REFUERZO

División y regla de Ruffini

5.62 Realiza las siguientes divisiones de un polinomio por un monomio.

a) $(9xy + 3xy^2 - 3x^2y) : (3xy)$ **b) $(5x^2 - 3x^4 + 2x) : x^2$**

a) $(9xy + 3xy^2 - 3x^2y) : (3xy) = \dfrac{9xy + 3xy^2 - 3x^2y}{3xy} = \dfrac{9}{3}\dfrac{x}{x}\dfrac{y}{y} + \dfrac{3}{3}\dfrac{x}{x}\dfrac{y^2}{y} - \dfrac{3}{3}\dfrac{x^2}{x}\dfrac{y}{y} = 3 + y - x$

b) $(5x^2 - 3x^4 + 2x) : x^2 = 5 - 3x^2 + 2\dfrac{1}{x}$

5.63 Efectúa estas divisiones de polinomios.

a) $(3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1) : (x^2 - x + 2)$ **b) $(2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 3) : (x^2 + 1)$**

a)
$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +5x^3 & -3x^2 & +6x & -1 & x - x + 2 \\
\cline{6-6}
-3x^4 & +3x^3 & -6x^2 & & & 3x^2 + 8x - 1 \\
\cline{1-3}
 & 8x^3 & -9x^2 & & & \\
 & -8x^3 & +8x^2 & -16x & & \\
\cline{2-4}
 & & -x^2 & -10x & & \\
 & & x^2 & -x & +2 & \\
\cline{3-5}
 & & & -11x & +1 &
\end{array}
$$

b) $(2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 3) : (x^2 + 1)$; $C(x) = 2x^2 - 4x + 1$ y $R(x) = -2x + 2$

5.64 Mediante la regla de Ruffini, realiza las siguientes divisiones, e indica el cociente y el resto.

a) $(x^4 + x^2 - 1) : (x - 2)$ **b) $(x^7 - 2x^4 + x - 1) : (x - 1)$**

a)
$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
2 & & 2 & 4 & 10 & 20 \\
\hline
 & 1 & 2 & 5 & 10 & 19
\end{array}
$$

$C(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 10$; $R(x) = 19$

b)
$$
\begin{array}{r|rrrrrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
1 & & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1
\end{array}
$$

$C(x) = x^6 + x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x$; $R(x) = -1$

5.65 Utilizando la regla de Ruffini, calcula el número que se ha de sumar al polinomio para que sea divisible por $x + 3$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -1 & -9 & k \\
-3 & & -3 & 12 & -9 \\
\hline
 & 1 & -4 & 3 & k - 9
\end{array}
$$

Como tiene que ser divisible, $k - 9 = 0$, así que $k = 9$.

Teoremas y raíces de un polinomio

5.66 Comprueba si son exactas las siguientes divisiones sin llegar a realizarlas.

a) $(x^4 - 81) : (x - 3)$ **b) $(x^{1\,001} - 1) : (x + 1)$**

Aplicamos el teorema del resto, y si el resto es 0, es porque la división es exacta.

a) $P(3) = 3^4 - 81 = 0$. Sí es exacta la división.

b) $P(-1) = (-1)^{1\,001} - 1 = -1 - 1 \neq 0$. No es división exacta.

5.67 Determina, sin realizar ninguna operación, si 3 es una raíz de este polinomio.

$$P(x) = 3x^7 + 5x^5 + 3x^4 + 2x^2 + x - 7$$

No, 3 no es raíz de $P(x)$, ya que no es divisor del término independiente, -7.

5.68 Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios.

a) $A(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ **b)** $B(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

a) Las posibles raíces de $A(x)$ son 1, -1, 2, -2, 4, -4.

$A(1) = 1^4 - 5 \cdot 1^2 + 4 = 0$

$A(-1) = (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^2 + 4 = 0$

$A(2) = 2^4 - 5 \cdot 2^2 + 4 = 0$

$A(-2) = (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^2 + 4 = 0$

Por el teorema fundamental del álgebra, un polinomio de grado 4 no puede tener más de cuatro raíces. De modo que las raíces del polinomio son 1, -1, 2 y -2.

b) Las posibles raíces de $B(x)$ son 1, -1, 3, -3.

$B(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 0$

$B(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - (-1) + 3 = 0$

$B(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 3 + 3 = 0$

Por el teorema fundamental del álgebra, un polinomio de grado 3 no puede tener más de tres raíces. De modo que las raíces del polinomio son 1, -1 y 3.

5.69 Sin efectuar el producto de factores, identifica el polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$ con alguna de las siguientes factorizaciones.

a) $(x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

b) $(x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

c) $(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 5)$

Las respuestas a y b no pueden ser porque dan como raíz -2, que no es un divisor del término independiente de $P(x)$. Además, en c, cada uno de esos factores cumple que $P(a) = 0$.

Factorización de polinomios

5.70 Factoriza cada uno de los siguientes polinomios sacando factor común.

a) $5x^7 - 6x^6 + 3x^5$ **b)** $5xy + 3x^2 - 2xy^2$

a) $x^5(5x^2 - 6x + 3)$ b) $x(5y + 3x - 2y^2)$

5.71 Factoriza al máximo estos polinomios.

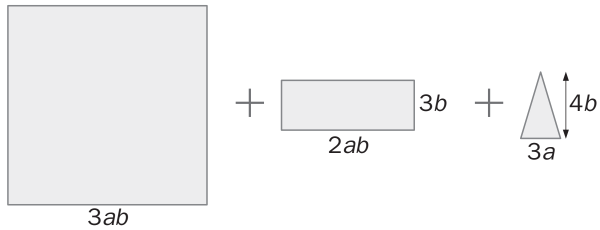
a) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ **b)** $x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$

Con las posibles raíces del polinomio por Ruffini obtengo la factorización.

a) La factorización es $(x - 2)(x + 1)(x + 4)$.

c) La factorización es $(x - 2)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$.

5.72 Factoriza la siguiente expresión; determina previamente el área de las figuras geométricas.



Las tres áreas son $9a^2b^2$, $6ab^2$, $6ab$. Factorizamos la suma de las tres y nos queda: $3ab(3ab + 2b + 2)$

5.73 Halla un polinomio de grado cuatro cuyos factores sean $x^2 + x + 1$, $x + 1$ y $x - 3$; y cuyo término independiente sea -9.

El producto de $x^2 + x + 1$, $x + 1$ y $x - 3$, $(x^2 + x + 1)(x + 1)(x - 3)$, tiene grado 4, su término independiente sería -3. Así que el polinomio buscado es $P(x) = 3(x^2 + x + 1)(x + 1)(x - 3)$.