Superficies: Ejercicios Tipo 2

Presentación realizada por
Efrén Giraldo T.

❖MISVALORES

Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema.
Servir a las personas.

Enail: hegiraldo2@Gmail.com

Superficies

Superficies cilíndricas

Tipos de ejercicios que se presentan.

2. Apartir de la ecuación de la superficie,hallar:

a) La ecuación de la curva directriz.

b) Y del vector director de la rectageneratriz.

$$x^2 + y^2 = 1,\ Z = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1,\ Z = k \qquad P(-k, k, k)$$

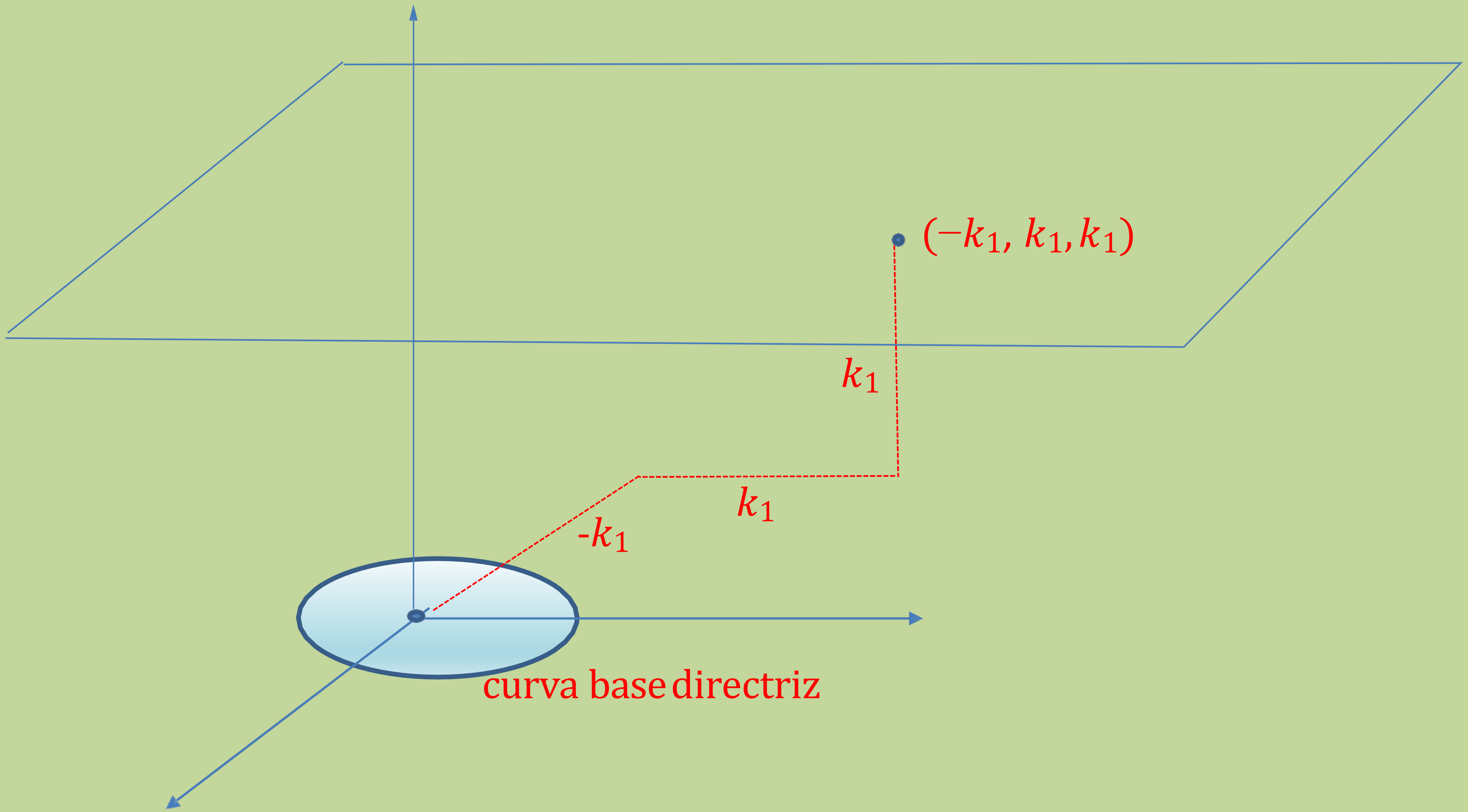
Análisis de la ecuación:

$$(x+k)^2 + (y-k)^2 = 1,\ Z = k \qquad P(-k, k, k)$$

k=1,2,3,4…

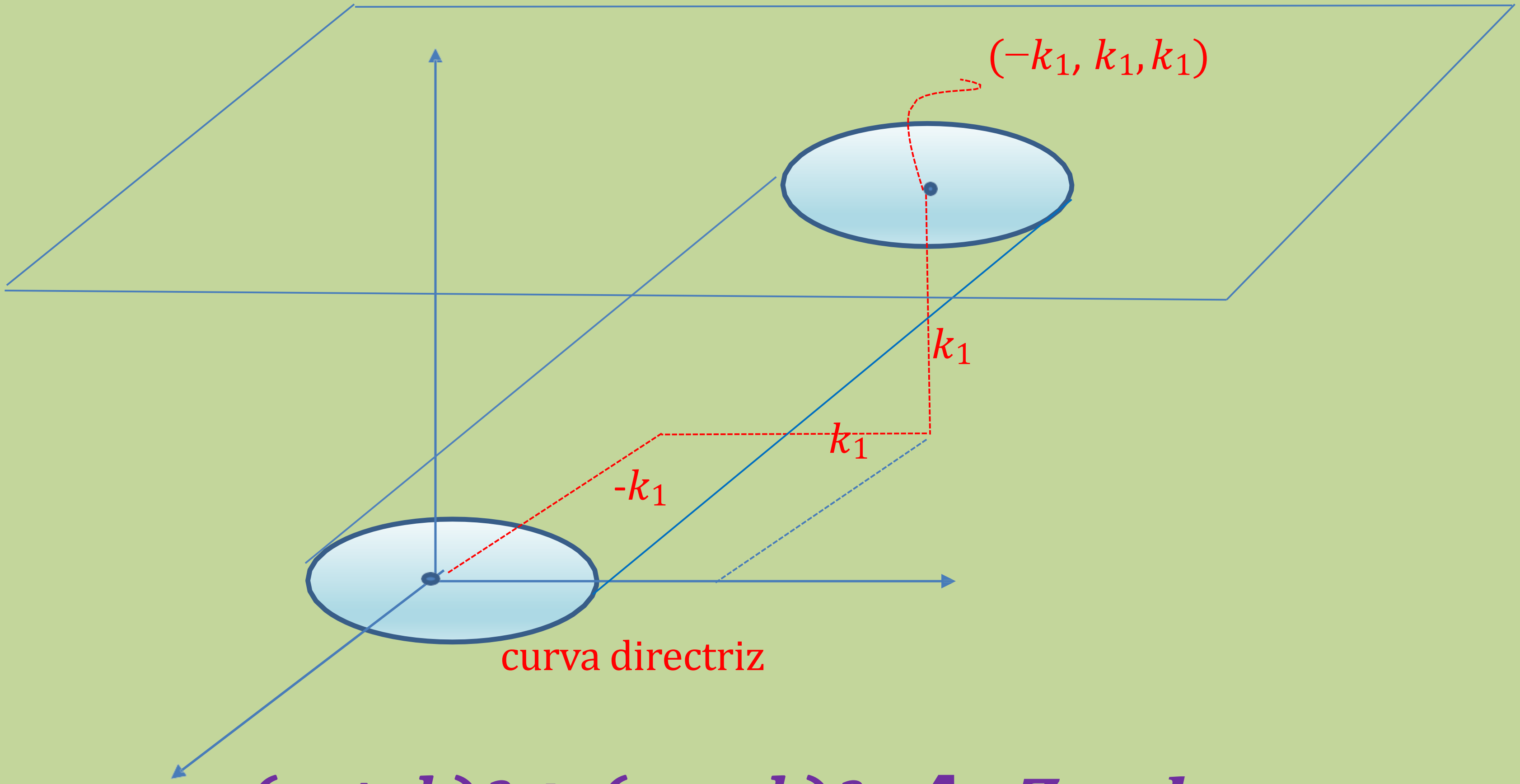
¿En qué plano cartesiano esta ubicada la curva base?
¿Qué tipo de curva es?
¿Cómo es la ecuación de esta curva en el origen (0,0,0)?
¿Cómo es la ecuación de una curva en un plano a una distancia de 5 metros?
¿La ecuación es una sola curva o representa un grupo (familia) de curvas?
¿Qué significa z=k?
¿Será paralela una de las circunferencias con respecto a las otras?
¿Qué significa un valor específico de k con respecto a otro valor?
¿Estará una circunferencia directamente encima de la otra?
¿Una sola circunferencia estará desplazada con respecto a la circunferencia base?
¿El conjunto de todas las circunferencias que representan?

