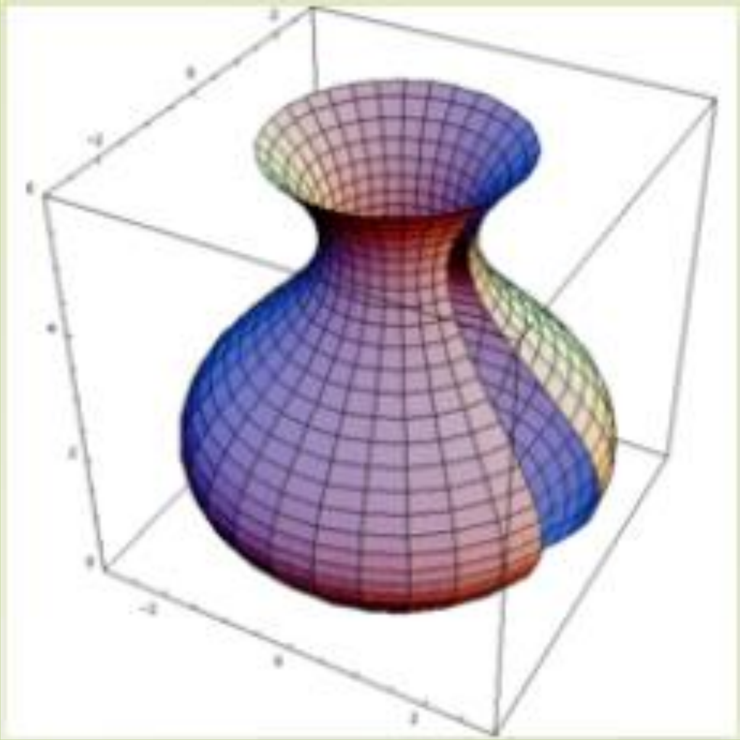


SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Una revolución: una rotación de 360°

Formas de expresar las ecuaciones

Una ecuación en 3D o en 2D se puede expresar de varias maneras:

1. En forma implícita: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$

Como la ecuación está escrita en términos de x, y, z, la forma general de la ecuación es:

$$f(x, y, z) = 0$$

2. También se puede escribir en forma explícita (alguna de las variables despejada):

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Como la variable z esta escrita en términos de x, y, la ecuación se expresa en forma explícita (despejada) así:

$$z = f(x, y)$$

Ecuaciones en 2D: $\boldsymbol{y = f(x)}$ **o** $\boldsymbol{x = f(y)}$

En forma implícita: $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0} \longrightarrow f(x,y) = 0$

En forma explícita:

$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{a^2 \frac{y^2}{b^2}}} \longrightarrow x = \pm\frac{ay}{b} \longrightarrow$

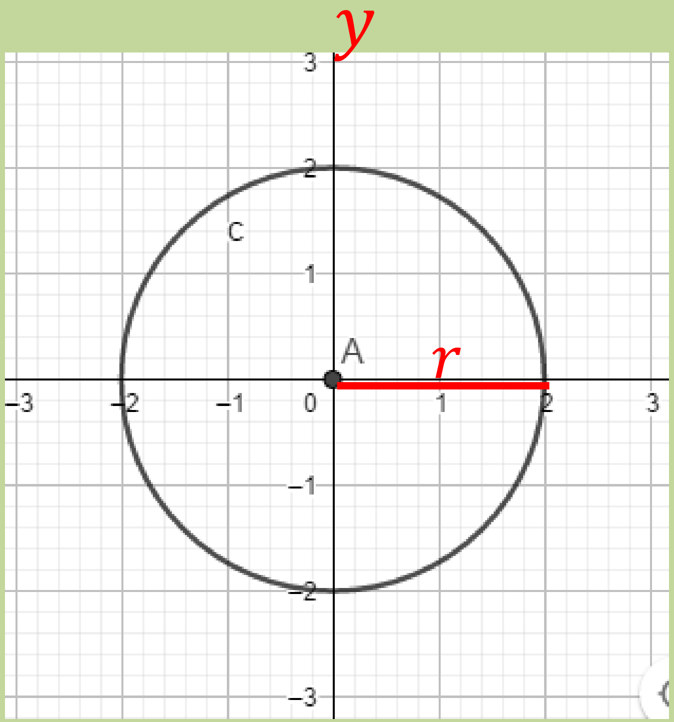
$x = f(y)$

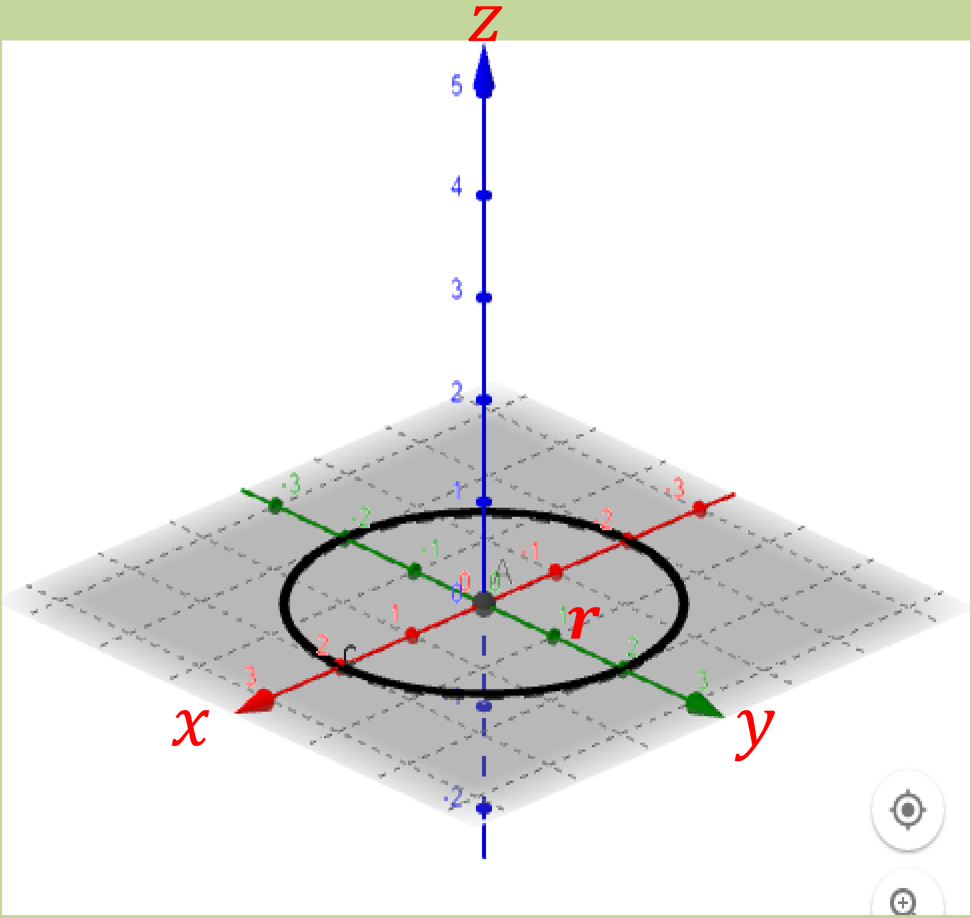
$f(y)$ se despeja x

$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}} \longrightarrow \boldsymbol{y = \pm\sqrt{b^2 \frac{x^2}{a^2}}} \longrightarrow y = \pm\frac{bx}{a} \longrightarrow$

