MATEMÁTICA BÁSICA

CLASE 2: MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (bases) CONJUNTOS, INTERVALOS, VALOR ABSOLUTO

PROFESOR EFRÉN GIRALOD T.

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO

ENERO DE 2012
MEDELLÍN COLOMBIA

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO
CONJUNTOS
INTERVALOS
VALOR ABSOLUTO

LIBRO BASE: PRECALCULO DE STEWAR, 2007

Objetivos-Competencias

Al finalizar esta clase Ud. debe:

- Entender y manejar mínino común múltiplo
- Los elementos mínimos de conjuntos
- Los intervalos
- Valor absoluto
- Distancia

¡Recuerde que esto es básico para las clases siguientes!

Contenidos a estudiar

- Mínino común múltiplo **mcm** de números y fracciones sencillas
- Unión e intersección de conjuntos
- Diferentes clases de intervalos
- Valor absoluto y distancia.

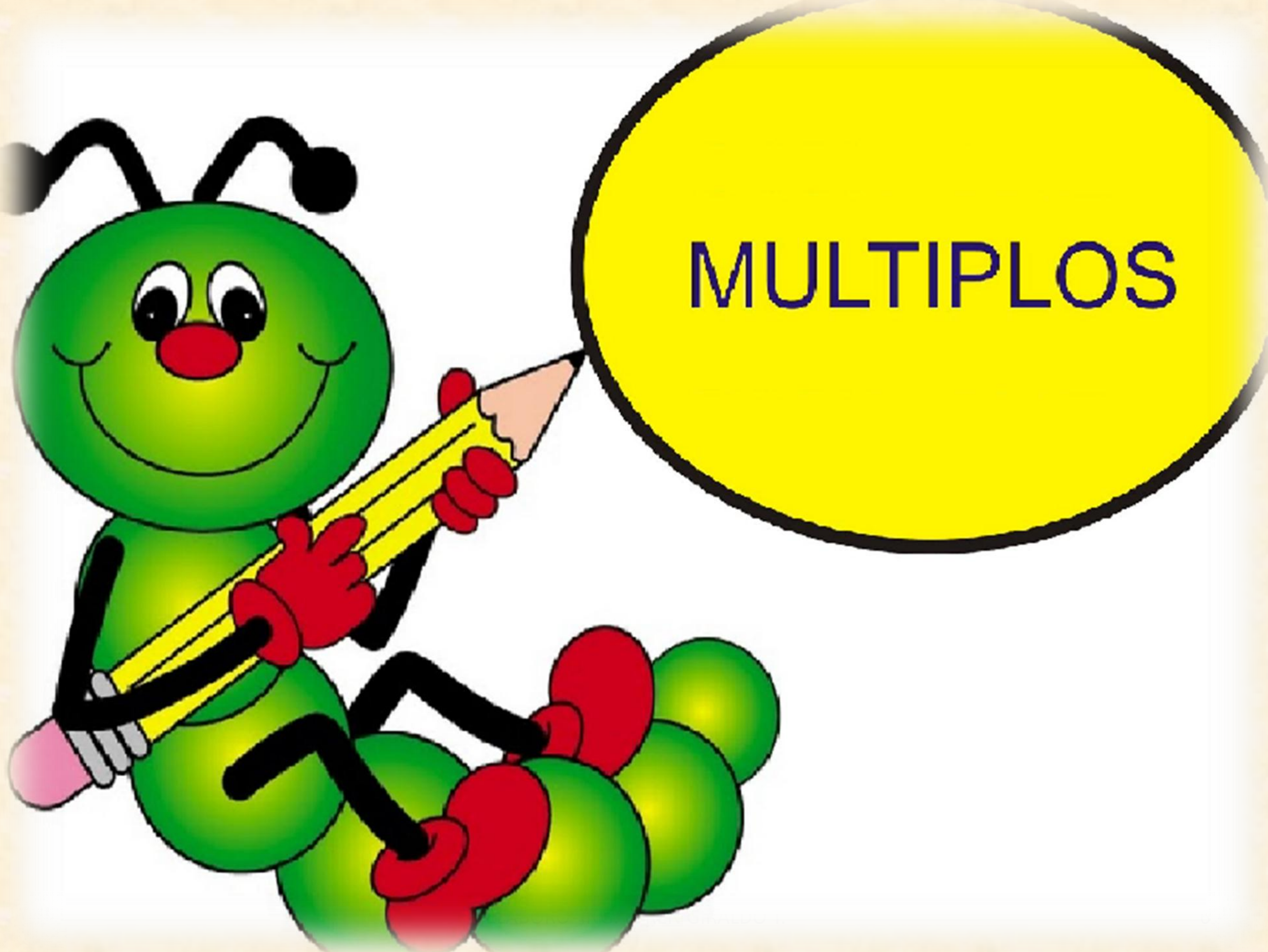
RECOMENDACIÓN IMPORTANTE

- Amigo estudiante:

- Este es el segundo peldaño de la escalera de las matemáticas básicas. Si lo entiende y lo estudia bien, no tendrá problemas con su materia. Si no, consulte con sus compañeros, con su profesor o en las asesorías.