Representación del punto $(-k_1, k_1, k_1)$



$$(x+k)^2 + (y-k)^2 = 1,\ Z = k$$

Superficie cilíndrica oblicua conformada por circunferencias paralelas



$$(x + k)^2 + (y - k)^2 = 1,\ Z = k$$

Esta ecuación representa una familia de circunferencias de radio igual a 1, con centro en el punto $P(-k,\ k,\ k)$, **porque cada valor de k, implica un plano paralelo al plano xy.** Cada plano está a una distancia d a d a k en el eje z. Pertenecen a un cilindro oblicuo.

Cada circunferencia tiene por centro $(-k_1, k_1, k_1)$, $(-k_2, k_2, k_2)$...$(-k_n, k_n, k_n)$.

Ejercicio de segundo tipo

Dada la ecuación de la superficie, hallar la recta directriz y el vector director de la recta generatriz.

El problema inverso consiste en encontrar las ecuaciones de la directriz y un vector director de la recta generatriz a partir de la ecuación de La superficie cilíndrica.

Ejercicio tipo 2

Demostrar que la ecuación $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1$ corresponde a una **superficie cilíndrica** y hallar las ecuaciones de su directriz y un vector director de su recta generatriz.

La curva directriz se encuentra en el plano xy.

(Lehmann, 1989)

De la definición de superficie cilíndrica se deduce que las secciones hechas por planos paralelos a1 plano de la directriz (o paralelos a xy) son similares a la curva directriz en xy. Así, las secciones de la superficie hechas por los planos $\boldsymbol{z}$ = k son curvas similares a las que están en el plano cartesiano base.

Si la ecuación de la superficie es:

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zx - 2zy = 1,$$

(Lehmann, 1989).

Como la curva está en ***xy***, se trabaja con **planos paralelos a *xy***, que tienen por ecuación z=k, por tanto, se **puede** ***reemplazar en z el valor k***, y sus secciones trazas o planos tendrán la fórmula:

$$x^2 + y^2 + 2k^2 + 2kx - 2ky = 1$$

Voy armar trinomios cuadrados perfectos con respecto a (x, k) y a $(y,\ k)$

Descompongo $2k^2$ en

$$2k^2 = k^2 + k^2$$

Reorganizo $x^2 + k^2 + k^2 + y^2 + 2kx - 2ky = 1,$ z=k

Reorganizo $x^2 + 2kx + k^2 + y^2 - 2ky + k^2 = 1,$ z=k

$$(x + k)^2 + (y - k)^2 = 1, \; z = k$$

$$(x+k)^2 \quad + (y-k)^2 = 1, \quad z = k$$

Esta ecuación representa una familia de circunferencias paralelas pero desplazadas de radio igual a 1, con centro en el punto $P(-k, k, k)$, porque cada valor de k, implica un plano paralelo al plano xy. Cada plano está a una distancia k en el eje z.

Cada circunferencia tiene por centro $(-k_1, k_1, k_1)$, $(-k_2, k_2, k_2)$...(-k_n, k_n, k_n).

En particular para k=0 obtenemos en el plano xy, la **curva directriz cuya ecuación es** la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = 1, z = 0$$