$y = f(x)$

$f(x)$ se despeja y

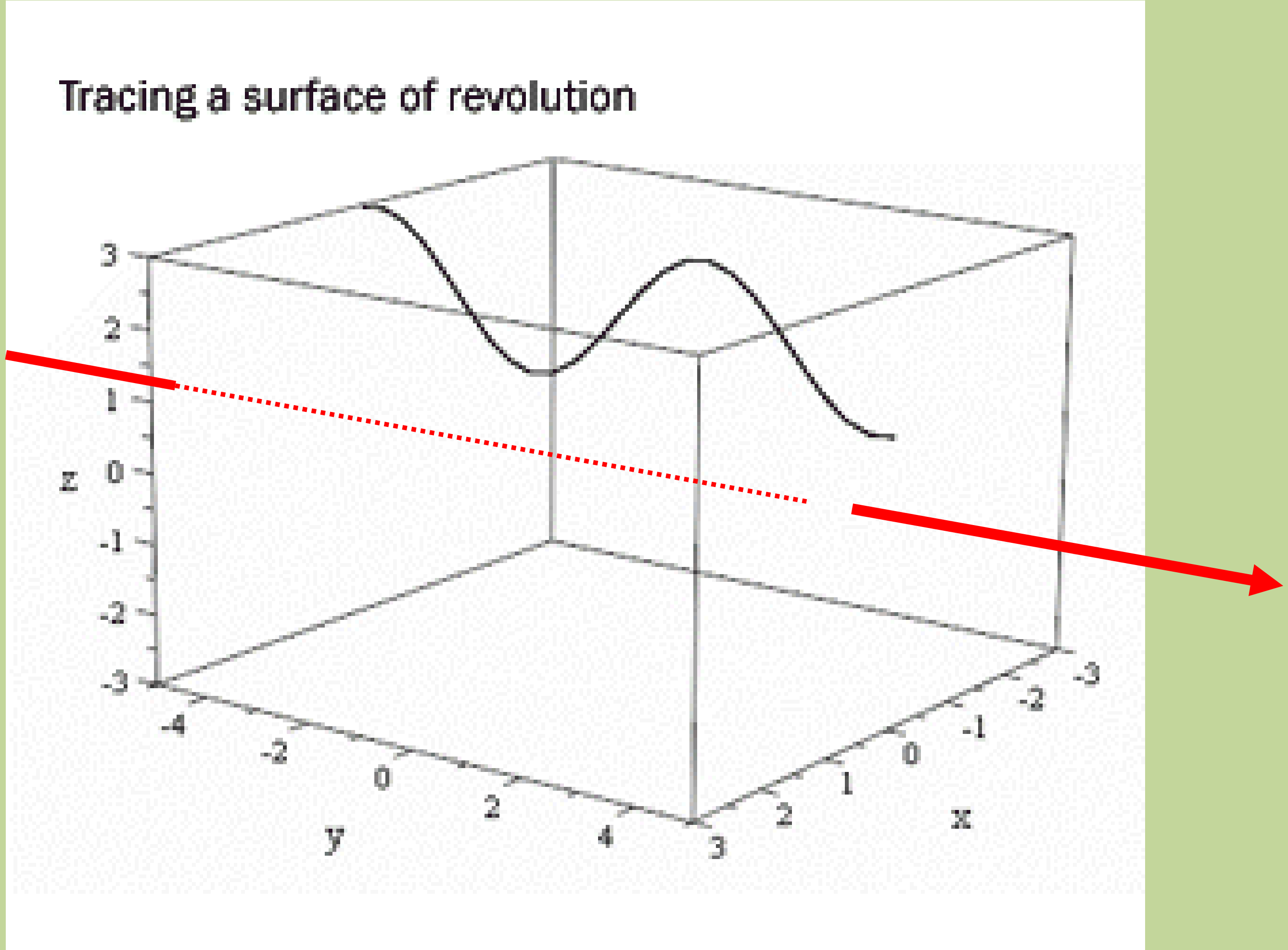


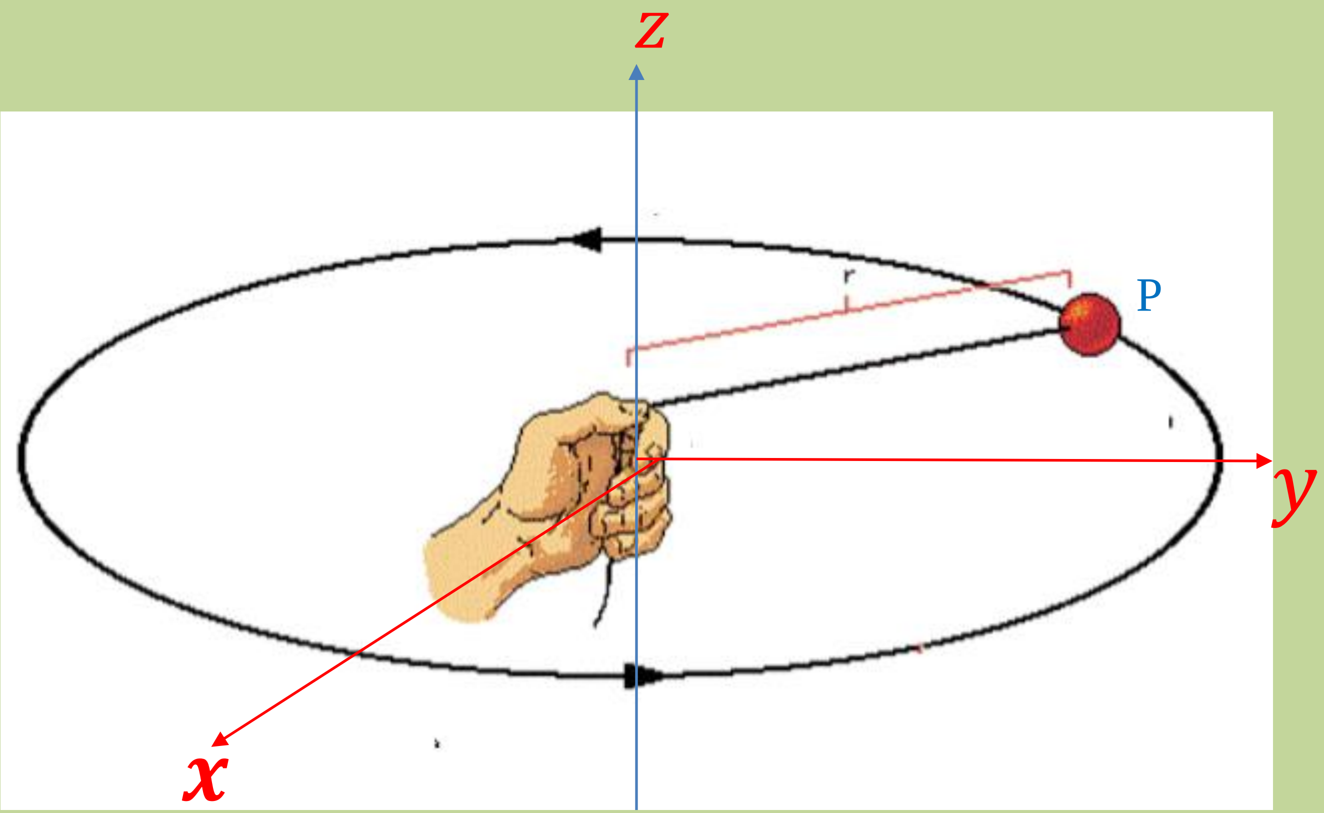


Una circunferencia en 2D La misma en 3d: una elipse

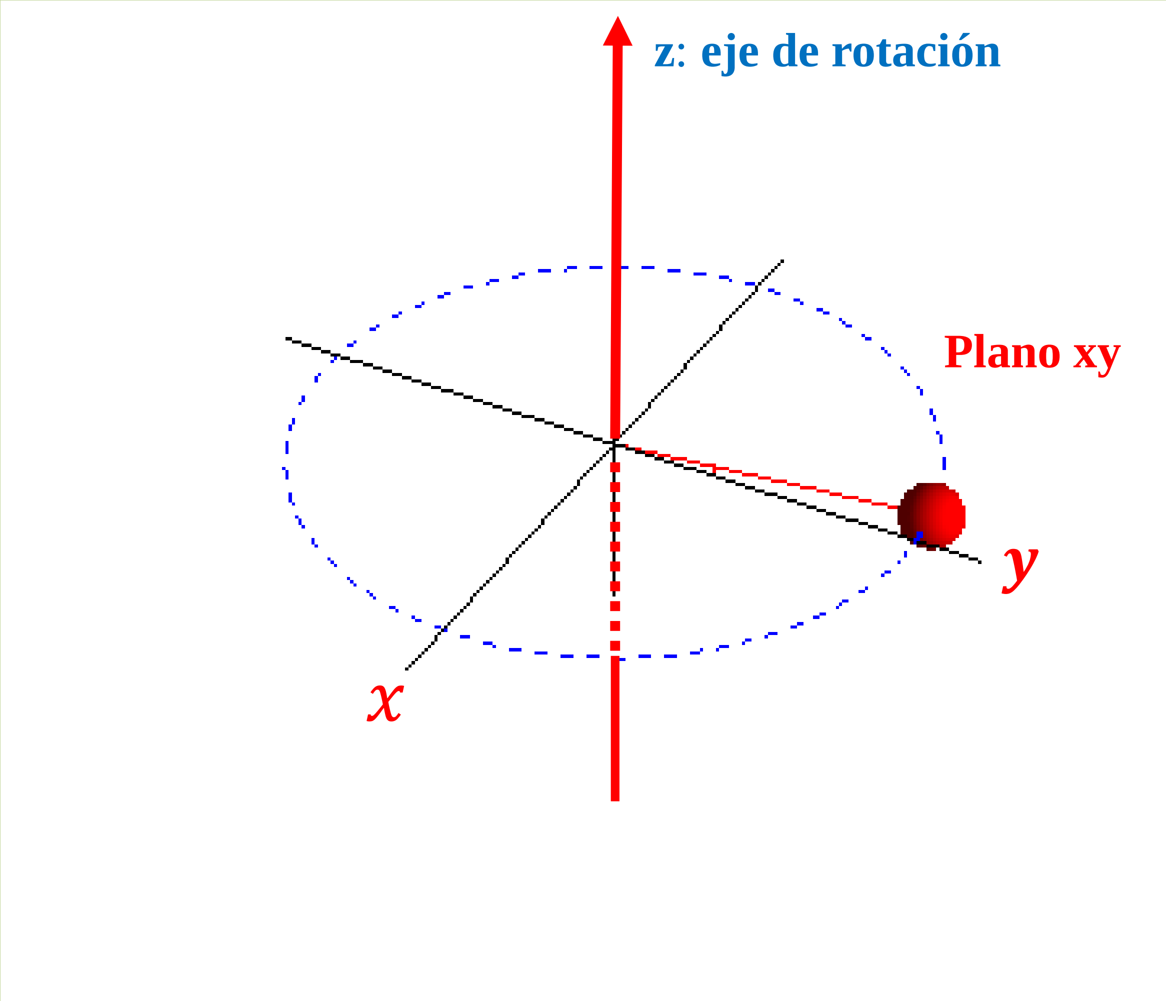
$$x^2 + y^2 = r^2$$

https://www.geogebra.org/

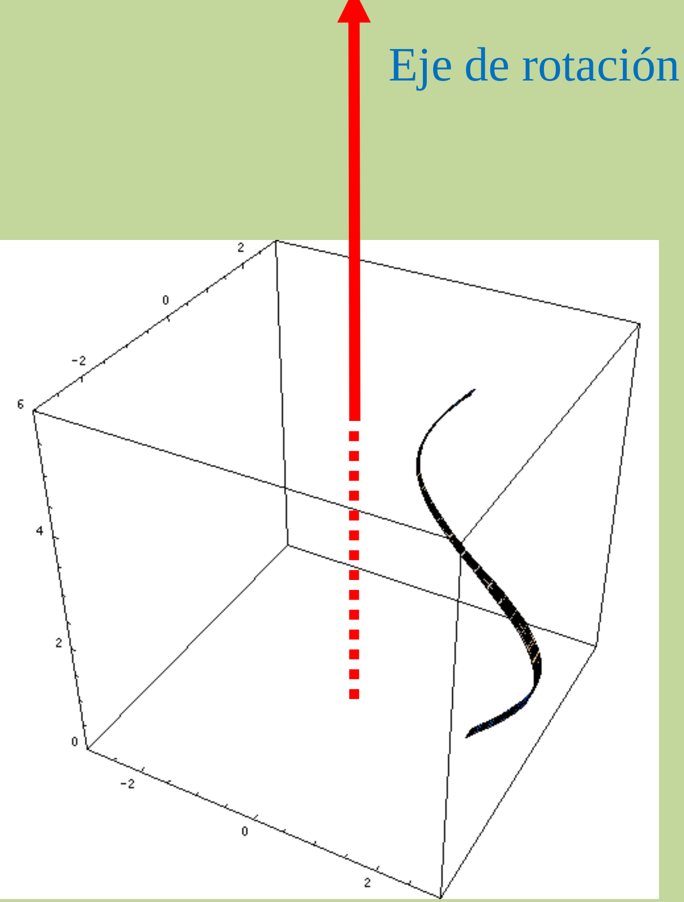

Tracing a surface of revolution
3
2
1
z 0
-1
-2
-3
-4
-2
0
2
4
y
3
2
1
0
-1
-2
-3
x

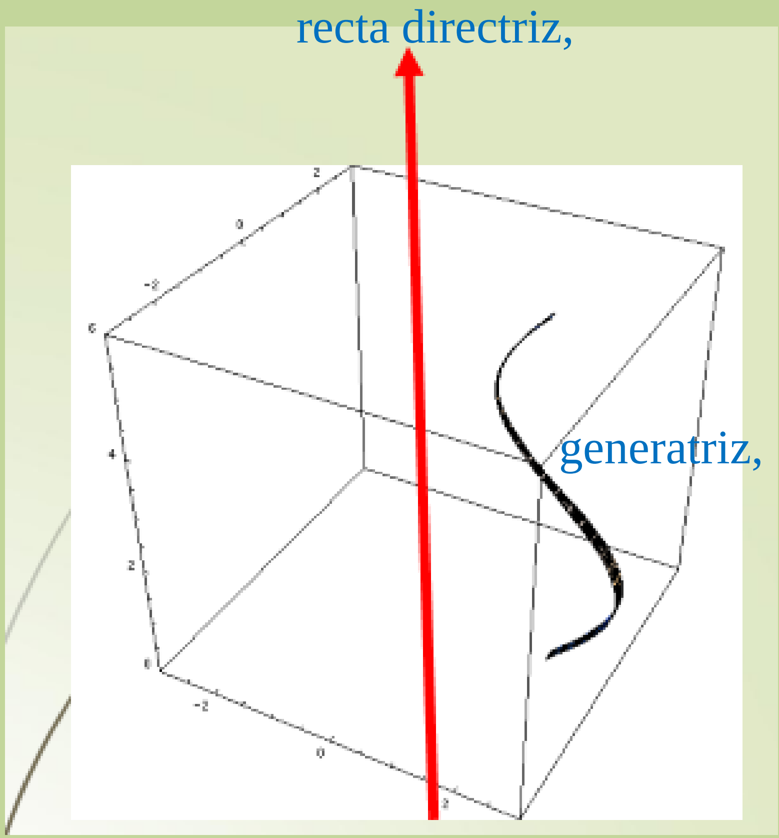


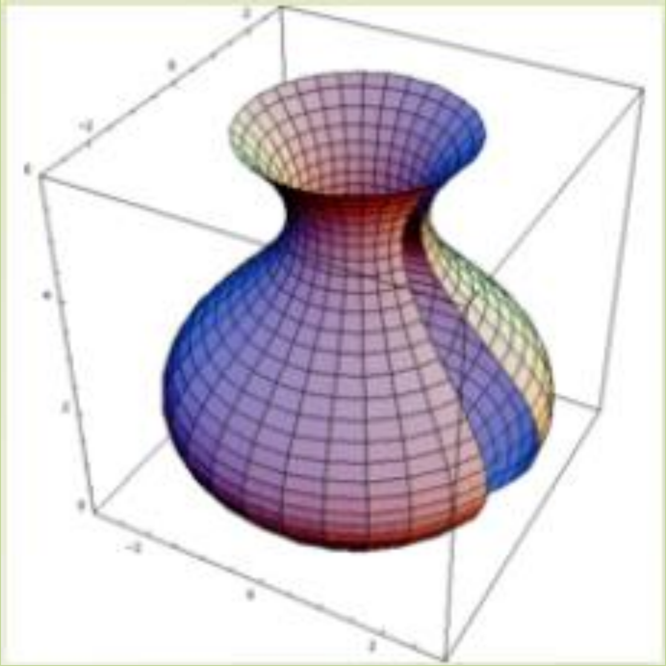
Si un punto P se hace girar en un plano alrededor de un eje dado, por ejemplo z, describirá una circunferencia de radio r en en el plano xy ($letras\ faltantes$).