¡Saque mínimo 8 horas semanales fuera de clase para estudiar matemáticas. No valen disculpas!.

¡*No deje para mañana lo que tiene que hacer hoy!*


MULTIPLOS

Qué es un "múltiplo"?

- Los múltiplos de un número son lo que resultan al **multiplicar el número por los números enteros** + (1,2,3,4,5, etc.) como en las tablas de multiplicar.

- Sólo se aplica con números naturales, es decir, no se usan decimales, números negativos o números complejos.

- Un número es múltiplo de otro si lo contiene un número exacto de veces. 9 contiene 3 veces a 3. 21 contiene 7 veces al 3.

- Ejemplos:
- Los múltiplos de **3** son **3, 6, 9. 12, 15, 18, 21, etc**...

- Los múltiplos de **12** son **12, 24, 36, 48, 60, 72, etc**...

¿Qué es un "múltiplo común"?

- Si se tiene dos (o más) números y sus múltiplos, y eso múltiplos presentan algún número común, esos son los múltiplos ***comunes*** a los dos números.

Efrén Giraldo T.

- O sea que un múltiplo común o común múltiplo es el **múltiplo** que pertenece **a la vez** a los dos números.

- Los múltiplos de 4 son:

4,8,12,16,**20**,24,28,32,36,**40**,44,...

- Los múltiplos de 5 son

5,10,15,**20**,25,30,35,**40**,45,50,...

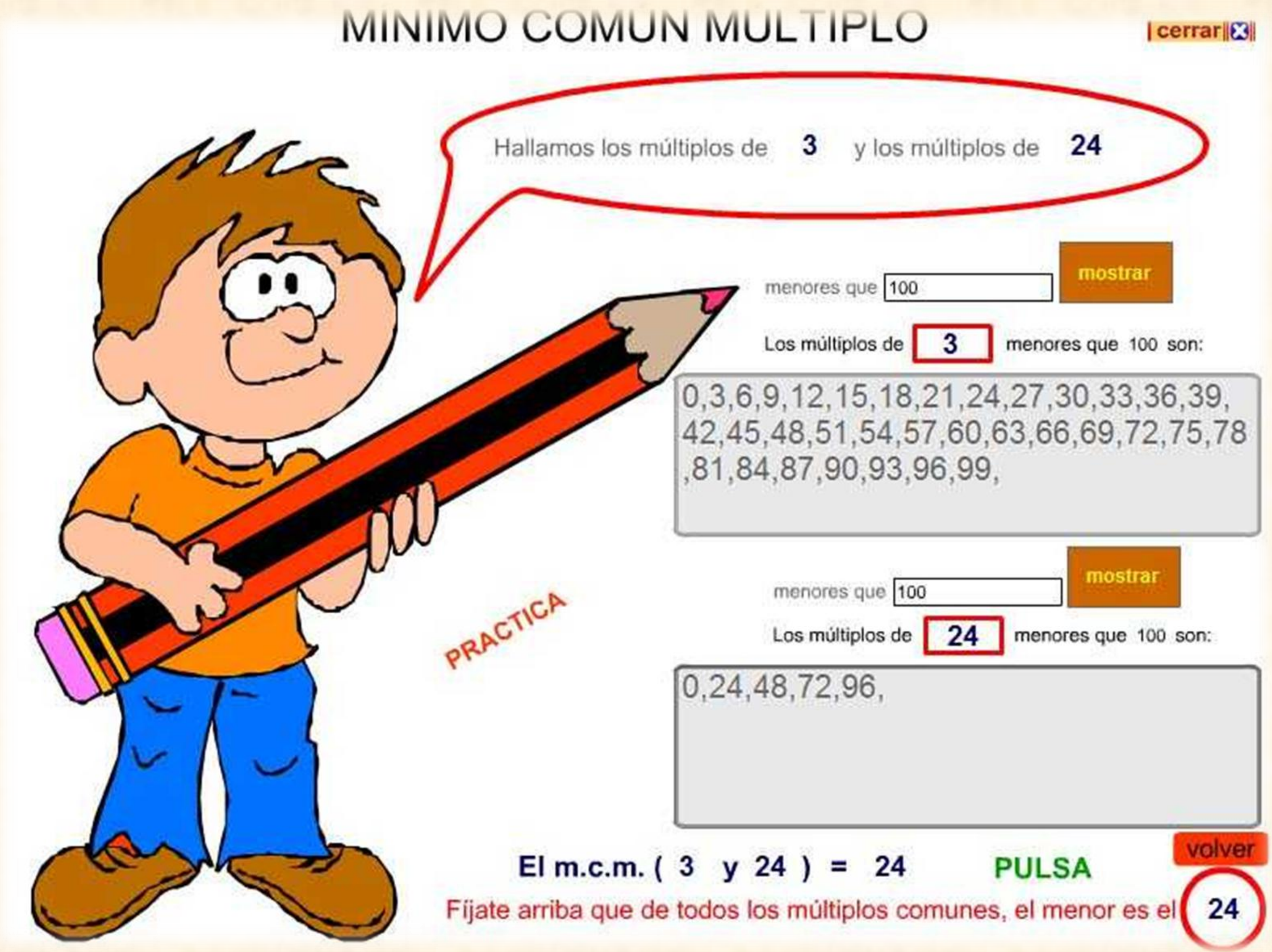
Entonces, los **múltiplos comunes** de 4 y 5 son: **20, 40…** (y 60, 80, etc. también)


