Curvas Cónicas
Traslaciones de ejes coordenados II

Presentación realizada por Efrén Giraldo

- **MISVALORES**

Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

- **MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

- **MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema.

Servir a las personas.

Enail: hegiraldo2@Gmail.com

Tercer uso de las ecuaciones de traslación

El tercer uso de estas ecuaciones de traslación es descubrir, ¿Cómo queda cierta ecuación cuando cambia de origen? (Referenciarla a un nuevo sistema de ejes coordenados)

Se trata de reemplazar en las ecuaciones de las curvas, las ecuaciones

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$
$$z = z' + l$$

, de esta manera la ecuación de la curva queda solo en función de x', y', z', (queda referenciada al nuevo sistema O´(h,k,l).

Sistema (x, y, z) al sistema (x', y', z')

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \\ z = z' + l \end{cases}$$

Para reemplazar en ecuaciones de curvas

Sistema (x', y', z') al sistema (x, y, z)

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \\ z' = z - l \end{cases}$$

Para reemplazar en ecuaciones de curvas

Para reemplazar en ecuaciones de curvas

Si se trasladan los ejes coordenados a un nuevo origen O'(h, k), y si las coordenadas de cualquier punto P antes eran (x, y) y después de la traslación son (x', y'), las ecuaciones de transformación del sistema primitivo O(0,0,0) ***al nuevo sistema O'(h, k, l),*** *de coordenadas son:*

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$
$$z = z' + l$$

$$x = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{h} \quad (1)$$
$$y = \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{k} \quad (2)$$
$$z = z' + l \quad (3)$$

.

Para cambiar de origen en una ecuación se reemplaza la x, y o z de la ecuación, por el valor de $\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{k}$, $z' + l$.

Lo que ocurre al reemplazar las ecuaciones anteriores en una ecuación dada, es que ***cambian de posición los ejes coordenados*** sin girarlos, de manera que cada eje permanece paralelo a su posición original. Una vez que el origen de un sistema de ejes x, y es cambiado al punto O´(x', y'), cada punto $P(x, y)$ toma un nuevo conjunto de coordenadas P´(x´,y´) en el nuevo sistema.

No obstante, *el punto como tal no cambia de posición. Y por tanto, la curva tanpoco.*

Uso 3: pasar una ecuación del origen 0(0,0) a un nuevo origen 0’(h, k).

