8 son ceros, raíces o soluciones del polinomio

4.Teorema del factor

TEOREMA DEL FACTOR

- Del teorema del residuo se desprende el teorema del factor que dice así:

Efrén Giraldo T.

- **Si el residuo es cero al evaluar en P(a)**

Efrén Giraldo T.

(P(a)= 0), entonces (x-a) es un factor

Efrén Giraldo T.

(un multiplicando) del polinomio y a es una raíz, cero o solución del polinomio P(x) porque:

- **$P(x) = Q(x).C(x) + 0 = (x-a)C(x)$**

Otra manera de ver el teorema del factor

- **Si *a* es una raíz, cero o solución de P*(x)*, entonces *x - a* es un factor del polinomio, donde *a* es un número real.**

- **Aquí podemos observar la importancia de conocer el valor del residuo, ya que si éste es igual a cero, nos va a indicar que hemos encontrado un factor del polinomio y con él, una raíz del polinomio (una solución a la ecuación polinomial $P(x) = 0$).**

Elaboró Efrén Giraldo Toro

Una manera más de ver el teorema del factor:

(x-*a*) es un factor de P(x) implica que *a* es un cero de P(x)

El teorema del factor indica que hallar los ceros de un polinomio es en realidad lo mismo que factorizarlo en factores lineales. En esta sección se estudian algunos métodos algebraicos que ayudan a encontrar los ceros reales de un polinomio y, por lo tanto, a factorizar el polinomio. Se comienza con los ceros *racionales* de un polinomio.

Si P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)=0 implica que a, b, c son ceros del polinomio.

Basta factorizar el polinomio para hallar sus ceros, raíces o soluciones

Elaboró Efrén Giraldo Toro

67

- Un polinomio $P(x)$ es divisible por el monomio $(x - a)$ si y sólo si el valor numérico del polinomio para $x = a$, es cero $P(a) = 0$

- Implicaciones del teorema del residuo y del factor

Si P(x) es un polinomio y *a* es un número real y P(*a*) =0 todo lo siguiente se puede decir o es equivalente

P(a) =0 ⟷

- (x-a) es un factor de P(x)
- a es un cero de P(x)
- a es una raíz de P(x)
- a es una solución de P(x)
- el Residuo de P(x) ÷ (x-a) es 0
- P(x)= (x-a)C(x)
- Si dibujo la gráfica de P(x), x=a es el intercepto de la gráfica con el eje x

Factorizar aplicando el teorema del factor y hallar los ceros, raíces o soluciones reales de un polinomio

Sea $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Muestre que $P(1) = 0$, y use este hecho para factorizar $P(x)$ por completo.

Solución Sustituyendo, se ve que $P(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$. Por el teorema del factor, esto significa que $x - 1$ es un factor de $P(x)$. Usando la división sintética

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6)$$

- Ahora supongamos que no sabemos como factorizar el segundo término $x^2 + x - 6$.
- Podemos volver a aplicar el teorema del residuo y del factor para factorizarlo.

Elaboró Efrén Giraldo Toro

71

$x^2 + x - 6$

- Al tanteo podemos observar que si reemplazamos en el polinomio por 1 o por -1 no se anula o sea P(1) o P(-1) no es 0
- Pero si reemplazo por 2 da:
- $x^2 + x - 6 = \ 2^2 + 2 - 6$=0 por tanto es factor de

- Si remplazo por -3 también da 0.
- 9-3-6=0
- Por tanto son factores
- $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$=0
- Por tanto 2 y -3 son ceros, raíces o soluciones del polinomio $x^2 + x - 6$.

- Y volviendo al polinomio original $x^3 - 7x + 6$

$Su\ factorización\ \ total\ será$:

$x^3 - 7x + 6$ = (X-1) $(x - 2)(x + 3)$=0

Y por tanto sus raíces son:

1,2,-3

Hallar un polinomio a partir de sus ceros, raíces o soluciones

Hallar un polinomio de grado 4 que tiene ceros $-3, 0, 1$ y 5.

Solución Por el teorema del factor, $x-(-3)$, $x-0$, $x-1$ y $x-5$ deben ser factores del polinomio deseado, así que

$$P(x) = (x+3)(x-0)(x-1)(x-5) = x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 15x$$

Puesto que $P(x)$ es de grado 4 es una solución del problema. Cualquier otra solución del problema debe ser un múltiplo constante de $P(x)$, ya que sólo la multiplicación por una constante no cambia el grado. ■

El polinomio P del ejemplo 6 se grafica en la figura 1. Hay que observar que los ceros de P corresponden a las intersecciones con el eje x de la gráfica.

Elaboró Efrén Giraldo Toro

Tareas para la casa

- TEORÍA:Precálculo Stewart. Sección 3.2 Página 265 a 270
- Ejercicios sección3.2 del 1 - 66

IMPORTANTE

- LUEGO DE ESTA **CLASE** UD. AMIGO ESTUDIANTE, **TIENE QUE DOMINAR** TODOS LOS CONCEPTOS PROFUNDAMENTE. DE LO CONTRARIO VUELVA REPASE, ESTUDIE, CONSULTE.

- SI NO LO HACE COMIENZA A TENER PROBLEMAS ES SU MATERIA Y ESTÁ DANDO OTRO PASO PARA PERDERLA Y POSIBLEMENTE PERDER TAMBIÉN SU CARRERA.

- ¿UD. ES ASÍ? ¿O ASÁ?:

Bibliografía

1. Álvaro Alcázar (2º ESO): http://www.google.com.co/search?hl=es&biw=1024&bih=470&gbv=2&q=DIIVISION+POLINOMIOS+PPT&btnG=Buscar&oq=DIIVISION+POLINOMIOS+PPT&aq=f&aqi=&aql=&gs_sm=s&gs_upl=6689l19874l0l21177l26l26l0l10l0l2l362l3322l0.1.3.7l11l0

2. Román Cisneros,. (2011). **Schollaris la web que resuelve tus problemas.** **http://schollaris.com.mx/010106divsintetica.php**

3. http://www.slideshare.net/nelsonslm2011/polinomios-6938646?src=related_normal&rel=2700548

4. (Stewart,2007)