DESCOMPOSICION EN FRACCIONES PARCIALES

Las fracciones parciales se utilizan para ayudar a descomponer expresiones racionales y obtener sumas de expresiones más simples.

Hay tres casos:

1) Descomposición en fracciones parciales con factores lineales distintos.
2) Descomposición en fracciones parciales con factores lineales repetidos.
3) Descomposición en fracciones parciales con un factor cuadrático irreducible.

FACTORES LINEALES DISTINTOS

1. Observar si el grado de la función del numerador es menor que la del denominador. Si es mayor debemos realizar una división larga para bajar el grado de la función del numerador.

2. Factorizar el denominador para obtener un producto de factores lineales, *ax +b*, o factores cuadráticos irreductibles, ax^2+bx+c.

3. Observar de que tipo son: descomposición en fracciones parciales en la cual cada denominador es lineal o fracciones parciales con un factor lineal, lineal repetido, para acomodarlos de la forma siguiente:

$$\frac{A}{primer \text{ factor}}+\frac{B}{segundo \text{ factor}}+\ldots$$

Ejemplo 1:

Determinar la descomposición en fracciones parciales de:

$$\frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}$$

Primero: se observa que el numerador tiene grado 2 y el denominador grado 3 por lo tanto no se tiene que hacer una división larga.

Segundo: factorizar el denominador

$$x^3+2x^2-3x=x(x^2+2x-3)=x(x+3)(x-1)$$

Tercero: colocar cada factor obtenido de la siguiente forma

$$\frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-1}$$

Obtener el mínimo común denominador, operarlo e igualarlo al numerador.

$$4x^2+13x-9=A(x+3)(x-1)+B(x)(x-1)+C(x)(x+3)$$

Podemos resolverlo por matrices o por el método que más convenga:

$$4x^2+13x-9=A(x^2+2x-3)+B(x^2-x)+C(x^2+3x)$$

Se resuelve ordena y factoriza.

$$4x^2+13x-9=A(x^2+2x-3)+B(x^2-x)+C(x^2+3x)$$

$$4x^2+13x-9=(Ax^2+2Ax-3A)+(Bx^2-Bx)+(Cx^2+3Cx)$$

$$4x^2+13x-9=Ax^2+2Ax-3A+Bx^2-Bx+Cx^2+3Cx$$

$$4x^2+13x-9=Ax^2+Bx^2+Cx^2+2Ax-Bx+3Cx-3A$$

$$4x^2+13x-9=x^2(A+B+C)+x(2A-B+3C)-3A$$ **Factorizo así**

Las tres ecuaciones son:

$$+1A \quad +1B \quad +1C \quad =4$$

$$2A \quad -1B \quad +3C \quad =+13$$

$$-9 \quad =-3A$$

Tomo la tercera ecuación y encuentro el valor de A

$$-9 \quad =-3A$$

$$\frac{-9}{-3} \quad =A$$

$$3=A$$

Sustituyo los valores de A en las otras dos ecuaciones

$$+1A \quad +1B \quad +1C \quad =4$$

$$(3)(1)+B+C=4$$

$$3+B+C=4$$

$$B+C=4-3$$

$$B+C=1$$

$$2A \quad -1B \quad +3C \quad = +13$$
$$2(3) - B + 3C = 13$$
$$6 - B + 3C = 13$$
$$-B + 3C = 13 - 6$$
$$-B + 3C = 7$$

Resolver las dos ecuaciones obteniendo así los valores de B y C

$$\begin{array}{r} \cancel{B} + C = 1 \\ -\cancel{B} + 3C = 7 \\ \hline 4C = 8 \\ C = 2 \end{array}$$

$$B + C = 1$$
$$B + 2 = 1$$
$$B = 1 - 2$$
$$B = -1$$

Coloco las respuestas en la letra correspondiente

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-1}$$

- Hay otro sistema que se puede usar **únicamente** cuando los términos son lineales y no repetidos que es mucho mas fácil.

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}$$

Obtener el mínimo común denominador, operarlo e igualarlo al numerador.

