HISTORIA DEL ÁLGEBRA

Y

DE SUS TEXTOS

ANA CECILIA LORENTE MORATA

ÍNDICE

En estos días el ángel de la topología
y el demonio del álgebra abstracta luchan
por el alma de cada dominio de las matemáticas.

HERMANN WEYL

El Álgebra es, en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas analizadas desde un punto de vista abstracto y genérico, independiente de los números u objetos concretos. A lo largo de la historia de la humanidad esta ciencia ha ido evolucionando, y cada civilización y cada cultura con sus características propias han dejando un legado testimonial escrito del que en la actualidad somos herederos.

LOS EGIPCIOS

Hacia el cuarto milenio a.C. nació una gran civilización a orillas del río Nilo: los Egipcios. Gracias a ellos y después de un largo proceso, los primitivos textos pictográficos evolucionaron para dar lugar a una ordenación lineal de símbolos más sencillos: sistema de notación jeroglífica.

La cantidad de información matemática que podemos obtener de las piedras talladas encontradas en las tumbas, los templos y de los calendarios es muy limitada y el panorama de las contribuciones egipcias que tendríamos sería extremadamente incompleto. Afortunadamente disponemos de otras fuentes de información; hay un cierto número de papiros egipcios que de una manera u otra , han conseguido llegar hasta nuestros días. El más extenso de los que contienen información matemática es un rollo de papiro de unos 30 cm de alto y casi 6 m de largo que está expuesto en el British Museum de Londres.

Este papiro fue comprado en 1858 en una ciudad comercial del Nilo por un anticuario escocés, Henry Rhind, de donde deriva el nombre de *Papiro Rhind* con el que se conoce usualmente o, no tan a menudo como el *Papiro de Ahmes* , en honor del escriba que lo copió hacia 1650 a.C. Este escriba cuenta que el material escrito se deriva de un prototipo del Imperio Medio de entre los años 2000 y 1800 a.C., y es posible que parte de estos conocimientos provengan en realidad de Imhotep, el legendario arquitecto y médico del faraón Zoser. En cualquier caso la matemática egipcia parece haberse estancado durante unos 2000 años después de unos comienzos prometedores.

Los problemas que hay en el *Papiro de Rhind*, no se refieren a objetos concretos y específicos como pan o cerveza, ni tampoco piden el resultado de operaciones con números conocidos, sino que piden lo equivalente a resolver ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$ ó $x + ax + bx = c$, donde a, b y c son números conocidos y x es desconocido; a este número desconocido o incógnita le llamaban “aha” o “montón”.

La solución que se da en el *Papiro de Rhind*, de los problemas de carácter algebraico planteados no es la que podría verse en los libros de texto modernos, sino que es característica de un procedimiento que conocemos hoy como el “método de la falsa posición” o “*regula falsi*”.

En este método se supone un valor concreto para el “montón”, lo más probable es que sea incorrecto, y se efectúan con dicho número las operaciones indicadas en el miembro de la izquierda de la igualdad, a continuación se compara el resultado de estas operaciones con el resultado que debería haberse obtenido, y mediante el uso de proporciones se halla la respuesta correcta. Por ejemplo, el problema 24 del *Papiro de Ahmes* , traducido literalmente, dice: “una cantidad , su 1/7, su totalidad asciende a 19”. Esto para nosotros significaría :

$$x + x/7=19$$

se toma como valor de prueba para la incógnita el 7, de manera que la ecuación toma el valor 8 en lugar del correcto que debía de ser 19, pero en vista de que 8(2+1/4+1/8) =19, tenemos que multiplicar 7 por 2+1/4+1/8 para obtener el valor correcto del “montón”; Ahmes halla la respuesta correcta, 16+1/2+1/8 y “comprueba” su resultado mostrando que si a 16+1/2+1/8 se le suma un séptimo de él mismo, es decir 2+1/4+1/8, se obtiene efectivamente 19.

El único tipo de ecuación de segundo grado que aparece es el más sencillo : $ax^a = b$

Muchos de los cálculos de “aha” en el *Papiro de Rhind* eran evidentemente ejercicios para que practicasen los jóvenes estudiantes.

Este álgebra egipcia tan restringida no utilizaba prácticamente ningún simbolismo. En el *Papiro de Ahmes* las operaciones de sumar y restar aparecen representadas por un dibujo esquemático de las piernas de una persona que se acerca y que se aleja .

En definitiva, los egipcios solucionaban problemas de una incógnita que vienen a ser equivalentes a nuestra resolución de ecuaciones lineales. Sin embargo, los procesos seguidos eran puramente aritméticos y no constituían para los egipcios un tema distinto como podía ser la resolución de ecuaciones.

CIVILIZACIÓN MESOPOTÁMICA

Al igual que en el valle del Nilo, nació a orillas de los río Tigris y Eufrates a finales del cuarto milenio una nueva civilización : civilización mesopotámica o también llamada babilónica.

Antiguamente, como hoy en día, "la Tierra de los Dos Ríos" fue un territorio abierto a invasiones de diversa procedencia. Una de las más importantes fue la llevada a cabo por los acadios semitas debido al vasto territorio que ocuparon. Otras invasiones y revueltas posteriores elevaron al poder en el valle a los amorritas, cassitas, elamitas, hititas, asirios, medos y persas entre otros. Pero lo importante es que se conservó siempre una uniformidad cultural, en particular el uso generalizado de la escritura cuneiforme, lo suficientemente alta para que podamos referirnos a esta civilización simplemente como mesopotámica.

En Mesopotamia, el álgebra alcanzó un nivel considerablemente más alto que en Egipto ya que los babilónicos solucionaron tanto ecuaciones lineales como ecuaciones cuadráticas sin ninguna dificultad y algunos ejemplos de ecuaciones cúbicas.

Los documentos matemáticos que se conservan de la época son tablillas de arcilla blanda donde se imprimía el texto con una varilla y a continuación se cocían en hornos para endurecerlas. Estos documentos han sido menos vulnerables al paso del tiempo que los papiros egipcios, por lo que se dispone actualmente de una mayor información de la matemática mesopotámica que de la egipcia. La mayoría de las tablillas con contenido matemático se encuentran en las Universidades de Columbia, Pennsylvania y Yale, las cuales fueron suministradas por un yacimiento arqueológico de la antigua ciudad de Nipur.

Los problemas algebraicos aparecen formulados y resueltos de una manera completamente verbal, sin utilizar símbolos especiales. A menudo aparecen las palabras us (longitud), sag (anchura) y aŝa (área) utilizadas para representar las incógnitas, no porque dichas incógnitas representen tales cantidades geométricas, sino porque muchos problemas algebraicos seguramente surgieron de situaciones geométricas y esta terminología terminó por imponerse. Un indicio de que esto era así, es que los babilónicos no tenían ningún reparo en sumar una longitud con un área o un volumen.

Algunos ejemplos de estos problemas son:

- el problema en el que se pide hallar el lado de un cuadrado si su área menos el lado es igual a 14;30 ; la solución de este problema es equivalente a la resolución de la ecuación cuadrática $x^2 - x = 870$ y viene explicada por el escriba de la siguiente forma :

"Toma la mitad de 1 que es 0;30 y multiplica por 0;30 que es 0;15, suma este número a 14;30 lo que da 14,30;15. Este es el cuadrado de 29;30 , ahora suma 0;30 a 29;30 cuyo resultado es 30, que es el lado del cuadrado"

-nuestra ecuación cuadrática de la forma $x^2 - px = q$ la resolvían de la siguiente manera: primero calculaban p/2, a continuación $(p/2)^2$ y por último $(p/2)^2$-q , entonces obtenían la solución de la incógnita

$$x = p/2 + \sqrt{}\,(p/2)^2 + q$$

siendo ésta la fórmula cuadrática actual conocida por todo el mundo.

-en otro texto, los babilonios reducen la ecuación $11x^2 + 7x = 6;15$ a la forma canónica $x^2 + px = q$, multiplicando primero por 11 los dos miembros para convertirla en la ecuación $(11x)^2 + 7(11x) = 1,8;45$ que es la forma canónica, salvo que ahora la solución es $y = 11x$ y esta solución en y se obtiene entonces fácilmente por medio de la regla antes mencionada $x = p/2 - (p/2)^2 + q$ a partir de la cual se obtiene el valor de x . Este método de resolución es notable como un ejemplo de utilización de transformaciones algebraicas sencillas.

Los babilónicos disponían de la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas, pero dado que ellos no conocían los números negativos, nunca se consideraban las posibles raíces negativas de las ecuaciones de segundo grado.

A pesar de que en las tablillas sólo aparecen ejemplos concretos la mayoría de estos, sin duda, intentaban ilustrar un método general para las ecuaciones cuadráticas. Además, lograron reducir por medio de transformaciones los casos de problemas mas complicados a otros más sencillos**.**

Actualmente, las ecuaciones cuadráticas se clasifican en tres tipos que reducidos a sus formas canónicas:

1) $x^2 + px = q$
2) $x^2 = px + q$
3) $x^2 + q = px$

y todos estos tipos nos los encontramos en los viejos textos babilónicos de hace unos 4000 años. Los dos primeros, los acabamos de mencionar arriba , y el tercer tipo aparece a menudo en textos bajo la forma de problemas en los que se trata como equivalente al sistema de ecuaciones $x+y = \mathrm{p}$

$$xy = \mathrm{q}$$

También aparecen problemas que conducen a raíces cúbicas. Uno de estos problemas, formulado en simbolismo moderno, es el siguiente

$12x = z \qquad y = x \qquad xyz = \mathrm{V}$ donde V es un volumen dado.

Aquí para calcular x tenemos que extraer una raíz cúbica; para ello los babilónicos calculaban dicha raíz a partir de tablas de cubos y raíces cúbicas hechas previamente. Para resolver las cúbicas puras como $x^3 = 0;7,30$ consultaban directamente las tablas de cubos y raíces en las que se podía leer sin más la solución $x = 0;30$ si aparecía en la tabla; y para valores que no aparecían en las tablas se utilizaba una simple interpolación lineal para conseguir una aproximación. Las cúbicas mixtas de la forma $x^3 + x^2 = \mathrm{a}$ se resolvían de una manera análoga consultando las tablas disponibles en las que aparecían valores de la suma $n^3 + n^2$ para valores enteros de n de 1 a 30. Para los casos más generales de ecuaciones de tercer grado, como por ejemplo $144x^3 + 12x^2 = 21$, los babilonios usaban su método de sustitución:

multiplicaban por 12 ambos miembros y tomando $y = 12x$ la ecuación se convertía en $y^3 + y^2 = 4,12$ de donde resultaba $y = 6$. Luego, $x = 1/2$ ó $x = 0;30$.

Las cúbicas de la forma $ax^3 + bx^2 = c$ se pueden reducir a la forma canónica de los babilonios multiplicando ambos miembros por a^2/b^3 para obtener $(ax/b)^3 + (ax/b)^2 = ca^2/b^3$ que ya es una cúbica de la forma standard en la incógnita ax/b y consultando las tablas para hallar el valor de esta incógnita se puede determinar el valor de x.

El álgebra babilónica alcanzó un nivel de abstracción tan extraordinario que las ecuaciones $ax + bx^2 = c$ y $ax + bx = c$ fueron consideradas correctamente como simples ecuaciones cuadráticas disfrazadas, es decir, como ecuaciones cuadráticas en x^2 y x respectivamente.

<u>ÉPOCA HELENÍSTICA</u>

La actividad intelectual que se desarrollaba en Egipto y Mesopotamia perdió impulso antes de que comenzase la Era Cristiana y además, empezaron a surgir nuevas civilizaciones a lo largo de la costa del mar Mediterráneo. A este progresivo cambio en los principales centros de las civilizaciones se le conoce como Edad Talásica (800 a.C.- 800 d.C.).

A principios de este periodo una nueva civilización se estaba preparando para ser la heredera de la hegemonía cultural del Mediterráneo, los helenos. Por ello, a la primera etapa de la Edad Talásica se la llamó época helénica. Este pueblo procedente del norte,que se asentó a orilas del mar Egeo, vino desprovisto de cultura, pero con grandes ansias de aprender.

Los griegos en menos de cuatro siglos, de Tales de Mileto a Euclides, muchos de ellos rivales de ciudades o de escuelas, construyeron un imperio invisible y único cuya grandeza perdura hasta nuestros días, este logro se llama <u>Matemáticas.</u>

La matemática griega se ha desarrollado en tres etapas fundamentales, cuyas principales figuras son Pitágoras, Platón y Euclides. Cada uno de ellos aportó una singularidad esencial. Euclides fue el sintetizador de todos los conocimientos precedentes; su obra *Los Elementos* se conviritó en canónica y paradigmática, y como tal ha marcado una pauta a lo largo de veintidós siglos. La figura central en todos los sentidos fue Platón, se ocupó de crear un entorno académico donde se potenciaron de forma extraordinaria lo estudios geométricos. Y finalmente Pitágoras, pionero instaurador de la tradición matemática griega y artífice de los fundamentos filosóficos e ideológicos de la Matemática. La tradición matemática de la escuela de Pitágoras es recogida por Platón para ponerla en manos de Euclides, que en la compilación de *Los Elementos* creó un modelo estructural paradigmático.

Los Elementos es un compendio, en lenguaje geométrico, de todos los conocimientos de la matemática elemental, es decir, por una parte la geometría sintética plana (puntos, rectas, polígonos y círculos) y espacial (planos, poliedros y cuerpos redondos); y por otra parte, una aritmética y un álgebra, ambas con una indumentaria geométrica. Así pues *Los Elementos* de Euclides son una exposición en orden lógico de los fundamentos de la matemática elemental; y por su valor didáctico y su carácter de síntesis, ha sido utilizado como manual escolar hasta no hace mucho tiempo.

La obra de Euclides está formada por trece libros, de los cuales el Libro II y el V son casi completamente algebraicos; pero a diferencia de nuestra álgebra actual, que es simbólica, el álgebra de *Los Elementos* es un álgebra geométrica.

La matemática griega no se mantuvo uniforme a un nivel alto, sino que el glorioso periodo del siglo III a.C. fue seguido por una época de decadencia que quizá mejoró un poco con Ptolomeo, pero que no se recuperó hasta la "Edad de Plata" de la matemática griega, en torno al siglo que va del año 250 al año 350 aproximadamente. A comienzos de este periodo, conocido también como la Edad Alejandrina Tardía, nos encontramos con el más importante de todos los algebristas griegos, Diofanto de Alejandría .

Diofanto ha sido llamado muchas veces el padre del álgebra pero muchos le reniegan este título ya que a pesar de que en cuestiones de notación sin duda se lo merece, en términos de las motivaciones y los conceptos desarrollados esta pretensión resulta menos justificada. Su libro más importante es *Aritmética*, colección de unos 150 problemas sobre aplicaciones del álgebra. Según dice Diofanto, la *Aritmética* comprende trece libros, pero sólo conservamos seis de ellos procedentes de un manuscrito del siglo XIII que es una copia griega de otro más antiguo y de versiones posteriores. En ellos no hay ningún desarrollo axiomático ni tampoco se hace ningún esfuerzo por calcular todas las soluciones posibles, en el caso de las ecuaciones de segundo grado con dos raíces positivas se da solamente la mayor.

