Curvas Cónicas
Traslaciones de ejes coordenados I

Presentación realizada por Efrén Giraldo

- **MIS VALORES**

Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

- **MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.
- **MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema.
  Servir a las personas.

Enail: hegiraldo2@Gmail.com

La ecuación de una cónica es de la forma general

$$\mathrm{A}x^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$B^2 - 4AC \;\; discriminante$

$B^2 - 4AC < 0$ $\quad Circunfrencia\ A\ \ B$ $=$

$B^2 - 4AC < 0$ $\quad Elipse$ A,B #.

$B^2 - 4AC$ =0 Hipérbola. A,B tienen signo diferente

$B^2 - 4AC \;\; > 0$ Parábola. Un término lineal.

$$Ax^2+Bxy+\ Cy^2+Dx+\ Ey+F=0$$

$$Dx\ \ traslación\ en\ el\ eje\ x$$

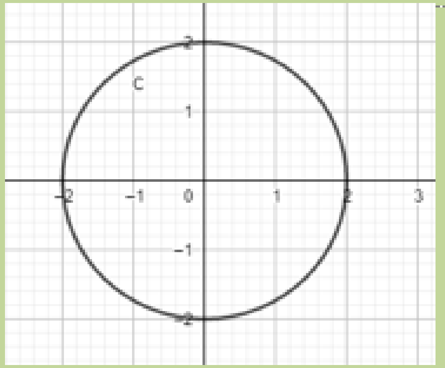
$$Ey\ \ traslación\ en\ el\ eje\ y$$

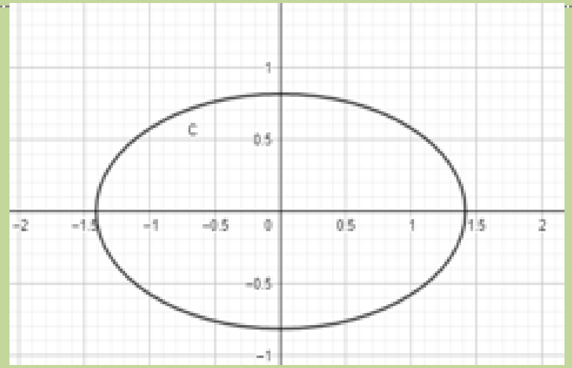
Si los coeficientes D, E existen, indican que el centro de la cónica está trasladado o fuera del origen O(0,0).

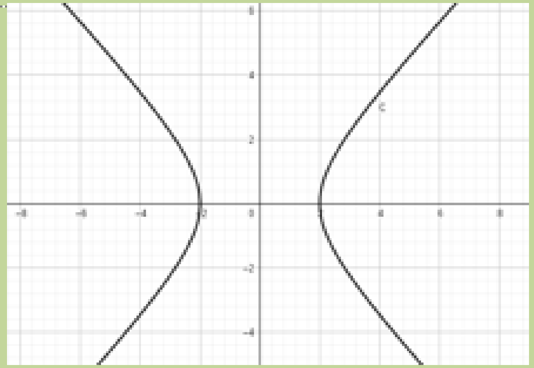
.

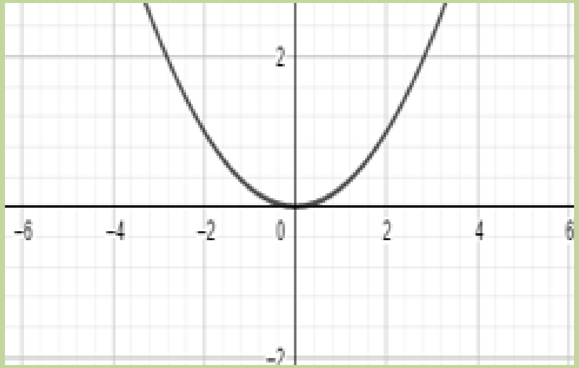
Ecuaciones canónicas de las Cónicas : Origen

Circunferencia	Elipse	Hipérbola	Parábola
$B^2 - 4AC < 0$	$B^2 - 4AC < 0$	$B^2 - 4AC = 0$	$B^2 - 4AC > 0$









$x^2 + y^2 = r^2$ ⇓ $(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ⇓ $\frac{(x-0)^2}{a^2} + \frac{(y-0)^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ⇓ $\frac{(x-0)^2}{a^2} - \frac{(y-0)^2}{b^2} = 1$

$x^2 = 4py$ ⇓ $(x-0)^2 = 4p(y-0)$

En la mayoría de aplicaciones matemáticas se emplea el sistema de coordenadas cartesiano referido a $x, y, z,$ y al origen de coordenadas O(0,0,0)- (sistema antiguo)-.

Algunas veces no obstante, para simplificar ecuaciones o para saber como quedan las coordenadas de un punto, se requiere cambiar del origen O(0,0.0) a un nuevo origen O´(h, k, l) quedando las nuevas coordenadas como $x´, y´,$ z´.

Una de las aplicaciones de este proceso, es transformar la ecuación de una curva cónica (circunferencia, elipse, parábola, hipérbola) a una forma más sencilla, generalmente a la forma canónica. Como la cónica está contenida en un plano, se establecen los planos coordenados, $xy, yz, zx,$ como base de operación.Generalmente el plano xy.