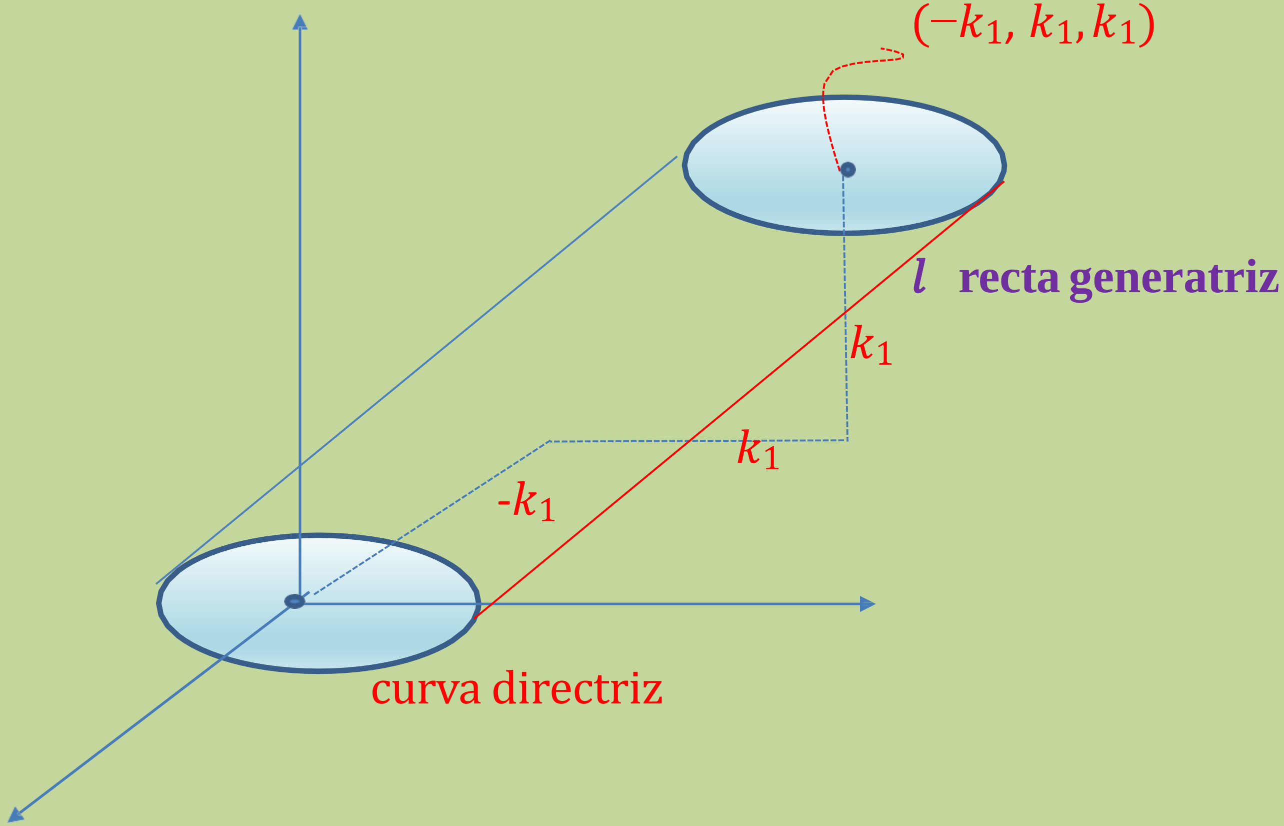
Y para todas las circunferencias paralelas la ecuación general es:

$$x^2 + y^2 = 1, \ z = k$$

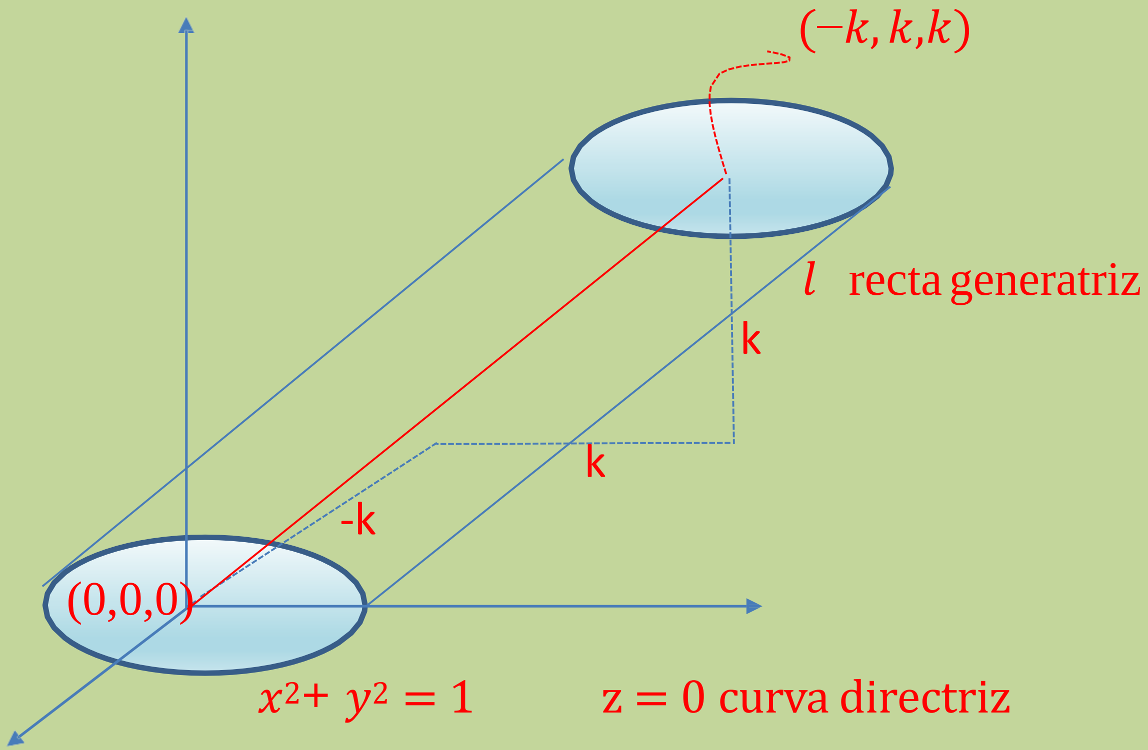
La superficie estudiada es un cilindro oblicuo circular con ecuaciones equivalentes :