Si un punto P se hace girar en un plano alrededor de un eje dado, por ejemplo z, describirá una circunferencia de radio r en en el plano xy $(letras\ faltantes)$.

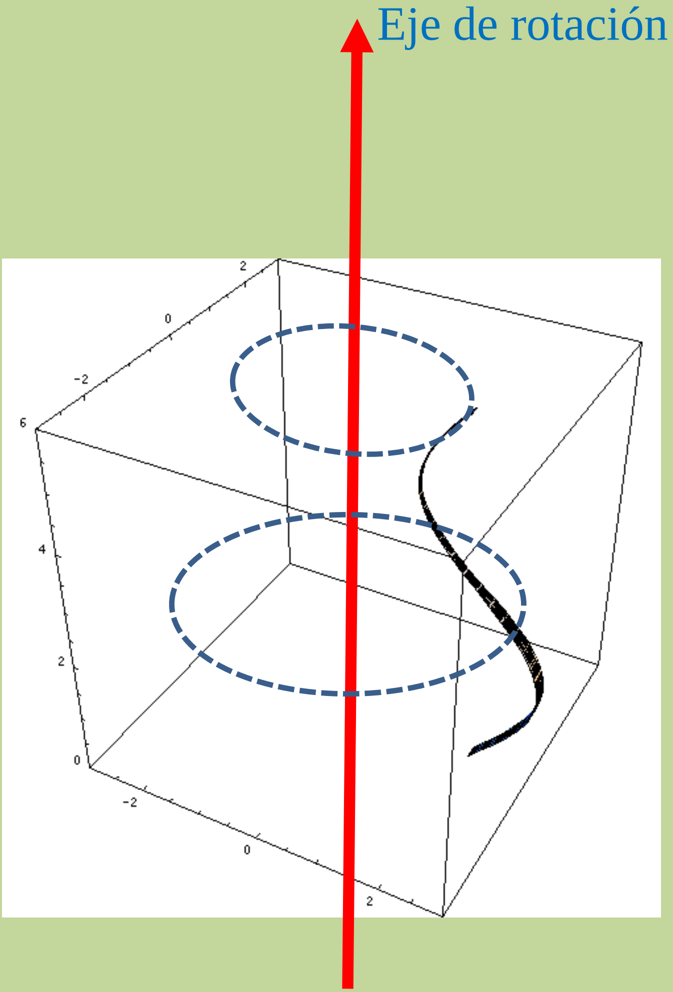


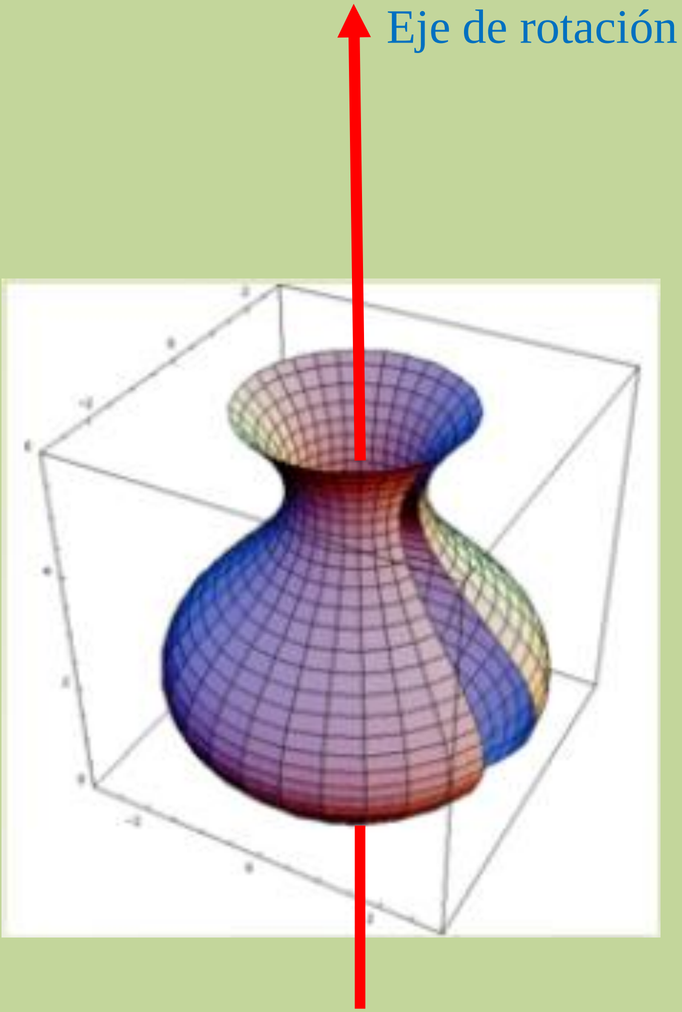




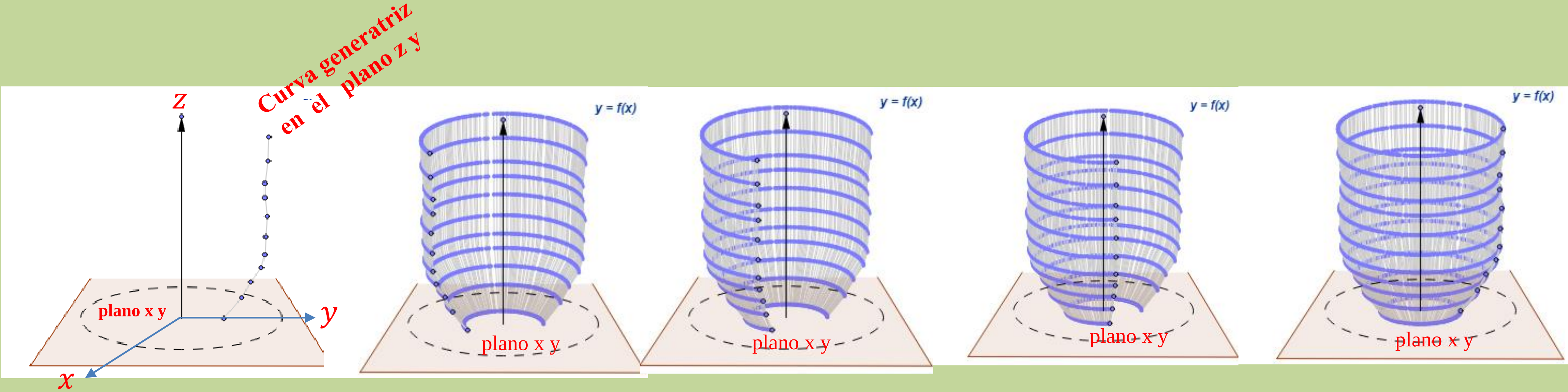
https://es.wikipedia.org/wiki/Superficie_de_revoluci%C3%B3n

Una **superficie de revolución** es aquella que se genera mediante la rotación de una curva plana, o generatriz, alrededor de un eje o recta directriz, llamada eje de rotación, la cual se halla en el mismo plano que la curva.





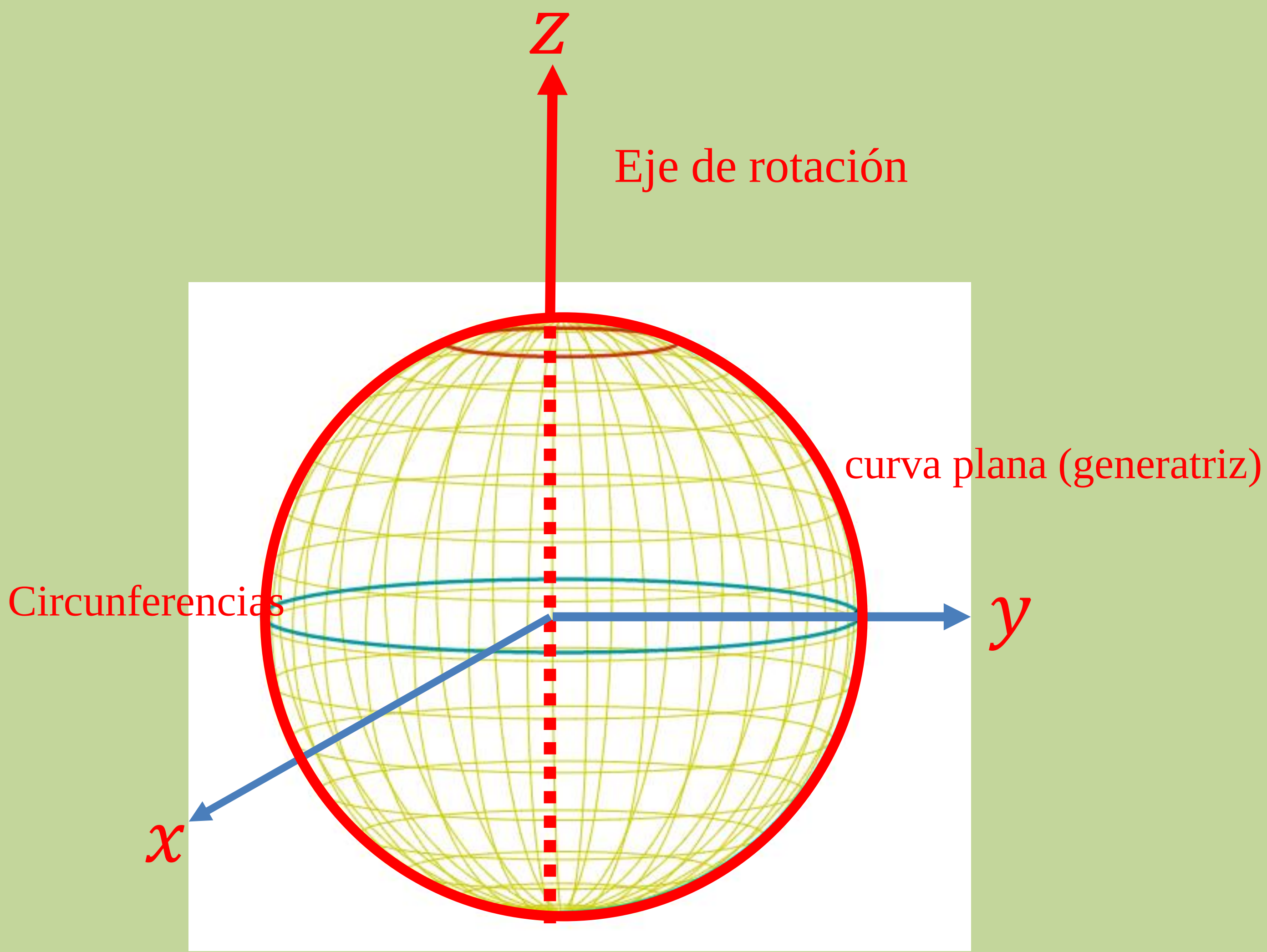
Cada punto de la curva generatriz realiza un giro de 360°. Por tanto, cada punto describe una circunferencia de radio variable.



https://www.geogebra.org/m/dam7gNMb

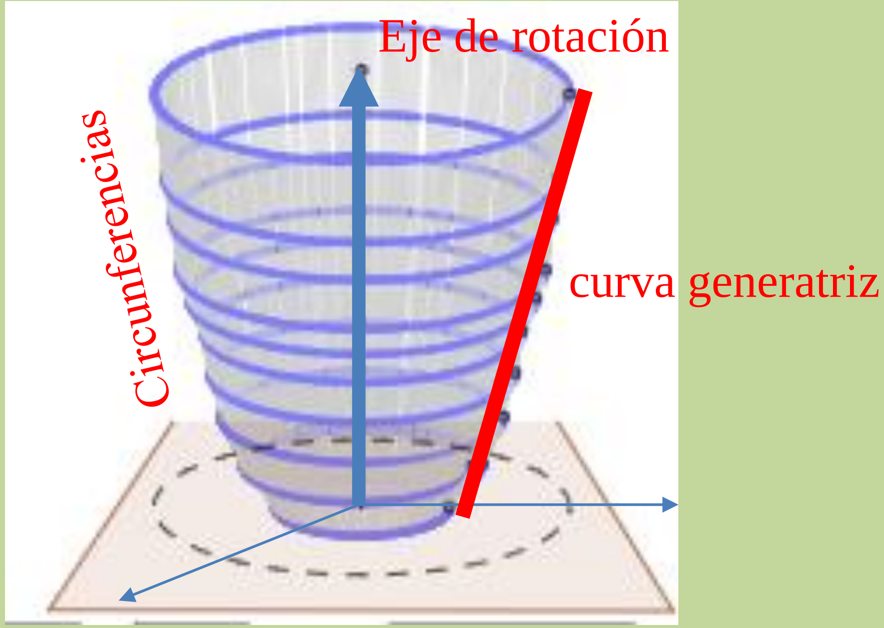
En el giro se generan multitud de circunferencias concéntricas (y perpendiculares) al eje de rotación. Las circunferencias en general presentan diferentes diámetros. En este caso, las circunferencias son *paralelas* al plano xy, porque el eje de giro de la la curva generatriz es el eje z.