La forma algebraica de una ecuación depende de los ejes donde este ubicada y por tanto de su origen. También de si está trasladad o rotada. Lo que significa que si cierta ecuación tiene una forma determinada en el sistema antiguo $(x, y; \mathrm{O}(0,0))$, al pasarla a otro sistema de ejes $x,´y´$ (un nuevo origen O´(h,k), la ecuación generalmente cambiará de forma. Lo mismo si se trasladan los ejes o se rotan.

$$\underbrace{Ax^2+Bxy}_{\text{rotada}} + Cy^2 + \underbrace{Dx + Ey}_{\text{trasladada}} + F = 0$$

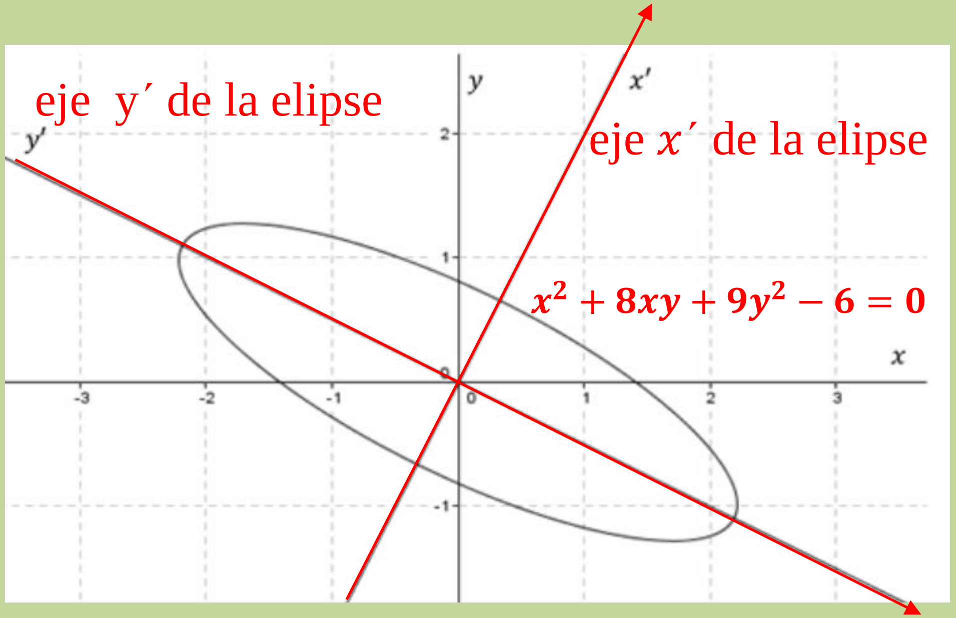
Significado del término Bxy en la ecuación de segundo grado

El término xy significa que la cónica está rotada respecto a los ejes coordenados originales x, y.

$xy \longrightarrow$ Rotación de una curva cónica

En la ecuación

$x^2 + 8xy + 9y^2 - 6 = 0$

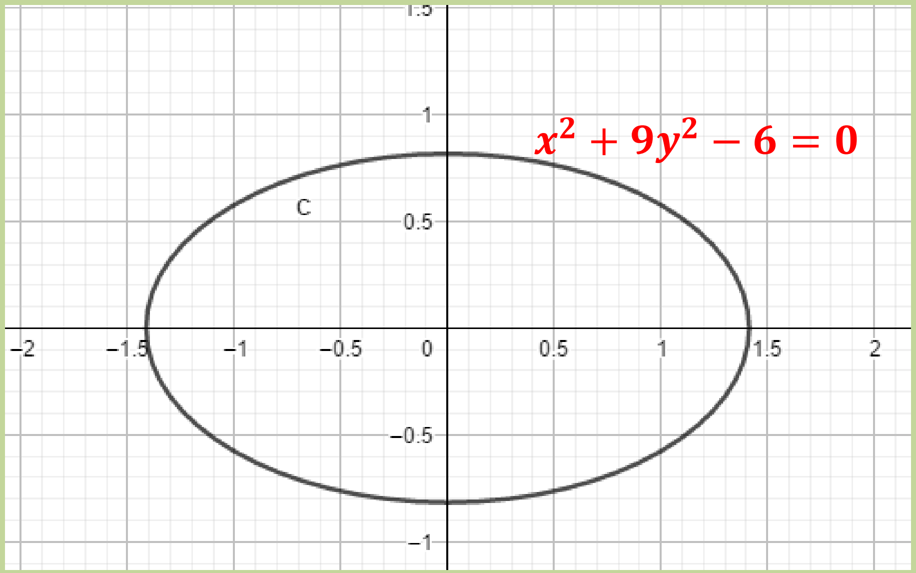


$\boldsymbol{x^2 + 8xy + 9y^2 - 6 = 0}$

Como aparece $8xy$, los ejes de la elipse están rotados respecto a los ejes xy. Es una elipse cuyos ejes no son paralelos a los ejes coordenados. No aparecen términos en x, y, la curva tiene centro en origen.