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zx - 2zy = 1 \longrightarrow (x)^2 + (y)^2 = 1, \quad z = k$$

Superficie cilíndrica oblicua



$$(x+k)^2 + (y-k)^2 = 1, \; z = k$$

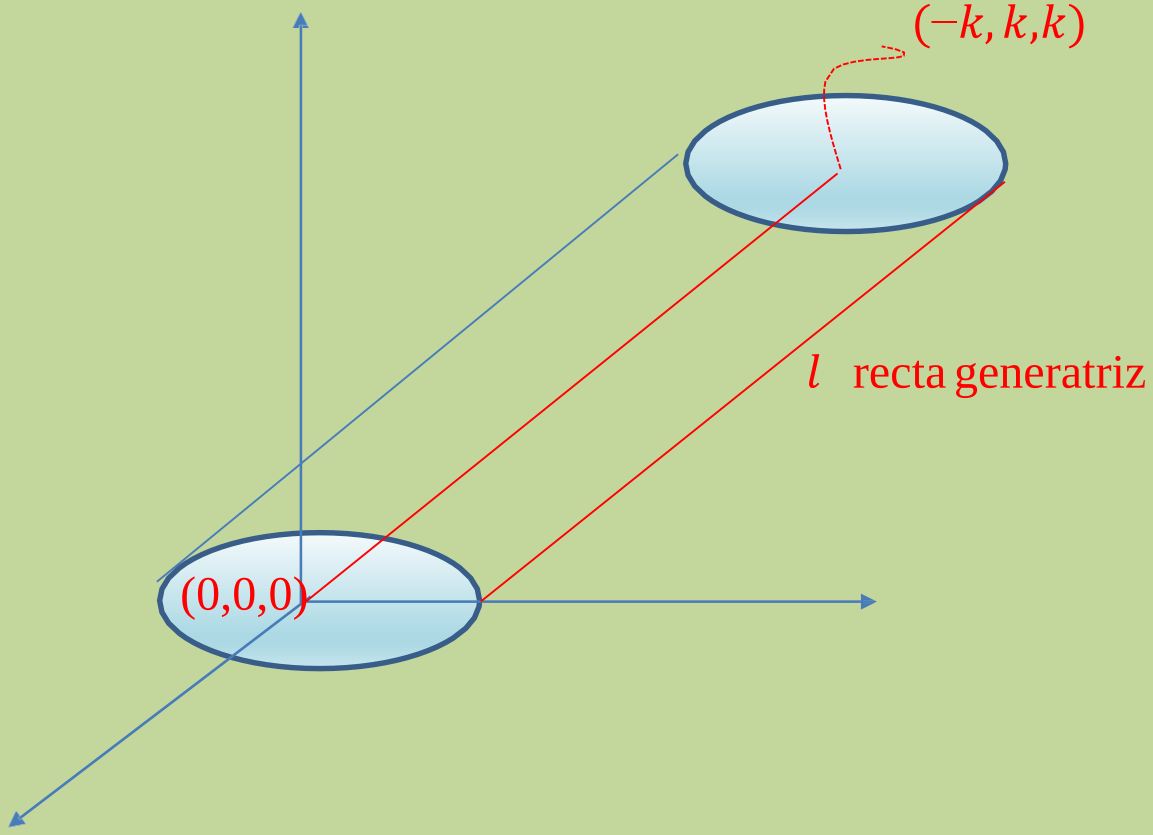


En particular para k=0 obtenemos en el plano xy, la circunferencia de ecuación:

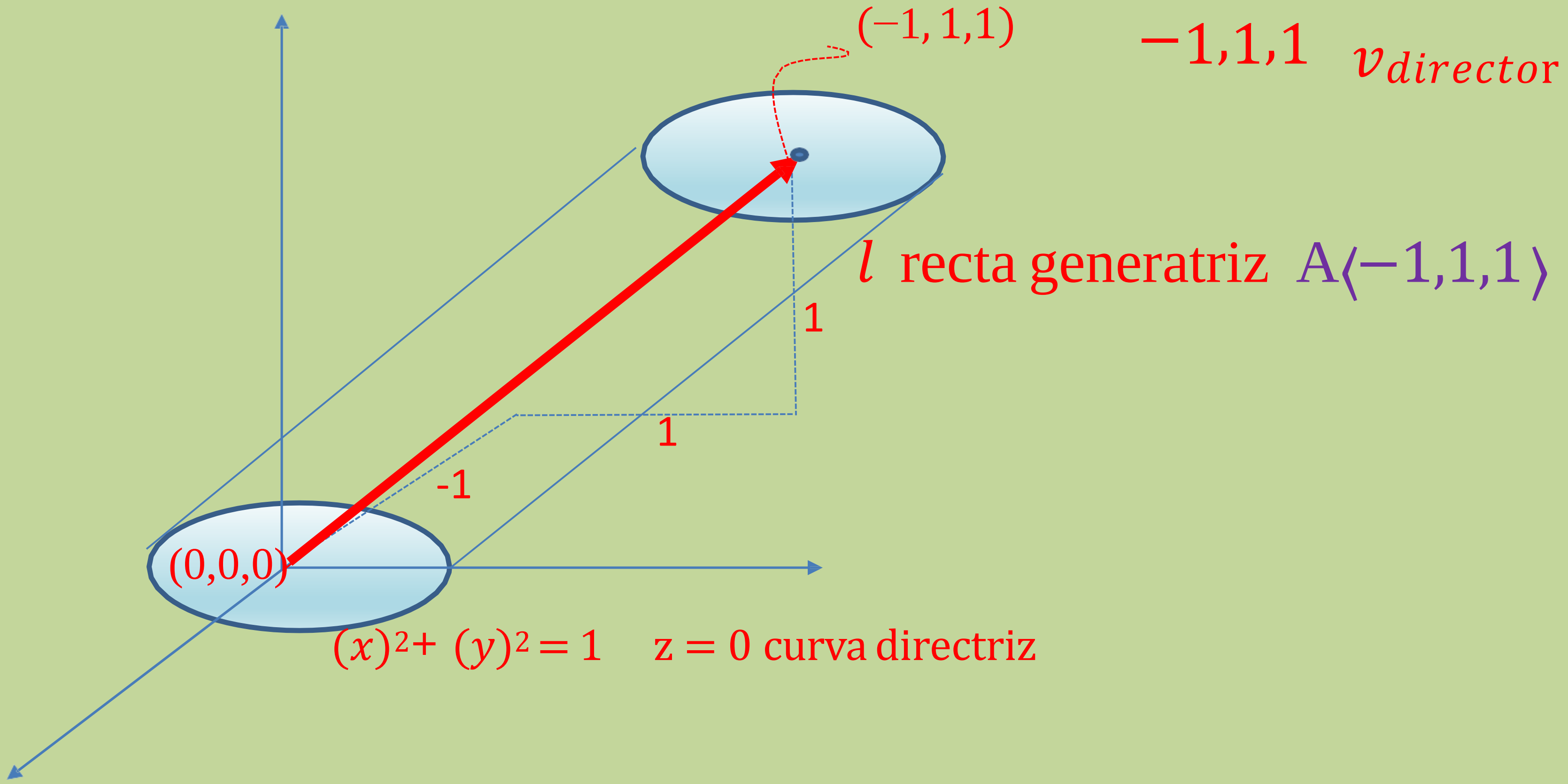
$$(x+0)^2 + (y-0)^2 = 1, \; z = 0$$

$$(x)^2 + (y)^2 = 1, \quad z = 0$$

Que es la curva directriz de la superficie cilíndrica oblicua



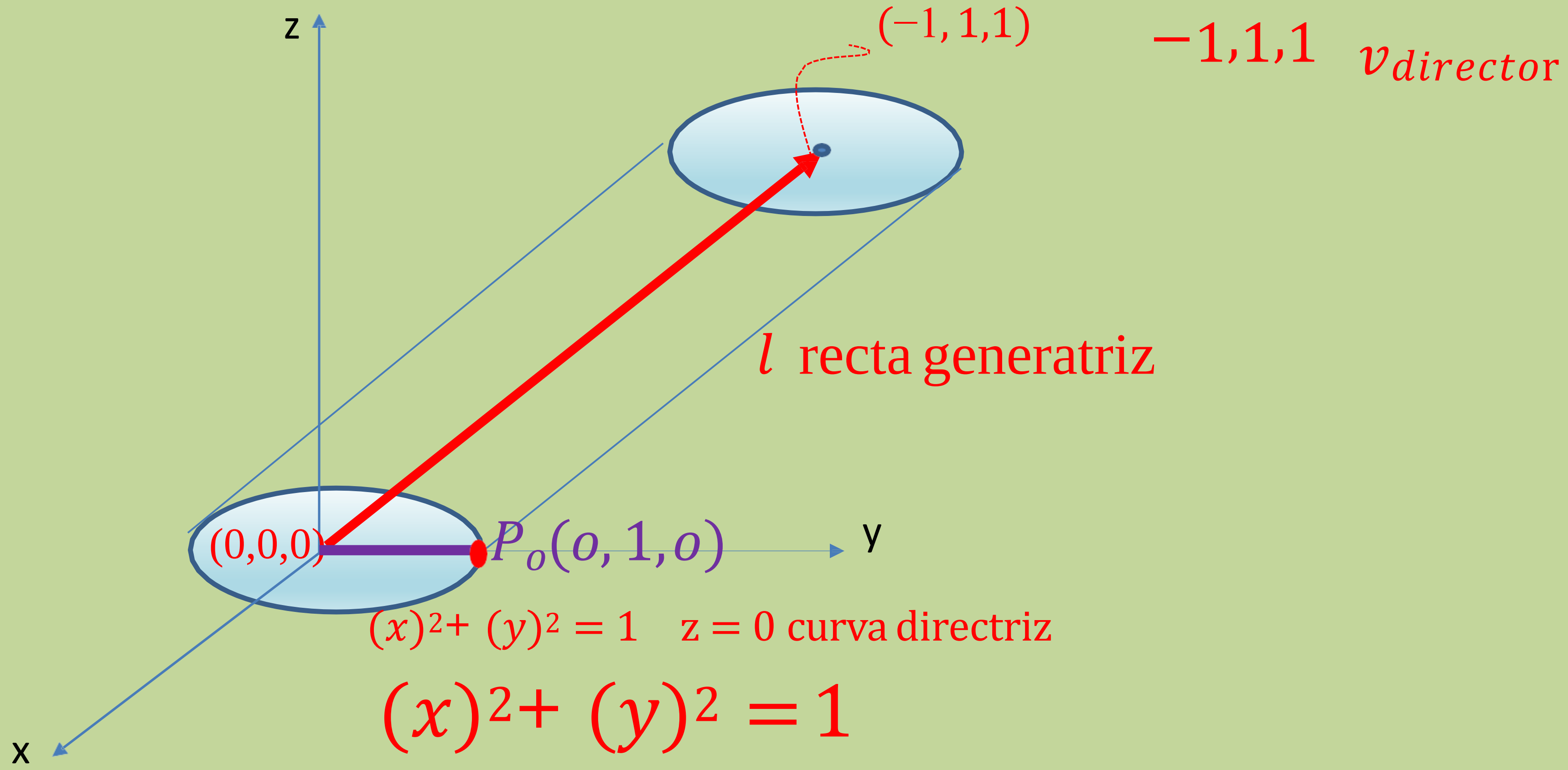
La recta central que une los centros (0,0,0) y $(-k, k, k)$ de cualquier circunferencia del cilindro, es paralela a la generatriz l.



Un vector director de esta recta central es el dado por los puntos 0(0,0,0) y (-1,1,1) o sea el vector (-1-0,1-0,1-0) : A $\langle -1,1,1 \rangle$.

Por tanto, estas son las componentes del vector director de la generatriz.

También servir{a cualquier vector $\langle -k, k, k \rangle$.



$$(x)^2+ (y)^2 = 1$$

El radio de la circunferencia es 1, por tanto, el punto P_o tiene por coordenadas P_0.0,0,0)

Este punto pertence a la recta generatriz , sirve para hallar su ecuación.

$P_o(o, 1, o)$

$A\langle -1,1,1\rangle$

$$\frac{x-0}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-0}{1}$$

Ecuación de la recta generatriz $$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$$

$$-x= y-1=z$$

Identificar y graficar la superficie dada por:

$$9y^2 + 9z^2 - x^2 - 18y - 16z + 4x + 21 = 0$$

$$9y^2 - 18y \ \ - x^2 + 4x + 4z^2 - 16z + 21 = 0$$

$$9\{(y^2 - 2y)\} - (x^2 - 4x) + 4\{(z^2 - 4z)\} + 21 = 0$$

$$9\{(\underline{y^2-2y+1}-1)\}-(\underline{x^2-4x+4}-4)+4\{(\underline{z^2-4z+4}-4)\}+21=0$$