11



[Superficie de Revolución]

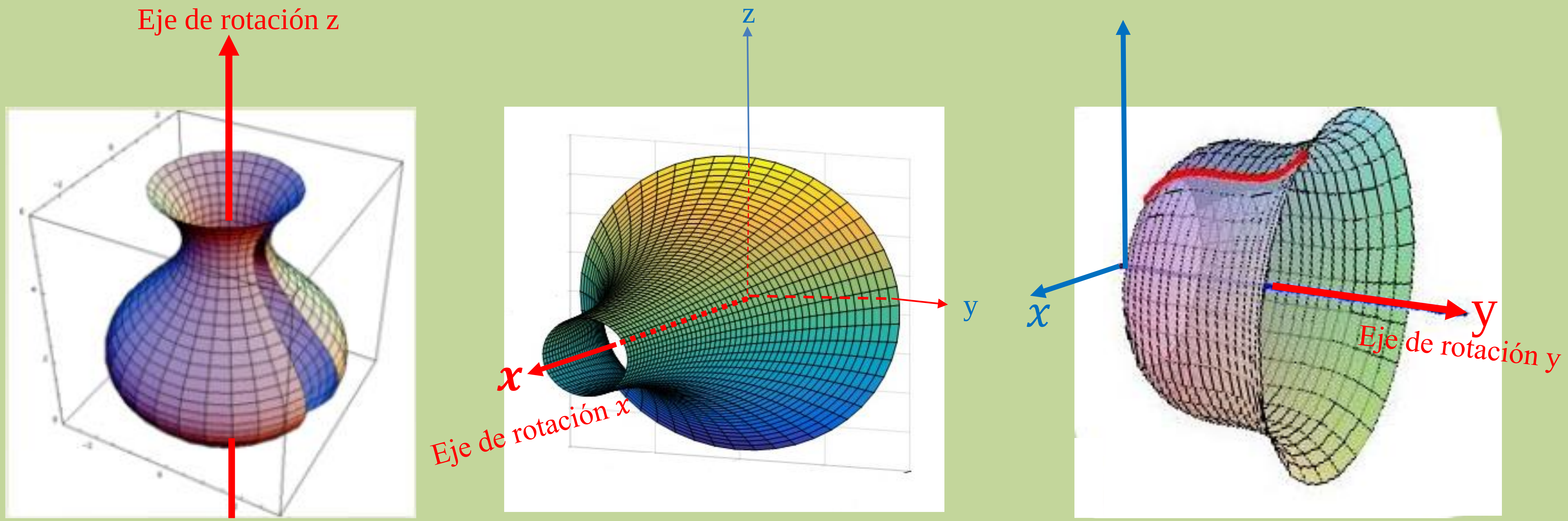
Elementos de una superficie de revolución



1.Eje de rotación (recta directriz): siempre fijo.
2. Curva generatriz (recta o curva): realiza una vuelta completa.
3. Circunferencias (siempre se generan): en general tienen diferente radio.

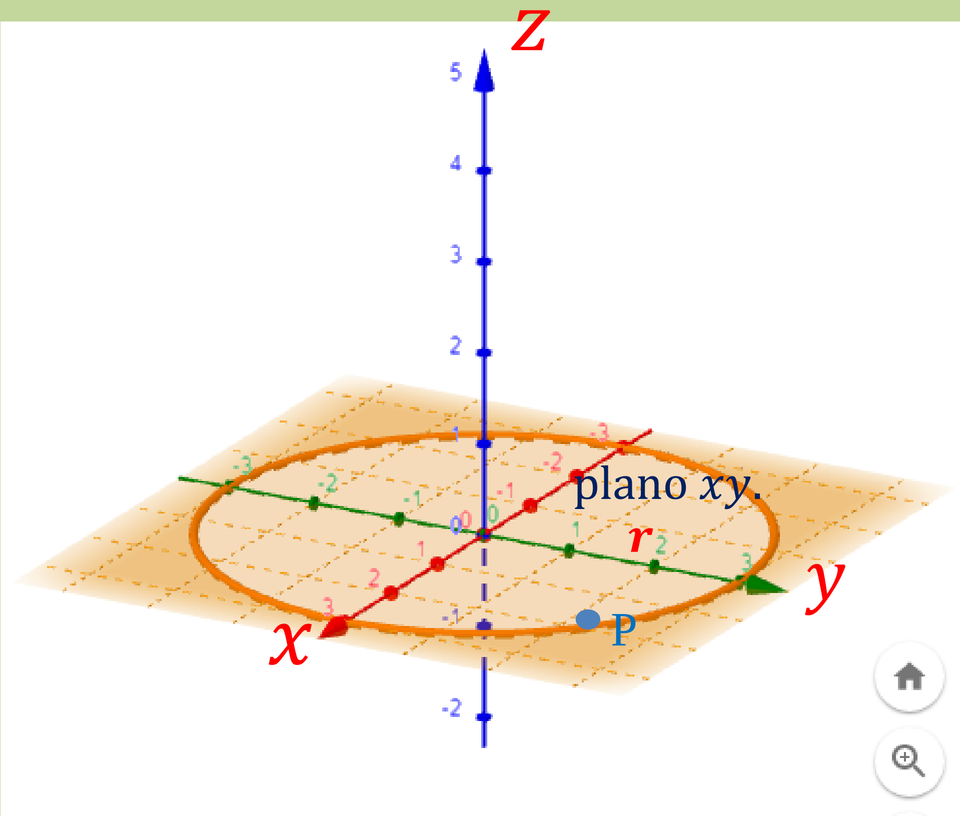
Se deben distinguir claramente estos tres elementos y su función en la superficie de revolución.

Eje de rotación



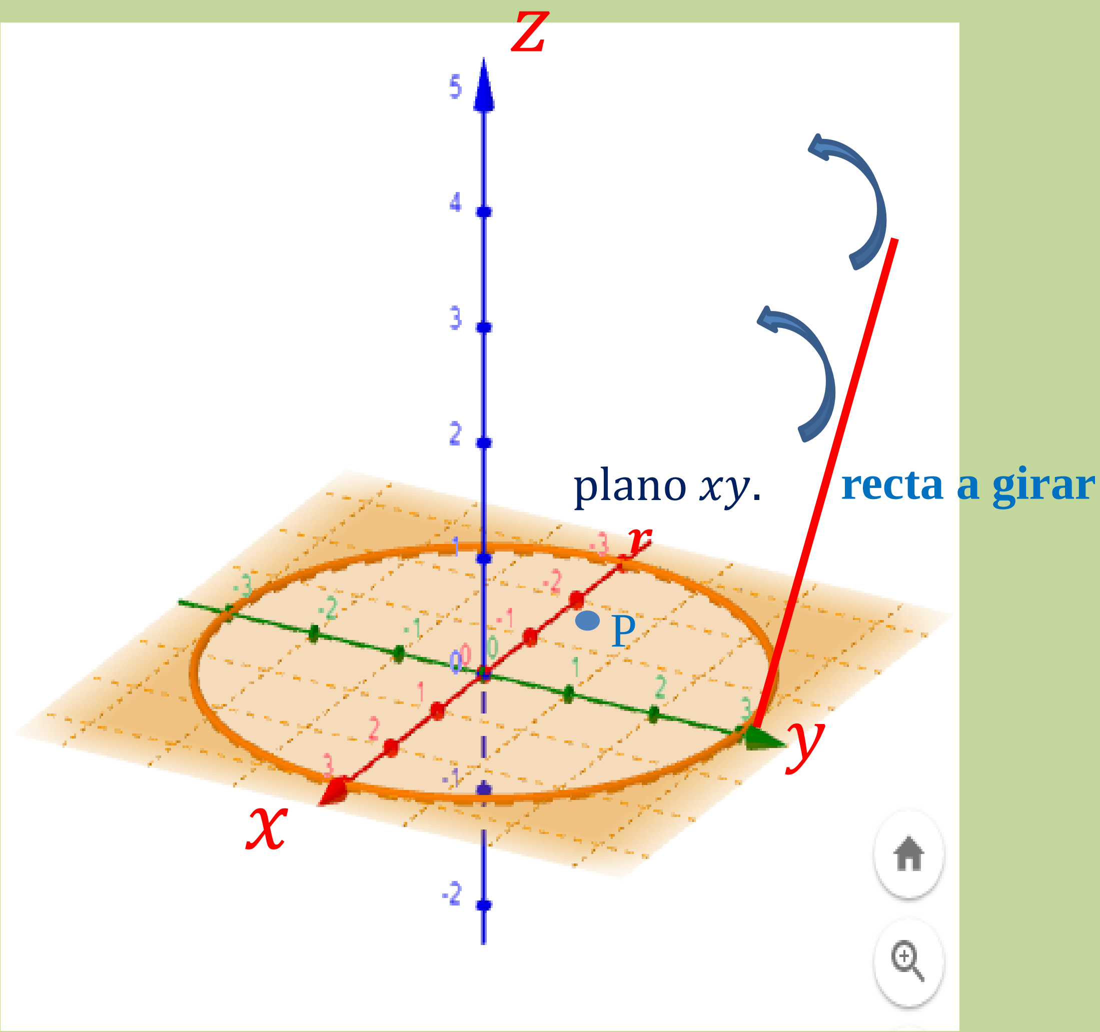
Se considerará que el eje de rotación es cualquiera de los ejes coordenados, x, y, z

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/dinamica/variaciones/variaciones_1.html



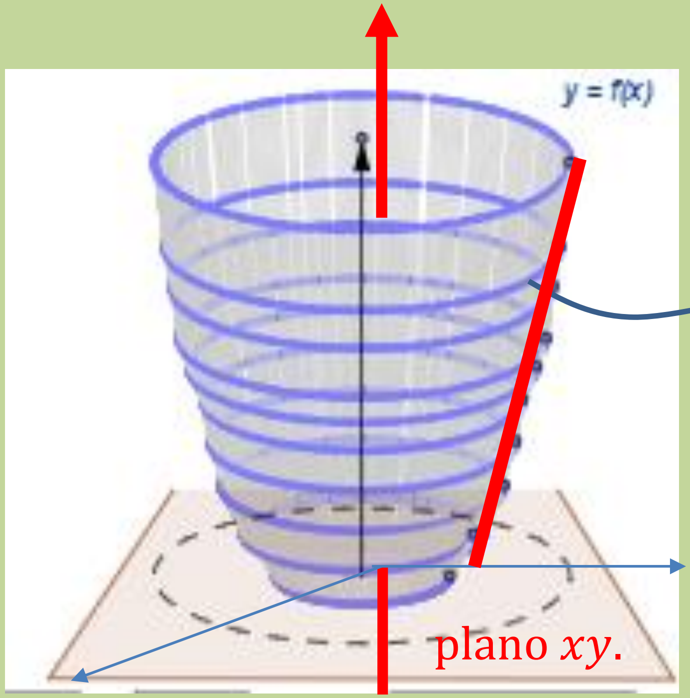
Si el eje de rotación es el eje z, y si se tiene la circunferencia base o inicial en el plano xy (formado por las letras faltantes), su ecuación será:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Ahora, si por ejemplo, hacemos girar una recta o una curva alrededor del eje z, cada punto de la curva describirá una circunferencia