Ejercicio # 3

¿Como queda la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$

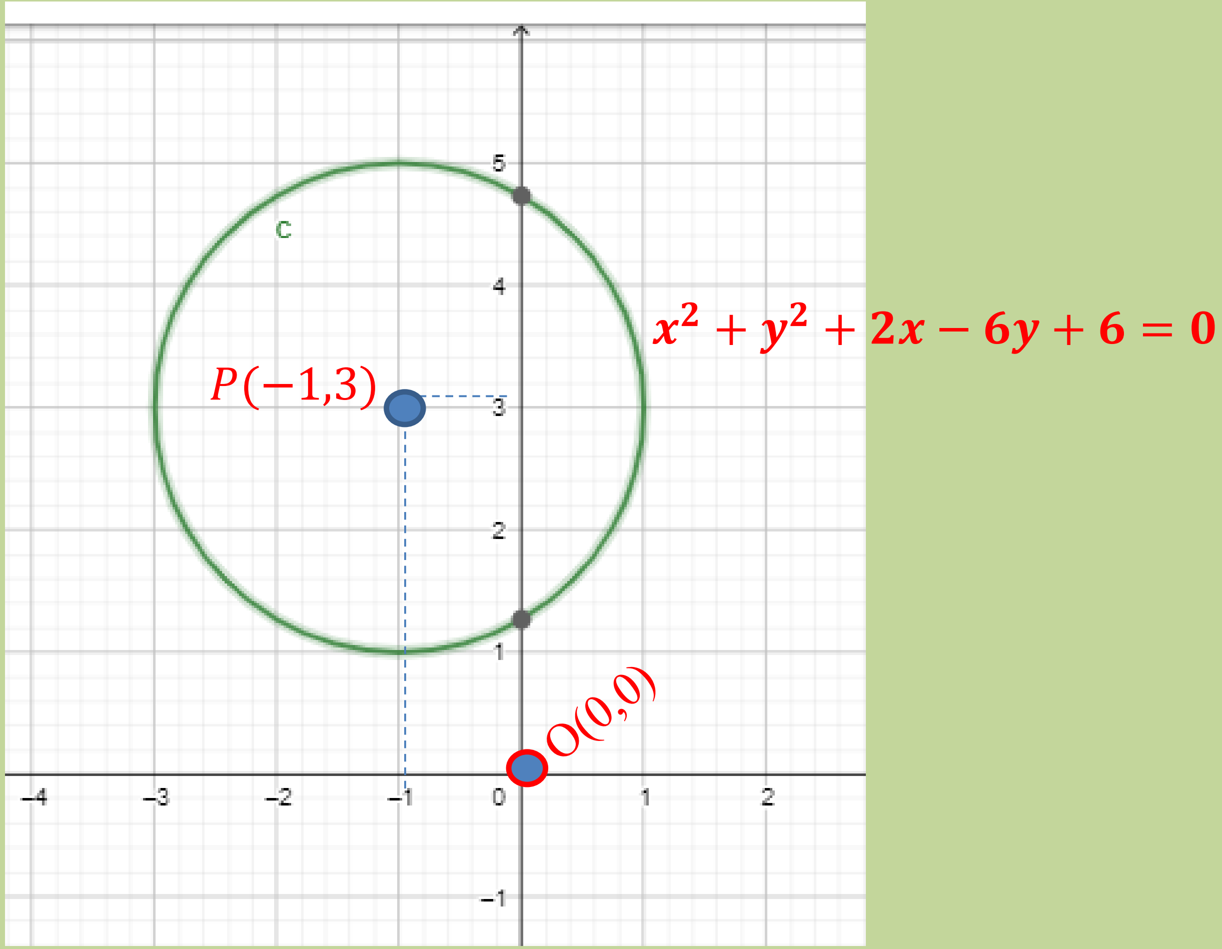
$si\ se\ translada\ del\ sistema\ coordenado\ clasico\ O(0,0)\ al\ O'(-1,3)?$

h, k

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

Si graficamos la ecuación original con Geogebra, tenemos un referente de dónde partimos y qué pasa al hacer la traslación de ejes. Graficar con Geogebra es muy fácil. Se abre el programa y se entra la ecuación.

https://www.geogebra.org/graphing?lang=es



En estos momentos, la ecuación $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0}$ está referenciada al origen antiguo O(0,0). Se observa que la gráfica es una circunferencia con centro en el punto $P(-1, 3)$.

Se pide **trasladar los ejes al punto P$(-1, 3)$**, que es el mismo punto donde está situada o centrada la ircunferencia. Se solicita refrenciar la ecuación al nuevo origen O´$(-1,3)$.

https://www.geogebra.org/graphing?lang=es

Ahora, sustituimos los valores de (h,k) en las ecuaciones de traslación.

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

$$h = -1$$
$$k = 3$$

$$\boxed{x = \underline{x' - 1} \qquad y = \underline{y' + 3}}$$

Sustituyendo los valores de x y y en la ecuación dada tenemos:

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$$

$$\boldsymbol{x} = (x' - 1)$$
$$\boldsymbol{y} = [y' + 3]$$

$Nuevo\ origen$: O’ (-1,3)

$P(h, k)$

Si empleamos el método del cajón o paréntesis: en donde exista la x o la y, coloco un cajón o paréntesis, y para la y otro diferente, si hay z, lo mismo. De esta manera se entenderá fácilmente el reemplazo.