La gran innovación de Diofanto está en que manteniendo aún en los enunciados algebraicos la forma retórica de la estructura de la frase, sustituye con abreviaturas una serie de magnitudes, conceptos y operadores frecuentes, es decir, inicia el " álgebra sincopada".

En un problema de la *Aritmética* que se explica a continuación se puede observar el método que utiliza de forma sistemática Diofanto. Para calcular dos números, tales que su suma sea 20 y la suma de sus cuadrados 208, los números desconocidos no se representan por x e y , sino por lo que en nuestra notación moderna sería $10+x$ y $10-x$, entonces se tendrá que verificar únicamente que $(10+x)^2+(10-x)^2=208$, luego $x=2$ y los números buscados son 8 y 12.

En su libro, Diofanto no establece ninguna distinción entre los problemas determinados e indeterminados, en estos últimos sólo da una de las infinitas soluciones. En el problema indeterminado siguiente se ve como usa el mismo método para resolverlo que en el problema determinado anterior:

se pide calcular dos números tales que al sumar cualquiera de ellos con el cuadrado del otro da siempre como resultado un cuadrado perfecto ;

éste es un ejemplo claro de problema de análisis diofántico, en el que sólo se admiten como soluciones aceptables números racionales. Para resolver el problema, Diofanto llama a los números buscados x y $2x+1$, de forma que al añadir el segundo al cuadrado del primero dará un cuadrado perfecto cualquiera que sea el valor atribuido a x. Pero se exige además que $(2x+1)^2 + x$ también sea cuadrado perfecto, y llegados a este punto Diofanto no se preocupa en buscar las infinitas soluciones posibles, sino simplemente elige un cuadrado perfecto, en este ejemplo concreto es el número $(2x-2)^2$ tal que al igualarlo a $(2x+1)^2 + x$ resulta una ecuación lineal en x, de la que se obtiene que $x = 3/13$, luego el segundo número buscado será $x = 19/13$. Ahora bien, se podía haber utilizado $(2x-3)^2$ ó $(2x-4)^2$ u otra expresión análoga en vez de $(2x-2)^2$ para obtener otro par de números distintos con la misma propiedad .

Uno de los planteamientos que utiliza Diofanto que se puede acercar un poco a lo que llamamos "método" es que él en vez de manejar un sistema de dos ecuaciones simultáneas en dos incógnitas, opera con las condiciones sucesivas de manera que solo aparezca una única incógnita a lo largo de todo el proceso.

Actualmente no se sabe cuántos de los problemas de la *Aritmética* son originales de Diofanto y cuántos tomó prestados de otras colecciones análogas, ya que es muy probable que algunos de los problemas y de los métodos se puedan rastrear hasta sus orígenes babilónicos, que a diferencia de sus algebristas Diofanto utiliza números abstractos y no unidades de medida para determinar a las incógnitas.

No obstante, Diofanto ha tenido una influencia mucho mayor sobre la teoría de números moderna que cualquier otro algebrista no-geométrico griego.

del Colleg.° d.la Comp.a di Gesù d.la Conuers.ne [illegible]   [illegible]

DIOPHANTI
ALEXANDRINI

Rerum Arithmeticarum
Libri ſex,

quorũ primi duo adiecta habent SCHOLIA,
MAXIMI (ut coniectura eſt)
PLANVDIS.

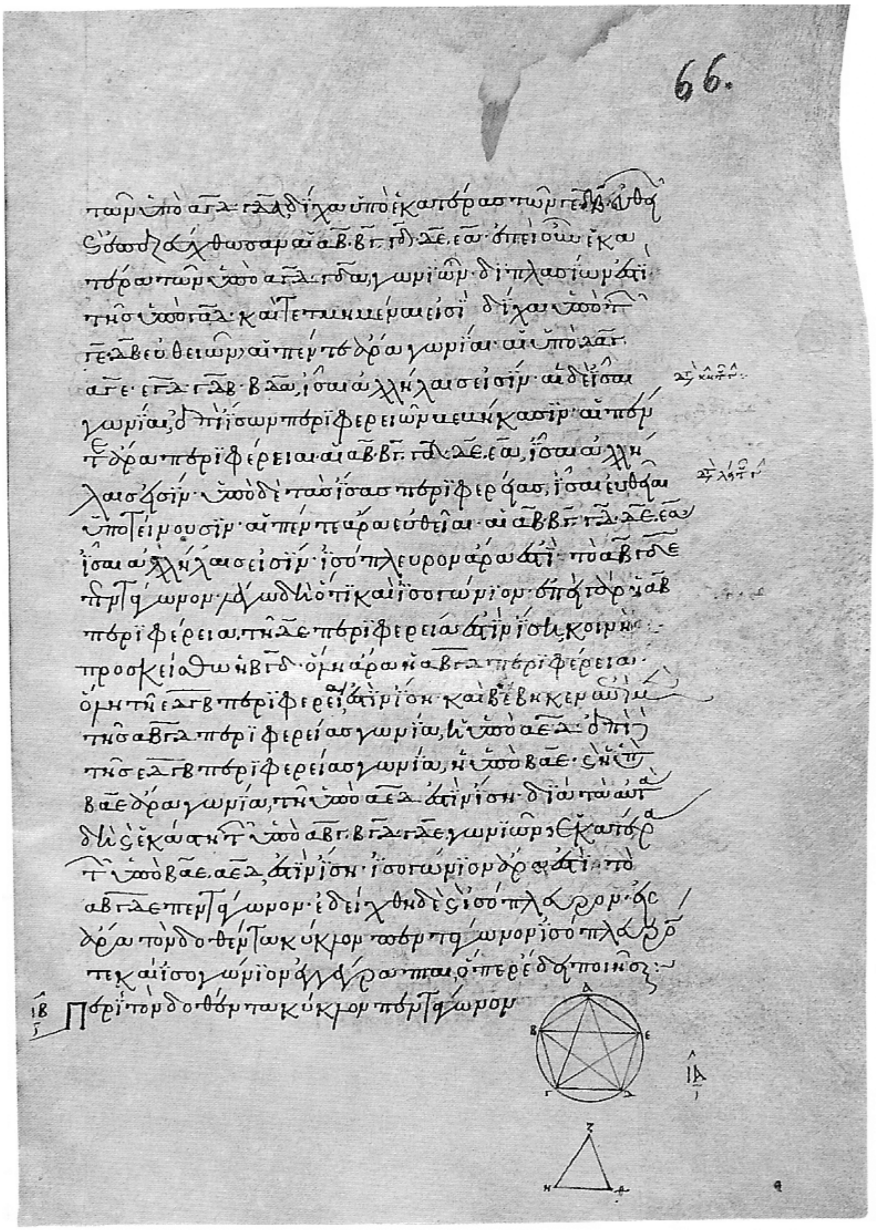
Item LIBER DE NVMERIS POLYGONIS
ſeu Multiangulis.

Opus incomparabile, ueræ Arithmeticæ Logiſticæ perfectionem continens, paucis adhuc uiſum.

A' GVIL. XYLANDRO Auguſtano incredibili labore
Latinè redditum, & COMMENTARIIS explanatum, inq; lucem editum,
AD
Illuſtriß. Principẽ LVDOVICVM *Vuirtembergenſem.*

BASILEAE
PER EVSEBIVM EPISCOPIVM,
& NICOLAI Fr. hæredes.
M D LXXV.

Diofanto



Euclides

Los Elementos (Manuscrito griego, siglo XI; n. 39)

El *pentagrama místico*, símbolo de los pitagóricos, tal y como aparece en el folio 66 recto del manuscrito *ø-III-5* de El Escorial. El pentagrama místico es riquísimo en armonías geométricas: las diagonales del pentágono se cortan en proporción áurea, siendo el segmento mayor igual al lado del pentágono. Valga, para reflejar la perfección de la proporción áurea —presente en muchos otros segmentos del pentagrama místico—, el soneto que le dedicara Rafael Alberti:

A ti, maravillosa disciplina/ media, extrema razón de la hermosura/ que claramente acata la clausura/ viva en la malla de tu ley divina.// A ti, cárcel feliz de la retina/ áurea sección, celeste cuadratura/ misteriosa fontana de mesura/ que el universo armónico origina.// A ti, mar de los sueños angulares/ flor de las cinco formas regulares/ dodecaedro azul, arco sonoro.// Luces por alas un compás ardiente./ Tu canto es una esfera transparente./ A ti divina proporción de oro.

ANTIGUA CIVILIZACIÓN CHINA

Las civilizaciones china e hindú se remontan a lo que se conoce hoy en día como Edad Potámica. La civilización china tuvo su cuna en la cuenca de los ríos Yangtze y Amarillo y el primer imperio chino data del año 2750 a.C., aunque algunos historiadores creen que estuvo más cerca del año 1000 a.C.

La tarea de fechar los documentos matemáticos chinos no es fácil. Por ejemplo, las estimaciones que se han hecho acerca del *Chou Pei Suan Ching*, escrito en forma de diálogo entre un príncipe y su ministro que está considerado en general como el texto chino más antiguo de contenido matemático, difieren entre sí en casi mil años, ya que se le atribuyen varios autores de distintas épocas comprendidos entre 1200 a.C. y 300a.C. donde en esta última fecha, esta obra, coincidiría con otro tratado matemático muy importante *Chui-chang suan-shu* o los *Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático,* poco antes de la dinastía Han (200 a.C.- 220 a.C.). Esta obra ejerció una gran influencia en los libros matemáticos chinos posteriores; incluye 246 problemas sobre agrimensura, agricultura, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos. En muchos casos la resolución de problemas conduce a sistemas de ecuaciones lineales utilizando números positivos y negativos.

Los *Nueve Capítulos* nos recuerdan en cierta manera a la matemática egipcia por su uso del método de la “falsa posición”, pero lo cierto es que la invención de este procedimiento, lo mismo que el origen de la matemática china en general, parece haber sido independiente de toda influencia occidental.

Mayor interés histórico y matemático despierta el *SSu-yüan yü-Chien* o “Espejo Precioso de los Cuatro elementos” escrito por Chu Shih-Chieh en 1303. Los cuatro elementos a los que se refiere el título, que son el cielo ,la tierra el hombre y la materia , representan las cuatro incógnitas de una ecuación. Este libro marca la cota más alta que alcanzó el desarrollo del álgebra china, y en él se estudian tanto sistemas de ecuaciones simultáneas como ecuaciones individuales de grados tan altos como catorce. Chu Shih-Chieh explica un método de transformación para ecuaciones, que él llama el *fan fa* y cuyo fundamento debe de haber aparecido en China mucho tiempo atrás. Este método suele conocerse en occidente con el nombre de “método de Horner”, matemático que vivió medio milenio más tarde, y consiste en evaluar de manera eficiente polinomios de una forma monomial.

Un ejemplo que vienen el libro de Chu Shih-Chieh para resolver la ecuación $x^2 + 252x - 5292 = 0$ es :

obtene en primer lugar por tanteo la aproximación $x = 19$, lo que significa que la ecuación tiene una raíz entre $x = 19$ y $x = 20$, a continuación utiliza el *fan fa*, en este caso la transformación $y = x - 19$ para obtener la ecuación $y^2 + 290y - 143 = 0$ con una raíz entre $y = 0$ e $y = 1$. El valor aproximado de la raíz buscada de esta última es $y = 143/(1+290)$ y por tanto el correspondiente valor de x es 19 —— . En algunos casos Chu Shih-Chieh obtiene aproximaciones decimales de las raíces.

El llamado "método de Horner" era bien conocido en China ,ya que por lo menos otros matemático del periodo Sung (960-1224) tardío hicieron uso de procedimientos análogos. Uno de ellos fue Ch'in Chiu-Shao (1202-1261) donde su obra *Shu-Shu Chiu-Chan*g o "Tratado matemático en nueve secciones" marca el punto culminante del análisis indeterminado chino con la invención de reglas rutinarias para resolver sistemas de congruencias simultáneas, y el cálculo de la raíz cuadrada por etapas, paralelamente a lo que se hace en el "método de Horner".

LA CIVILIZACIÓN HINDÚ

Las excavaciones arqueológicas que se han realizado en Mahenjo Daro (valle indio que aguardó una gran población) muestran la existencia de una vieja civilización con un alto nivel cultural, contemporánea de los egipcios, pero de la cual no existe ningún documento matemático de aquella época. Un milenio más tarde, el país fue ocupado por los invasores arios, procedentes de las altiplanicies de Irán, quienes introdujeron el sistema social de castas y desarrollaron la literatura sánscrita.

En el caso de la matemática hindú, nos encontramos con una sorprendente falta de continuidad. Las importantes contribuciones matemáticas se han realizado en periodos separados por largos intervalos de tiempo.

La primera época matemática se conoce como el periodo de los *Sulvasutras* o "regla de la cuerda", que terminó hacia el siglo II d.C. Este nombre hacía alusión a la operación de extender o tensar las cuerdas para efectuar mediciones y guardar los datos obtenidos según unas reglas marcadas. Estos conocimientos geométricos, algo primitivos, sirvieron para la planificación de templos y construcciones de altares.

La segunda época de la matemática hindú, conocida también como el "periodo alto", abarca desde el año 200 d.C. al año 1200 d.C. Este periodo es el más importante, especialmente en lo referente al álgebra hindú, ya que ésta alcanzó su plenitud gracias a cuatro destacados matemáticos :
Aryabhata (nacido el 476), Brahmagupta (nacido el 598), Mahavira (sigloIX) y Bhaskara (1114-1185).

Muchos de sus trabajos, y en general los de los matemáticos indios, estaban motivados por la astronomía y la astrología, de hecho la mayor parte del material matemático aparece en capítulos de libros de astronomía.

La primera obra que se conoce de este periodo fue la del matemático Arybhata: *Aryabhatiya*, libro bastante análogo a los *Elementos* de Euclides. Ambas obras son recopilaciones de desarrollos anteriores compiladas por un único autor. Pero a diferencia de los *Elementos*, *Aryabhatiya* está compuesta por 123 estrofas métricas y no tiene ninguna relación con la metodología deductiva.

Uno de los grandes progresos de la matemática hindú en la rama del álgebra fue el uso de abreviaturas de palabras y algunos símbolos para describir las operaciones. Como en el caso de Diofanto, no había ningún símbolo para la adición, una tilde sobre el sustraendo indicaba sustracción , otras operaciones se designaban con palabras clave o abreviaturas. Por ejemplo *ka*, de la palabra "karama" indicaba raíz cuadrada. Para las incógnitas utilizaban palabras que denotaban colores. Este simbolismo aunque no era exhaustivo, es suficiente para que se pueda clasificar el álgebra hindú como cuasisimbólica, y en realidad lo era más que el álgebra sincopada de Diofanto. Los problemas y sus soluciones correspondientes se escribían en este estilo cuasisimbólico, y sólo se daban los pasos y no iban acompañados de justificaciones ni demostraciones.