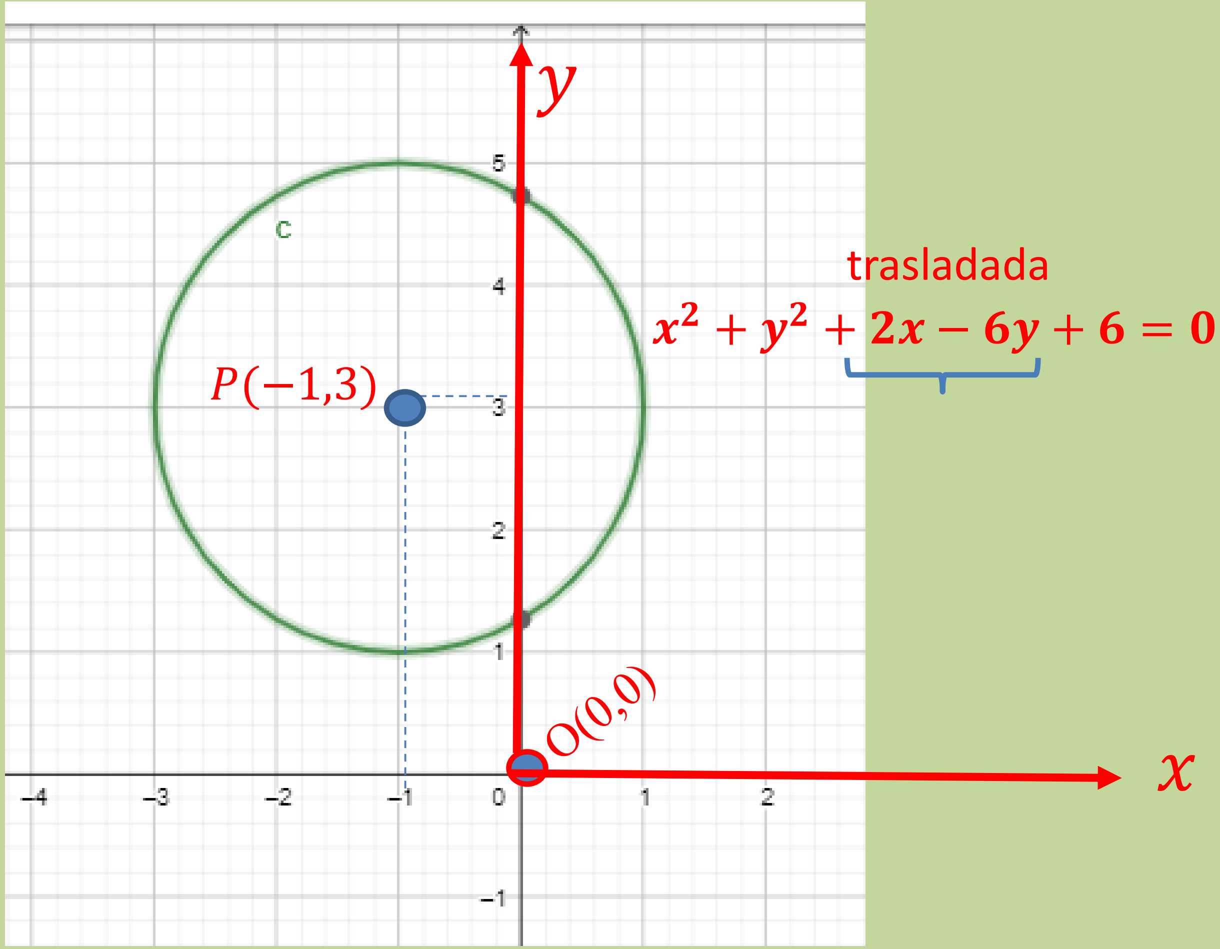
En la ecuación

$x^2 + 9y^2 - 6 = 0$

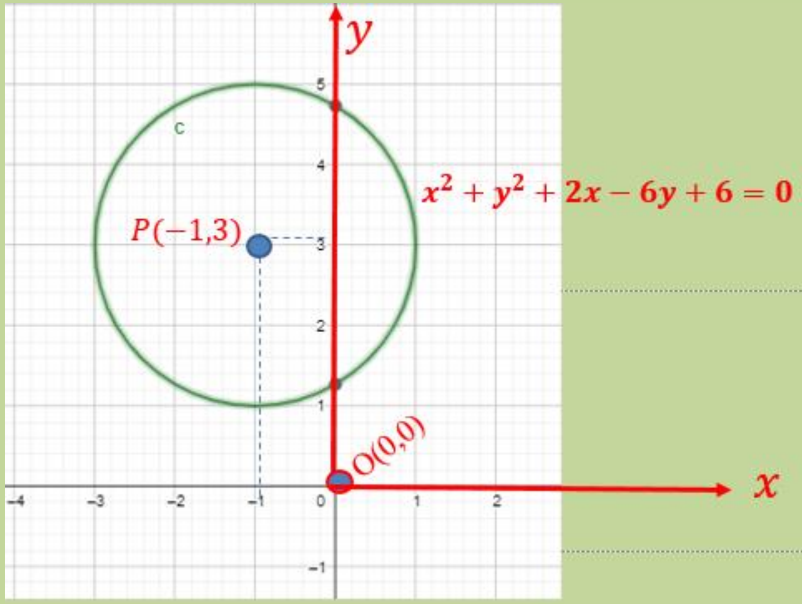


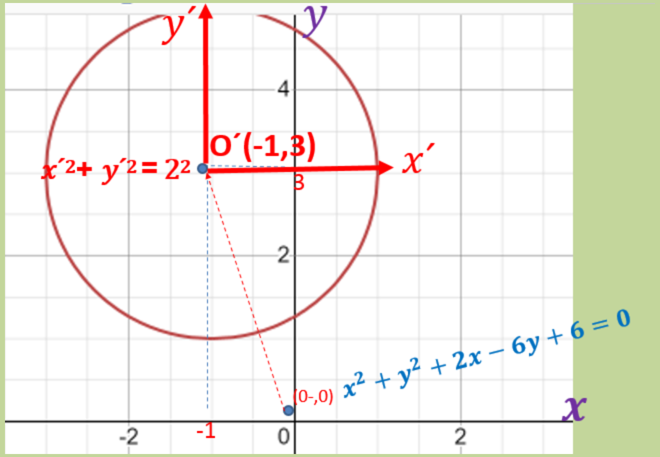
$\boldsymbol{x^2 + 9y^2 - 6 = 0}$

Mientras que en la ecuación $x^2 + 9y^2 - 6 =$ no aprece sin término xy, no está rotada respecto a los ejes xy. Elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados. No hay términos lineales en x, y, no translado.



Circunferencia con ecuación $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0}$, referenciada al sistema x, y, con origen O(0,0) por estar todos lo términos en x, y (no y´, x´). El centro de la circunferencia en este sistema está en P(-1,3). Como los términos lineales $\boldsymbol{2x, -6y}$ aparecen en la ecuación, significan que el centro de la circunferencia no está en el origen. Está trasladado.





Para esta figura, si se trasladan los ejes x, y, y por tanto, el origen O(0,0), a unos nuevos ejes $x´, y´$, y a un nuevo origen O´(-1,3) la ecuación quedará referenciada al nuevo origen $O´(x´ , y´)$ que en este caso es el mismo centro de la circunferencia, la ecuación queda:

$$x´^2 + y´^2 = 2^2$$

La gráfica no cambió de posición, la ecuación cambió de forma al cambiar los ejes de referencia y de origen.

En el caso de curvas cónicas (segundo grado) el proceso de traslación de ejes se puede hacer de dos formas:

1. Reemplazando las ecuaciones de trasformación de coordenadas en la ecuación de la curva, resolviendo y simplificando.
2. Completando cuadrados siempre y cuando no haya término combinado Bxy en la ecuación de la cónica original. (La curva no esté rotada)

$$\mathrm{A}x^2 + \cancel{Bxy} + Cy^2 + D\mathrm{x} + \mathrm{Ey} + \mathrm{F} = 0$$

