



FRACCIONES PARCIALES

Las fracciones parciales se utilizan para ayudar a descomponer expresiones racionales y obtener sumas de expresiones más simples.

Hay cuatro casos:

- 1) Descomposición en fracciones parciales en la cual cada denominador es lineal.
- 2) Descomposición en fracciones parciales con un factor lineal repetido.
- 3) Descomposición en fracciones parciales con un factor cuadrático irreducible.
- 4) Descomposición en fracciones parciales con factor cuadrático repetido.

Procedimiento para:

Descomposición en fracciones parciales en la cual cada denominador es lineal.

Paso 1:

Siempre me debo de fijar si el grado de la función del numerador es menor que la del denominador. Si es mayor debo realizar una división larga para bajar el grado de la función del numerador.

Paso 2:

Debo factorizar el denominador para obtener un producto de factores lineales, $px + q$, o factores cuadráticos irreducibles, $ax^2 + bx + c$, y agrupar los factores repetidos para que la función del denominador sea un producto de factores diferentes de la forma $(px + q)^m$, donde $m \geq 1$ o $(ax^2 + bx + c)^n$ los números m y n no pueden ser negativos.

Paso 3:

Si son Descomposición en fracciones parciales en la cual cada denominador es lineal o fracciones parciales con un factor lineal repetido.

$$\frac{A}{\text{primer factor}} + \frac{B}{\text{segundo factor}} + \dots$$

Ejemplo 1:

Determinar la descomposición en fracciones parciales de:

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

Primero observo que el numerador tiene grado 2 y el denominador grado 3 por lo tanto no tengo que hacer una división larga.

Segundo: factorizo el denominador

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = x(x+3)(x-1)$$

Tercero: coloco cada factor obtenido de la siguiente forma

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}$$

Obtengo el mínimo común denominador, lo opero y lo igualo al numerador.

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x+3)(x-1) + B(x)(x-1) + C(x)(x+3)$$

Podemos resolverlo por matrices o por el método que más nos convenga:

Opero los paréntesis

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x^2 + 2x - 3) + B(x^2 - x) + C(x^2 + 3x)$$

Ahora formo mi primera ecuación con los términos al cuadrado así

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x^2 + 2x - 3) + B(x^2 - x) + C(x^2 + 3x)$$

$$4x^2 + 13x - 9 = (Ax^2 + 2Ax - 3A) + (Bx^2 - Bx) + (Cx^2 + 3Cx) \quad \text{Multiplico las letras en los paréntesis}$$

$$4x^2 + 13x - 9 = Ax^2 + 2Ax - 3A + Bx^2 - Bx + Cx^2 + 3Cx \quad \text{Quito los paréntesis}$$

$$4x^2 + 13x - 9 = Ax^2 + Bx^2 + Cx^2 + 2Ax - Bx + 3Cx - 3A \quad \text{Los ordeno}$$

$$4x^2 + 13x - 9 = x^2(A + B + C) + x(2A - B + 3C) - 3A \quad \text{Factorizo así}$$

Mis tres ecuaciones son:

$$+1A + 1B + 1C = 4$$

$$2A - 1B + 3C = +13$$

$$-9 = -3A$$

Tomo la tercera ecuación y encuentro el valor de A

$$-9 = -3A$$

$$\frac{-9}{-3} = A$$

$$3 = A$$

Sustituyo los valores de A en las otras dos ecuaciones

$$+1A + 1B + 1C = 4$$

$$(3)(1) + B + C = 4$$

$$3 + B + C = 4$$

$$B + C = 4 - 3$$

$$B + C = 1$$

$$2A - 1B + 3C = +13$$

$$(2)(3) - B + 3C = 13$$

$$6 - B + 3C = 13$$

$$-B + 3C = 13 - 6$$

$$-B + 3C = 7$$

Resuelvo las dos ecuaciones obteniendo así los valores de B y C

$$\begin{array}{r} B + C = 1 \\ -B + 3C = 7 \\ \hline 4C = 8 \\ C = 2 \end{array}$$

$$B + C = 1$$

$$B + 2 = 1$$

$$B = 1 - 2$$

$$B = -1$$

Coloco las respuestas en la letra correspondiente

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-1}$$

Hay otro sistema que se puede usar **únicamente** cuando los términos son lineales y no repetidos que es mucho más fácil.