Los indios sabían que las ecuaciones cuadráticas tenían dos raíces e incluían las negativas y las irracionales. Los tres tipos de ecuaciones cuadráticas

$ax^2 + bx = c$, $ax^2 = bx + c$, $ax^2 + c = bx$ con a, b, c positivos estudiados por Diofanto de manera independiente, fueron tratados por dos de los matemáticos hindúes antes mencionados, Brahmagupta y Bhaskara, como un solo caso $px^2 + qx + r = o$ porque admitían que algunos coeficientes podían ser negativos. Para ello utilizaban el método de completar cuadrado.

En las ecuaciones indeterminadas avanzaron más allá que Diofanto. Estas ecuaciones surgieron en problemas de astronomía, las soluciones mostraban cuándo ciertas constelaciones habían aparecido en el firmamento. Brahmagupta y Bhaskara consideraban todas las soluciones enteras, mientras que Diofanto tomaba una única solución racional. El procedimiento para obtener las soluciones enteras de $ax \pm bx = c$ donde a, b y c son números enteros positivos era la siguiente: ellos sabían que para que la ecuación tuviese soluciones enteras, a y b debían dividir a c, y además Brahmagupta descubrió que si a y b eran primos entre sí, todas las soluciones de la ecuación vendrían dadas por las fórmulas $x = p + mb$ e $y = q - ma$, donde m es un número arbitrario.

Brahmagupta también estudió la ecución diofántica cuadrática $x^2 = 1 + py^2$, la cual recibe el nombre erróneo de ecuación de J. Pell (1611-1685), y su colega Bhaskara resolvió algunos casos particulares.

Bhaskara, último matemático medieval importante en la India, plasmó las contribuciones hindúes anteriores a su época , en especial los problemas planteados por Brahmagupta, en su tratado más conocido, el

Lilavati (título que toma del nombre de su hija) y en otra obra menos conocida llamada *Vija-Ganita*.

LA CULTURA ÁRABE

La península arábiga estaba habitada en el siglo VI por nómadas del desierto, los beduinos, que no sabían leer ni escribir. En esta época apareció el profeta Mahoma, quien en medio siglo consiguió formar un estado "mahometano" con centro en La Meca. En el año 622 muere Mahoma, pero esto no entorpece la expansión de la cultura islámica. En unos veinte años conquistan Damasco, Jerusalén y Alejandría; el valle mesopotámico está bajo su mandato.Y en el siglo VIII ocupan España y Marruecos. Esto, crea una pequeña fisura entre los árabes de Oriente y los de Occidente, por lo que nos damos cuenta que su unidad era más económica y religiosa que política.

Su despertar intelectual fue gracias al califa Al-Mamun quien ordenó traducir todas la obras griegas existentes al árabe y fundó la Casa de la Sabiduría en Bagdad, donde los miembros de esta especie de universidad estudiaban las obras antiguas e investigaban en el terreno científico.

Al álgebra contribuyeron antes que nada con el nombre. La palabra álgebra viene de un libro escrito en año 830 por el astrónomo Mohamed ibn Musa al-Khowârizmî, titulado *Al-jabr w´al muqâbala*, que significa restauración y simplificación.

Como ya hemos dicho, a veces se le llama a Diofanto el padre del álgebra, pero según muchos este título se le aplicaría mejor a Al-Khowârizmî. Aunque sea verdad que al menos en dos aspectos la obra de Al-Khowârizmî representa un retroceso respecto a la de Diofanto : es de un nivel mucho más elemental y el álgebra de Al-Khowârizmî es completamente retórica, sin ninguna de las sincopaciones que se encuentran en la *Aritmética* de Diofanto o en la obra del matemático hindú Brahmagupta. Aunque es probable que Al-Khowârizmî hubiese estado familiarizado con las obras de estos dos matemáticos.

No obstante *Al-jabr w´al muqâbala* está más próxima al álgebra elemental moderna que a las obras de Diofanto o de Brahmagupta, ya que el libro no trata de difíciles problemas de análisis indeterminado, sino de la exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones, en especial de las de segundo grado. Esto se debe a que en general, a los árabes les gustaba poder seguir una argumentación lógica, correcta y clara de las premisas a la conclusión, así como una organización sistemática.

Pero de lo que no hay duda es de que ninguna rama de la matemática nace ya completamente crecida , y el álgebra árabe tiene claramente influencias babilónicas, hindúes y griegas.

El libro de Al-Khowârizmî empieza exponiendo, en seis breves capítulos, la solución de los seis tipos de ecuaciones que resultan al considerar simultáneamente en presencia los tres posibles tipos de cantidades: cuadrados, raíces y números, es decir, x^2, x y constante.

· El capítulo I abarca en tres párrafos el caso de los cuadrados igual a raíces, que se puede expresar en notación moderna como , $x^2 =5x$, $x^2/3 =4x$, $5x^2 =10x$ (la raíz igual a cero no se reconoce como tal).

· El capítulo II cubre el caso de los cuadrados igual a números y el capítulo III resuelve el caso de las raíces igual a números .
Los capítulos IV, V ,VI son más interesantes, ya que se ocupan de la resolución de los tres casos clásicos que presentan las ecuaciones cuadráticas completas:

-cuadrados y raíces igual a números
-cuadrados y números igual a raíces
-raíces y números igual a cuadrados

Las soluciones consisten en “recetas” para “completar el cuadrado” aplicadas a ejemplos concretos.

· En el capítulo IV incluye los tres casos particulares siguientes:
$x^2 +10x =39$; $2x^2+10x =48$ y $x^2/2+5x =28$; en cada una da solamente la solución positiva.

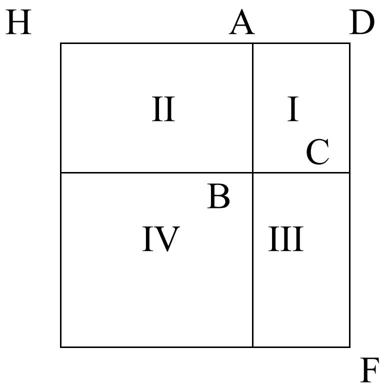
En el capítulo V se da un único ejemplo , la ecuación $x^2 +21 =10x$, de la que se calculan las dos raíces, $x =3$, $x =7$ obtenidas a partir de la regla

$$x = 5\pm \sqrt{25-21}.$$

· En el capítulo VI el autor vuelve a dar un único ejemplo y nos advierte de que si el coeficiente de x^2 no es la unidad, entonces se debe reducir la ecuación a esta forma antes de completar cuadrados.

Estos seis tipos de de ecuaciones que se han mencionado agotan todas las posibilidades de ecuaciones lineales y cuadráticas que tengan una raíz positiva.

Aunque Al-Khowârizmî da soluciones algebraicas de las ecuaciones cuadráticas, en algún momento se ve influenciado por la confianza que tenían los griegos en el álgebra geométrica, a la vez que aritmetizaban el problema, debían pensar que la demostración había que hacerla con métodos geométricos. Así, que para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$, Al-Khowârizmî en su libro da el siguiente razonamiento geométrico:



Sea AB el segmento que representa el valor de la incógnita x y construyamos el cuadrado ABCD. Prolonguemos DA hasta H y DC hasta F de manera que AH =CF =5, que es la mitad del coeficiente de x. Entonces las áreas I, II y III son x^2, $5x$ y $5x$ respectivamente. La suma de las tres es el primer miembro de la ecuación. Añadimos ahora a ambos miembros el área IV. Luego el cuadrado completo tiene área 39 +25 ó 64 y su lado debe valer 8. Por tanto AB o AD es 8-5 ó 3. Este es el valor de x. El argumento geométrico se basa en la proposición cuatro del libro II de los *Elementos* de Euclides.

El libro de Al-Khowârizmî contiene además de la resolución de ecuaciones, que ocupa aproximadamente la mitad del libro, reglas para operar con expresiones binómicas, incluyendo productos tales como $(10+x)(10-x)$, demostraciones geométricas para la resolución de ecuaciones, como ya hemos visto, y por último una gran variedad de problemas que sirven para ilustrar los casos tratados en los seis capítulos ya citados, por ejemplo:

"Muere un hombre dejando dos hijos y legando un tercio de su capital a un extraño el hombre deja unas propiedades que valen diez dirhams y una reclamación de deuda de diez dirhams a sus hijos".

Los árabes resolvieron también algunas ecuaciones cúbicas de forma algebraica y en algunos casos dieron una justificación geométrica. Uno de ellos fue el físico y astrónomo Alhazen Tâbit.

En el siglo X vivió otro gran algebrista llamado Abu Kamil, quien continuó los trabajos de Al-Khowârizmî y sus avances en las leyes fundamentales e identidades del álgebra, fueron utilizados más tarde por algunos matemáticos de la Europa Medieval.

La resolución de ecuaciones cúbicas con el uso de intersecciones de cónicas es el mayor avance hecho por los árabes en álgebra. También resolvieron ecuaciones indeterminadas de segundo y tercer grado; y un par de autores se dedicaron a estudiar la ecuación $x^3+y^3=z^3$ aunque no pudieron resolverla completamente.

EUROPA MEDIEVAL

Tras la caída del imperio romano en el año 476, Europa comienza una nueva etapa, conocida como Edad Media que finalizaría a principios del siglo XIV.

El punto de arranque de las matemáticas en Europa fue la creación de los centros de enseñanza. Con anterioridad, tan solo algunos monjes se habían dedicado a estudiar las obras de carácter matemático de los antiguos. Uno de los primeros centros de enseñanza fue organizado en Reims, ciudad francesa, por Gerberto (Silvestre II) a finales del siglo X. Gerberto, fue posiblemente el primero de Europa que enseñó el uso de los numerales indo-arábigos. Sin embargo, hubo que esperar a que los musulmanes rompieran la barrera lingüística, hacia el siglo XII, para que surgiera una oleada de traducciones que pusiera en marcha la maquinaria matemática. Tras estas traducciones en árabe, entra en escena el importante papel que desempeñaron los traductores españoles, ya que éstos a su vez tradujeron las obras del árabe al latín, permitiendo su difusión por Europa. Uno de los traductores más importantes fue Gerardo de Carmona (1114-1187), quien tradujo del árabe los *Elementos* de Euclides, el *Almagesto* de Ptolomeo y el *Álgebra* de Al-Khowarizmi.

Los principales centros en los que se desarrolló este punto de arranque matemático en Europa fueron las universidades de Oxford, París, Viena y Erfurt (estas dos últimas fundadas en los años 1365y 1392 respectivamente).

Cabe destacar a tres matemáticos del siglo XII y XIII procedentes de sectores sociales muy distintos, que contribuyeron a popularizar el "algorismo":

-Alexandre de Villedieu fue un franciscano francés que escribió *Carmen de algoritmo*, una obra lírica en la que se describen con detalle las operaciones fundamentales con los enteros utilizando los numerales hindú-arábigos y considerando al cero como un número.

-John de Halifax (1200-1265) conocido también como Sacrobosco, fue un maestro inglés que contribuyó con su obra *Algorismus vulgaris*, manual práctico de cálculo que rivalizó en popularidad con su otra famosa obra: *Sphaera,* un tratado sobre astronomía que se usó en las escuelas a lo largo de la Edad Media tardía.

-Y el tercero y más importante fue Leonardo de Pisa (1170 - 250), más conocido como Fibonacci o "hijo de Bonaccio". Fue educado en África y viajó extensamente por Europa y Asia Menor, gracias a lo que pudo aprender el sistema de numeración indo-arábigo. En 1202, Fibonacci escribió su *Liber Abaci* (el libro del ábaco), un tratado muy completo sobre métodos y problemas algebraicos en el que se recomienda con gran insistencia el uso de los numerales hindú-arábigos.

El *Liber Abaci* no es un libro cuya lectura resulte precisamente gratificante al lector moderno porque explica los procesos algorítmicos o aritmético usuales, incluida la extracción de raíces en problemas de transacciones comerciales, utilizando para ello un complicado sistema de fracciones al calcular los cambios de moneda .No deja de ser una de ser una de las ironías más notables de la historia que la principal ventaja del sistema de notación posicional, es decir, su aplicación a las fracciones, pasase casi desapercibido a los que utilizaron los numerales indo-arábigos durante los primeros mil años de su existencia.

Tanto en el *Liber Abaci* como en su trabajo posterior: *Liber Quadratorum* (1225), Leonardo se ocupó del álgebra. Siguió a los árabes en usar palabras en lugar de símbolos y basar el álgebra en métodos aritméticos. Expuso la solución de ecuaciones determinadas e indeterminadas de primer y segundo grado, así como de algunas ecuaciones cúbicas. Al igual que Khayyam (matemático árabe), creía que las ecuaciones cúbicas no podían ser resueltas algebraicamente.

La característica nueva más significativa del trabajo de Leonardo es la observación de que la clasificación de Euclides de los irracionales en el libro X de los *Elementos* no incluía todos los irracionales. Fibonacci mostró que las raíces de la ecuación $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ no pueden construirse con regla y compás. Esta fue la primera indicación de que el sistema de números contenía más de los que permitía el criterio griego de existencia basado en la construcción mencionada.

Pero a pesar de todo, Fibonacci quedaría inmortalizado por la famosa sucesión que lleva su nombre y su no menos conocido "problema de los conejos".

RENACIMIENTO

Durante los siglos XV y XVI hubo un vasto movimiento de revitalización de la cultura en Europa Occidental. El nombre de Renacimiento es debido a que se retomaron los elementos de la cultura clásica tanto en el ámbito del arte como en el estudio de los científicos antiguos. El invento de la imprenta ayudó notablemente a que este movimiento cultural pudiese expandirse de una manera rápida por toda Europa.

Los matemáticos del Renacimiento prepararon el terreno para el resurgir del estudio matemático en Europa mediante las traducciones de los trabajos griegos y árabes y los trabajos enciclopédicos de compilación del conocimiento existente. Pero las motivaciones y direcciones de las creaciones matemáticas surgieron principalmente de los problemas tecnológicos y científicos. Pero hubo algunas excepciones, como es el caso del crecimiento del álgebra.

Ya en el siglo XV Regiomontano fue el matemático que más enriqueció el álgebra, su rama de las matemáticas favorita, aunque su influencia se vio limitada por su adhesión a la forma de expresión retórica y por su temprana muerte. Después de su fallecimiento, sus manuscritos fueron a parar a las manos de otro matemático, Nuremberg, quien no logró hacer accesible la obra de Regiomontano en los años posteriores. Así, Europa continuó aprendiendo su álgebra de forma lenta dado a la escasez de traducciones que discurrían por las universidades y el poco interés que mostraban muchos humanistas por las ciencias.

Hasta la aparición del *Ars Magna* de Cardano en 1545, no hubo en el Renacimiento desarrollos trascendentes en álgebra. Sin embargo, merecen ser mencionadas algunas obras que contribuyeron a que esta rama de las matemáticas no quedase en el olvido.