$$\mathrm{A}x^2 + Cy^2 + D\mathrm{x} + \mathrm{Ey} + \mathrm{F} = 0$$

(Curva no rotada)

Cuando no existe el término Bxy no hay rotación de ejes, y si existen los términos lineales Dx, Dy, la ecuación representará una cónica (circunferencia, elipse, parábola, hipérbola) en la que los ejes de las cónicas están trasladados y son siempre paralelos a los ejes coordenados originales.

Más adelante veremos cómo son los ejes de las cónicas.

A veces queremos conocer que pasa con las coordenadas de un punto cuando se cambia del origen tradicional O(0,0,0) a un nuevo origen O'(h, k, l).

- Las ecuaciones de las curvas se van haciendo más difíciles de analizar; por esto, se hace necesario en algunas ocasiones introducir ciertos artificios con el fin de facilitar el estudio de estas.
- Uno de estos artifícios que nos permite simplificar las ecuaciones de muchas curvas , consiste cambiar el sistema de coordenadas a uno nuevo.

Hasta ahora todo lo que se ha estudiado está referido al eje «X», «Y», “Z” es decir, nuestro sistema de referencia son los ejes coordenados referidos a un origen O(0,0,0).

En este capítulo lo que haremos será cambiar nuestro sistema de referencia de dos maneras básicas:

- Mediante una traslación de ejes
- Mediante una rotación de ejes.

- Se aplicará a puntos y a ecuaciones.

Otra manera de cambiar el sistema de referencia es mediante una traslación y una rotación simultánea, tomados en cualquier orden.

En este capítulo muchas veces se hará referencia a una ecuación de 2° grado.

La translación de ejes es el desplazamiento paralelo de los ejes coordenados, de tal manera que el origen queda en una nueva posición.