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}$$

Obtengo el **mínimo común denominador**, lo opero y lo igualo al numerador.

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x+3)(x-1) + B(x)(x-1) + C(x)(x+3)$$

Igualo a cero cada uno de los factores del denominador de la fracción parcial

$$\begin{array}{lll} x = 0 & x + 3 = 0 & x - 1 = 0 \\ & x = -3 & x = 1 \end{array}$$

Ahora sustituyo los valores de x

x = 0

$$\begin{aligned} 4x^2 + 13x - 9 &= A(x+3)(x-1) + B(x)(x-1) + C(x)(x+3) \\ 4(0)^2 + 13(0) - 9 &= A(0+3)(0-1) + B(0)(0-1) + C(0)(0+3) \\ 0 + 0 - 9 &= A(3)(-1) + 0B + 0C \\ -9 &= -3A \\ 3 &= A \end{aligned}$$

x = -3

$$\begin{aligned} 4x^2 + 13x - 9 &= A(x+3)(x-1) + B(x)(x-1) + C(x)(x+3) \\ 4(-3)^2 + 13(-3) - 9 &= A(-3+3)(-3-1) + B(-3)(-3-1) + C(-3)(-3+3) \\ 36 - 39 - 9 &= A(0)(-4) + B(-3)(-4) + C(-3)(0) \\ -12 &= 12B \\ -1 &= B \end{aligned}$$

x = 1

$$\begin{aligned} 4x^2 + 13x - 9 &= A(x+3)(x-1) + B(x)(x-1) + C(x)(x+3) \\ 4(1)^2 + 13(1) - 9 &= A(1+3)(1-1) + B(1)(1-1) + C(1)(1+3) \\ 4 + 13 - 9 &= A(4)(0) + B(1)(0) + C(1)(4) \\ 8 &= 4C \\ 2 &= C \end{aligned}$$

Respuesta:

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-1}$$

EJERCICIOS

1) $\frac{8x-1}{(x-2)(x+3)}$

2) $\frac{x-29}{(x-4)(x+1)}$

3) $\frac{x+34}{x^2-4x-12}$

4) $\frac{5x-12}{x^2-4x}$

5) $\frac{4x^2-15x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

6) $\frac{x^2+19x+20}{x(x+2)(x-5)}$

7) $\frac{4x^2-5x-15}{x^3-4x^2-5x}$

8) $\frac{37-11}{(x+1)(x^2-5x+6)}$

Descomposición en fracciones parciales con un factor lineal repetido.

Ejemplo:

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x-3)^2}$$

Notamos en el ejercicio que hay un término lineal repetido que es $(x-3)^2$

Entonces lo colocamos así:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

Si fuera al cubo el término repetido $(x-3)^3$ lo pondríamos:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{(x-3)^3}$$

Ejemplo resuelto por pasos:

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x-3)^2}$$

Primero escribimos en el denominador del término lineal x , luego escribimos en el denominador el término repetido elevado a la 1 y por último escribimos en el denominador el término repetido elevado al cuadrado así:

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

Como tenemos término repetido ya no podemos usar la forma fácil de resolver únicamente por sistemas de ecuaciones.

Pasos operamos el mínimo común denominador y lo igualamos al numerador.

$$x^2 + 10x - 36 = A(x-3)^2 + B(x)(x-3) + C(x)$$

Operamos los paréntesis

$$x^2 + 10x - 36 = A(x^2 - 6x + 9) + B(x^2 - 3x) + C(x)$$

$$x^2 + 10x - 36 = (Ax^2 - 6Ax + 9A) + (Bx^2 - 3Bx) + (Cx) \quad \text{Multiplico las letras en los paréntesis}$$

$$x^2 + 10x - 36 = Ax^2 - 6Ax + 9A + Bx^2 - 3Bx + Cx \quad \text{Quito los paréntesis}$$

$$x^2 + 10x - 36 = Ax^2 + Bx^2 - 6Ax - 3Bx + Cx + 9A \quad \text{Los ordeno}$$

$$x^2 + 10x - 36 = x^2(A+B) + x(-6A-3B+C) + 9A \quad \text{Factorizo así}$$

Formo mis 3 ecuaciones

$$A + B = 1$$

$$-6A - 3B + C = 10$$

$$9A = -36$$

Resolviendo me queda:

$$9A = -36$$

$$A = -4$$

Sustituyo valores en la primera ecuación:

$$A + B = 1$$

$$-4 + B = 1$$

$$B = 4 + 1$$

$$B = 5$$

Sustituyo valores en la segunda ecuación

$$-6A - 3B + C = 10$$

$$24 - 15 + C = 10$$

$$9 + C = 10$$

$$C = 10 - 9$$

$$C = 1$$

respuesta

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x-3)^2} = \frac{-4}{x} + \frac{5}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2}$$

EJERCICIOS

9) $\frac{2x+3}{(x-1)^2}$

10) $\frac{5x^2-4}{x^2(x+2)}$

11) $\frac{19x^2+50x-25}{3x^3-5x^2}$

12) $\frac{10-x}{x^2+10x+25}$

13) $\frac{x^2-6}{(x+2)(2x-1)}$

14) $\frac{2x^2+x}{(x-1)^2(x+1)^2}$

Descomposición de una fracción parcial que contiene un factor cuadrático irreducible.

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}$$

Primero observo que el grado del numerador y denominador son iguales por lo que tengo que realizar una división larga.

$$2x^3 - x^2 + 8x - 4 \overline{) \begin{array}{r} 4x^3 - x^2 + 15x - 29 \\ -4x^3 + 2x^2 - 16x + 8 \\ \hline x^2 - x - 21 \end{array}}$$

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = 2 + \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}$$

Factorizo el denominador:

$$2x^3 - x^2 + 8x - 4 = x^2(2x - 1) + 4(2x - 1) = (x^2 + 4)(2x - 1)$$

$x^2 + 4$ es un término **cuadrático irreducible** por lo que ahora opero así:

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{2x - 1}$$

Operamos el mínimo común denominador

$$x^2 - x - 21 = (Ax + B)(2x - 1) + C(x^2 + 4)$$

Multiplico las letras en los paréntesis

$$x^2 - x - 21 = 2Ax^2 - Ax + 2Bx - B + Cx^2 + 4C$$

Quito los paréntesis

$$x^2 - x - 21 = 2Ax^2 + Cx^2 - Ax + 2Bx - B + 4C$$

Los ordeno

$$x^2 - x - 21 = x^2(2A + C) + x(-A + 2B) + (-B + 4C)$$

Factorizo así

Formar las ecuaciones:

$$2A + C = 1$$

$$-A + 2B = -1$$

$$-B + 4C = -21$$

Puedes resolverlo por el método que quieras, en este caso seguiremos practicando la resolución por matices

$$\begin{array}{ccc|c} +2 & +0 & 1 & +1 \\ -1 & +2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -21 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} +1 & -2 & 0 & +1 \\ +0 & -1 & 4 & -21 \\ +2 & +0 & 1 & +1 \end{array} \quad -R_1 = R_1$$

$$\begin{array}{ccc|c} +1 & -2 & 0 & +1 \\ +0 & -1 & 4 & -21 \\ +0 & +4 & 1 & -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} -2R_1 + R_3 = R_3 \\ -2 \quad +4 \quad 0 \quad -2 \\ +2 \quad +0 \quad 1 \quad +1 \\ \hline +0 \quad +4 \quad 1 \quad -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c}
 +1 & -2 & 0 & +1 \\
 +0 & -1 & 4 & -21 \\
 +0 & +0 & 17 & -85
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cccc}
 4R_2 + R_3 = R_3 & & & \\
 0 & -4 & 16 & -84 \\
 0 & +4 & +1 & -1 \\
 \hline
 0 & +0 & 17 & -85
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 17C = -85 \\
 C = -5
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 -B + 4C = -21 \\
 -B = -21 + 20 \\
 B = 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 A - 2B = 1 \\
 A = 1 + 2B \\
 A = 1 + 2 \\
 A = 3
 \end{array}$$

RESPUESTA:

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = 2 + \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = 2 + \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{2x - 1} = 2 + \frac{3x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-5}{2x - 1}$$