El trabajo de un fraile italiano llamado Luca Pacioli(1445-1514), su principal publicación es la *Summa* , una recopilación de material de cuatro campos distintos: aritmética, álgebra, geometría euclídea y contabilidad de doble entrada. Fue escrita en lengua vernácula y la parte dedicada al álgebra incluye las soluciones de las ecuaciones lineales y algunas soluciones de las cuadráticas. Su álgebra es retórica; sigue a Leonardo y a los árabes al llamar a la incógnita la "cosa" y, al cuadrado de la incógnita "census", que a veces abrevia como "ce" o "Z"; el cubo de la incógnita , "cuba", se presenta a veces como "cu" o "C. Al escribir ecuaciones, cuyos coeficientes son siempre numéricos, coloca los términos en el lado que permite la utilización de coeficientes positivos y sólo da las raíces positivas. La parte del libro dedicada al álgebra termina con la observación de que la solución de las ecuaciones

$x^3 + mx = n$ y $x^3 + n = mx$ son tan imposibles como la cuadratura del círculo. Gracias al amplio conocimiento disponible en el libro, fue más usada de lo que le correspondería por su originalidad.

A parte de la innegable influencia de Italia durante el despegue cultural del siglo XV y XVI, en otros lugares Europeos no se quedaron rezagados. En Alemania los libros de álgebra publicados llegaron a ser tan numerosos que durante algún tiempo se impuso en casi toda Europa el uso de la palabra alemana "coss" para designar a la incógnita y el álgebra misma vino a llamarse "el arte cósico" o "arte de la cosa". Entre la numerosas álgebras germánicas cabe destacar la *Die Coss* , escrita en 1524 por el famoso matemático alemán Adam Riese (1492-1559). Este autor fue el más influyente de los matemáticos alemanes por su tendencia de reemplazar los viejos métodos de cálculo basados en el uso de cuentas o fichas, o bien de los numerales romanos, por los nuevos métodos utilizando pluma y los numerales hindú-árabes. Sus numerosos textos de aritmética resultaron ser tan efectivos que aún se usa en Alemania la frase "Nach Adam Riese" como un elogio a la exactitud en los cálculos aritméticos. Riese menciona también en su *Die Coss* el *Álgebra* de Al-Khowârizmî y cita además a un cierto número de predecesores alemanes en este campo. Entre ellos se encuentran la *Coss* (1525) de Christoph Rudolff, el *Rechnung* (1527) de Peter Apian y la *Aritmética integra* (1544)de Michael Stifel.

La primera obra es importante por ser uno de los primeros libros impresos que hace uso de las fracciones decimales, así como del símbolo moderno para las raíces; la segunda es notable por el hecho de que en ella en una aritmética comercial a fin de cuentas, aparece impreso en la portada el llamado "triángulo de Pascal", casi un siglo antes del nacimiento de Pascal. Y la tercera de las obras que se ha mencionado, *Aritmética integra*, fue la más importante de las tres, trata los números negativos, la raíces y las potencias. Mediante el uso de los coeficientes negativos en las ecuaciones, Stiffel pudo reducir la multiplicidad de casos de ecuaciones cuadráticas a una forma única, pero como contrapartida tenía que explicar por medio de una regla especial cuándo usar el signo + y el signo - . Para las sucesivas potencias de la cantidad incógnita en álgebra, propuso utilizar una letra única para representar la incógnita, y repetir dicha letra para las potencias más elevadas de la incógnita tantas veces como indique la potencia en cuestión.

Stiffel daba en su obra muchos ejemplos que conducían a ecuaciones cuadráticas , pero ninguno de sus problemas conducía a una ecuación cúbica, por la sencilla razón de que no había nada más sobre la resolución algebraica de las cúbicas que lo que sabían Pacioli o Khayyam.

Sin embargo en al año 1545 se divulgó la solución no sólo de la ecuación cúbica, sino también de la cuártica, gracias a la publicación del *Ars Magna* de Jerónimo Cardano (1501-1576).Un avance tan sorprendente e inesperado como éste produjo un impacto tan importante en el mundo de los algebristas, que el año1545 se suele consideras a menudo como el que marca el comienzo del periodo moderno en la matemática. No obstante, Cardano afirma en su libro que no fue el descubridor original de la solución de la ecuación cúbica ni de la cuártica. La sugerencia para resolver la cúbica la obtuvo de Niccolo Tartaglia (1500-1557), que a su vez obtuvo la idea de Scipione del Ferro (1465-1526) un profesor de matemáticas que nunca llegó a publicar la solución, sino que se la reveló antes de su muerte a uno de sus alumnos, Antonio María Fior, un matemático mediocre. Mientras, la solución de la cuártica fue descubierta por primera vez por el antiguo secretario de Cardano, Ludovico Ferrari (1522-1565).

Sea como fuere, estos desarrollos abrieron las puertas a muchos otros hallazgos matemáticos en los siglos posteriores.

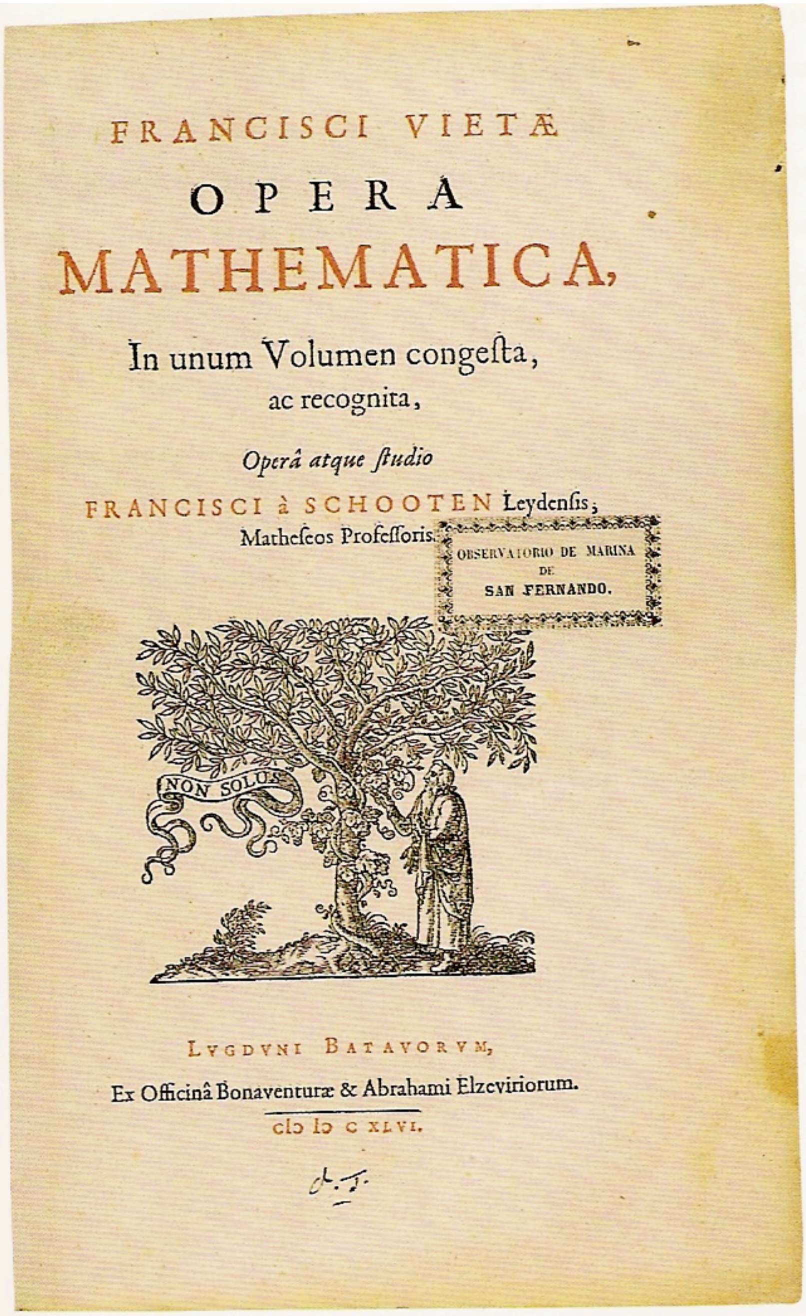
En el *Ars Magna* aparece además el genial descubrimiento de que un polinomio es divisible por los factores del tipo *(x-a)* donde *a* es raíz del polinomio, aunque no se da ninguna demostración.

Una de las consecuencias más importantes tras la publicación del *Ars magna* fue que la solución de la ecuación cúbica condujo a las primeras consideraciones significativas acerca de un nuevo tipo de número. Tuvieron que aceptar la existencia de los número irracionales y de los números negativos, pero estos últimos presentaban más dificultades ya que no se les podía aproximar por números positivos a diferencia de los irracionales que podían ser aproximados fácilmente por números racionales. Cardano se encontraba a menudo con el problema de que la fórmula para resolver ecuaciones cúbicas le conducía a raíces cuadradas de números negativos.

Ante este problema, otro importante algebrista italiano Rafael Bombelli (1526-1573) tuvo una genial idea, como los dos radicandos bajo las raíces cúbicas que aparecen en la fórmula final solo difieren en un signo, Bombelli imaginó que los radicales mismos podían estar relacionados entre sí de la misma manera que lo están los radicandos; es decir, lo que ahora nosotros denominaríamos como complejos conjugados. Pero Bombelli se encuentró con que necesitaba conocer de antemano una de las raíces de la ecuación, y sin tal conocimiento previo su planteamiento fallaba. Bombelli plasmó todas sus ideas en su obra póstuma *Álgebra.*

Uno de los avances más significativos en el álgebra durante el siglo XVI fue la introducción de un mejor simbolismo, lo que hizo posible hacer una ciencia del álgebra. Los símbolos + y - fueron introducidos por los alemanes en el siglo XV para denotar excesos y defectos en los pesos de cofres y arcas; el símbolo × para la multiplicación lo introdujo William Oughtret y el símbolo = fue obra de Robert Recorde, matemático en Cambridge, donde escribió un tratado sobre el álgebra, *The Whet-stone of Witte;* en él decía que no conocía dos cosas más iguales que dos líneas paralelas y por tanto este tipo de líneas debían denotar la igualdad.

Pero sin duda el cambio más significativo en el carácter del álgebra relacionado con el simbolismo fue introducido por François Viète (1540-1603) un abogado francés cuyo interés por las matemáticas era puro entretenimiento y describe su *In Artem Analyticam Isagoge* como la obra del análisis matemático restaurado. Viète traza la línea divisoria entre la aritmética y el álgebra y propone utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone en álgebra desconocida o indeterminada, y una constante para representar una magnitud o un número que se supone conocido o dado. Esta distinción entre el concepto de parámetro y la idea de incógnita fue un paso previo a la matemática moderna.



FRANCISCI VIETÆ

OPERA

MATHEMATICA,

In unum Volumen congesta,

ac recognita,

Operâ atque studio

FRANCISCI à SCHOOTEN Leydensis,

Matheseos Professoris.

LUGDUNI BATAVORUM,

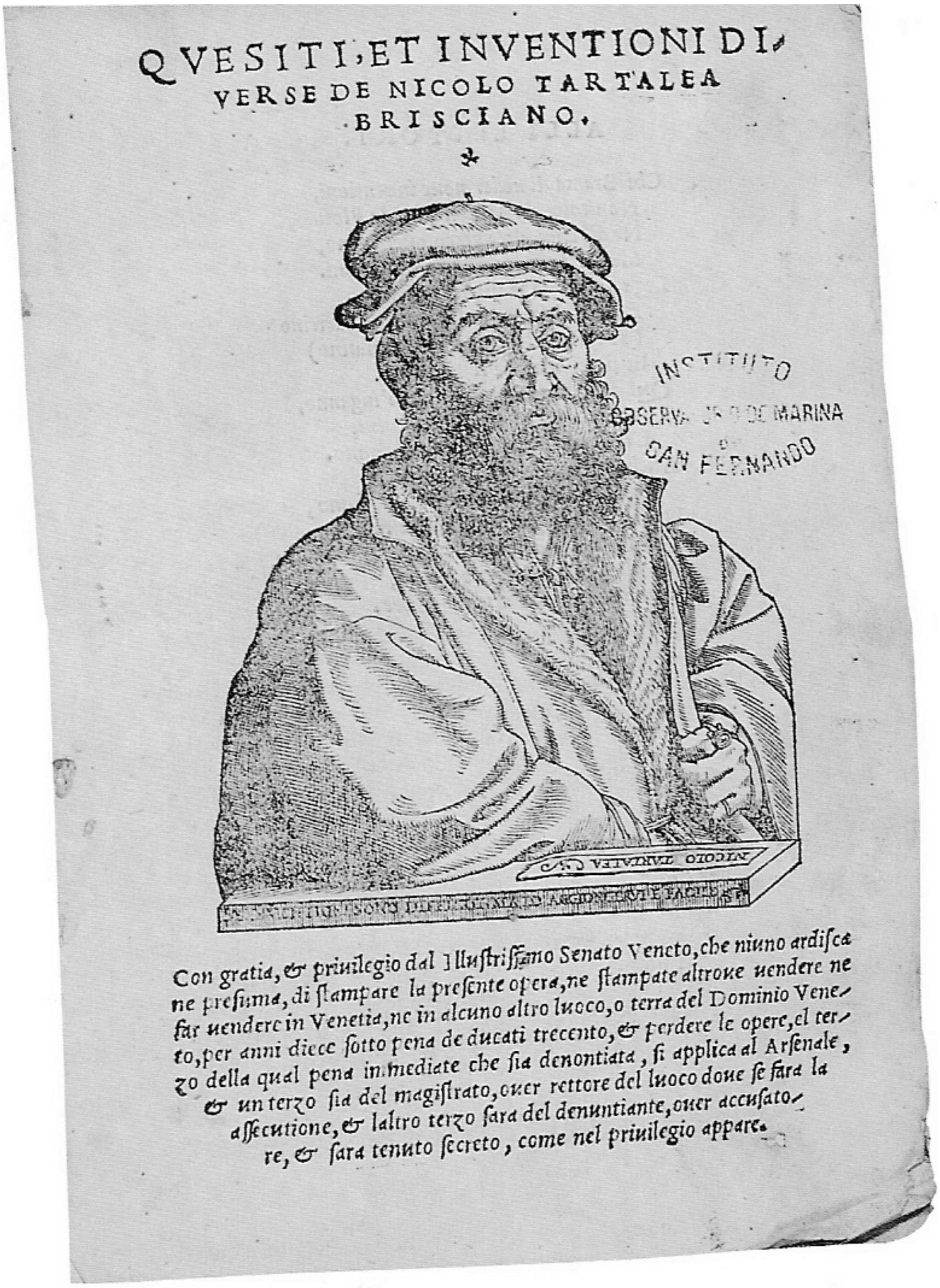
Ex Officinâ Bonaventuræ & Abrahami Elzeviriorum.

CIↃ IↃ C XLVI.