MCM
mínimo común múltiplo

¿Qué es el "mínimo común múltiplo mcm“ de varios números?

- Es simplemente el **múltiplo más pequeño** de los múltiplos comunes a los números en cuestión.

- En el ejemplo anterior, el menor de los múltiplos comunes es **20**, así que el *mínimo* común múltiplo de 4 y 5 es **20**.



http://www.google.com.mx/imgres?q=minimo+comun+multiplo&um=1&hl=es&sa=N&rlz=1R2ADRA_esCO438&biw=1280&bih=558&tbm=isch&tbnid=IJgHenmB8FKvMM:&imgrefurl=http://www.amolasmates.es/segundo%2520eso/mat2eso1.html&docid=iYliph-NhFtx-M&imgurl=http://www.amolasmates.es/Imagenes/mcm.jpg&w=829&h=610&ei=j7MQT5LlL4T10gG81r3HAw&zoom=1&iact=hc&vpx=401&vpy=84&dur=2 30&hovh=193&hovw=262&tx=187&ty=123&sig=103379468544883796334&page=1&tbnh=148&tbnw=201&start=0&ndsp=10&ved=1t:429,r:6,s:0

Calcular el mínimo común múltiplo <u>mcm</u> de dos números de forma sencilla.

1. **Se factoriza cada número descomponiéndolo en sus factores primos.**

2. Se coloca cada número como el producto de sus factores primos elevados a un exponente si lo hay(cuando se repiten).

1. **El mcm es el producto de multiplicar <u>todos lo factores</u> (comunes y no comunes) <u>al mayor exponente</u> sin que se repita la base**
2. Esta teoría es de suma importancia para las fracciones y ecuaciones.

- Mcm de 3 y 7

1. No se pueden descomponer más (son primos)
2. El mcm es por tanto el producto de los dos:

   3.7=21

Procedimiento matemático

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

- El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números es el menor múltiplo común distinto de cero.

- Para hallar el mínimo común múltiplo de dos o más números, por ejemplo, m.c.m. (30, 45), se siguen estos pasos:

30	2
15	3
5	5
1	

45	3
15	3
5	5
1	

1.° Se descompone cada número en producto de factores primos.

$30 = 2 \times 3 \times 5$
$45 = 3^2 \times 5$

2.° El producto de estos factores comunes elevados al mayor exponente y de los no comunes es el mínimo común múltiplo de los números dados.

m.c.m. $(30, 45) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

Tomado el día 7 junio 2011 de : http://www.sectormatematica.cl/basica/santillana/max_y_min.pdf

Mínimo común múltiplo es con el mayor exponente

- Note que el **mínimo** común múltiplo es

Efrén Giraldo

producto de *<u>factores comunes y no comunes</u>*

Efrén Giraldo T.

con el **mayor exponente sin que se repita**

Efrén Giraldo T.

alguna base.

Mínimo común múltiplo aplicado a suma de fracciones

- El hecho de que el mcm es el número más pequeño por el cual dos o más números se pueden dividir en forma exacta implica que se pueda usar para sumar fracciones con diferente denominador.

- ***Mínimo común denominador = Mínimo común múltiplo de los*** ***denominadores de las fracciones***

Suma de fracciones

- El m.c.m. se puede emplear para sumar fracciones de distinto denominador:

Efrén Giraldo T.