$$(\ )^2 + [\ \ ]^2 + 2(\ ) - 6[\ \ ] + 6 = 0$$

$$(x' - 1)^2 + [y' + 3]^2 + 2(x' - 1) - 6[y' + 3] + 6 = 0$$

$$(x' - 1)^2 + \{y' + 3\}^2 + 2(x' - 1) - 6\{y' + 3\} + 6 = 0$$

$$(x' - 1)^2 = x'^2 - 2x' + 1$$
$$(y' + 3)^2 = y'^2 + 2.3y' + 9$$
$$2(x'-1) = 2x' - 2$$

$$x'^2 - 2x' + 1 + y'^2 + 6y' + 9 + 2x' - 2 - 6y' - 18 + 6 = 0$$

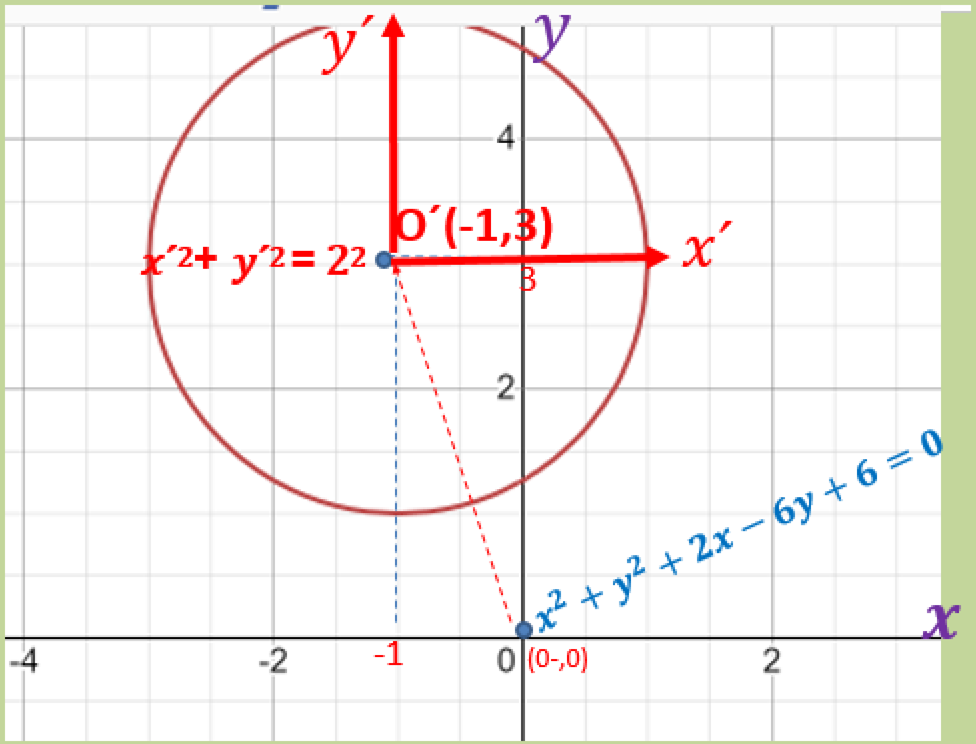
$$x'^2 \cancel{- 2x'} + 1 + y'^2 \cancel{+ 6y'} + 9 \cancel{+ 2x'} - 2 \cancel{- 6y'} - 18 + 6 = 0$$

Términos en x'e y' desaparecen

$$x'^2 + y'^2 - 4 = 0 \qquad x'^2 + y'^2 = 4 \qquad x'^2 + y'^2 = 2^2$$

Obsérvese que la expresión **obtenida no tiene términos lineales, lo cual, se busca con la traslación de ejes coordenados**. La gráfica corresponde a una circunferencia de radio 2.

En la diapositiva siguiente la gráfica correspondiente:



Se trasladaron los ejes del punto (0,0) al punto (-1,3), por tanto, cambió la ecuación.

<u>La gráfica no cambió de posición, la ecuación cambió de ejes de referencia.</u>

<u>Cambió de origen</u>

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y + 6 = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{} + \underbrace{y^2 - 6y + 9}_{} - 1 - 9 + 6 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 - 4 = 0$$

$$(x+1)^2+(y-3)^2=4$$

$$(x-(-1))^2+(y-3)^2=2^2 \longrightarrow \textit{Circunferencia con centro en } x=-1,\ y=3$$