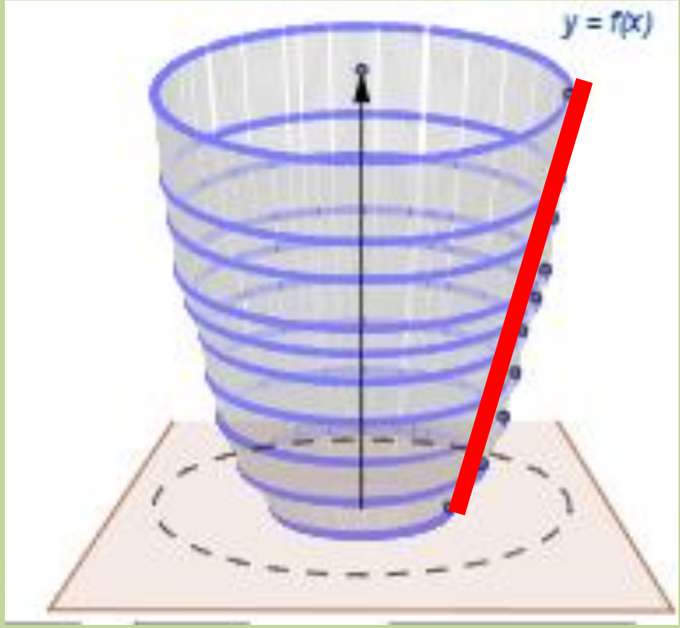
Eje de rotación z

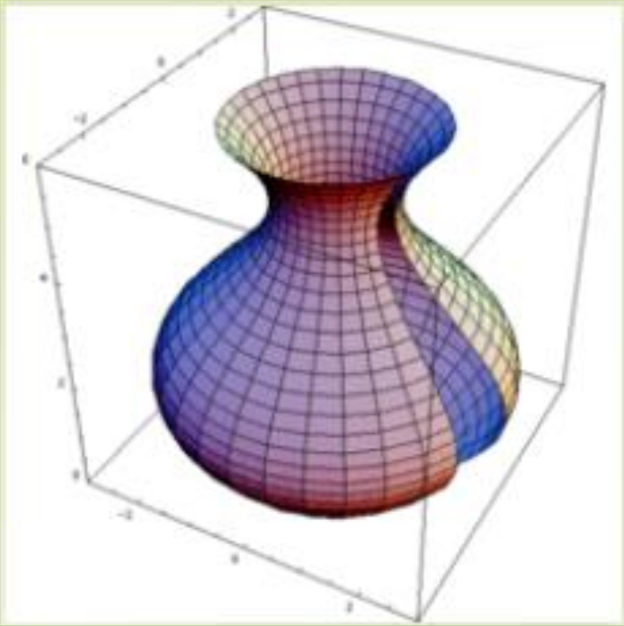


$x^2 + y^2 = r^2$ (variable)

Al girar en torno al eje z, los puntos de la curva forman circunferencias de radio **r diferente y paralelas al plano xy** . Por lo tanto, la ecuación de las circunferencias será:

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{(r es variable)}$$





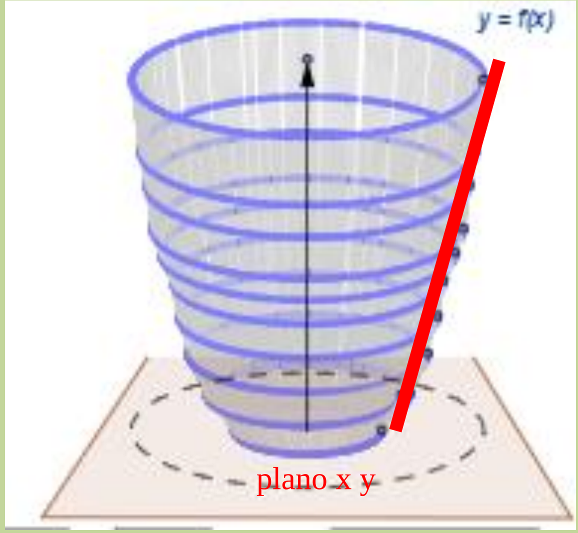
Como se observa, el radio **r** no es el mismo para todas las circunferencias, varía según cambia *la altura* en z. En general, para cada valor de z hay un radio diferente, el radio depende de z. Por lo tanto, dicho radio es función de z, lo cual se escribe:

$$r = f(z)$$

Si es r^2, *entonces*

$$r^2 = f(z)^2$$

r es función del eje de rotación



https://www.geogebra.org/m/dam7gNMb

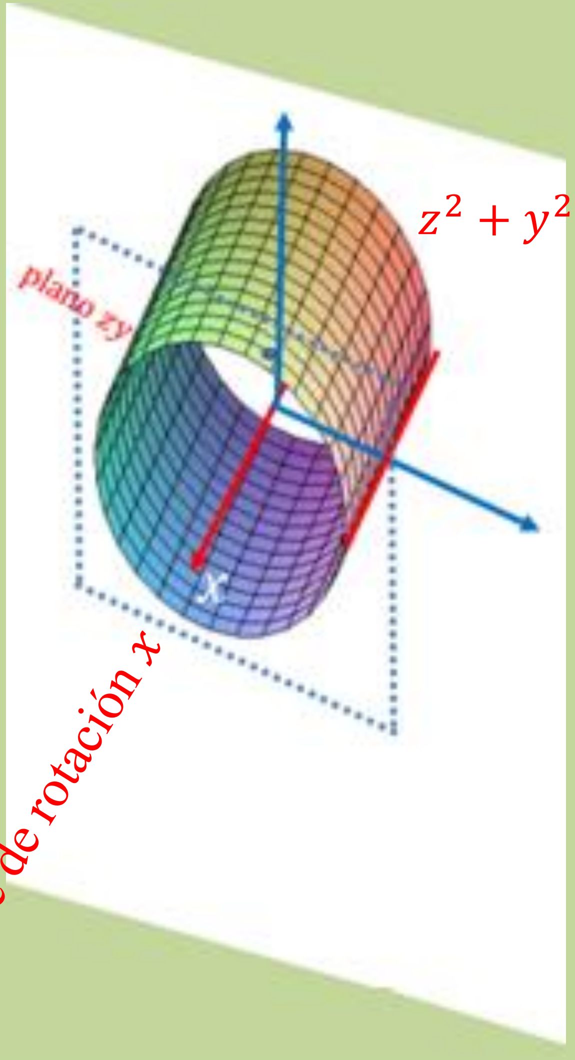
Entonces, las circunferencias tendrán por ecuación general:

$$x^2 + y^2 = f(z)^2$$

Porque

$$r = f(z)$$

r es función del eje de rotación



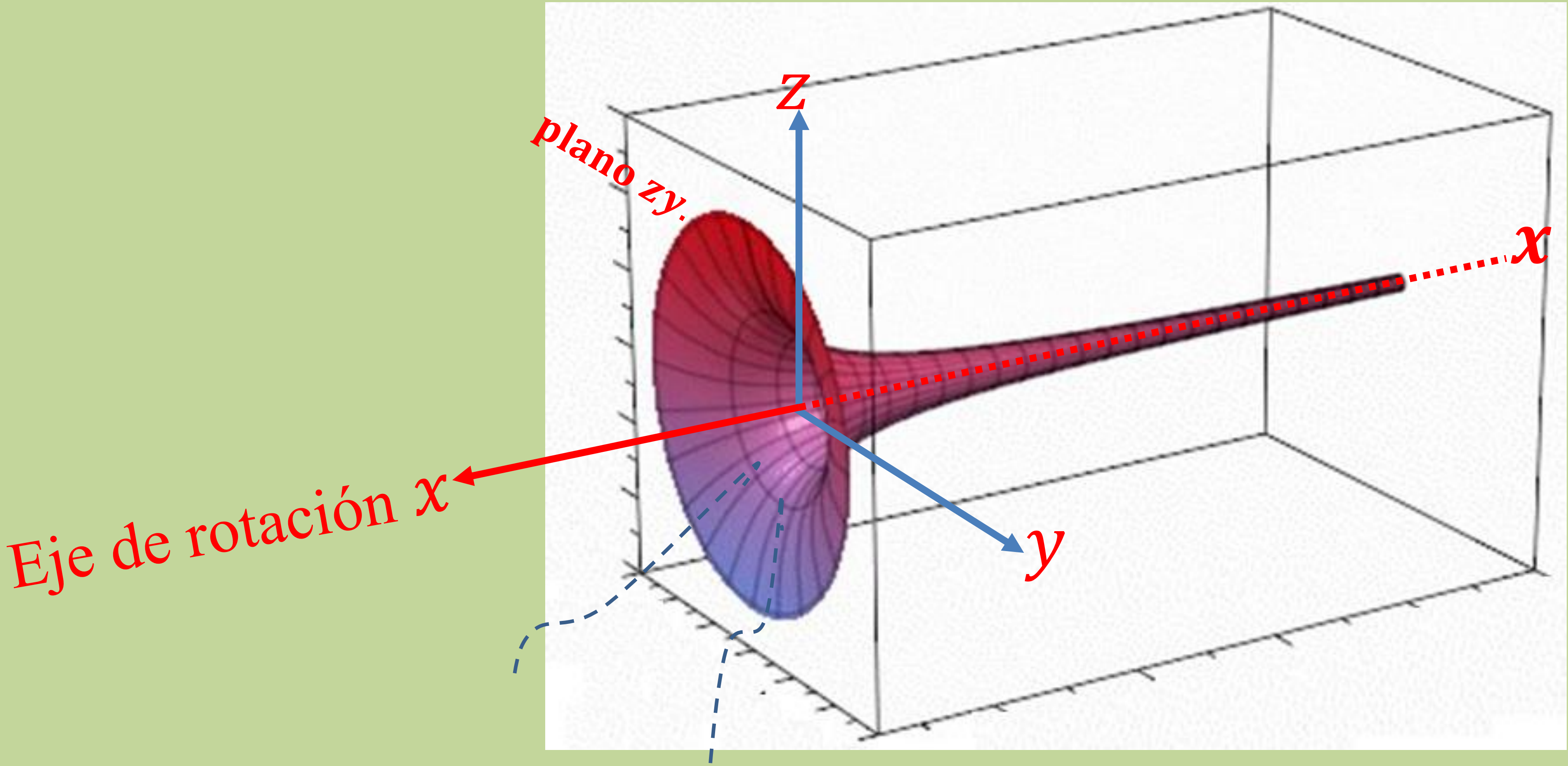
$z^2 + y^2 = r^2 (\, r \ variable)$

$$y^2 + z^2 = r^2$$

$$y^2 + z^2 = f(x)^2$$

r es función del eje de rotación

Si el eje de rotación es el eje x, las circunferencias generadas serán paralelas al plano formado por las letras faltantes zy: plano zy. Por tanto, su ecuación es de la forma: $y^2 + z^2 = f(x)^2$. r será variable en función de x (en general r es diferente para cada circunferencia).