- 1. mcm de 6 y 33

$$\frac{1}{6}+\frac{4}{33}$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$6 = 2 \cdot 3 \qquad 33 = 3 \cdot 11$$

Efrén Giraldo T.

$$\text{mcm} = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$$

- 2. c/numerador por 66

Denominador común 66

Efrén Giraldo T.

$$\frac{\frac{1\times 66}{6}+\frac{4\times 66}{33}}{66}=\frac{11+8}{66}=\frac{19}{66}$$

- 3.Simplificar

Mínimo común múltiplo mcm

de expresiones algebraicas sencillas

1. Si hay números se halla el mcm de los números

2. **Luego se factoriza la parte algebraica de cada expresión y se coloca al exponente indicado si la fracción está repetida.**

3. **Se multiplican todos los factores comunes y no comunes de todos los térmicos (sin repetir la base) con su máximo exponente**. Este es el mcm

- **Hallar el mcm de 4a y $6a^2$.**

1 . mcm de 4 y 6

Factorizar en factores primos 4= 2.2 $= 2^2$ 6= 3.2

Tomo 2^2 porque está al exponente mayor y el 2 es común para ambos, y como no común tomo 3. No vuelvo a colocar 2. 2^2 .3 porque se repetiría la base 2.

mcm de 4 y 6= 2^2.3= 12

2. Factorizar la parte algebraica. En este caso no se requiere.

Si es la misma letra a diferentes exponentes, mcm es la letra al exponente más alto, puesto que no se puede repetir base y habrá solo un factor común que es la letra.

Mcm de **a** , a^2 es a^2 porque la base no se debe repetir y se toma al exponente mayor.

3. Multiplicar mcm de números y de expresiones algebraicas

Mcm es 12. a^2**= 12**a^2

Hallar el mcm de $2x^2, 6x^3, 9x^4$

Efrén Giraldo

- Factorizar números 2 , 2.3, 3^2

  mcm es $2.\ 3^2 = 18$

Efrén Giraldo

- Mcm de expresiones algebraicas

Efrén Giraldo

x^2, x^3, x^4 es x^4 (no se puede repetir base)

Mcm es $18x^4$

- Mcm de ab, cd, ef
- No hay factores comunes, solo no comunes, por tanto es el producto de todos los no comunes:
- Mcm= abcdef

- Mcm de ab, ac, ad, ae
- Factor común de todos a

Efrén Giraldo T.

- No comunes: b,c,d,e

Efrén Giraldo T.

- Mcm: abcde

- Mcm de ab, a +ab, a + ab^4

- Factorizar: ab, a(1+b), a(1+b^4)

Efrén Giraldo T.

- Multiplicar factores comunes (a) y no comunes(todos los otros) de todos lo términos sin repetir base.

Efrén Giraldo T.

Efrén Giraldo T.

- Mcm es ab(1+b)(1+b^4)

CONJUNTOS

Efrén Giraldo T.

- Un conjunto es una colección de elementos que se llaman elementos del conjunto.

Efrén Giraldo T.

$$S=\{a,b,c\}$$

S es el conjunto formado por los elementos a, b y c

Efrén Giraldo T.

Como a es un el elemento de S, se dice que a pertenece a S $a \in S$

1. Una forma de expresar un conjunto es colocando todos sus elementos entre corchetes B=***{1,2,3}***

2. *También en forma comprimida*

B= ***{x / x es un entero*** ***y*** ***1 ≥ x ≥ 3***

UNIÓN

- La unión de un conjunto S con un conjunto T es el conjunto conformado **por todos los elementos de S y todos los de T sin que se repitan.**

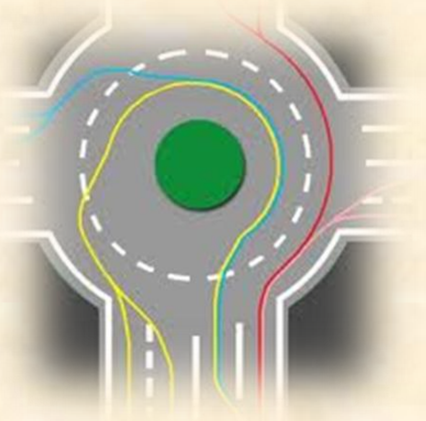
Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$, y $V = \{6, 7, 8\}$, determine los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$ y $S \cap V$.

Solución

$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Todos los elementos que están en S o en T

(Stewart, 2007)

Intersección



- La intersección de dos conjuntos S y T son todos los elementos de S y T que **pertenecen a la vez a S y a T** o sea que están en S y T

$S \cap T = \{4, 5\}$ Elementos comunes tanto a S como a T

$S \cap V = \varnothing$ S y V no tienen elementos en común

(Stewart, 2007)

Intervalos

- Si se tiene dos puntos dados *a* y *b de una recta*, un conjunto **de todos los puntos entre los dos puntos *a y b*** dados, se denomina un intervalo.