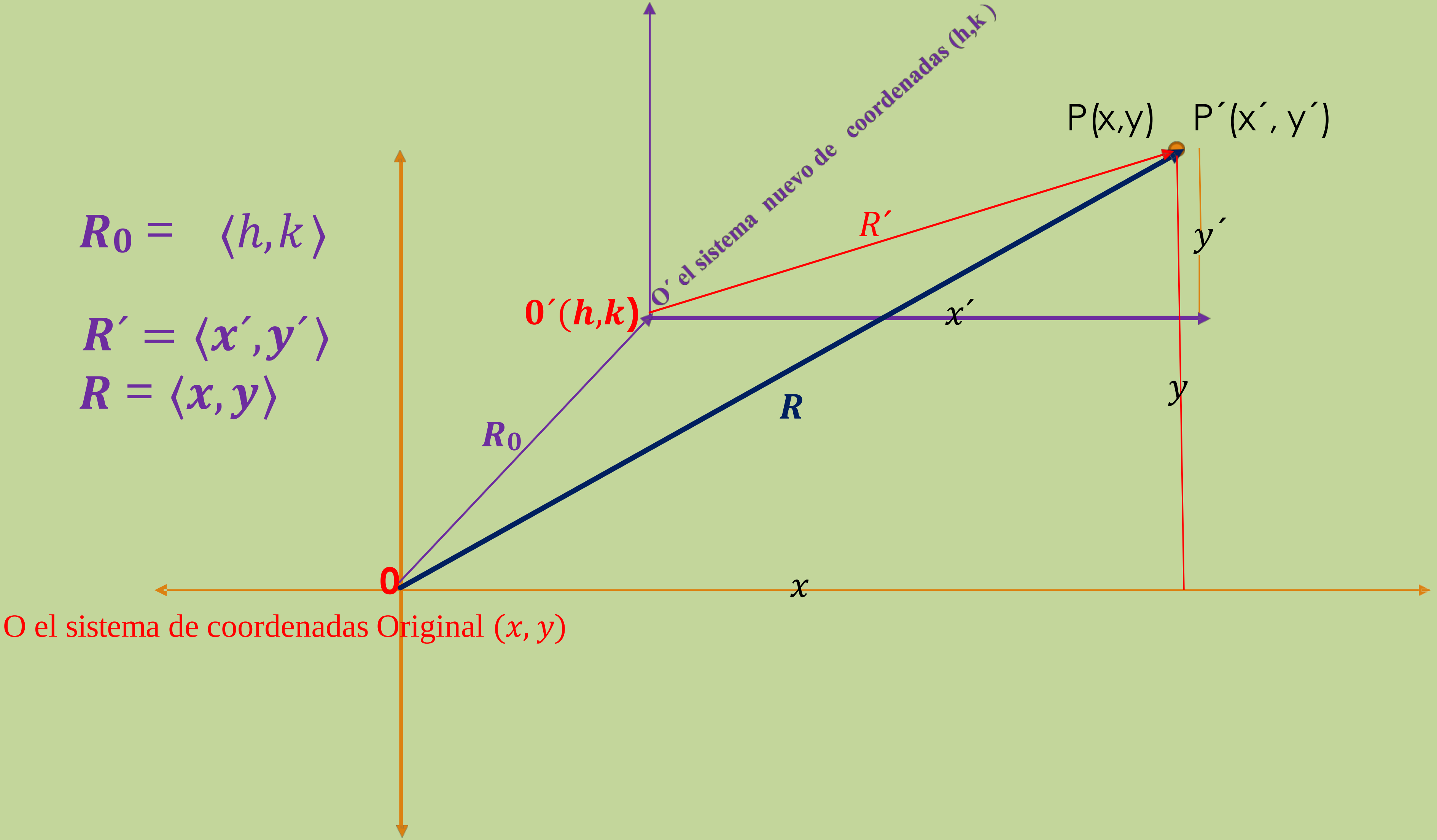
Los ejes nuevos quedan paralelos a los ejes originales.

En la traslación de ejes la curva no sufre desplazamiento.

$$\boldsymbol{R_0} = \langle h, k \rangle$$

$$\boldsymbol{R'} = \langle \boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'} \rangle$$

$$\boldsymbol{R} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$$



$$R = \overrightarrow{\boldsymbol{R_0}} + \overrightarrow{R'}$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \mathrm{h}, k \rangle + \langle \boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'} \rangle$$

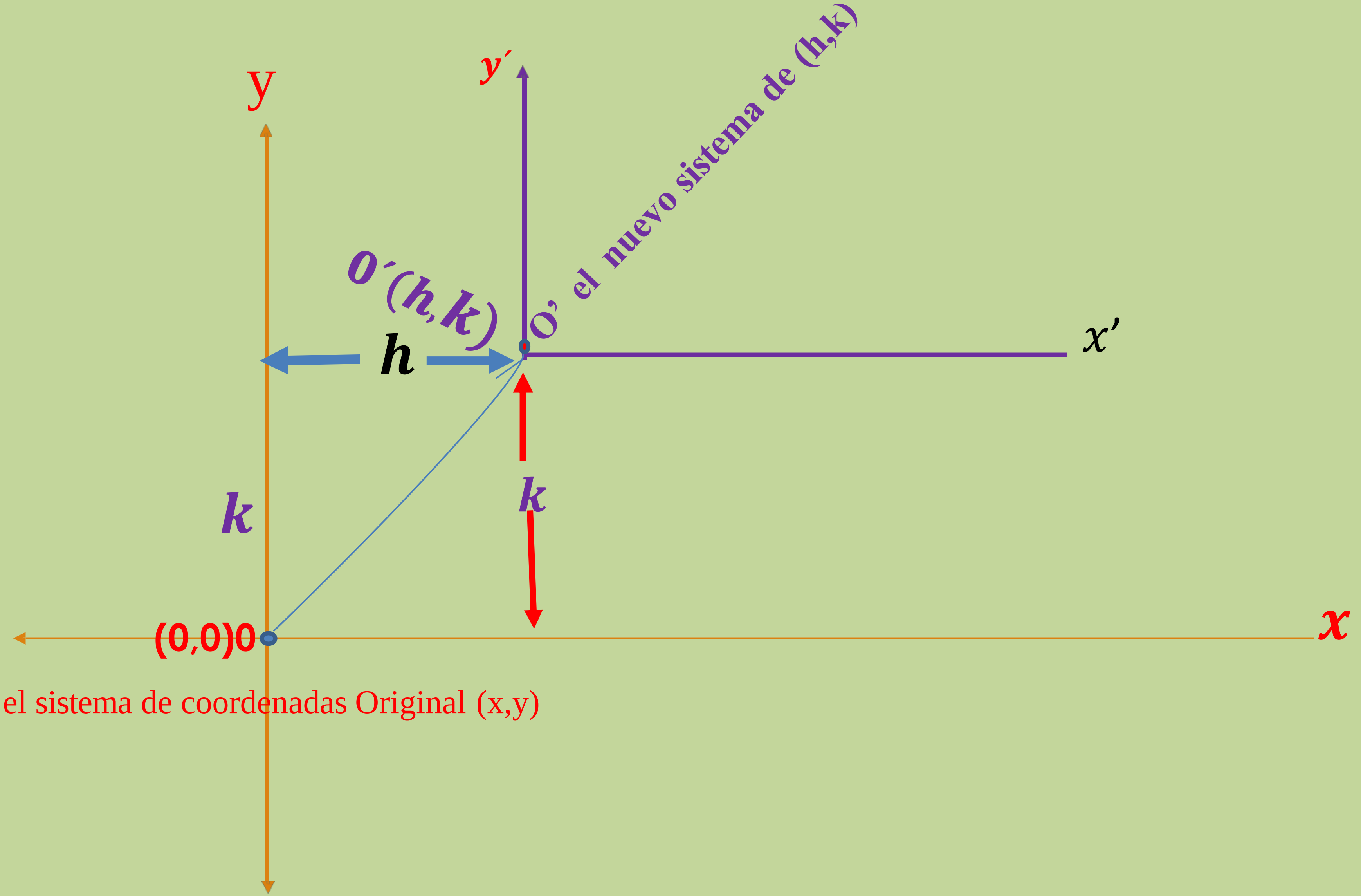
$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \mathrm{h} + x', k + y' \rangle$$