$x´=x-h \qquad x´=x-(-1)$

$y´=y-h \qquad y´=\ y-3$

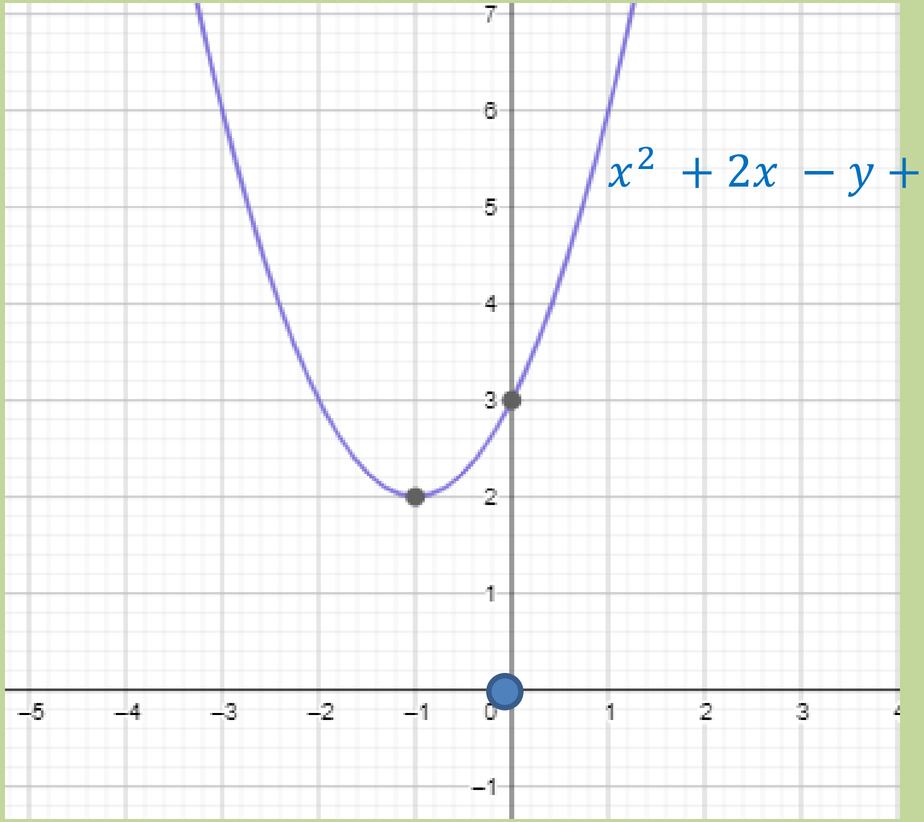
$$(x´)^2+(y´)^2=2^2$$

Ejercicio # 4

Se tiene la siguiente ecuación $x^2 + 2x - y + 3 = 0$ referida a un origen O(0,0). Si establecemos un nuevo sistema en 0'(-1, 2), ¿Cómo resulta la ecuación referida al nuevo origen?

$$x = x' + h \quad (1)$$
$$y = y' + k \quad (2)$$

Se reemplazan las ecuaciones (1) y (2) en la ecuación original de la recta



$$x^2 + 2x - y + 3 = 0$$

Gráfica de la parábola obtenida con Geogebra. La ecuación está referida al origen antiguo.