- Se pueden dar varias clases de intervalos según se tomen o no los puntos a y b:

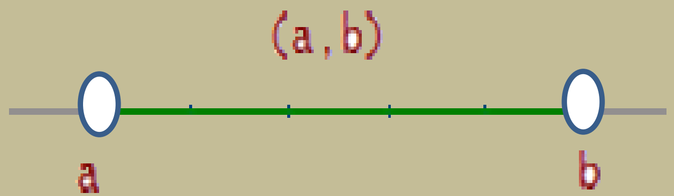
Intervalo abierto ( )

- El intervalo abierto desde *a* hasta *b* consta de todos los puntos entre a y b sin incluir *a* y *b*

- **Forma de representación 1: Intervalo abierto se describe (a, b)** y es el **conjunto de todos los números reales mayores que *a* y menores que** b.(Obviamente sin a y b)

- **Forma 2, condensada es $\{x \,/\, a < x < b\}$**

- **Forma 3, gráfica**



Nota:

Efrén Giraldo T.

El paréntesis ( ) y los círculos abiertos denotan que los extremos no se incluyen en el intervalo

Efrén Giraldo T.

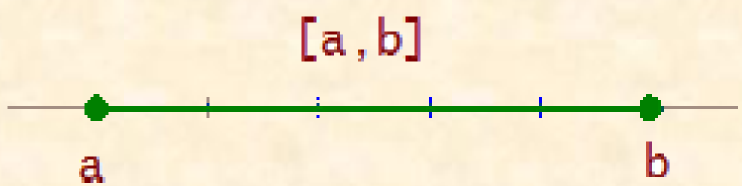
Intervalo cerrado [ ]

- Forma 1.
- Intervalo cerrado es el conjunto de todos los puntos entre a y b incluyendo a y b **[a , b]**

Forma 2. Intervalo cerrado, **[a, b]**, es el **conjunto de todos los números reales mayores o iguales que** *a* **y menores o iguales que** *b.*

$[a, b] = \{x \quad / \; a \leq x \leq b\}$

- Forma 3.



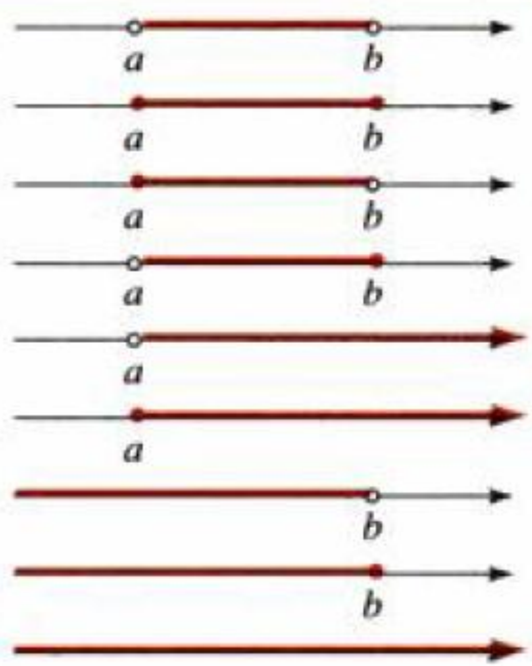
- El corchete **[ ]** y los círculos cerrados denotan que los extremos se incluyen en el intervalo

(Stewart, 2007

- Los intervalos pueden incluir los dos extremos o no, o un solo extremo. O Extenderse hasta el infinito, de ahí se genera diferentes intervalos, que se representan en el siguiente gráfico:

Diferentes clases de intervalos

Notación	Descripción del conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	



(Stewart, 2007)

Resumen

Intervalos

- **Intervalo abierto (a,b)**. Está formado por los números reales x comprendidos entre a y b, excluidos ambos. Se expresa: $a<x<b$.
- **Intervalo cerrado [a,b]**. Está formado por los números reales x comprendidos entre a y b, incluidos ambos. Se expresa $a\leq x\leq b$.
- **Intervalo abierto a la derecha [a,b)**. Está formado por los números reales x comprendidos entre a y b, incluido a. Se expresa $a\leq x<b$
- **Intervalo abierto a la izquierda (a,b]**. Está formado por los números reales x comprendidos entre a y b, incluido b. Se expresa $a<x\leq b$.

Intervalos

- Los **intervalos no acotados** se representan mediante una semirrecta.
  - $(-\infty,a)$. Está formado por los números reales x menores que a, excluido a. Se expresa: $x<a$.
  - $(-\infty,a]$. Está formado por los números reales x menores que a, incluido a. Se expresa: $x\leq a$.
  - $[a,+\infty)$. Está formado por los números reales x mayores que a, incluido a. Se expresa: $a\leq x$.
  - $(a,+\infty)$. Está formado por los números reales x mayores que a, excluido a. Se expresa: $a<x$.