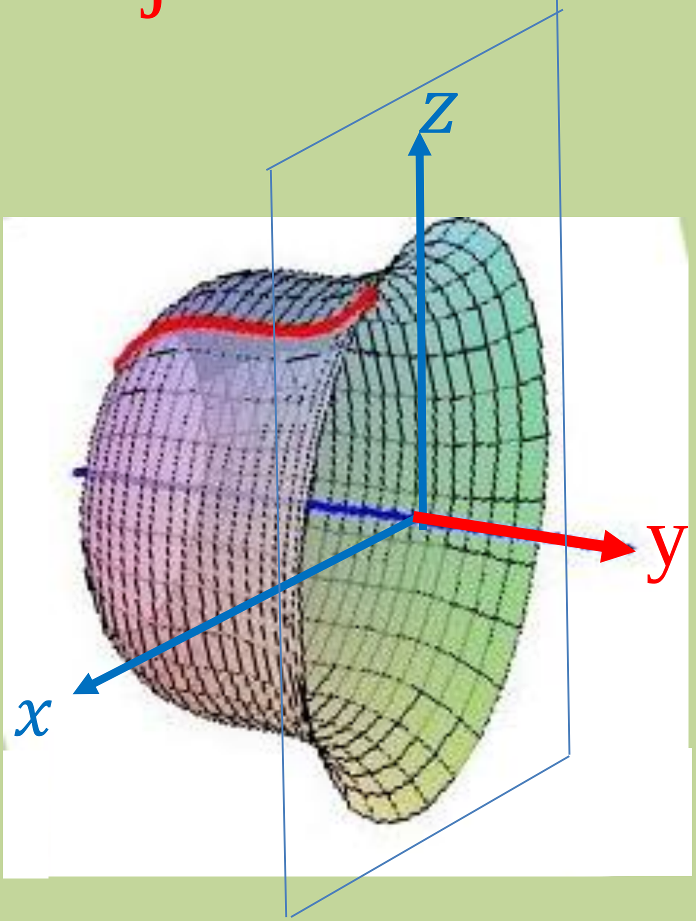


$z^2+y^2=r^2 \rightarrow$ r$=f(x)$

r es función del eje de rotación

Eje de rotación x: las circunferencias generadas serán paralelas al plano formado por las letras faltantes zy: plano zy. Por tanto, su ecuación es de la forma: $z^2+y^2=r^2$(r variable).

Eje de rotación y

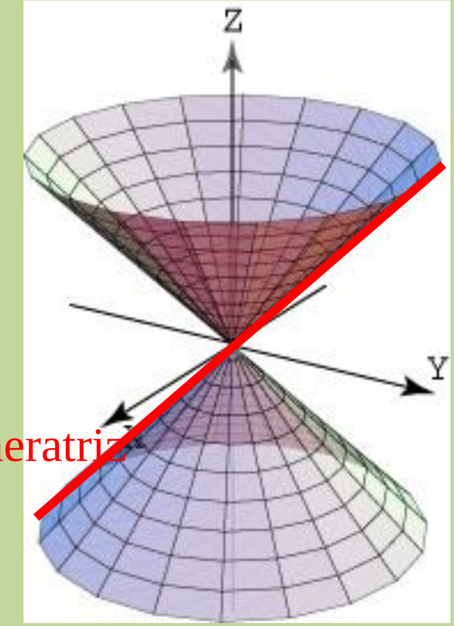


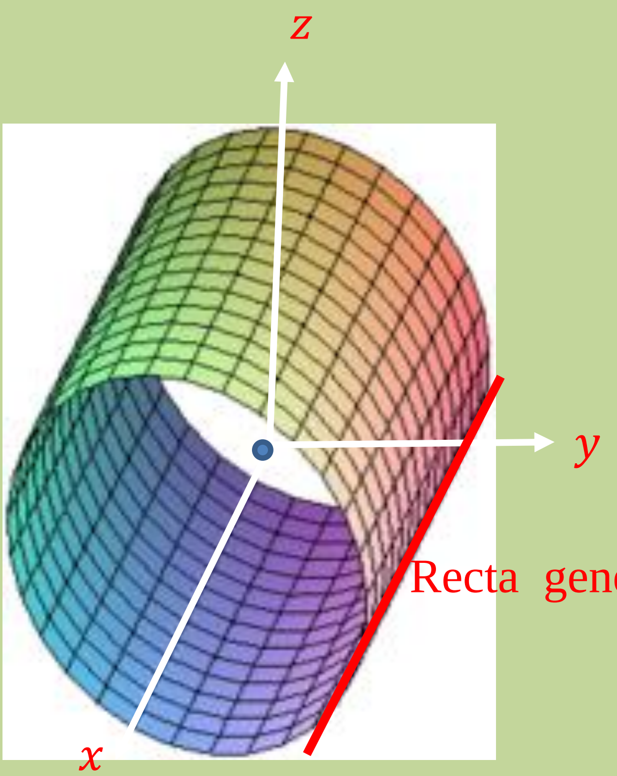
eje de rotación

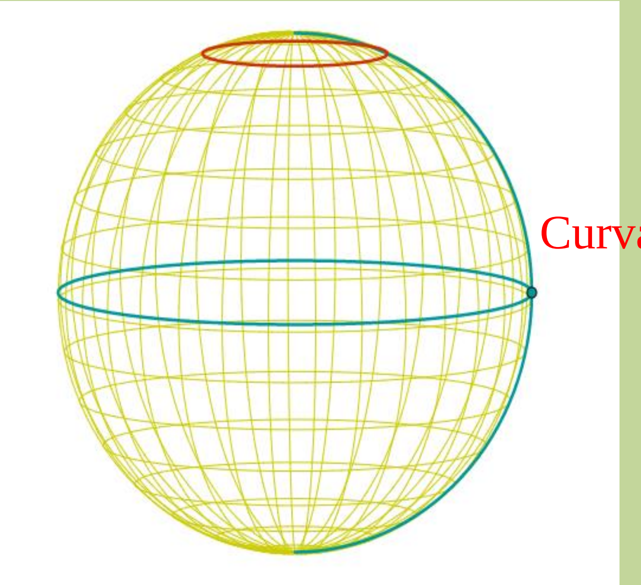
$$x^2 + z^2 = f(y)^2$$

Si el eje de rotación es el eje y, las circunferencias generadas serán paralelas al plano formado por las letras faltantes: plano zx.
Por tanto, su ecuación es de la forma: $x^2 + z^2 = f(y)^2$

Curva generatriz

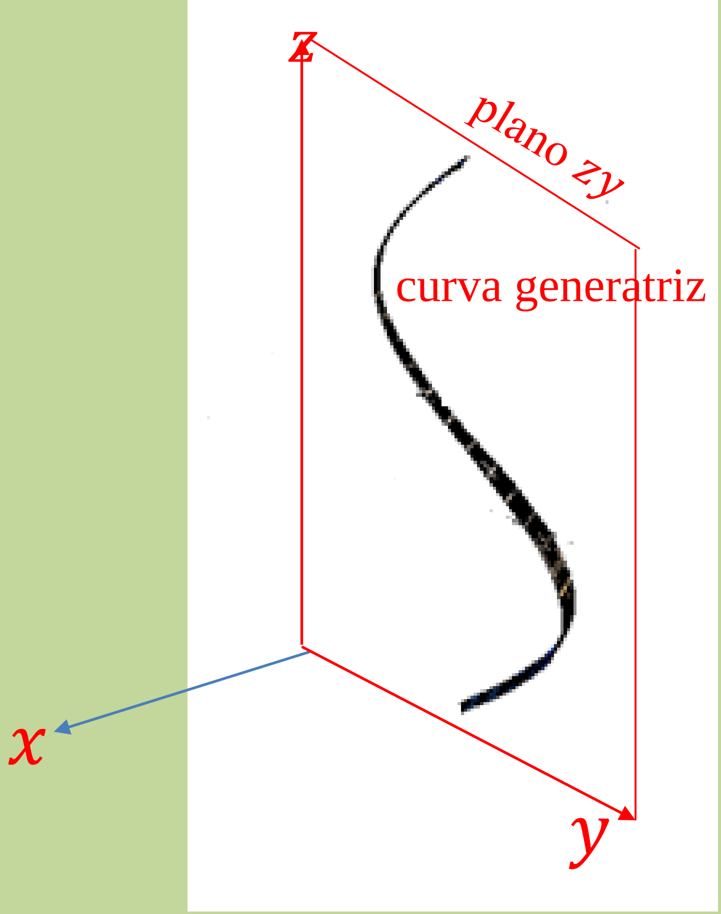


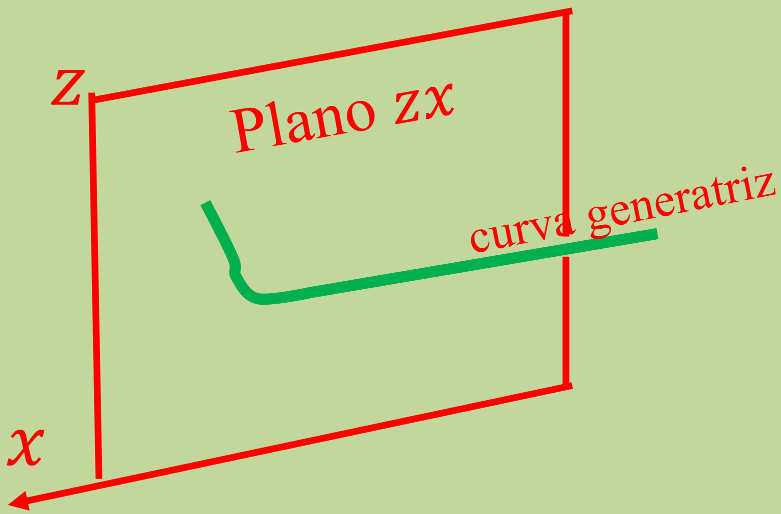




La curva generatriz puede ser:

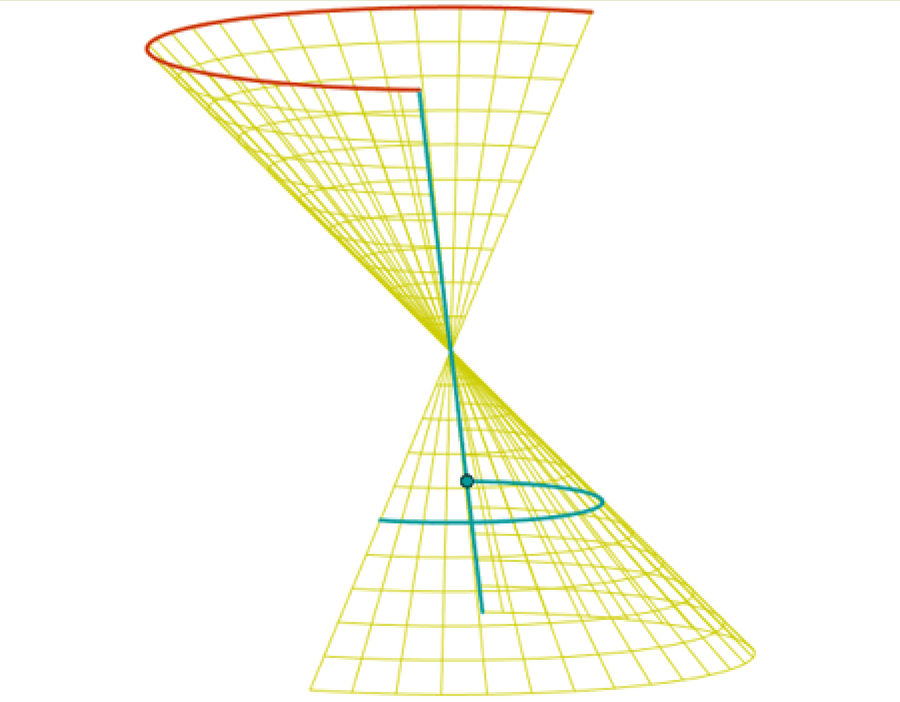
- Una recta
- Una curva

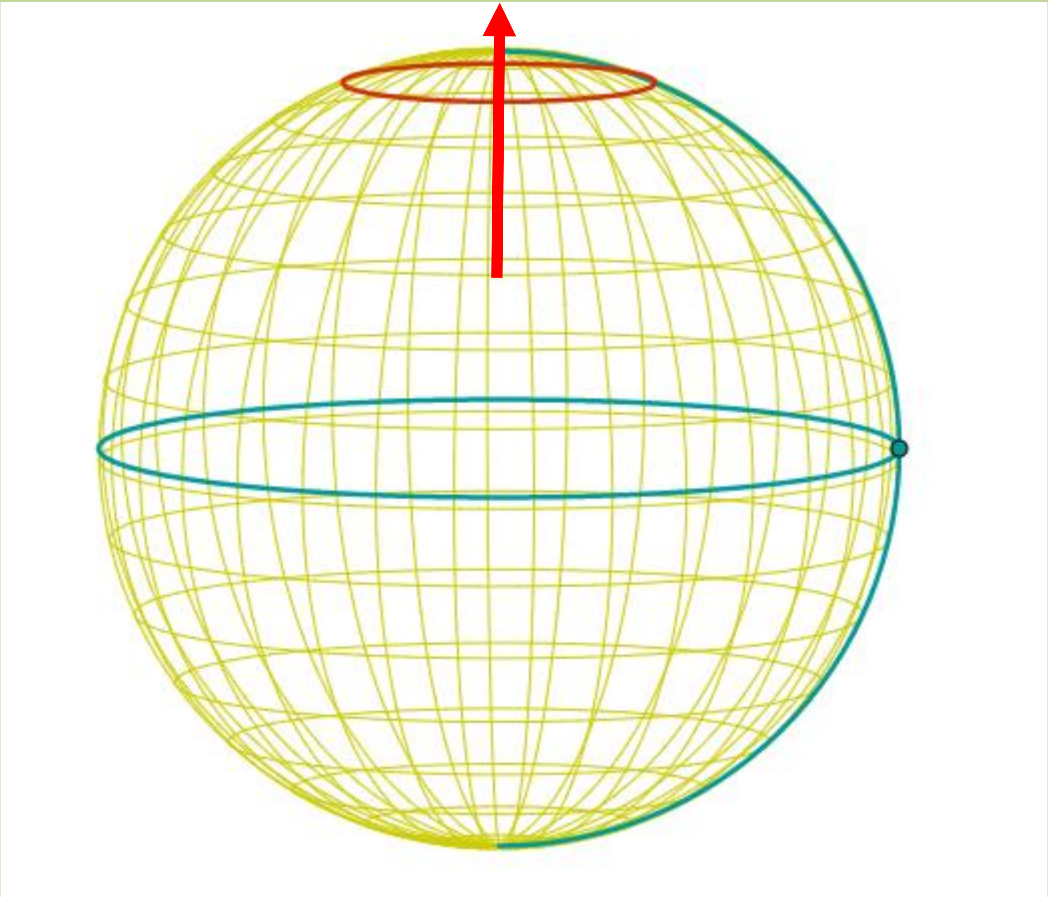




La curva generatriz inicial se va considerar solo en los planos coordenados

- zx
- zy
- xy





http://geogebra.es/cvg/html/esfera.html

Ejercicio 1

Suponga que la curva generatriz es $yz - 1 = 0$

$$yz - 1 = 0 \quad (1)$$

Nos dan el eje de giro: eje z.

https://www.geogebra.org/m/dam7gNMb

Análisis de las circunferencias generadas

Si el eje de giro es el eje z, las circunferencias serán paralelas al plano xy.
Y su radio varía en función de z. Por tanto, su ecuación es:

$$x^2 + y^2 = (f(z))^2 \quad (2)$$

$$f(z) = ?$$

$f(z)$ *resulta del análisis de la curva generatriz.*
Se obtiene al despejar la otra variable de la ecuación de la curva generatriz en función de z de la curva generatriz

Análisis de la curva generatriz

La ecuación es una hipérbola de forma general $f(y,z) = 0$. Debo expresarla en la forma que y quede en función de z, $y = f(z)$. Lo cual hago despejando y de la ecuación (1).

$$yz - 1 = 0$$

$$y = \frac{1}{z} = f(z) \qquad (3)$$

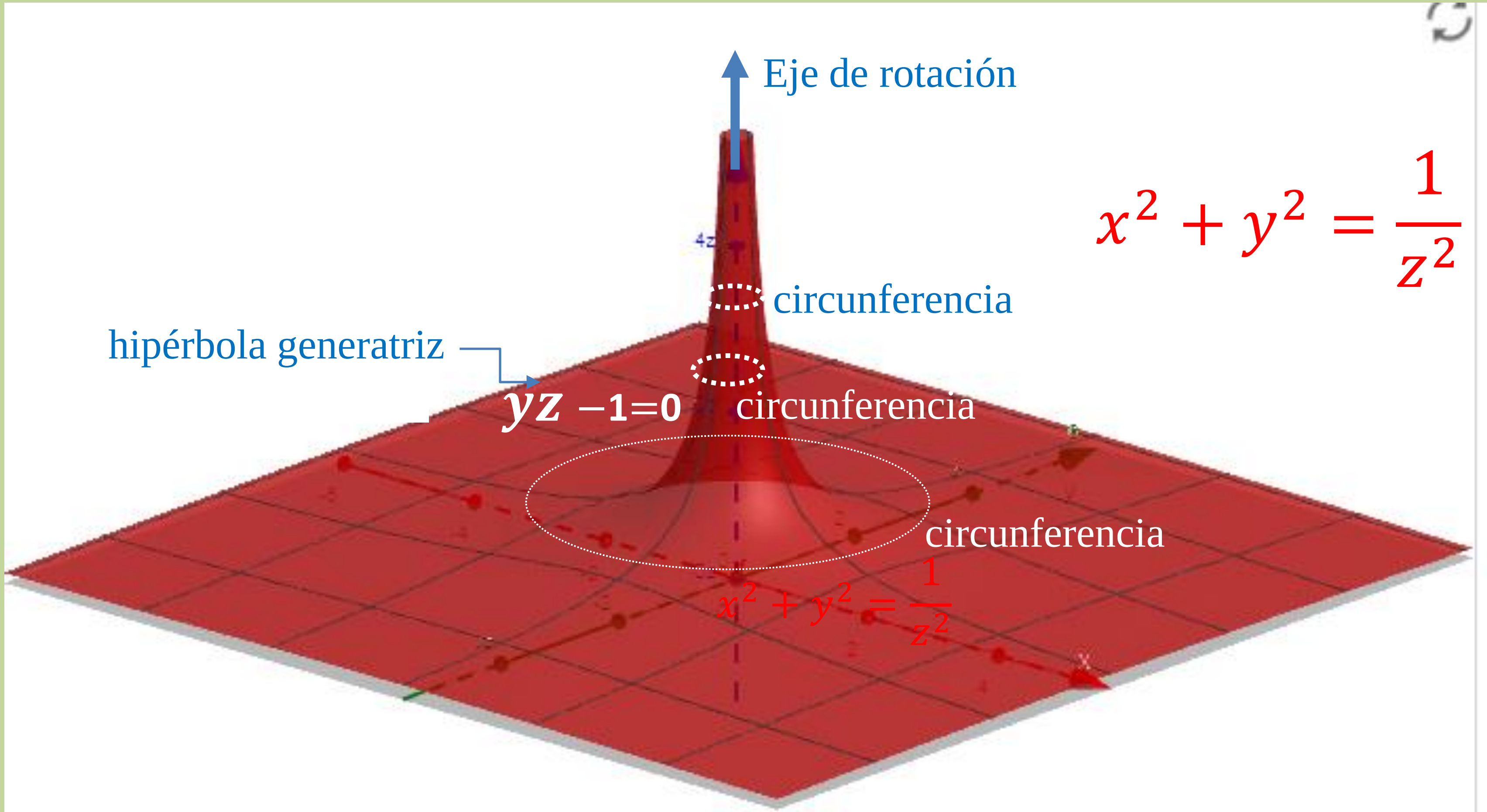
(3) en (2)

Por tanto, se remplaza $f(z)=\frac{1}{z}$ en la ecuación de la circunferencia:

$$x^2+y^2=[f(z)]^2=(\frac{1}{z})^2$$

$$x^2+y^2=\frac{1}{z^2}$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}}$$



Observe en la gráfica las circunferencias en blanco generadas por la hipérbola generatriz al girar en el eje z.

https://www.geogebra.org/m/dam7gNMb

Ejercicio 2

Suponga que la curva generatriz es $yz - 1 = 0$

$$yz - 1 = 0 \quad (1)$$

Nos dan el eje de giro: eje y.

Análisis de las circunferencias generadas

Si el eje de giro es el eje y, el radio de las circunferencias varía en función de y, las circunferencias serán paralelas al plano xz.
Por tanto, su ecuación es:

$$x^2 + z^2 = (f(y))^2$$

$$f(y) = ?$$

Análisis de la curva generatriz

La ecuación es una hipérbola de forma general $f(x, y) = 0$. Debo expresarla en la forma que z quede en función de y, z= $f(y)$. Lo cual hago despejando z de la ecuación (1).