François Viète

Opera mathematica (Leiden, 1646; n. 121)

Ejemplar de la primera edición de las obras matemáticas de Viète; las editó Van Schooten tres años antes de publicar la *Geometría* de Descartes separada del *Discurso del método* y en latín. Fue una pena que Viète no adoptara todas los avances en la notación que se produjeron en su época: constituían el complemento idóneo para hacer más productiva su *logistica speciosa*. Por ejemplo: la fórmula que hoy escribimos $A^3+3A^2B+3AB^2+A^3$, Viète la escribía como, «*A* cubus + *B* quadrato in *B* ter + *A* in *B* quadratum ter + *B* cubo». Viète usaba la notación + y – para suma y diferencia —se había ido imponiendo por toda Europa desde Alemania conforme avanzaba el siglo XVI—, sin embargo no usó la notación de Stifel para las potencias: donde nosotros escribimos A^3 Stifel escribía *AAA*, que es, desde luego, más versátil que el *A cubus* de Viète.



QVESITI, ET INVENTIONI DI-
VERSE DE NICOLO TARTALEA
BRISCIANO.

Con gratia, & priuilegio dal Illustrissimo Senato Veneto, che niuno ardisca ne presuma, di stampare la presente opera, ne stampate altroue uendere ne far uendere in Venetia, ne in alcuno altro luoco, o terra del Dominio Veneto, per anni diece sotto pena de ducati trecento, & perdere le opere, el terzo della qual pena immediate che sia denontiata, si applica al Arsenale, & un terzo sia del magistrato, ouer rettore del luoco doue se fara la assecutione, & laltro terzo sara del denuntiante, ouer accusatore, & sara tenuto secreto, come nel priuilegio appare.

Niccolo Tartaglia

SIGLO XVII

Hacia el año1575, Europa occidental había recuperado ya la mayor parte de las obras matemáticas más importantes de la antigüedad. El álgebra árabe no sólo había sido asimilada, sino mejorada gracias a la resolución de las ecuaciones cúbicas y cuárticas y el uso de un cierto simbolismo. Por tanto Europa estaba preparándose para la matemática del mundo moderno. Pero este salto no hubiera sido posible sin una excelente transición del Renacimiento al mundo moderno.

Esto fue posible gracias a la intensa intercomunicación que hubo entre los distintos matemáticos de este siglo, algo que no existía desde los tiempos de Platón. Todavía no existía ninguna organización matemática de tipo profesional, pero en países como Italia, Francia e Inglaterra ya había algunos científicos que estaban más o menos organizados. En Italia estaban las Accademias dei Lincei y del Cimento, en Francia el Cabinet Du Puy y el Invisible College en Inglaterra. Además hubo un fraile, Marin Mersenne, que se encargó de que la información sobre nuevos hallazgos matemáticos circulase por todo el ámbito científico con una rapidez y eficacia inusual hasta el momento.

Este preludio a la matemática moderna viene marcado por grandes figuras matemáticas.

El escocés John Napier (1550-1617) con su *obra Canonis mirifici logarithmorum descripto* ; los ingleses Henry Briggs (1561-1639), Thomas Harriot (1598-1621) y William Oughtred (1574-1660), éste último introdujo el aspa × para denotar a la multiplicación en su libro *Clavis mathematicae,* y el flamenco Albert Girad (1590-1633) quien en su obra *Invention nouvelle* adopta una notación algo singular, las potencias están escritas con números dentro de círculos. Pero el álgebra simbólica alcanza su madurez ocho después de la publicación de la obra de Girad, aparece *La Géométrie* de René Descartes(1596-1650), que sitúa a Francia en el centro del mundo matemático, durante el último tercio del siglo XVII.

Descartes comienza *La Géométrie* con la resolución de problemas geométricos mediante el álgebra. Primero muestra cómo se pueden interpretar geométricamente las operaciones algebraicas, incluida la resolución de las ecuaciones cuadráticas, y a continuación Descartes se centra en la aplicación del álgebra a determinados problemas geométricos formulando el planteamiento general de una manera mucho más clara que los "cosistas" del Renacimiento. A lo largo de los libros I y III se dedica a este tipo de problema geométrico en el que la ecuación algebraica resultante sólo puede contener una incógnita. Él sabía muy bien que el grado de esta ecuación final era el que determinaba los métodos geométricos con ayuda de los cuales podría efectuarse la construcción geométrica pedida. Descartes comenzaba con el estudio de un problema puramente geométrico para traducirlo a continuación al lenguaje de una ecuación algebraica. Él insistía en que al resolver geométricamente una ecuación se deberían utilizar únicamente los métodos más sencillos compatibles con el grado de la ecuación. Para las ecuaciones cuadráticas son suficientes rectas y circunferencias y para las cúbicas y las cuárticas bastan las cónicas.

En el Tercer libro de *La Géométrie*, Descartes afirma que una ecuación puede tener tantas raíces como el número de dimensiones (el grado) de la incógnita , usando la expresión "puede tener", por considerar las raíces negativas como falsas. Más tarde, al incluir las raíces imaginarias y las negativas a efectos de contar las raíces, concluyó que hay tantas como indica el grado. Descartes en esta obra enunció sin demostración la regla de los signos conocida como "regla de Descartes ", que afirma que el máximo número de raíces positivas de $f(x)=0$ donde f es un polinomio, es el número de variaciones del signo de los coeficientes, y que el máximo número de raíces negativas es el número de apariciones de dos signos "+"o dos signos "-"consecutivamente. En terminología actual, la última parte de la regla afirma que el número máximo de raíces negativas es el número de variaciones en la ecuación $f(-x)=0$. Esta regla fue demostrada por varios matemáticos del siglo XVIII.. Descartes también enuncia y demuestra en este tercer libro que $f(x)$ es divisible por $(x-a,)$ con a positivo, si y sólo si a es una raíz de $f(x)=0$ y por $(x+a)$ si y sólo si a es una raíz falsa. Con este y otros resultados, Descartes establece el método moderno de hallar las raíces racionales de una ecuación polinómica.

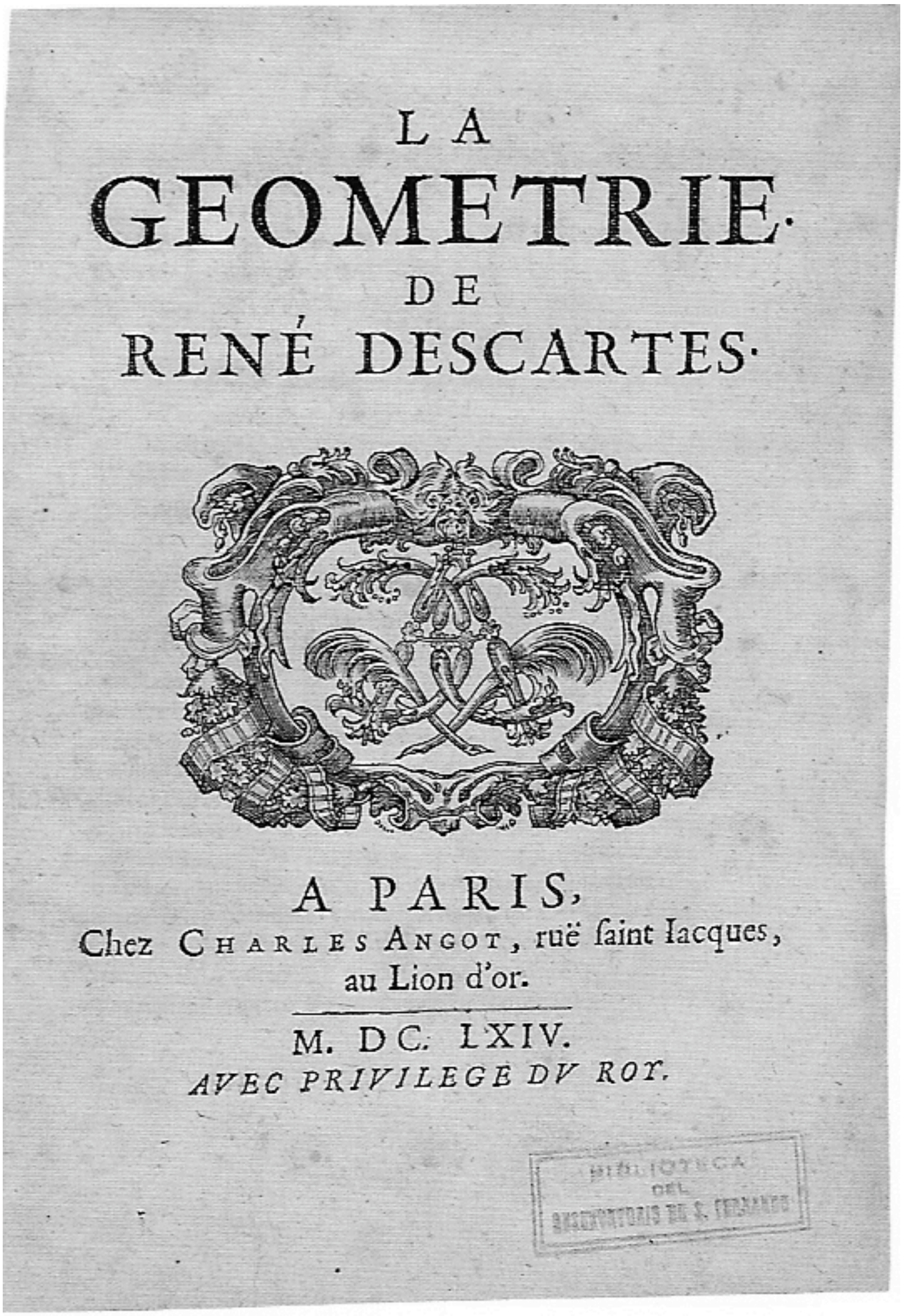
En *La Géométrie*, introduce el principio de coeficientes indeterminados, que puede ilustrarse del siguiente modo:

para descomponer (x^2-1) en dos factores lineales, expresamos $x^2-1= (x+b)(x+d)$, seguidamente realizamos la multiplicación en el segundo miembro e igualamos los coeficientes de las potencias de x en ambos lados, obteniendo $b+d =0$ y $bd =-1$ de donde podremos conocer b y d. Descartes insistió en la utilidad de este método.

Aunque Descartes usó las mejoras en la notación algebraica , su libro no es fácil de leer, de hecho Descartes presumía de que pocos matemáticos en Europa podían entender su trabajo, tal vez por ello , la difusión del empleo de ecuaciones algebraicas para representar y estudiar curvas fue lento.

Descartes ve en el álgebra un poderoso método de guía del razonamiento con cantidades desconocidas y abstractas. En su visión el álgebra mecaniza la matemática de forma que el pensamiento y los procesos se simplifican. Por ello, propone tomar lo mejor del álgebra y la geometría y corregir los defectos de una con la ayuda de la otra .Así crea lo que se denominará geometría analítica. Él fue el primero en asignar al álgebra un lugar fundamental en el sistema de conocimiento. Y al argumentar que una curva es cualquier lugar geométrico que tiene una ecuación algebraica, Descartes abrió de un solo golpe el dominio matemático.

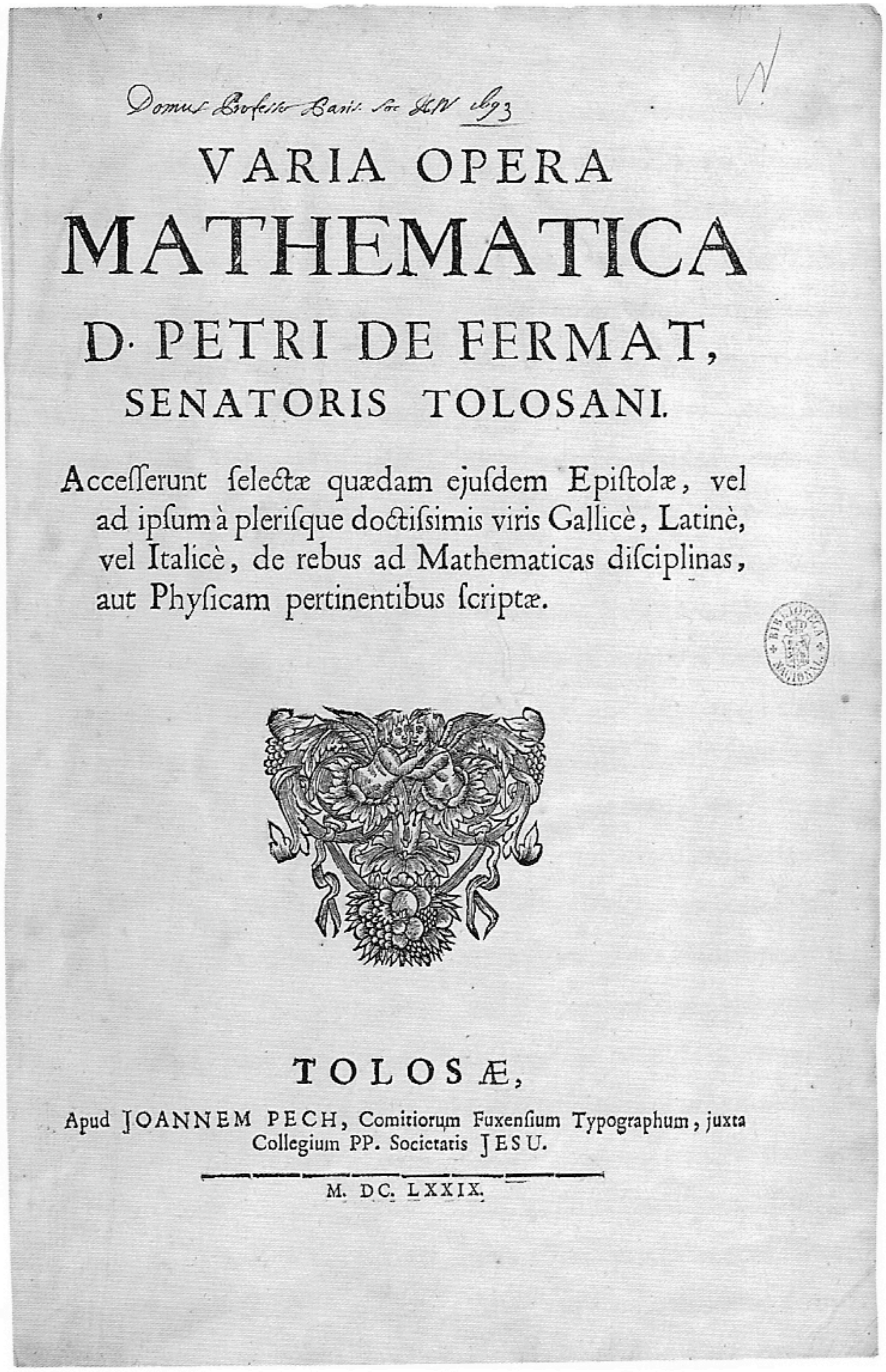
El otro francés importante de la época fue Pierre de Fermat (1601-1665) que contribuyó también a la geometría analítica y al análisis infinitesimal, aunque su aportación más importante fue en el campo de la teoría de números, según él gracias haber leído la *Aritmética* de Diofanto. Fermat formuló que no hay números enteros positivos x, y, z tales que $x^3+y^3=z^3$; conocida esta afirmación como "último teorema de Fermat".Aunque desgraciadamente no dejó ninguna demostración escrita, según él porque "el margen era demasiado estrecho para contenerla".