https://www.geogebra.org/graphing?lang=es

$$x^2 + 2x - y + 3 = 0$$

$x = x' + h$
$y = y' + k$

0’(-1,2),

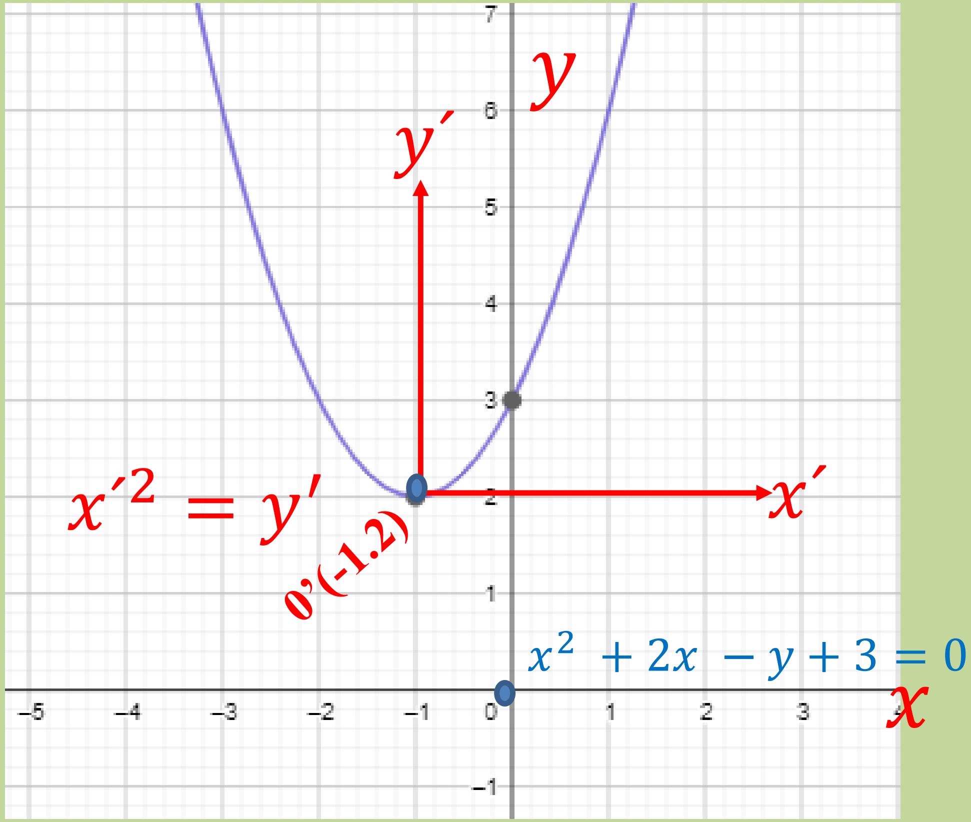
$$x = x' - 1$$
$$y = y' + 2$$

$$(x' - 1)^2 + 2(x' - 1) - (y' + 2) + 3 = 0$$

Al resolver y simplificar :

$$x'^2 = y'$$

La ecuación está referida al nuevo origen 0’(-1,2)



y
$y´$
$x´^2 = y'$
$x´$
0'(-1.2)
$x^2 + 2x - y + 3 = 0$
x

Cuarto uso:

Al no darse los valores de h, k , se pide hallar esos valores h y k del nuevo origen y la nueva ecuación, mediante una translación.

Se procede inicialmente como el caso 2 pero luego se hallan (h, k)

Ejercicio 5

Se tiene la ecuación $3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0.$
Hallar los valores de h y k del nuevo origen al hacer una translación.
Simplifique la ecuación mediante una traslación de ejes.

Se deben hallar los valores de h y k del nuevo origen y la nueva ecuación.

$$3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0.$$

Se trata de reemplazar x e y de las ecuaciones de traslación , en la ecuación resultante, agrupar términos en x', y' y luego hacer cero (eliminar) los términos lineales en hx' e ky', y despejar los valores de h, k.

$$3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$$

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

$$3(x' + \mathrm{h}\,)^2 - 2(y' + k\,)^2 - 42(x' + \mathrm{h}) - 4(y' + k) + 133 = 0$$

$$3(x'^2 + 2x'h + h^2) - 2(y'^2 + 2y'k + k^2) - 42x' - 42h - 4y' - 4k + 133 = 0$$

$$3x'^2 + \boldsymbol{6x'h} + 3h^2 - 2y'^2 - 4y'k - 2k^2 - \boldsymbol{42x'} - 42h \boldsymbol{-4y'} - 4k + 133 = 0$$

$$3x'^2 + \cancel{6x'h} + 3h^2 - 2y'^2 - \cancel{4y'k} - 2k^2 - \cancel{42x'} - 42h - \cancel{4y'} - 4k + 133 = 0$$