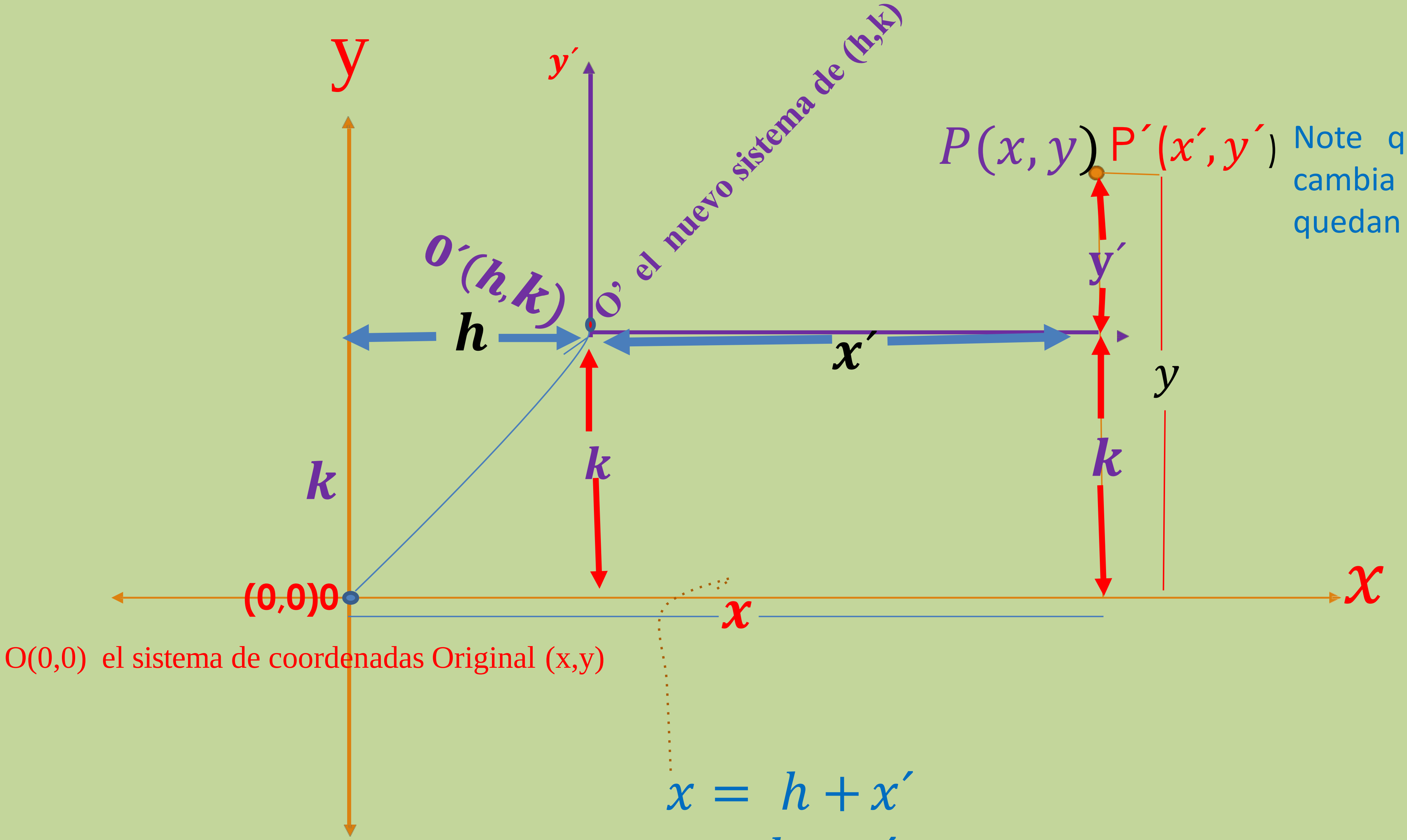
$$x = h + x'$$

$$y = k + y'$$

$$z = l + z'$$

- La transformación anterior se hizo vectorialmente.
- También se puede hacer geométricamente.