LA
GEOMETRIE.
DE
RENÉ DESCARTES.

A PARIS,
Chez CHARLES ANGOT, ruë saint Iacques,
au Lion d'or.

M. DC. LXIV.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

René Descartes



Domus Profess. Paris. Soc. JESV 1693

VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.

Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam pertinentibus scriptæ.

TOLOSÆ,
Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxensium Typographum, juxta Collegium PP. Societatis JESU.

M. DC. LXXIX.

Pierre de Fermat

Varia opera matemathica (Tolosa, 1679; n. 44)

Fermat fue, sin duda, el mejor matemático de la primera mitad del siglo XVII y el mejor matemático aficionado de todos los tiempos, con contribuciones importantes en prácticamente todas las ramas de las matemáticas que emergieron en ese siglo prodigioso: geometría analítica, cálculo infinitesimal, cálculo de probabilidades, teoría de números, etc. Sin embargo, la influencia directa de su obra fue escasa debido a su fobia a publicar —incidentalmente sí influyó en el desarrollo de la ingente cantidad de matemáticas encaminadas a resolver el problema planteado por su célebre *teorema*—. Gran parte de su producción matemática fue publicada, muy póstumamente, por su hijo en *Varia opera matehmatica*, de la que aquí se reproduce la portada de un ejemplar correspondiente a la primera edición.

SIGLO DE LAS LUCES

El siglo XVIII fue el siglo de las “revoluciones”. En 1789 estalla en Francia la conocida como Revolución Francesa, y en otras zonas de Europa, especialmente en Inglaterra, la llamada Revolución Industrial que cambió profundamente la estructura social del mundo occidental.

A pesar de la inestabilidad política en Francia, los matemáticos franceses seguían siendo el centro de atención de la Europa matemática, y fueron los responsables de las principales líneas de investigación y desarrollo matemático.

Las gran cantidad de publicaciones anteriores a la Revolución Francesa, contribuirían un siglo después a la aparición del álgebra abstracta.

En 1707 aparece *De Análysis* de Isaac Newton (1642-1727); la esencia de la obra consiste en reducir cualquier problema a la formación de una ecuación algebraica, cuya raíz será la solución del problema. En el libro, Newton enuncia un teorema que permite determinar el número de raíces reales de un polinomio, así como una regla con la que es posible dar una cota superior de las raíces positivas. *De Análysis* termina con los resultados de la teoría general de ecuaciones y además la resolución gráfica de éstas mediante la construcción geométrica de las raíces.

En 1646 nace, en Leipzig, Gottfried Leibniz (1646-1716), su contribución más importante a la matemática, a parte de en el cálculo, lo fue en el campo de la lógica. Lo que más le impresionaba del cálculo era el carácter de universalidad que presentaba, y esta misma idea fundamental, la aplicó a sus restantes trabajos. Leibniz pretendía reducir todas las cosas a un orden, y para reducir todas las discusiones lógicas a una forma sistemática quería desarrollar una “característica universal” que sirviera como una especie de álgebra de la lógica. Además pensaba que se podían hacer descubrimientos nuevos mediante operaciones correctas, pero más o menos rutinarias con los símbolos, de acuerdo con las leyes del cálculo lógico. Su sugerencia revivió en el siglo XIX y jugó un papel muy importante en la matemática de este siglo.

D’Alembert (1717-1783) dio una demostración, defectuosa , del teorema fundamental del álgebra y Clairaut en 1740 ya había publicado un texto, los *Elèments d’algèbre*, que llegó a alcanzar tal popularidad que aún se publicó una sexta edición de él en 1801. Euler no sólo contribuyó a la teoría de números, sino que escribió también un texto de álgebra muy popular que se publicó en ediciones en alemán y en ruso en San Petersburgo 1770-1772, en francés (bajo los auspicios de D'Alembert)1774 y en otras muchas versiones, incluidas algunas ediciones americanas en inglés. La excepcional calidad didáctica del *Álgebra* de Euler se suele atribuir al hecho de que la dictó el autor ya ciego a un criado de escasos conocimientos. Los libros de texto de Clairaut y Euler se utilizaron relativamente poco en Inglaterra, en parte debido al aislamiento matemático de Inglaterra a finales del sigloXVIII, y en parte también a que Maclaurin y otros matemáticos habían escrito buenos libros de texto de nivel elemental. El *Treatise of Álgebra* de Maclaurin llegó alcanzar media docena de ediciones desde 1748 a 1796. Uno de los textos rivales de este tratado fue el *Treatise of Álgebra* de Thomas Simpson(1710-1761) quien pudo jactarse de llegar a ocho ediciones, por lo menos en Londres de 1745 a 1809; otro, los *Elements of Álgebra* por Nicholas Saunderson(1682-1739) se editó cinco veces entre 1740 y 1792.

Los textos de álgebra del siglo XVIII ilustraban de manera clara la tendencia hacia un énfasis creciente en los aspectos algorítmicos de la materia, mientras que sus fundamentos lógicos permanecían aún sumergidos en una incertidumbre considerable. La mayor parte de los autores consideraba necesario insistir largamente sobre las reglas que regían la multiplicación de números negativos, aunque algunos rechazaban de forma categórica la posibilidad de multiplicar dos números negativos.

A juzgar por la aparición casi repentina de tantas obras sobre geometría analítica a partir de 1798, se produjo una auténtica revolución en la enseñanza. La geometría analítica, que había permanecido eclipsada por el cálculo durante más de un siglo, consiguió de pronto que se le reconociera un lugar por derecho propio en las escuelas; la paternidad de esta "revolución analítica" hay que atribuirla principalmente a Gaspard Monge (1746-1818). Entre los años 1798 y 1802 aparecieron cuatro obras sobre geometría analítica elemental, de las plumas de Sylvestre François Lacroix (1765-1842), Jean-Baptiste Biot (1774-1862), Louis Puissant (1769-1843) y F.L.Lefrançais, todas ellas inspiradas directamente por las lecciones dadas en la École Polytechnique. Los "politécnicos "fueron responsables de otros tantos textos de nuevo en la década siguiente. La mayor parte de ellos alcanzaron un gran éxito, publicándose en numerosas ediciones. El libro de Biot llegó a cinco ediciones en menos de una docena de años; el de Lacroix, alumno y más tarde colega de Monge, apareció en veinticinco ediciones en noventa y nueve años. Lacroix se negó a utilizar el nombre de "geometría analítica "como posible título de su libro de texto, al que tituló *Traite élémentairede trigonométrie rectiligne et sphérique et* *application de l'algèbre à la géométrie*. Aunque el nombre de "geometría analítica " había aparecido ya de vez en cuando a lo largo del siglo XVIII, parece ser que el primero que lo utilizó como título de un libro de texto fue Lefrançais en una edición de sus *Essais de géométrie* de 1804, así como Biot en la edición de 1805 de sus *Essais de géométrie analytique.*

MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G.G. L.

SIt axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur reſpective, v, vv, y, z; & ipſa AX abſciſſa ab axe, vocetur x. Tangentes ſint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes reſpective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio aſſumta vocetur dx, & recta quæ ſit ad dx, ut v (vel vv, vel y, vel z) eſt ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur d v (vel d vv, vel dy vel dz) ſive differentia ipſarum v (vel ipſarum vv, aut y, aut z) His poſitis calculi regulæ erunt tales: TAB. XII.

Sit a quantitas data conſtans, erit da æqualis o, & d $\overline{ax}$ erit æqua dx: ſi ſit y æqu v (ſeu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ reſpondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*: ſi ſit z -y † vv † x æqu. v, erit d $\overline{z\text{-}y\dagger vv\dagger x}$ ſeu dv, æqu. dz -dy † dvv † dx. *Multiplicatio*, d $\overline{xv}$ æqu. x dv † v dx, ſeu poſito y æqu. xv, fiet d y æqu. x d v † v d x. In arbitrio enim eſt vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum ſua differentiali. Notandum etiam non dari ſemper regreſſum a differentiali Æquatione, niſi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Diviſio*, d $\frac{v}{y}$ vel (poſito z æqu. $\frac{v}{y}$) d z æqu. $\frac{\dagger v\,dy \dagger y\,dv}{yy}$

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera ſubſtituitur ſimpliciter ejus differentialis, ſervari quidem eadem ſigna, & pro † z ſcribi † d z, pro -z ſcribi -d z, ut ex additione & ſubtractione paulo ante poſita apparet; ſed quando ad exegeſin valorum venitur, ſeu cum conſideratur ipſius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipſius dz ſit quantitas affirmativa, an nihilo minor ſeu negativa: quod poſterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non verſus A, ſed in partes contrarias ſeu infra X, id eſt tunc cum ipſæ ordinatæ

N n n 3 z decre-

Gottfried W. Leibniz

Nova Methodus... (Actas Eruditorum, Leipzig, 1684; n. 63)

La fotografía reproduce la página inicial de la primera publicación de la historia sobre el cálculo. Se pueden observar las reglas para derivar productos, sumas y cocientes —esta última muy confusa debido a la deficiente tipografía—. Conviene, para reflejar el espíritu de la época, recoger el índice de materias sobre las que aparecían artículos en las *Acta Eruditorum* de ese año (1684): 1. *Theologia*. *Juridica*. 3. *Medica y phisica*. 4. *Mathematica*. 5. *Historia y geographia*. 6. *Philosophia y philologica miscellanea*.

<u>SIGLO XIX</u>

El siglo XIX merece ser llamado más que ningún otro periodo anterior, la Edad de Oro de la Matemática. Los progresos realizados en el ámbito matemático durante este siglo superan tanto en cantidad como en calidad, la producción reunida de todas las épocas anteriores. En 1874 el dominio del análisis se ve conmocionado por la matemática del infinito que acababa de introducir Cantor (1845-1918), un matemático alemán que había nacido en Rusia. Francia ya no era el centro reconocido del mundo matemático aunque produjera la meteórica carrera de un jovencísimo Évariste Galois (1811-1832), tuvo que compartir este liderazgo con otros países como Alemania, país que crea al matemático más importante de este siglo o para muchos de la historia, Carl Friedrich Gauss(1777-1855). El carácter internacional de la matemática también queda de manifiesto en el hecho de que las dos contribuciones más revolucionarias al álgebra, en 1843 y 1847 las hicieron dos matemáticos que enseñaban en Irlanda. La primera de ellas fue obra de Sir William Hamilton (1805-1865) y la segunda de George Boole (1815-1864). No obstante,los algebristas más prolíficos del siglo XIX fueron dos ingleses que vivieron parte de su vida en Estados Unidos; se trata de Arthur Cayley(1821-1895) y J.J.Sylvester (1814-1897) y fue principalmente de su *alma mater* , Cambirge, de donde surgió el desarrollo del álgebra moderna.

En 1799, Gauss publica su tesis en la Universidad de Helmstädt que lleva el título de *Nueva Demostración del Teorema Que Toda Función Algebraica Racional y Entera de Una Variable Puede Resolverse en Factores Reales de Primero o de Segundo Grado.* Este teorema, al que más tarde se referirá Gauss como el “teorema fundamental del álgebra”,era conocido en su tiempo como “el teorema de D’Alembert”; pero Gauss demostró que todos los intentos de demostración anteriores, incluyendo los de Euler y Lagrange, eran incorrectos. La tesis doctoral de Gauss demostraba que toda ecuación polinómica $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz, ya sean los coeficientes reales o complejos. Esta primera demostración se basa en su mayor parte en consideraciones geométricas, lo cual no resultaba del todo satisfactorio para nuestro genio. Por ello Gauss publica dos nuevas demostraciones en 1816 y 1850, intentando poder rescribir una demostración puramente algebraica. En su primera demostración, Gauss da una representación gráfica de los números complejos, la cual ya había sido publicada en1797 por Wessel pasando desapercibida para el mundo matemático.Gauss considera las partes real e imaginaria pura de un número complejo *a+bi* como las dos coordenadas rectangulares de un punto en el plano. El hecho de que se pudiera visualizar un número complejo como un punto del plano, hizo que el resto de matemáticos se sintiesen más cómodos con su uso.

Dos años después de la presentación de su tesis, Gauss publicó su libro más conocido, un tratado de teoría de números en latín, *Disquisitiones arithmeticae*. Esta obra es la responsable del desarrollo del lenguaje y de las notaciones de la parte de la teoría de números conocida como el álgebra de las congruencias. La notación que adoptó Gauss en su obra es la misma que utilizamos en la actualidad, $b \equiv c \pmod a$ y procedió a construir un álgebra para la relación análoga al álgebra usual expresada en el lenguaje de la igualdad.

Las *Disquisitiones* de Gauss, sirvió para que con dieciséis años un chico noruego llamado Niels Henrik o más conocido como Abel, mostrase un gran interés por las matemáticas y tres años más tarde, en 1824 publicase un ensayo titulado *Sobre la Resolución Algebraica de Ecuaciones*. En su obra, Abel llega a la conclusión de la insolubilidad de la quíntica, es decir, demuestra que no puede existir ninguna fórmula general expresada en términos de operaciones algebraicas explícitas que nos de las raíces de la ecuación si el grado del polinomio es mayor que cuatro. Sin embargo, después de este descubrimiento, Abel sabía que había muchas ecuaciones especiales tales como las ecuaciones binómicas $x^n = a$, n primo, y las ecuaciones abelianas que eran solubles por radicales. La finalidad ahora era determinar qué ecuaciones eran solubles por radicales. Esta tarea iniciada por Abel, fue resulta en 1830 por el joven francés Galois con tan sólo 20 años. Galois escribió un ensayo sobre sus investigaciones *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*. Este texto le fue confiado a su mejor amigo antes de que Galois muriera trágicamente en un duelo a pistola. Y hasta 1846 que fue cuando Lioville publicó y editó en el *Journa l Mathématiques* (revista matemática importante de la época) algunos de estos artículos, no se dio a conocer el magnífico trabajo del joven francés.

El criterio aportado por Galois para la resolubilidad en radicales de las ecuaciones polinómicas tuvo un significado tan novedoso que se salía de los marcos del problema a tratar. La idea central de la teoría de ecuaciones algebraicas de Galois era la creación del concepto abstracto de grupo. Esta idea del estudio de la estructura de los campos algebraicos y la comparación con ellos de la estructura de los grupos de un número finito de sustituciones, fue la base de lo que se denomina “álgebra moderna”.

El trabajo de Galois sobre la solubilidad de ecuaciones mediante procesos algebraicos cerró un capítulo del álgebra y, a pesar de que presentó ideas tales como las de grupo y dominio de racionalidad (cuerpo) que rendirían fruto más tarde, la completa explotación de estas ideas tuvo que esperar otros desarrollos. La siguiente gran creación algebraica, iniciada por William R. Hamilton, abrió nuevos dominios, mientras rompía con viejas convicciones acerca de cómo debían comportarse los "números".