http://wwwmyblogkaty3spot.blogspot.com/2011/06/tipo-de-intervalos.html

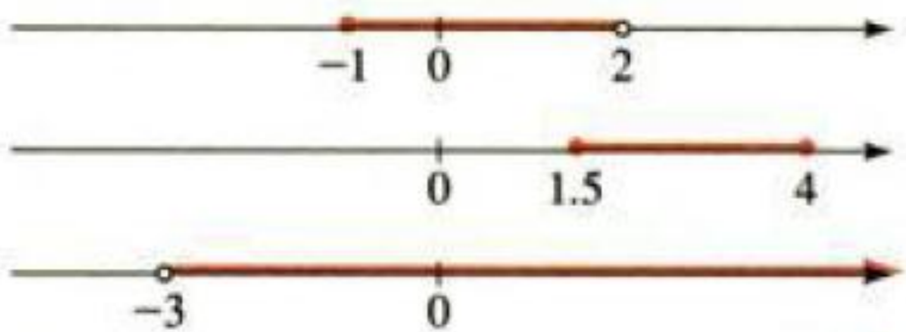
Graficación de intervalos

Exprese cada intervalo en términos de desigualdades, y luego grafíquelos.

a) $[-1, 2) = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$

b) $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \leq x \leq 4\}$

c) $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$ ■



(Stewart, 2007)

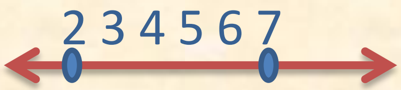
Determinar la unión y la intersección de intervalos

- La intersección de intervalos consiste en todos lo los números que hacen parte de ambos intervalos a la vez a

Efrén Giraldo T.

Efrén Giraldo T.

- a) $(1, 3) \cap [2, 7]$



(Stewart, 2007)

(1,3) ∩ [2,7]
Una manera de hallar intersección

Escribo el primer y segundo intervalos completos

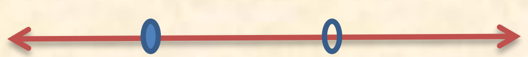
(1,2,3)   y   [2,3,4,5,6,7]

Su elementos comunes son aparentemente 2,3.

La intersección es el conjunto [2,3), cerrado en el 2 porque el 2 pertenece al primer y segundo conjuntos y abierto en

el 3 porque el 3 no está incluido en el primer conjunto aunque si en el segundo, como no está en los dos, tampoco pertenecerá a la intersección.

$$[2,3) = x \,/ \quad 2 \leq x < 3$$



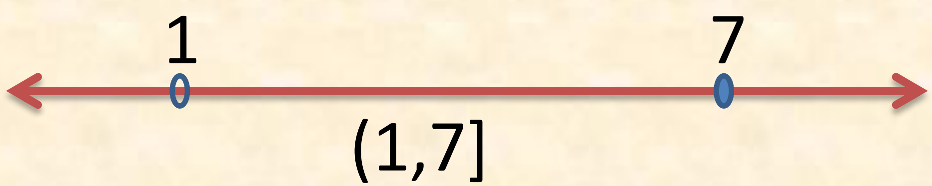
[2   ,   3)

La unión de intervalos

- Escribo el primer y segundo intervalos completos
- (1,2,3) y [2,3,4,5,6,7]

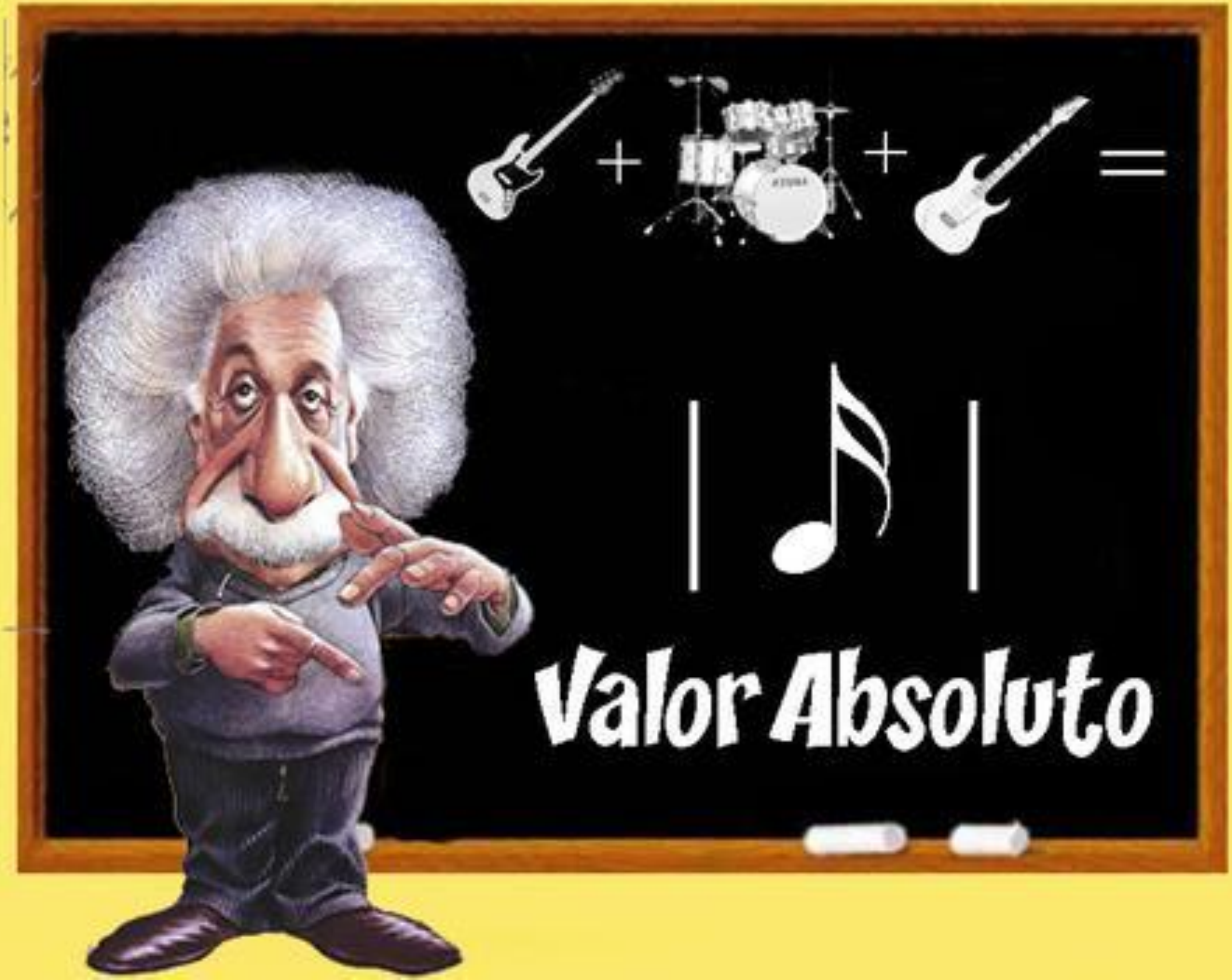
- Todos los elementos que **están en el primero, más los que están en el segundo sin que aparezcan repetidos** son:

(1,2,3,4,5,6,7] = (1,7]= x / $1 < x \leq 7$



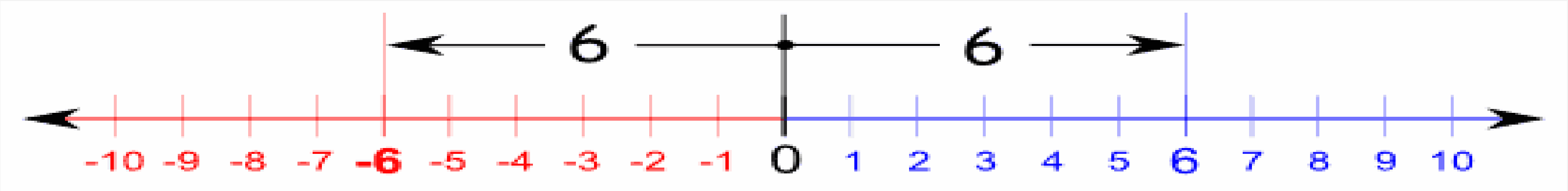
Abierto en 1 porque no pertenece al primero

Cerrado en el 7 porque pertenece al segundo


Valor Absoluto

Valor absoluto |a|

- Una forma de definir "Valor absoluto" de un número, es simplemente decir **qué distancia** hay del número a cero:



El número 6 está a una distancia 6 de cero, y
el número -6 **también** está a una distancia 6 de cero.
Como la distancia es siempre positiva tenemos que $|a| \geq 0$

$$|6| = 6 \qquad |-6| = 6$$

Tomado el día 3 agosto de 20111 de: http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/valor-absoluto.html

El valor absoluto de define mejor así:

- $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \text{ es } \geq 0 \text{ o sea cero o positivo} \\ -a \text{ si } a \text{ es } < 0 \text{ o sea negativo} \end{cases}$ **(1)**

Lo cual significa simplemente que:

Si lo que hay "**dentro de las barras es +**" se puede sacar tal cual.

Si lo que **hay "dentro es –"** se puede sacar pero cambiándole el signo

Si me dicen nada del signo de lo que hay adentro,

entonces tengo que asumir las 2 opciones de (1)

a) $|3| = 3$

b) $|-3| = -(-3) = 3$

c) $|0| = 0$

d) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ (puesto que $3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0$)

- 3 es + se puede sacar como 3

- -3 es – se saca con signo cambiado –(-3)= 3
- Puesto que 3-**π es negativo** se saca pero con signo cambiado. (**π es mayor que 3)**

(Stewart, 2007)

Efrén Giraldo T.

- $|x-5|$ hallar el valor absoluto si (x-5) es – .

Como me dicen que es – lo puedo sacar pero con signo cambiado así: -(x-5)= -x+5, por tanto
$|x-5|$=-x+5, es lo único que puedo hacer.