De esta ecuación tienen que desaparecer los términos de primer grado en x' e y', para lo cual se requiere que se igualen a 0. La ecuación queda entonces así:

$$3x'^2 + 3h^2 - 2y'^2 - 2k^2 - 42h - 4k + 133 = 0$$

Y todos los términos lineales en x´e y´ se igualan a 0

$$\boldsymbol{6x'h} - \boldsymbol{42x'} = 0$$

$$\downarrow$$

$$x'(6h - 42) = 0$$

$$6h - 42 = 0$$

$$6h = 42$$

$$h = \frac{42}{6} = 7$$

$$-4y'k - \boldsymbol{4y'} = 0$$

$$\downarrow$$

$$y'(-4k - \boldsymbol{4}) = 0$$

$$-4k - 4 = 0$$

$$-4k = \boldsymbol{4}$$

$$k = -\boldsymbol{1}$$

$\boldsymbol{h} = \mathbf{7}$ $k = -\mathbf{1}$ O´(7,-1)

Para hallar la ecuación final

Se remplazan en

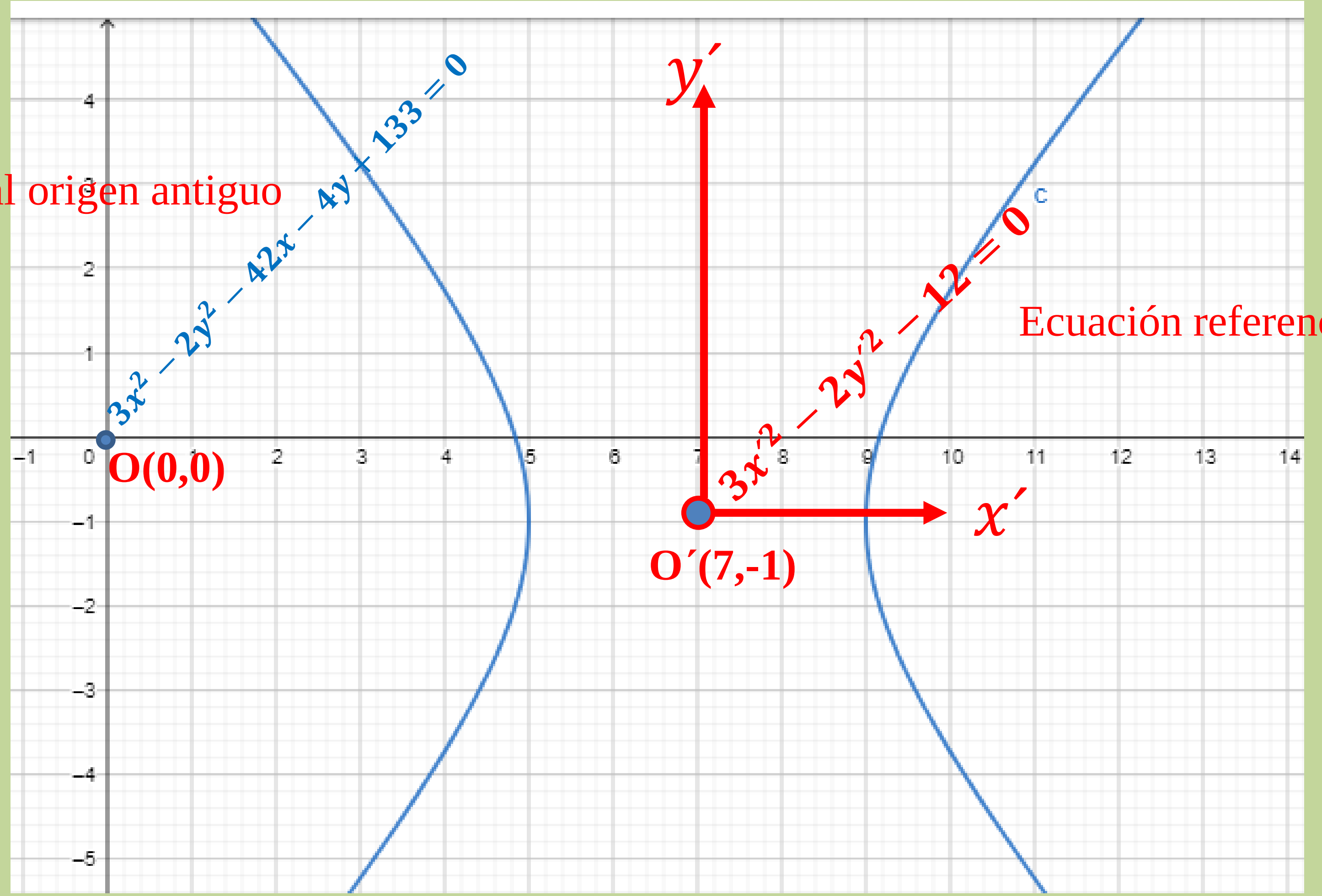
$$3x'^2 + 3h^2 - 2y'^2 - 2k^2 - 42h - 4k + 133 = 0$$