Para apreciar la originalidad del trabajo de Hamilton, hay que examinar cómo se extendió la lógica del álgebra ordinaria en la primera mitad del siglo XIX. Hacia 1800 los matemáticos empleaban con libertad los varios tipos de números reales y complejos, pero la definición precisa de estos distintos tipos de números no tenía ninguna justificación respecto a las operaciones realizadas con ellas. Las mayores inquietudes parecían estar causadas por el hecho de que se manipulaban las letras como si tuvieran las propiedades de los enteros, sin embargo los resultados de estas operaciones eran válidos cuando números cualesquiera sustituían las letras. Como no se había realizado el desarrollo de la lógica de los diversos tipos de números no era posible ver que estos poseían las misma propiedades formales de los enteros positivos y consecuentemente, que expresiones literales que simplemente se mantenían para cualquier clase de números reales o complejos debían poseer las mismas propiedades. Parecía como si el álgebra de expresiones literales poseyera una lógica en sí misma, que respondía de su efectividad y corrección. De aquí que los matemáticos atacaran hacia 1830 el problema de justificar las operaciones con expresiones literales o simbólicas.

Este problema fue tratado en un principio por George Peacock (1791-1858), quien hizo una distinción entre el álgebra aritmética y simbólica. En su *Treatise on Álgebra*, justificaba gracias a lo que él denominaba álgebra simbólica, las operaciones con expresiones literales que podían mantenerse para números reales y complejos, es decir quería hacer del álgebra una ciencia de símbolos sin interpretación, con sus correspondientes leyes de combinación.. De esta obra se derivó el principio de la permanencia de la forma de la adopción de los axiomas. Este enfoque allanó el camino para un pensamiento más abstracto en el álgebra e influenció notablemente en los desarrollos de Boole sobre el álgebra de la lógica.

En 1833 Hamilton presenta un importante artículo en la Irish Academy, en el que introduce y estudia un álgebra formal de parejas de números reales cuyas reglas de combinación eran las que se dan en la actualidad para el sistema de los números complejos. La importante regla que definía la multiplicación de parejas era

$$(a , b) \cdot (\alpha , \beta) = (a\alpha - b\beta , a\beta + b\alpha)$$

Hamilton interpreta este producto como una operación en la que interviene una rotación. Él se dio cuenta de que sus pares ordenados podían interpretarse como entidades dirigidas en el plano e intentó extender esta idea a tres dimensiones, pasando los números complejos binarios $a+bi$ a las ternas de números ordenados $a+bi+cj$. Pero a Hamilton estas ternas le crearon dificultades a la hora de operar con ellas. Así que en 1843 averiguó que si utilizaba cuádruplas, $a+bi+cj+dk$, en vez de ternas estas dificultades desaparecían. Para estas cuádruplas se debería tomar $i^2 +j^2+ k^2 =-1$, $ij=k$, $ji=-k$, análogamente para el resto, perdiendo la propiedad conmutativa. Sus ideas las plasmó en su obra *Lectures on Quaternions* que más tarde ampliaría con el título *Elements of Quaternions*. Lo fundamental del descubrimiento de Hamilton no era en esencia este tipo particular de álgebra, sino más bien el descubrimiento de la gran libertad de que goza la matemática para construir álgebras que no necesitan satisfacer las restricciones impuestas por la llamadas “leyes fundamentales”.

A mediados del siglo XIX los matemáticos alemanes sobresalían en general por encima de los de otros países. En cambio en lo referente al álgebra, Inglaterra estuvo a la cabeza con el Trinity College de Cambridge y el Cambridge Mathematical Journal como medio de expresión. En esta universidad inglesa trabaron amistad dos importantes algebristas G. Cayley y J. J.Sylvester.

Cayley fue uno de los primeros matemáticos en estudiar las matrices, como peculiar forma y estructura algebraica. Definió la suma y multiplicación de matrices y la matriz identidad.

Por su parte Sylvester consiguió eliminar una incógnita entre dos ecuaciones polinómicas; esto es conocido en la actualidad como “método dialítico de Sylvester”. Este método es muy sencillo y consiste en multiplicar una o las dos ecuaciones por la incógnita que se quiere eliminar, repitiendo el proceso si es necesario hasta que el número de ecuaciones sea uno más que el número de potencias de la incógnita, entonces de este conjunto de $n+1$ ecuaciones se pueden eliminar todas las n potencias, considerando cada potencia como una incógnita distinta. Pero uno de los mayores logros lo consiguió junto a su amigo Cayley en el desarrollo de la teoría de las “formas” o “cuánticas”, polinomios homogéneos en dos o más variables y sus invariantes, de donde les vino el apodo de “los gemelos invariantes”.Los casos más importantes en geometría analítica y en física son las formas cuadráticas en dos y en tres variables, que al igualarlas a una constante, representan cónicas y cuádricas.

Mientras tanto, Boole, otro matemático autodidacto inglés estaba inventando otro tipo de álgebra radicalmente diferente al de sus colegas anteriores. En 1847 publicó un libro titulado *The Mathematical Analysis of Logic* en el que afirmaba que la lógica debía estar asociada a la matemática más bien que a la metafísica. En este libro se expresa claramente por primera vez que la característica esencial de la matemática no es tanto su contenido como su "forma"; si un tema cualquiera se presenta de manera que consiste únicamente en símbolos y reglas precisas para operar con estos símbolos, sujeto todo ello únicamente a una exigencia de consistencia interna, entonces este tema constituye una parte de la matemática. En 1854 escribe otra obra, *Investigation of the Laws of Though*; en ella extendió y clarificó las ideas presentadas en su libro anterior, construyendo tanto la lógica formal como un nuevo tipo de álgebra que se conoce en la actualidad como "álgebra de Boole"que es a la vez el álgebra de los conjuntos y el álgebra de la lógica.

En el siglo XIX aparecía en el *Journal* uno de los artículos más revolucionarios de este siglo; la publicación de G.Cantor sobre las matemáticas del infinito. En 1874, Cantor reconoce la propiedad fundamental de los conjuntos infinitos, atribuida por su compañero Dedekind; pero se dio cuenta además, de que no todos los conjuntos infinitos son del "mismo tamaño". En el caso finito, dos conjuntos se dicen que tienen el mismo cardinal si se pueden poner sus elementos en correspondencia biunívoca, así que Cantor se puso a construir de manera análoga una jerarquía de conjuntos infinitos atendiendo a la "potencia" del conjunto. Cantor demostró que el conjunto de los números reales tiene una potencia mayor que el conjunto de los números racionales; y dividió a los números reales en dos grupos, en racionales e irracionales y en algebraicos y transcendentes. Los sorprendentes resultados de Cantor le llevaron a desarrollar la teoría de conjuntos como una rama autónoma de la matemática a la que dio el nombre de *Mengenlehre (*teoría de conjuntos) o *Mannigfalttigkeitsslehre* (teoría de variedades o de multiplicidades). Durante los años que Cantor puso las bases a esta teoría, tuvo que esforzarse en convencer a sus contemporáneos de la validez de sus resultados, ya que había un cierto escepticismo a la hora de aceptar una teoría sobre el infinito. Esta teoría de conjuntos o variedades tuvo una gran influencia en la matemática de mediados del siglo XX a todos sus niveles.

SIGLO XX

El siglo XX se ha caracterizado por las dos Guerras Mundiales que asolaron el viejo continente, y por las dictaduras que emergieron en Europa.

Pero estos dos hechos no hicieron entorpecer el avance matemático que venía empujando con fuerza desde siglo anterior.

A comienzos del siglo XX era un hecho reconocido que la matemática era una forma de pensamiento axiomático, en la que uno deduce conclusiones válidas de sistemas de premisas arbitrarias. La cuestión de si los axiomas son o no verdaderos, en el sentido científico del término carecía de importancia; de hecho las palabras mismas con que se expresaban los axiomas son términos indefinidos.

Pero dentro del ámbito matemático hubo dos tipos de pensamiento distintos; por un lados los que identificaban a la matemática con la lógica como es el caso de Russell y por otro lado los que se inclinaban hacia una concepción intuicionista de la matemática, como Sylvester .

Un matemático decididamente intuicionista, fue Henri Poincaré(1854-1912), que marcó una gran transición entre los siglos XIX y XX. Poincaré no se detuvo en ningún campo el tiempo suficiente como para completar su obra.

Pero hubo un antes y un después tras la publicación en 1895 de su *Analysis Situ*, en este libro se daba por primera vez un desarrollo sistemático de una nueva rama de las matemáticas: la Topología. En esta obra Poincaré se adelantó a lo que sería una de las direcciones de investigación más desarrolladas y fructíferas del siglo XX . Aunque hay que destacar que la topología no ha sido invención de un solo hombre, algunos problemas topológicos se encontraban ya en las obras de Euler, Möbius y Cantor.

Actualmente la Topología se puede subdividir a grandes rasgos en dos ramas muy distintas: topología combinatoria o algebraica y la topología conjuntista.

El alto nivel de abstracción formal que se produjo tanto en el análisis como en la geometría y topología a comienzos del siglo XX, no podía por menos que invadir el álgebra. El resultado fue un nuevo tipo de álgebra al que se denominó “álgebra moderna” y se desarrolló a lo largo de la segunda mitad de este siglo. Las letras *x* e *y* ya no representaban necesariamente números desconocidos (reales o imaginarios), ni segmentos, ahora podían representar objetos del cualquier tipo: sustituciones, figuras geométricas, matrices, etc.

La transición del álgebra clásica al álgebra abstracta durante el intervalo de la Primera Guerra Mundial a la Segunda fue casi completa; y los artículos publicados tras estos treinta años dan coma vencedora favorita al álgebra abstracta.

Los conceptos fundamentales del álgebra moderna o abstracta, de la topología y de la teoría de espacios lineales se consolidaron entre 1920 y 1940, pero la veintena siguiente fue testigo de una verdadera efervescencia de los métodos de la topología algebraica, que se transmitieron de forma rápida al álgebra y al análisis. El resultado fue una nueva rama conocida como álgebra homológica.

El álgebra homológica es una rama del álgebra abstracta que se ocupa de resultados válidos para tipos de espacios muy diferentes, una invasión de la topología algebraica en el dominio del álgebra pura. La gran rapidez con la que se produjo este cruce fue gracias a los artículos publicados en el *Mathematical Reviews* al libro publicado en 1956 por el francés Henri Cartan (1904-) y el polaco, Samuel Einlenberg(1913-1998), *Homological Álgebra.*

Este proceso de abstracción y el interés creciente en el análisis de esquemas cada vez más amplios y generales, puede verse con una mayor claridad en la obra producida a lo largo de la segunda mitad del siglo XX por "el matemático" conocido como Nicolás Bourbaki. El nombre de Nicolás Bourbaki engloba a un grupo de matemáticos en su mayoría franceses, como Cartan, que constituían una especie de críptica sociedad anónima. El primer volumen de los *Eléments* apareció en 1939, la obra aún no está completa, y su primera parte : *Les structures fondamentales de l'analyse* , contiene libros de Teoría de Conjuntos y Álgebra entre otros. En los últimos años diversos fascículos de un nivel más avanzado se han añadido a sus *Eléments*.

Se dice que a partir del conocimiento del pasado uno puede anticipar, de una manera muy general, lo que puede deparar el futuro. Pero lo cierto es que la historia de la Matemática ha demostrado que es imposible hacer un pronóstico significativo de lo que va a venir. De hecho, una gráfica que represente el crecimiento de de la ciencia, incluida la matemática, se aproxima mucho a una curva exponencial.

HIERONYMI CARDANI, PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,

ARTIS MAGNÆ,

SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,

Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod OPVS PERFECTVM inscripsit, est in ordine Decimus.

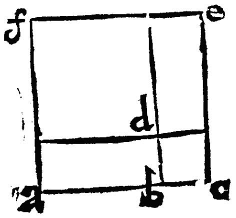
HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

CAPVT XII.

De Cubo æquali rebus & numero.

DEMONSTRATIO.

SIT etiam cubus æqualis rebus & nume-
ro, & ſint duo cubi d c & d e, quorum
latera a b & b c, producant tertiam par-
tem numeri rerum, inuicem ducta, & ipſi
cubi iuncti æquales illi numero, dico a c eſ-
ſe rei quæſitæ æſtimationem, cùm enim ex
a b in b c fiat tertia pars numeri rerum, ex
a b in b c ter, fiet numerus rerum, & ex
a c in productum ex a b in b c ter, fient
res ipſæ, poſita a c re, at ex a c in produ-



ctum a b in b c ter, fiunt ſex corpora, quo-
rum tria ſunt ex a b in quadratum b c, alia
tria ex b c in quadratum a b, hæc igitur ſex
corpora, æqualia ſunt rebus, ipſa verò cum
cubis d c & d f, ex primo ſuppoſito capitu-

li ſexti conſtituunt cubum a e, cubi etiam
d c & d f, æquiualent numero propoſito,
igitur cubus a e æqualis eſt rebus & nume-
ro propoſitis, quod erat demonſtrandum.
ſupereſt oſtendere, quod triplum a c in pro-
ductum a b in b c, ~~fit æquale~~ æquale ſex corpori-
bus, id oſtendam, ſi probauero ex a b, in
b c ducto in a c, fieri duo corpora ex a b
in quadratum b c. & ex b c in quadratum
a b, nam quod fit ex a c in productum a b
in b c, æquale eſt ei, quod fit ex a b in ſu-
perficiem b e, latera enim omnia omnibus
ſunt æqualia, ſed hoc æquale eſt ei, quod
fit ex a b in c d & d e, quod autem
fit ex a b in d e, æquale eſt ei, quod
fit ex c b in quadratum a b, quoniam late-
ra omnia omnibus ſunt æqualia, quod igi-
tur ex a c, in productum a b in b c fit,
æquale eſt his, quæ fiunt ex a b in quadra-
tum b c & ex b c in quadratum a b, quod
eſt propoſitum.

REGVLA.