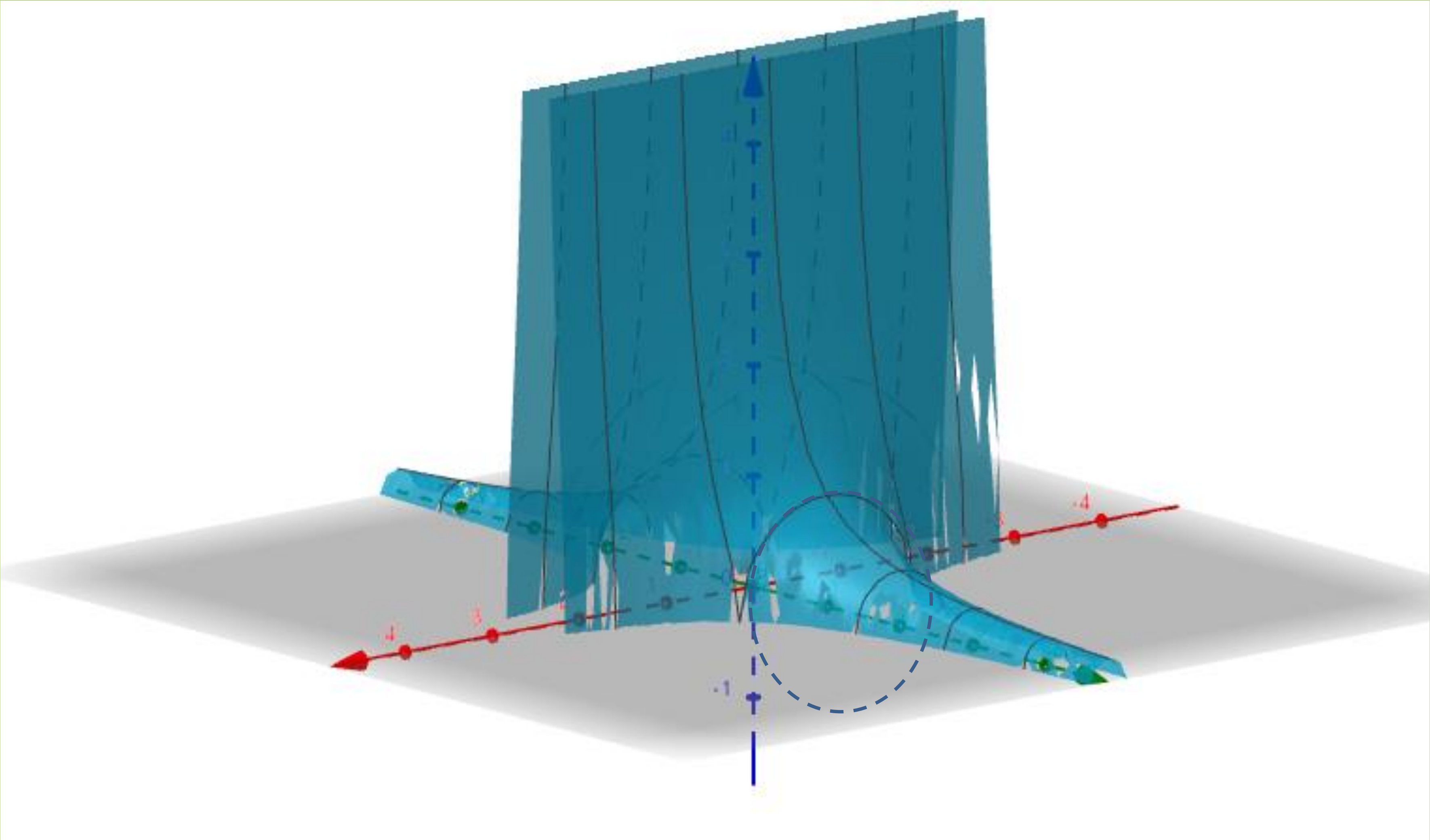
$$yz - 1 = 0 \quad (1)$$

$$z = \frac{1}{y} = f(y) \quad (2)$$

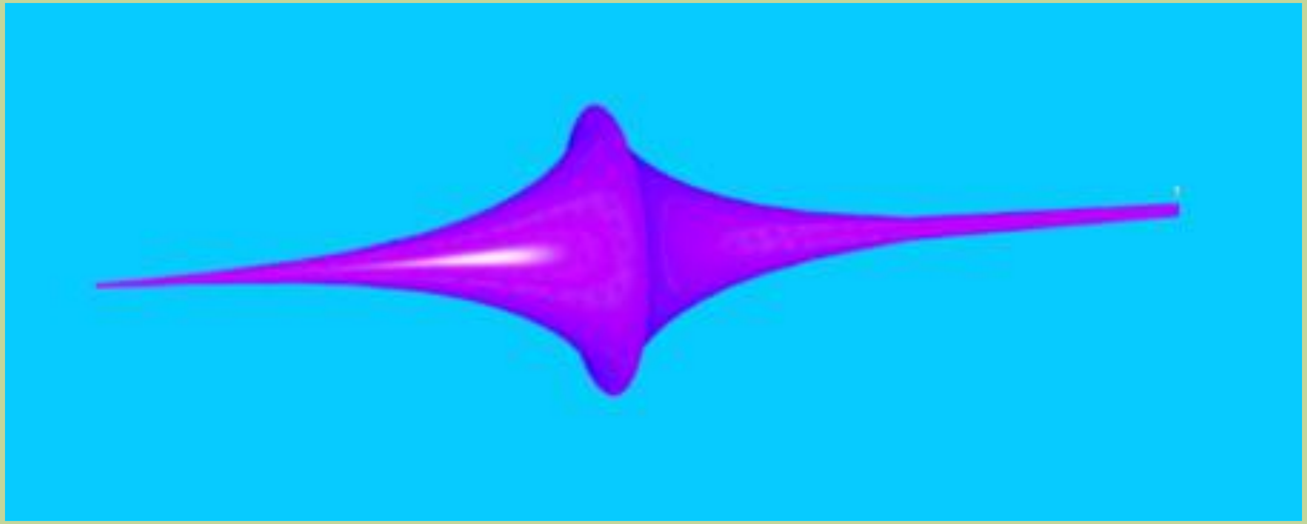
Por tanto, se remplaza $z = \frac{1}{y} = f(y)$ en la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + z^2 = (f(y))^2 = \left(\frac{1}{y}\right)^2$$

$$x^2 + z^2 = \frac{1}{y^2}$$



$$z = +\sqrt{\frac{1}{y^2} - x^2}$$



Ejercicio 3

$$Curva\ genetatriz$$

$$x - 3y = 0$$

Nos dan el eje de giro: eje x.

https://www.geogebra.org/m/dam7gNMb

Análisis de las circunferencias generadas

Si el eje de giro es el eje x, las circunferencias serán paralelas al plano yz.
Y tendrán su radio variable en función de x. Su ecuación es por tanto:

$$y^2 + z^2 = (f(x))^2$$

$$f(x) =?$$

Análisis de la curva generatriz

$$x - 3y = 0 \quad (1)$$

La ecuación es una línea recta de pendiente 3, de la $f(x, y) = 0$. Debo expresarla en la forma que y quede en función de x, y= $f(x)$. Lo cual hago despejando y de la ecuación (1).

$$x = 3y$$

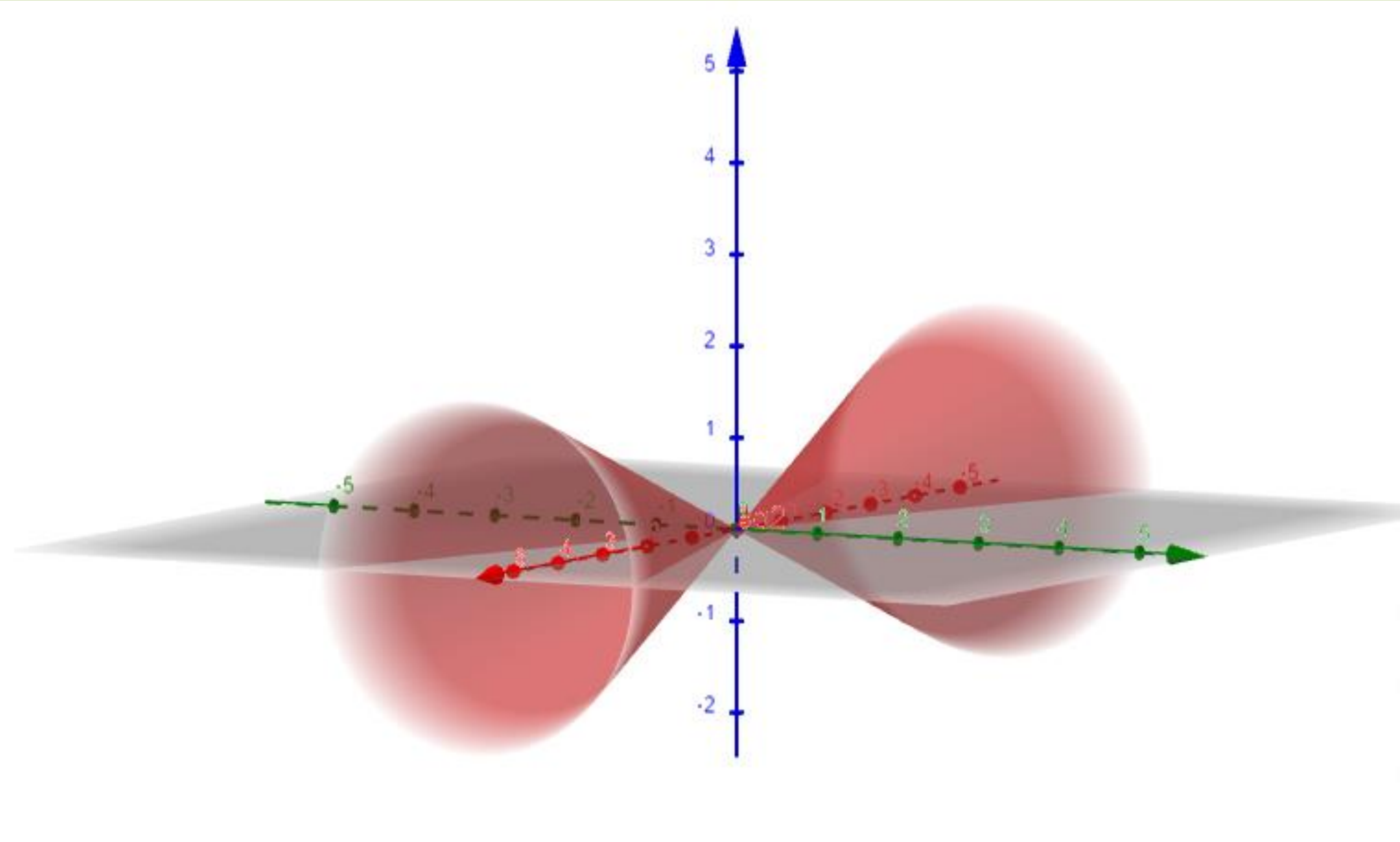
$$\frac{x}{3} = y = f(x) \quad (2)$$

$$y^2 + z^2 = (f(x))^2$$

$$y^2 + z^2 = [\frac{x}{3}]^2$$

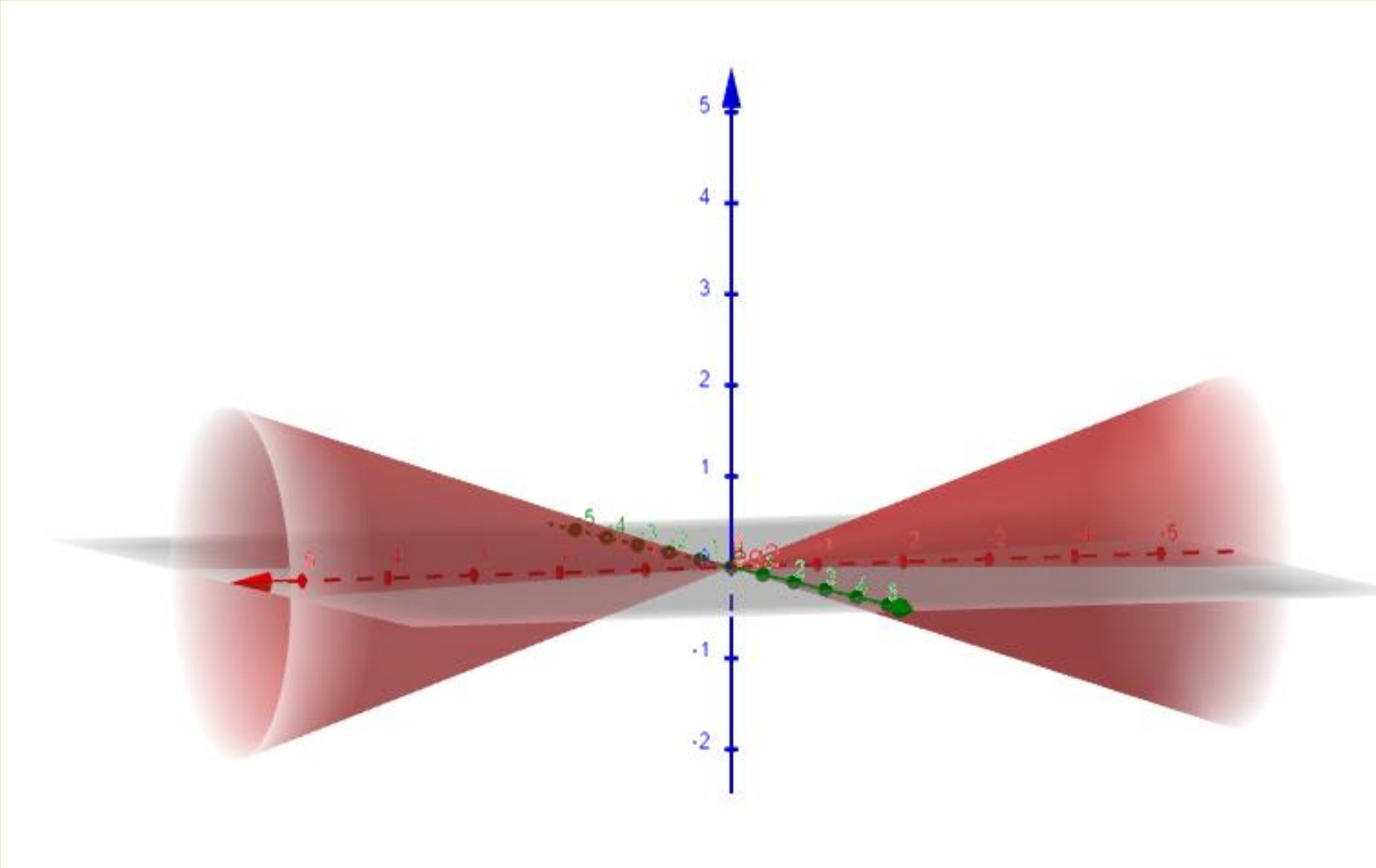
$$y^2 + z^2 = \frac{x^2}{9}$$

$$9y^2 + 9z^2 = x^2$$



https://www.geogebra.org/3d

$$y^2 + z^2 - x = 0$$



https://www.geogebra.org/3d

Puntos de concavidad
https://klazear.diplomaplus.net/concavity-points-of-inflection?v=5

https://www.khanacademy.org/math/calculus-home/integration-techniques-calc/u-substitution-calc/e/integration-by-u-substitution