$$3x'^2 + 3(7)^2 - 2y'^2 - 2(-1)^2 - 42(7) - 4(-1) + 133 = 0$$

$$3x'^2 - 2y'^2 - 12 = 0$$

Esta es la nueva ecuación referenciada al nuevo origen O´(7,-1)

Ecuación referenciada al origen antiguo



Ecuación referenciada al nuevo origen O´(7,-1)

Problema Tipo 4: se deben hallar los valores de h y k del nuevo origen al hacer una traslación de ejes en la ecuación:

Ejercicio # 6

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$$

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$$

$$(x' + h)^2 + (y' + k)^2 - 2(x' + h) - 6 = 0$$

$$x'^2 + \cancel{\mathbf{2x'h}} + h^2 + y'^2 + \cancel{2y'k} + 2k^2 - \cancel{\mathbf{2x'}} - 2h - \cancel{\mathbf{6y'}} - 6k - 6 = 0$$

De esta ecuación deben desaparecer los términos de primer grado en x’ e y’, para lo cual se requiere que sean iguales a 0. La ecuación queda entonces así:

$$x'^2 + h^2 + y'^2 + 2k^2 - 2h - 6k - 6 = 0$$

Y los términos lineales resultan:

$$2x'h - 2x' = 0 \qquad 2y'k - 6y' = 0$$

$$x'(2h - 2) = 0 \qquad y'(2k - 6) = 0$$

Se requiere que los coeficientes respectivos sean nulos, es decir:

$$2h - 2 = 0 \qquad h = 1$$
$$2k - 6 = 0 \qquad k = 3$$

El nuevo origen de coordenadas es C(1,3)

$$x'^2 + h^2 + y'^2 + 2k^2 - 2h - 6k - 6 = 0$$

$$x'^2 + 1^2 + y'^2 + 2(3)^2 - 2(19 - 6(3) - 6 = 0$$

$$x'^2 + y'^2 - 43 = 0$$
$$x'^2 + y'^2 = 43$$

Ecuación de una circunferencia de radio=$\sqrt{43}$ =6.5

Ejercicio # 7

Determinar los valores de (h,k) mediante una la translación y encontrar la ecuación final resultante.

$$4x^2 \ + 16x + 9y^2 + 18y - 119 = 0$$

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

$$4(x' + h)^2 + 16(x' + h) + 9(y' + k)^2 + 18(y' + k) - 119 = 0$$

$$4x'^2 + \cancel{\mathbf{8x'h}} + 4h^2 + \cancel{\mathbf{16x'}} + 16h + 9y'^2 + \cancel{18\boldsymbol{ky'}} + 9k^2 + \cancel{\mathbf{18y'}} + 18k - 119 = 0$$

$$4x'^2 + 4h^2 + +16h + 9y'^2 + 9k^2 + 18k - 119 = 0$$

$8x'h + 16x'=0$ $\quad$ $18ky' + 18y' = 0$

$x'(8h + 16)=0$ $\quad$ $y'(18k + 18) = 0$

$8h + 16 = 0$ $\quad$ $18k + 18 = 0$

$h = -16/8=-2$ $\quad$ $k = -\dfrac{18}{18} = -1$

$$4x'^2 + 4h^2 + 16h + 9y'^2 + 9k^2 + 18k - 119 = 0$$

$$h = -2$$
$$k = -1$$

$$4x'^2 + 4(-2)^2 + 16(-2) + 9y'^2 + 9(-1)^2 + 18(-1) - 119 = 0$$

$$4x'^2 + 9y'^2 = 144$$

Segundo método. En el caso de ecuaciones de segundo grado que carezcan del termino en xy, es posible efectuar la transformaci6n completando los cuadrados.