y
y´
O´ el nuevo sistema de (h,k)
0´(h,k)
h
x’
k
k
x
(0,0)0
O(0,0) el sistema de coordenadas Original (x,y)



Note que el punto P no cambia de sitio: P y P' quedan en el mismo lugar

$$x = h + x´$$
$$y = k + y´$$

$$x = h + x'$$
$$y = k + y'$$
$$z = l + z'$$

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$
$$z = z' - l$$

Estas son las ecuaciones de trasformación o traslación de ejes.
Relacionan las coordenadas antiguas con las nuevas,
o las nuevas con las antiguas.

(x, y, z): Coordenadas antiguas (referidas al sistema O(0,0,0)
$(x', y', z$: coordenadas nuevas (referidas al sistema $O'(h, k, l)$
(h, k, l): coordenadas del nuevo sistema (referidas al sistema O(0,0,0)

Usos de las ecuaciones de traslación

Primer uso: hallar las nuevas coordenadas de un punto al cambiar de origen.

Segundo uso: para identificar las ecuaciones de traslación cuando aparecen en una ecuación de una curva.

Tercer uso: ¿Cómo queda cierta ecuación cuando cambia de origen?

Cuarto uso: cuando no se dan los valores de h, k, se pide hallar dichos valores de h y k del nuevo origen y la nueva ecuación a partir de la ecuación antigua.

Primer uso de las ecuaciones de traslación

Problema Tipo 1: se trata de hallar las nuevas coordenadas de un punto al cambiar del origen antiguo O(0,0,0) al nuevo origen O´(h,k,l).

Ejercicio # 1

Se tiene un punto P(10,3) en un sistema O(0,0). Hallar las nuevas coordenadas x', y' del punto P (10,3) al trasladar los ejes a un nuevo origen O' (1,2).

Se pregunta por las nuevas coordenadas del punto P.

Se identifican, coordenadas antiguas: P(10,3): $x = 10, y = 3$

Se identifican $coordenadas\ del\ nuevo\ origen$: O' (1,2), $h = 1,\ k = 2$

Fórmula de las nuevas coordenadas

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$

$$x' = 10 - 1 = 9$$
$$y' = 3 - 2 = 1$$

$$P'(9,1)$$

10/14/2019 28

Ejercicio # 2

Se tiene un punto P(1,2) en un sistema O(0,0). Hallar las nuevas coordenadas x´, y´ del punto P al trasladar los ejes a un nuevo origen O’ (4,5).

Se identifican, coordenadas antiguas: P(1,2): $x = 1, y = 2$

Se identifican $coordenadas\ del\ nuevo\ origen$: O' (4,5), $h = 4,\ \ k = 5$

Fórmula de las nuevas coordenadas $x´{=}x - h \quad y' = y - k$

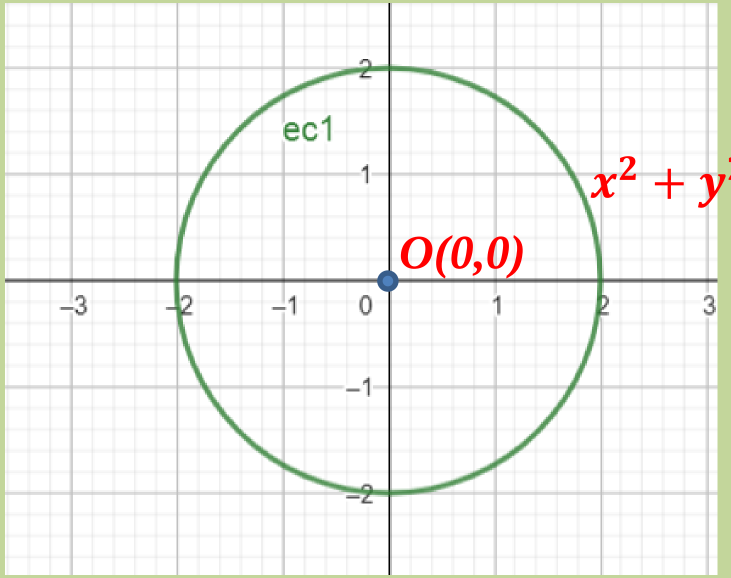
$$x´ = 1 - 4 = -3$$
$$y´= \quad 2 - 5 = \text{ -3}$$

P´(-3,-3)