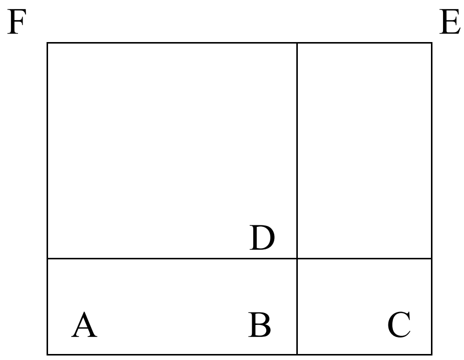
Regula igitur eſt, cum cubus tertiæ par-
tis numeri rerum, maior non fuerit qua-
drato dimidij numeri æquationis, auferes
ipſum ex eodem, & reſidui radicem adde
dimidio numeri æquationis, atque iterùm
minue ab eodem dimidio, habebiſque vt
dicunt, Binomium, & Apotomen, quorum
R. cubicæ iunctæ rem ipſam conſtituunt.
Exemplum, cubus æquatur 6. rebus p̄. 40.
duc 2. tertiam partem numeri rerum ad cu-
bum, fit 8. aufer ex 400. quadrato 20. di-
midij numeri, fit 392. huius radicem ad-
iice ad 20. p̄. R. 392. detrahe etiam ab eo-
dem, fit 20. m̄. R. 392. horum R. cubicæ
iunctæ, faciunt rei æſtimationem, R. v.
cubicam 20. p̄. R. 392. p̄. R. v. cubica 20.
m̄. R. 392. Aliud, cubus æquatur 6. rebus p̄.
6. tertiam partem numeri rerum, quæ eſt 2.
ad cubū ducito, fit 8. detrahe ex 9. quadrato
dimidij 6 numeri æquationis, relinquitur 1.
cuius R. eſt 1. hanc adde & minue à 3. di-
midio numeri, fiunt partes, 4. & 2. qua-
rum R. cubicæ iunctæ, faciunt R. cubicam
4. p̄. R. cubica 2. æſtimationem rei.

At vbi cubus tertiæ partis numeri re-
rum, excedat quadratum dimidij numeri,
æquationis, quod accidit quandocunque nu-
merus æquationis eſt minor $\frac{3}{4}$ cubi illius,
vel vbi ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum, producitur in
R. $\frac{1}{3}$ eiuſdem numeri maior numerus nu-
mero æquationis, tunc conſules librum Ali-
zæ hîc adiectum.

CAPÍTULO XII

Sobre el cubo y la primera potencia y número

DEMOSTRACIÓN



Siendo el cubo igual a la primera potencia y constante y siendo DC y DF dos cubos producto de los lados de los cuales, AB y BC, es igual a un tercio del coeficiente de x, y siendo la suma de estos cubos igual a la constante.

Yo digo que AC es el valor de x. Por lo tanto teniendo en cuenta que $AB \times BC$ es igual a un tercio del coeficiente de x, $3(AB \times BC)$ será igual al coeficiente de x, y el producto de AC y $3(AB \times BC)$ es la primera potencia completa, habiendo asumido que AC es x . Pero $AC \times 3(AB \times BC)$ forman seis conjuntos, tres de los cuales son $AB \times BC^2$ y los otros tres, $BC \times AB^2$.

Por lo tanto estos seis conjuntos son iguales a la primera potencia completa, y éstos (los seis conjuntos) más los cubos DC y DF constituyen el cubo AE, de acuerdo con la primera proposición del capítulo VI.

Los cubos DC y DF son también iguales al número dado. Por lo tanto el cubo AE es igual a la primera potencia y número que debía de ser probado.

Queda demostrar que $3AC(AB \times BC)$ es igual a los seis conjuntos. Esto queda claro si yo pruebo que $AC(BC \times AC)$ es igual a los dos conjuntos $AB \times BC^2$ y $BC \times AB^2$, dado que el producto de AC y $(AB \times BC)$ es igual al producto de AB y la superficie de BE, ya que todos los lados son iguales a todos los lados, pero esto [$AB \times BE$] es igual al producto de AB y

(CD+DE) ; el producto de AB×DE es igual al producto de $CB \times AB^2$, ya que todos los lados son iguales a todos los lados y por lo tanto AC(AB×BC) es igual a $AB \times BC^2$ más $BC \times AB^2$ tal y como fue propuesto.

REGLA

La regla, por lo tanto, es : cuando el cubo de un tercio del coeficiente de x no es más grande que el cuadrado de la mitad de la constante de la ecuación, resta lo del principio de lo del final y suma el cuadrado de la raíz de lo que queda a la mitad de la constante de la ecuación, otra vez, réstalo de la misma mitad y tendrás, como ha sido dicho, un *binomium* y su *apotema*, la suma de las raíces cúbicas que constituyen el valor de x.

Por ejemplo

$$x^3 = 6x + 40$$

eleva 2, un tercio del coeficiente de x, al cubo, que hace 8; resta esto de 400, el cuadrado de 20, la mitad de la constante, dando 392; la raíz cuadrada de esto sumándole 20 da 20 + 392 , y restado de 20 da 20- 392; y la suma de las raíces cúbicas de éstos es el valor de x.

De nuevo

$$x^3 = 6x + 6$$

Eleva al cubo un tercio del coeficiente de x que es 2, que da 8; resta esto de 9, el cuadrado de la mitad de 6,la constante de la ecuación, quedando 1; la raíz cuadrada de esto es 1; esto sumado y restado de 3 , la mitad de la constante da 4 y 2, la suma de las raíces cúbicas de estos nos dan el valor de x.

Cuando el cubo de un tercio del coeficiente de x es mayor que el cuadrado de la mitad de la constante de la ecuación, que esto ocurre cuando la constante es menor que tres cuartos de este cubo o cuando dos tercios del coeficiente de x multiplicados por la raíz cuadrada de un tercio del mismo número es mayor que la constante de la ecuación, en tal caso la solución de esto puede ser encontrada en el problema de *aliza* que es planteado en el libro de problemas geométricos. Pero si desea evitar tamaña dificultad podría, en gran parte, sentirse satisfecho por el capítulo XXV de este tratado.

COMENTARIO

.En los siglos XV y XVI Europa fue sacudida profundamente por una gran cantidad de acontecimientos que acabaron por alterar drásticamente las perspectivas intelectuales de la época y agitaron la actividad matemática con gran magnitud y profundidad.

Las influencias revolucionarias se difundieron ampliamente. Los cambios políticos que sucedieron a las casi incesantes guerras afectaron a todas las ciudades y estados de Europa. Italia, la madre del renacimiento es un ejemplo importante ya que su historia esta plagada de intrigas constantes. Durante el último periodo de la Edad Media Italia acumuló una gran riqueza, gracias a su situación geográfica. Grandes casas de banca hicieron de Italia el centro financiero y parte de esta riqueza fue esencial para propiciar el aprendizaje.

Durante el siglo XV llegaron a Europa, en enormes cantidades, las obras griegas. Durante la primera parte del siglo se hicieron más fuertes las conexiones entre Roma y el Imperio Bizantino, que poseía la mayor colección de documentos griegos pero que había estado muy aislado del continente europeo. Los bizantinos, en guerra con los turcos, buscaron el apoyo de los estados italianos. Estas mejoras en las relaciones hizo que profesores griegos fueran a Italia y italianos al imperio bizantino para aprender griego. Por tanto no sólo hubo más manuscritos griegos disponibles en Europa, sino que muchos de los recientemente adquiridos eran mucho mejores que los adquiridos durante los siglos XII y XIII, además las traducciones realizadas al latín directamente del griego eran más fiables que las realizadas del árabe.

La invención de Gutenberg hacia 1450 de la imprenta con tipos movibles aceleró la difusión del conocimiento. Y la sustitución del papiro por el papel de lino y algodón se hizo extensible a toda Europa.

Los artistas del Renacimiento fueron los primeros en manifestar la renovación del interés en la naturaleza y en aplicar seriamente la doctrina griega de que las matemáticas son la esencia de la realidad de la naturaleza. Especialmente de los trabajos de Platón que se conocieron en el siglo XV, los europeos aprendieron que la naturaleza esta diseñada matemáticamente y que este diseño es armonioso, estéticamente agradable y la verdad última.

A partir del siglo XVI muchos de estos clásicos griegos fueron traducidos a las lenguas populares, ya que como la sociedad europea no era culta, no todo el mundo sabía leer. Los mismos matemáticos participaron en esta actividad. Por ejemplo, Tartaglia tradujo los *Elementos* de Euclides del latín al italiano, Galileo escribió deliberadamente en italiano y Descartes en francés.

Durante el Renacimiento surgió una importante figura: los humanistas. Estos se dedicaron a reunir, organizar y estudiar críticamente el conocimiento griego y romano, escribieron también libros en los que rehicieron muchos trabajos antiguos en una reinterpretación escolástica.

Típico entre los humanistas del siglo XVI fue Gerolamo Cardano que nació en Pavía en 1501. Su carrera como pícaro y estudioso fue una de las mas fascinantes trayectorias de los hombres del Renacimiento. Proporciona un relato de su vida en su obra *De Vita Propria ,*en la que se ensalza y humilla a sí mismo. Cuenta que sus padres le dotaron solo de miseria y desprecio y fue tan pobre durante los primeros cuarenta años de su vida que dejó de considerarse pobre a sí mismo porque no le quedaba nada que perder. Era de gran temperamento, dedicado a los placeres eróticos, pendenciero, engreído, sin sentido del humor e incapaz de sentir ningún remordimiento. Fue gran jugador de dados y ajedrez.

Después de dedicar su juventud a las matemáticas, la física y el juego se graduó en Medicina por la Universidad de Papua. En 1570 fue encarcelado por hereje, aunque sorprendentemente después el Papa le contrató como astrólogo.

Su obra más famosa fue el *Ars Magna* en 1545. Libro en el que aparece la resolución de la ecuación cúbica y cuártica. Sin embargo no fue él el descubridor original de ambas ecuaciones, tal como él admite en su libro. La sugerencia para resolver la cúbica la obtuvo de Niccolo Tartaglia mientras que la solución de la cuártica fue descubierta por primera vez por su antiguo secretario, Ludovico Ferrari.

Tartaglia consiguió aprender hacia el año 1541 a resolver ecuaciones cúbicas. Cuando se extendió esa noticia se organizó un desafío matemático entre Fior (otro matemático que desarrolló la solución de la ecuación cúbica) y Tartaglia. En el que cada uno de los dos contendientes propondría treinta cuestiones al otro para resolverlas en un intervalo de tiempo fijo. Cuando llegó el día de decidir el resultado, Tartaglia había resuelto todas las cuestiones propuestas por Fior , mientras que éste no había conseguido resolver ni una sola de las de su contrincante. Esto fue debido a que Fior sólo sabía resolver ecuaciones del tipo en el que son los “cubos y las raíces igual a un número”, es decir las del tipo $x^3 + px = q$;y Tartaglia había aprendido a resolver también las ecuaciones en que son los “cubos y cuadrados igual a un número”. Tras este triunfo Cardano logró ganarse al confianza de Tartaglia, quien le confió su método.

En el *Ars Magna* todos los casos de la ecuación cúbica se tratan con detalle según que los términos de los diversos grados aparezcan en el mismo o en distinto miembro de la ecuación, puesto que todos los coeficientes han de ser necesariamente positivos .A pesar de que estudia siempre ecuaciones numéricas, sigue la costumbre de Al-Khowârizmî de razonar geométricamente de manera que podría llamarse a su método como el de “completar el cubo”.

Al resolver ecuaciones Cardano usaba poca sincopación, consideraba coeficientes numéricos concretos como representantes de tipos generales.

Por ejemplo cuando escribe “sea el cubo y seis veces el lado igual a veinte”, está pensando en esta ecuación como típica de todas aquellas que presentan el cubo y la “cosa” igual a un número, es decir, de la forma $x^3+px=q$. Para resolver este tipo de ecuaciones Cardano sustituye la incógnita x por $u-v$ y supone u y v relacionadas de modo que su producto considerado como su área sea igual a un tercio del coeficiente de x en la ecuación, y una vez terminado el proceso de sustitución Cardano da una formulación verbal a la regla equivalente a nuestra solución moderna de $x^3+px=q$

Cardano estudia otros casos como el de el cubo igual a la cosa y a un número. Este es el caso del **<u>Capítulo XII</u>** seleccionado y traducido. Aquí hace la sustitución de $x=u+v$ siendo el resto del proceso esencialmente de la misma manera que el antes explicado. Sin embargo, en este caso Cardano se encuentra con una dificultad, por ejemplo si se aplica la regla a la ecuación $x^3=15x+4$ se llega a un resultado en el que se observa la raíz cuadrada de un número negativo, y Cardano sabía que esto no existía, aunque también sabía que una de las raíces de la ecuación eraun número entro positivo, por lo que el autor no llega a entender qué sentido tiene su regla en esta situación. Cardano se refiere a esta raíces cuadradas de números negativos como sofíticas, concluyendo que en este caso su resultado era “tan sutil como inútil”.

Sobre la regla para resolver ecuaciones cuárticas Cardano dice en *Ars magna* que se debe a Luigi Ferrari que la inventó a petición suya. Se tratan todos los casos posibles de forma separada, veinte en total. Cardano sabía cómo eliminar el término de grado tres, aumentando o disminuyendo las raíces en un cuarto del coeficiente del término cúbico.

Tomamos como ejemplo una de las ecuaciones que se tratan en su obra:

$$x+6x^2+36=60x$$

Cardano la resuelve de la siguiente manera: primero añade distintos cuadrados y números a ambos lados de la ecuación para poder conseguir un cuadrado perfecto en el primer miembro de la ecuación., lo que nos queda $(x^2+6)^2$.A continuación añadimos una nueva incógnita, de tal manera que el primer miembro siga siendo un cuadrado perfecto, tal como $(x^2+6+y)^2=6x^2+60x+y^2+12y+2yx^2$.La siguiente etapa es la más importante, consiste en elegir de tal forma que el trinomio del segundo miembro se convierta en un cuadrado perfecto, lo cual se consigue igualando el discriminante a cero. El resultado de la etapa anterior es una ecuación cúbica en y , que hoy se conoce como "la cúbica resolvente de la ecuación cuártica" dada .Esta cúbica se resuelve en y por medio de las reglas dadas anteriormente .Sustituimos un valor de y en la ecuación en x y tomamos la raíz cuadrada de los dos miembros .El resultado es una ecuación cuadrática que se debe resolver para hallar el valor buscado de x.

La solución de las ecuaciones cúbica y cuártica fue una de las mayores contribuciones al álgebra desde que los babilonios habían aprendido a completar el cuadrado para resolver las ecuaciones cuadráticas y supuso un estímulo para los algebristas de la época. Las fórmulas de Tartaglia- Cardano no tenían para el hombre de la época un sentido práctico, simplemente tenían una gran importancia lógica.

BIBLIOGRAFÍA

- BOURBAKI, Nicolás : *Elementos de Historia de las Matemáticas*. Versión española Jesús Hernández. Ed. Alianza.

- GRATTAN-GUINNES : *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630-1910*. Versión española Mariano Martínez Pérez. Ed. Alianza.

-COOKE, Roger : *The History of Mathematics (a brief course)*. University of Vermont. Ed. Wiley- Interscience.

- KLINE, Morris : *El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días* . Ed. Alianza.

- BOYER, Carl B. : *Historia de la matemática*. Ed. Alianza

- EVES, Howard : *An Introduction to the History of Mathematics*. Ed. The Saunders Series

- DURÁN GUARDEÑO, Antonio J. : *El Legado de las Matemáticas de Euclides a Newton: los genIos a través de sus libros*. Edita Consejería de Cultura (Junta de Andalucía)

- CARDANO, Girolamo:. *Ars Magna*.

-*Ars Magna or The Rules of Algebra*, Girolamo Cardano, Translated by T. Richard Witmer.

- Wikipedia