$$9\{((y-1)^2-1)\}-[(x-2)^2-4]+4\{(z-2)^2-4\}+21=0$$

$$9(y-1)^2-9-(x-2)^2+4+4(z-2)^2-16+21=0$$

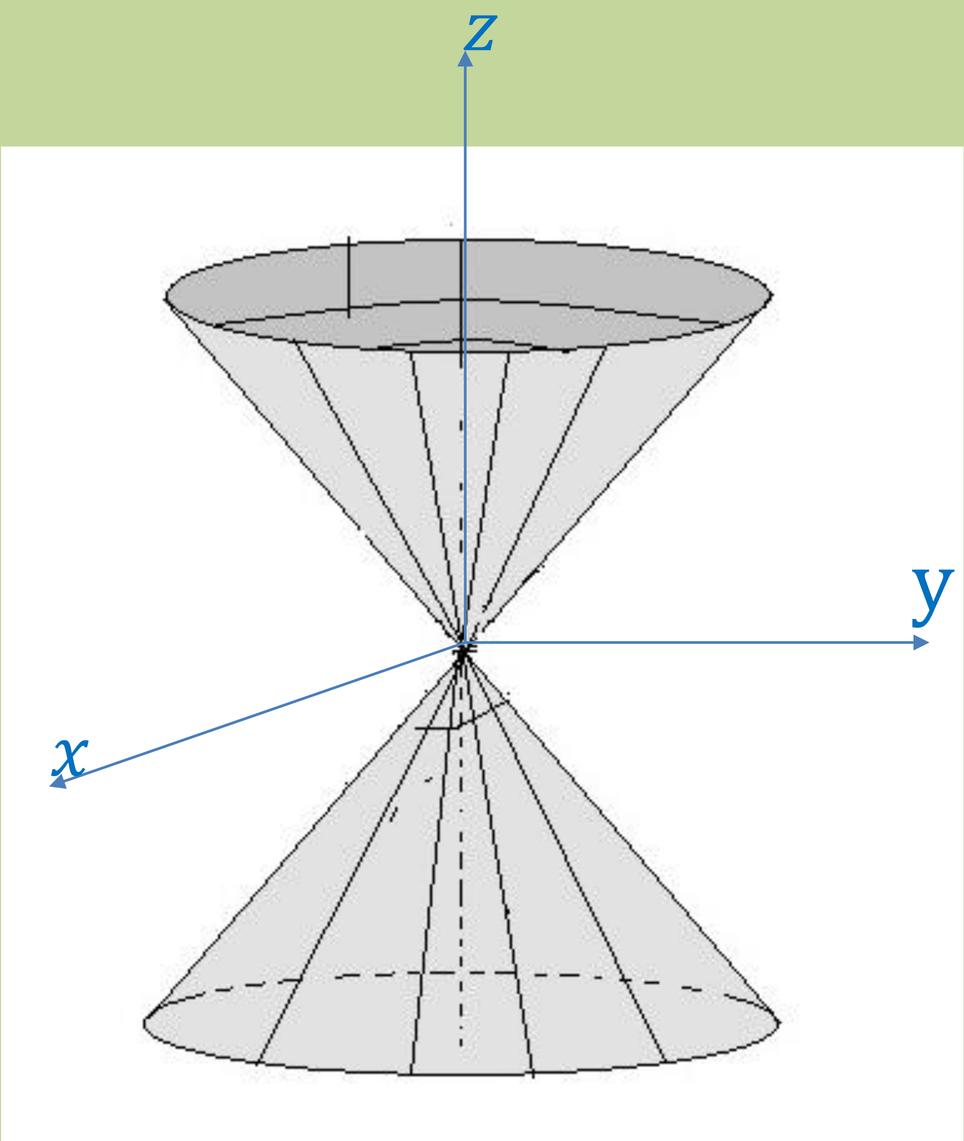
$$9(y-1)^2 - (x-2)^2 + 4(z-2)^2 = 0$$

$$9(y-1)^2 + 4(z-2)^2 = (x-2)^2$$

$$\frac{9(y-1)^2 \ + 4(z-2)^2}{9 * 4} = \frac{(x-2)^2}{9 * 4}$$

$$\frac{9(y-1)^2}{9*4} = \frac{4(z-2)^2}{9*4} = \frac{(x-2)^2}{36}$$

$$\frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z-2)^2}{9} = \frac{(x-2)^2}{36}$$



http://www.clasesrobertotorres.com/calculo_vectorial/ejercicios_resueltos.html

Lehmann, C. (1989). Geometría Analítica. Editorial Limusa. Noriega Editores. México. ISBN 968-18-1176-3.

Apuntes teóricos de la ing. Viviana Cappello, Profesora asociada. Universidad Tecnológica Nacional de la Argentina *UTN*. *Algebra y Geometría Analítica, Sitio oficial de la Cátedra de la UTN – Facultad Regional La Plata.*
http://www.frlp.utn.edu.ar/materias/algebra/apuntes.html

http://www.frlp.utn.edu.ar/materias/algebra/apuntes/cuadricas/02-lugares_geometricos.pdf

http://www.clasesrobertotorres.com/calculo_vectorial/superficies_cuadrticas.html