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x+3)(x-1) + B(x)(x-1) + C(x)(x+3)$$

Igualo a cero cada uno de los factores del denominador de la fracción parcial

$$x = 0 \qquad \begin{array}{l} x + 3 = 0 \\ x = -3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x = 1 \end{array}$$

Ahora sustituyo los valores de x

x = 0

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x+3)(x-1) + B(x)(x-1) + C(x)(x+3)$$

$4(0)^2+13(0)-9=A(0+3)(0-1)+B(0)(0-1)+C(0)(0+3)$

$0+0-9=A(3)(-1)+0B+0C$

$-9=-3A$

$3=A$

x = -3

$4x^2+13x-9=A(x+3)(x-1)+B(x)(x-1)+C(x)(x+3)$

$4(-3)^2+13(-3)-9=A(-3+3)(-3-1)+B(-3)(-3-1)+C(-3)(-3+3)$

$36-39-9=A(0)(-4)+B(-3)(-4)+C(-3)(0)$

$-12=12B$

$-1=B$

x = 1

$4x^2+13x-9=A(x+3)(x-1)+B(x)(x-1)+C(x)(x+3)$

$4(1)^2+13(1)-9=A(1+3)(1-1)+B(1)(1-1)+C(1)(1+3)$

$4+13-9=A(4)(0)+B(1)(0)+C(1)(4)$

$8=4C$

$2=C$

Respuesta:

$$\frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-1}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-1}$$

FACTORES LINEALES REPETIDOS

Ejemplo:

$$\frac{x^2+10x-36}{x(x-3)^2}$$

Notamos en el ejercicio que hay un término lineal repetido que es $(x-3)^2$
Entonces lo colocamos así:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$$

Si fuera al cubo el término repetido $(x-3)^3$ lo pondríamos:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}+\frac{D}{(x-3)^3}$$

Ejemplo resuelto por pasos:

$$\frac{x^2+10x-36}{x(x-3)^2}$$

Primero escribimos en el denominador del término lineal x, luego escribimos en el denominador el término repetido elevado a la 1 y por último escribimos en el denominador el término repetido elevado al cuadrado así:

$$\frac{x^2+10x-36}{x(x-3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$$

Como tenemos término repetido ya no podemos usar la forma fácil de resolver únicamente por sistemas de ecuaciones.

Operamos el mínimo común denominador y lo igualamos al numerador.

$$x^2+10x-36=A(x-3)^2+B(x)(x-3)+C(x)$$

$$x^2+10x-36=A(x^2-6x+9)+B(x^2-3x)+C(x)$$

$$x^2+10x-36=(Ax^2-6Ax+9A)+(Bx^2-3Bx)+(Cx)$$
$$x^2+10x-36=Ax^2-6Ax+9A+Bx^2-3Bx+Cx$$
$$x^2+10x-36=Ax^2+Bx^2-6Ax-3Bx+Cx+9A$$
$$x^2+10x-36=x^2(A+B)+x(-6A-3B+C)+9A$$

Factorizar así

Formar las 3 ecuaciones

$$A+B=1$$
$$-6A-3B+C=10$$
$$9A=-36$$

Resolviendo:

$$9A=-36$$
$$A=-4$$

Sustituir valores en la primera ecuación:
$$A+B=1$$
$$-4+B=1$$
$$B=4+1$$
$$B=5$$

Sustituir valores en la segunda ecuación

$-6A-3B+C=10$

$24-15+C=10$

$9+C=10$

$C=10-9$

$C=1$

Respuesta

$$\frac{x^2+10x-36}{x(x-3)^2}=\frac{-4}{x}+\frac{5}{x-3}+\frac{1}{(x-3)^2}$$

FACTOR CUADRÁTICO IRREDUCIBLE

$$\frac{4x^3-x^2+15x-29}{2x^3-x^2+8x-4}$$

Primero observamos que el grado del numerador y denominador son iguales por lo que tengo que realizar una división larga.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ \hline 2x^3-x^2+8x-4 & \cancel{4x^3}-x^2+15x-29 \\ & \underline{-\cancel{4x^3}+2x^2-16x+8} \\ & \qquad x^2-x-21 \end{array}$$

$$\frac{4x^3-x^2+15x-29}{2x^3-x^2+8x-4}=2+\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}$$

Factorizo el denominador:

$$2x^3-x^2+8x-4=x^2(2x-1)+4(2x-1)=(x^2+4)(2x-1)$$

x^2+4 Es un término **cuadrático irreducible** por lo que ahora opero así:

$$\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{2x-1}$$

Operamos el mínimo común denominador

$$x^2 - x - 21 = (Ax + B)(2x - 1) + C(x^2 + 4)$$
$$x^2 - x - 21 = 2Ax^2 - Ax + 2Bx - B + Cx^2 + 4C$$
$$x^2 - x - 21 = 2Ax^2 + Cx^2 - Ax + 2Bx - B + 4C$$
$$x^2 - x - 21 = x^2(2A + C) + x(-A + 2B) + (-B + 4C)$$

Factorizar así

Formar las ecuaciones:

$$2A + C = 1$$
$$-A + 2B = -1$$
$$-B + 4C = -21$$

Puedes resolverlo por el método que quieras.

- **COMPROBAR LA RESPUESTA**

RESPUESTA:

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = 2 + \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = 2 + \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{2x - 1} = 2 + \frac{3x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-5}{2x - 1}$$