30

Identificación de circunferencias en ecuaciones, posiciones y gráficas

$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$



$x^2 + y^2 = 2^2$

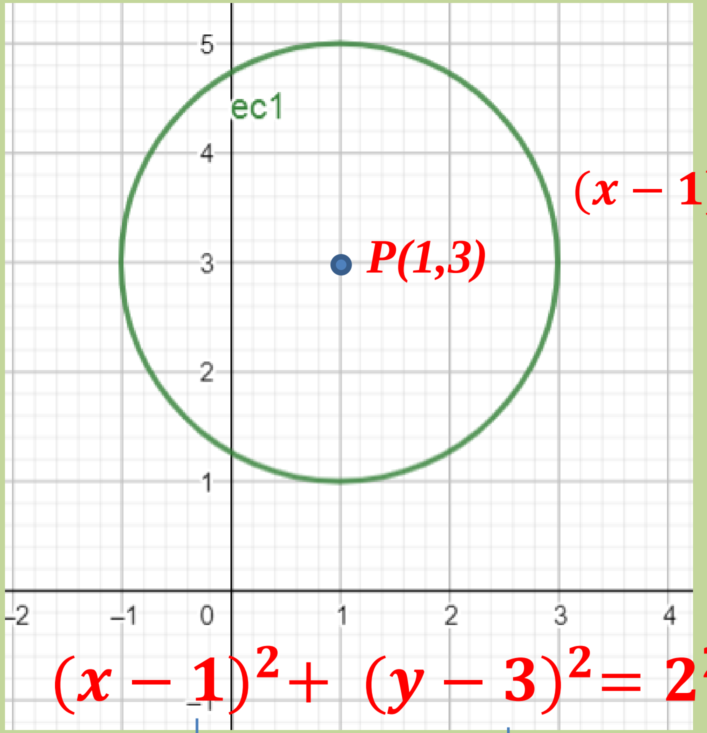
$x^2 + y^2 = 2^2$

$\Downarrow$

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$

traslado

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$



$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Es la ecuación de una Circunferencia con centro en x=0, y=0 y radio r=2 ***O(0,0)***

Es la ecuación de una Circunferencia con centro en x=1, y=3 y radio r=2 P(1,3)

De lo anterior podemos concluir que:

La ecuación de una circunferencia con centro en cualquier origen siempre será de la forma:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$$

$$\boldsymbol{(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2}$$

$$\boldsymbol{x'^2 + y'^2 = r^2}$$

$$\boldsymbol{(x'-0)^2 + (y'-0)^2 = r^2}$$

La ecuación de una **circunferencia** con centro en cualquier punto $\boldsymbol{P(h,k)}$:

Donde (h,k) son los valores de las coordenadas del centro de la circunferencia:

valores de traslación de los ejes de coordenadas

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^{\mathbf{2}}+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^{\mathbf{2}}=\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}$$

valores del centro de la circunferencia

Segundo uso:

Identificar las ecuaciones de traslación y los valores de h, k, cuando aparecen en una ecuación de una curva cónica escrita es la forma no canónica, esto es, una curva con centro fuera de O(0,0) donde aparecen h, k.

Interpretación de una ecuación como traslación de ejes al centro (de la circunferencia)

Si se tiene la siguiente ecuación de una curva:

$$\boldsymbol{x' = x - h}$$
$$\boldsymbol{x' = (x - 1)}$$

$$\boldsymbol{y' = y - h}$$
$$\boldsymbol{y' = (y - 3)}$$

$$\boldsymbol{(x-1)^2 \quad + \quad (y-3)^2 = 2^2}$$

$$\boldsymbol{(x-h) \qquad (y-k)}$$

$$\boldsymbol{x' = (x-1) \qquad y' = (y-1)}$$

$$(x')^2 \quad + \quad (y')^2 = 2^2$$

Al comparar en esta ecuación el término $(x-1)$ con $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})$, vemos que $h=1$ y si se compara con el término completo $x' = (x-1)$, vemos que $x'=(x-1)$. Por tanto, se puede reemplazar $(x-1)$ por x', lo mismo para $y' = (y-3)$.

Y la ecuación quedará en términos de x', y', donde se puede interpretar como una traslación de ejes al centro de la circunferencia (h, k).

$$(x')^2+(y')^2= 2^2$$

Nuevo origen

$$\left\{\begin{array}{l} h = 1 \\ k = 3 \end{array}\right. \rightarrow O'(1,3)$$

Se tiene la siguiente ecuación:

$$4\,(x+2)^2 + 9\,(y+1)^2 = 144$$

$$4\,(x-(-2)\,)^2 + 9\,(y-(-1)\,)^2 = 144$$

$$\boldsymbol{x' = (x-\ h)} \qquad \boldsymbol{y' = (y-\ k)}$$

$$h = -2$$
$$k = -1$$
$$\Rightarrow \mathrm{O}'(-2,-1)$$

Nuevo origen $\mathrm{O}'(-2,-1)$

Forma nueva de la ecuación en este origen:

$$\boldsymbol{4\,(x')^2 + 9\,(y')^2 = 144}$$

Bibliografía

Pérez, A., Paniagua, J. (2016). Geometría Analítica e introducción al Cálculo Vectorial. Fondo editorial **ITM.** Instituto Tecnológico Metropolitano, 2016. ISBN 978-958-8743-97-4.

Pixar y Khan Academy ofrecen curso online gratuito sobre animación digital

http://noticias.universia.net.co/cultura/noticia/2016/06/21/1140998/pixar-khan-academy-ofrecen-curso-online-gratuito-animacion-digital.html

https://es.khanacademy.org/partner-content/pixar