- Pero si me dan $\boldsymbol{|x-5|}$**= 5** (2) y si (x-5) es –

entonces $|x-5|$= -(x-5)= 5 de donde
-x+5=5 Efrén Giraldo T. - x= 0 o lo mismo x =0, lo cual significa que la ecuación (2) se cumple para x=0

Efrén Giraldo T.

- Lo cual es cierto puesto que $|0-5|$= $|-5|$ =-(-5) =5

- Ahora si me dieran $|x-5|$

e indicaran nada del signo de lo que hay adentro o sea de (x-5), debo proceder de acuerdo a ecuación (1) así:

$$|x-5| = \begin{cases} (X-5) \text{ si } (x-5) \text{ es positivo} \\ \text{ó} \\ -(x-5) = -x+5 \end{cases}$$

- Ahora si $|x-5|= 3$ (3) y le dicen nada más, se procede así:

$$|x-5| = \begin{cases} (x-5) = 3 \text{ si } (x-5) \text{ es positivo} \\ \text{ó} \\ -(x-5) = 3 \text{ si } (x-5) \text{ es negativo} \end{cases}$$

Efrén Giraldo

$|x-5|=$ x-5=3 → x=8 ó -x+5 = 3 ⟶ x=2

Efrén Giraldo

- O sea que a la ecuación (3) le satisfacen dos valores x= 8 ó x= 2

Efrén Giraldo T.

Efrén Giraldo

- $|8-5|= 3$ $|2-5|= |-3|=$ -(-3)= 3

Efrén Giraldo T.

- Lo que efectivamente comprobamos.

Propiedades del valor absoluto

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\lvert a \rvert \geq 0$	$\lvert -3 \rvert = 3 \geq 0$	El valor absoluto de un número es siempre positivo o cero.
2. $\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$	$\lvert 5 \rvert = \lvert -5 \rvert$	Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto.
3. $\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$	$\lvert -2 \cdot 5 \rvert = \lvert -2 \rvert \lvert 5 \rvert$	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
4. $\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$	$\left\lvert \frac{12}{-3} \right\rvert = \frac{\lvert 12 \rvert}{\lvert -3 \rvert}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.

(Stewart, 2007)

Efrén Giraldo T.

Distancia entre puntos de la recta de los números reales

Si a y b son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b en la recta numérica es

$$d(a, b) = |b - a|$$

Efrén Giraldo T.

se infiere que $|b - a| = |a - b|$. Esto confirma que, como es de esperarse, la distancia de a a b es la misma que la distancia de b a a.

La distancia entre los números -8 y 2 es

$$d(a, b) = |-8 - 2| = |-10| = 10$$

$$d(2 \text{ y } -8) = |2-(-8)| = |2+8| = 10$$

(Stewart, 2007)

¡URGENTE!

- LUEGO DE ESTA SEGUNDA **CLASE** UD. AMIGO ESTUDIANTE, **TIENE QUE DOMINAR** TODOS LOS CONCEPTOS PROFUNDAMENTE DE LA 1 Y LA 2 CALSE. DE LO CONTRARIO VUELVA REPASE, ESTUDIE, CONSULTE,REÚNASE, INVESTIGUE. HAGA ALGO.

- **SI NO LO HACE COMIENZA A TENER PROBLEMAS EN SU MATERIA Y ESTÁ DANDO EL SEGUNDO PASO PARA PERDERLA Y POSIBLEMENTE PERDER TAMBIÉN SU CARRERA Y HASTA ARRUINAR SU VIDA.**

Trabajo en casa

- Repasar Stewart páginas 1 a11
- Hacer ejercicios Stewart Sección 1.1 página 10
- Repasar la teoría y problemas vistos en clase
- Aprender mcm de expresiones algebraicas
- Vista previa a lo de la próxima clase número 3

Bibliografía

Tomado el día 3 agosto de 20111 de:
http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/valor-absoluto.htm

Tomado el día 7 junio 2011 de :
http://www.sectormatematica.cl/basica/santillana/max_y_min.pdf

http://www.google.com.mx/imgres?q=minimo+comun+multiplo&um=1&hl=es&sa=N&rlz=1R2ADRA_esCO438&biw=1280&bih=558&tbm=isch&tbnid=IJgHenmB8FKvMM:&imgrefurl=http://www.amolasmates.es/segundo%2520eso/mat2eso1.html&docid=iYliph-NhFtx-M&imgurl=http://www.amolasmates.es/Imagenes/mcm.jpg&w=829&h=610&ei=j7MQT5LlL4T10gG81r3HAw&zoom=1&iact=hc&vpx=401&vpy=84&dur=230&hovh=193&hovw=262&tx=187&ty=123&sig=103379468544883796334&page=1&tbnh=148&tbnw=201&start=0&ndsp=10&ved=1t:429,r:6,s:0

Stewart, 2007. Precálculo.