$$4x^2 + 16x + 9y^2 + 18y - 119 = 0$$

Saco factor común

$$4\left[x^2 + 4x\right] + 9\left[y^2 + 2y\right] - 119 = 0$$

Sumo +4 $\quad -4$
Sumo +1 $\quad -1$

$$4\left[\underline{x^2 + 4x + 4} - 4\right] + 9\left[\underline{y^2 + 2y + 1} - 1\right] - 119 = 0$$

Trinomio cuadrado perfecto Trinomio cuadrado perfecto

$$4\left[(x+2)^2 \ - 4\right] + 9\left[(y+1)^2 - 9\right] - 119 = 0$$

Destruyo corchetes

$$4\,(x+2)^2 \ - 16 + 9\,(y+1)^2 - 9 - 119 = 0$$

$$4\,(x+2)^2 \ + 9\,(y+1)^2 = 144$$

$$4\,(x-(-2))^2 \ + 9\,(y-(-1))^2 = 144$$

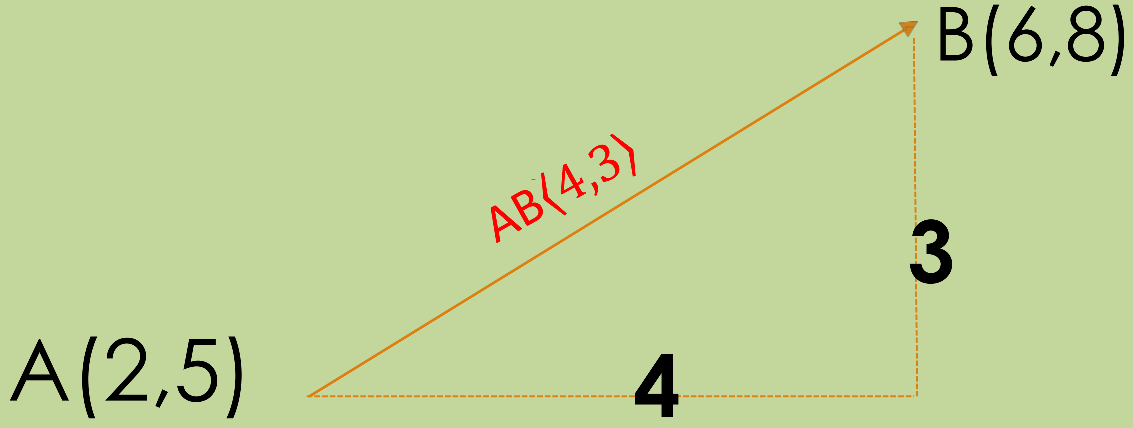
$$4\,(x-(\overset{h}{-2}))^2\;-9\,(y-(\overset{k}{-1}))^2=144$$

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

$$\boldsymbol{h = -2}$$
$$\boldsymbol{k = -1}$$

$$4x'^2\;+9y'^2=144$$



Al trasladar las coordenadas de un punto a otro, las nuevas coordenadas se incrementan con las coordenadas del vector de traslación.

El Vector traslación **AB, se halla restando las coordenadas**:

$\langle 6-2, 8-5 \rangle =$ AB$\langle 4,3 \rangle$

El punto A(2,5) pasa al ser el punto B(2+4, 5+3)= B(7, 8).

Bibliografía

Pérez, A., Paniagua, J. (2016). Geometría Analítica e introducción al Cálculo Vectorial. Fondo editorial **ITM.** Instituto Tecnológico Metropolitano, 2016. ISBN 978-958-8743-97-4.

Pixar y Khan Academy ofrecen curso online gratuito sobre animación digital

http://noticias.universia.net.co/cultura/noticia/2016/06/21/1140998/pixar-khan-academy-ofrecen-curso-online-gratuito-animacion-digital.html

https://es.khanacademy.org/partner-content/pixar