



Ecuaciones de Rectas II

efrenmatematica.jimdo.com

Diapositivas realizadas por

Efrén Giraldo T. MSc.

Su único objetivo es facilitar el estudio.

2

❖ *MIS VALORES*

Entrega

Transparencia

Simplicidad

y Persistencia



❖ *MIS MISIÓN:* *Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.*

❖ *MIS MISIÓN:* *Entrega a la Voluntad Suprema.
Servir a las personas.*

Determinación de la ecuación de una recta dados dos puntos.

Procedimiento:

1. Obtener el vector que hay entre los dos puntos y este será el vector director de la recta.
2. Con el vector director y uno de los puntos, se determina la ecuación de la recta.

Ejercicio 1

Si se tienen dos puntos de una recta $P_1(3,4,2)$ y $P_2(6,8,10)$:
el vector director de la recta P_2P_1 es:

$$P_2P_1 \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = \langle 3, 4, 8 \rangle$$

Y la ecuación simétrica de la recta es:

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 4}{4} = \frac{z - 2}{8}$$

5

Hallar las ecuaciones paramétricas de las rectas

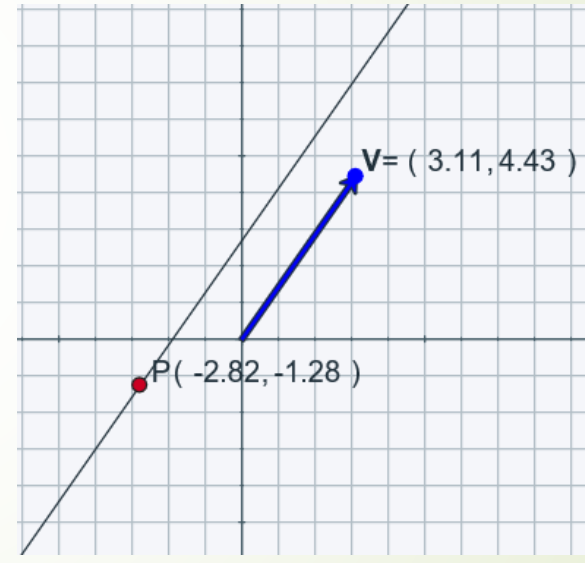
Ejercicio # 2



Ejercicio # 3



Ejercicio # 4



Ejercicio # 5

Hallar las ecuaciones: vectorial, paramétrica y simétrica de la recta que tiene el punto $P(3,4,5)$ y el vector director $v\langle 1,2,3\rangle$.

E. Vectorial

$$OQ\langle x, y, z \rangle = OP_0\langle x_0, y_0, z_0 \rangle + \alpha \cdot v\langle x_1, y_1, z_1 \rangle$$

E. Paramétrica

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \alpha x_1 \\y &= y_0 + \alpha y_1 \\z &= z_0 + \alpha z_1\end{aligned}$$

E. Simétrica

$$\alpha = \frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1}$$

El punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y $v(x_1, y_1, z_1)$.

$$OQ(x, y, z) = OP_0(x_0, y_0, z_0) + \alpha \cdot v(x_1, y_1, z_1) \longrightarrow OQ(x, y, z) = OP_0(3, 4, 5) + \alpha \cdot v(1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \alpha x_1 \\y &= y_0 + \alpha y_1 \\z &= z_0 + \alpha z_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 3 + \alpha \cdot 1 \\y &= 4 + \alpha \cdot 2 \\z &= 5 + \alpha \cdot 3\end{aligned}$$

$$\frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1}$$

$$\frac{x - 3}{1} = \frac{y - 4}{2} = \frac{z - 5}{3}$$

Ejercicio # 6

Dada la siguiente ecuación hallar el punto y el vector director:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{x - 4}{-2}$$

Observamos que está estandarizada

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 4}{-2}$$

$x_1 \qquad y_1 \qquad z_1$

$$\frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1}$$

$$P_0(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 4) \quad v(x_1, y_1, z_1) = \langle 2, 3, -2 \rangle$$

Ecuación Simétrica Estandarizada (ST)

Para que una ecuación simétrica este estandarizada debe cumplir:

1. Que los coeficientes de la x, y, z deben de ser +1
2. El signo de la mitad debe ser –

Si aparece un signo + en la mitad se convierte en dos signos menos: $+ = -(-)$

$$\frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1}$$

Ejercicio # 7

Dada la siguiente ecuación hallar el punto y el vector director:

$$\frac{3x - 1}{-2} = \frac{-y - 1}{-3} = \frac{-5z - 2}{2}$$

Estandarizada

Expresión en x:

$$\frac{3x - 1}{-2}$$

÷ *entre* 3 todos los términos de la expresión

$$\frac{\frac{3x}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{-2}{3}} = \frac{x - 0.33}{-0.66}$$

Expresión en y:

$$\frac{-y - 1}{-3}$$

÷ entre -1

$$\frac{\frac{-y - 1}{-1}}{\frac{-3}{-1}} =$$

$$= \frac{y + 1}{3}$$

+ = -(-)

$$\frac{y - (-1)}{3}$$

Expresión en z:

$$\frac{-5z - 2}{-2}$$

÷ entre -5

$$\begin{aligned} & \frac{-5z - 2}{-5} \\ & \frac{-5z}{-5} - \frac{2}{-5} \\ & z + \frac{2}{5} \\ & = \frac{z + 0.4}{0.4} \end{aligned}$$

+ = -(-)

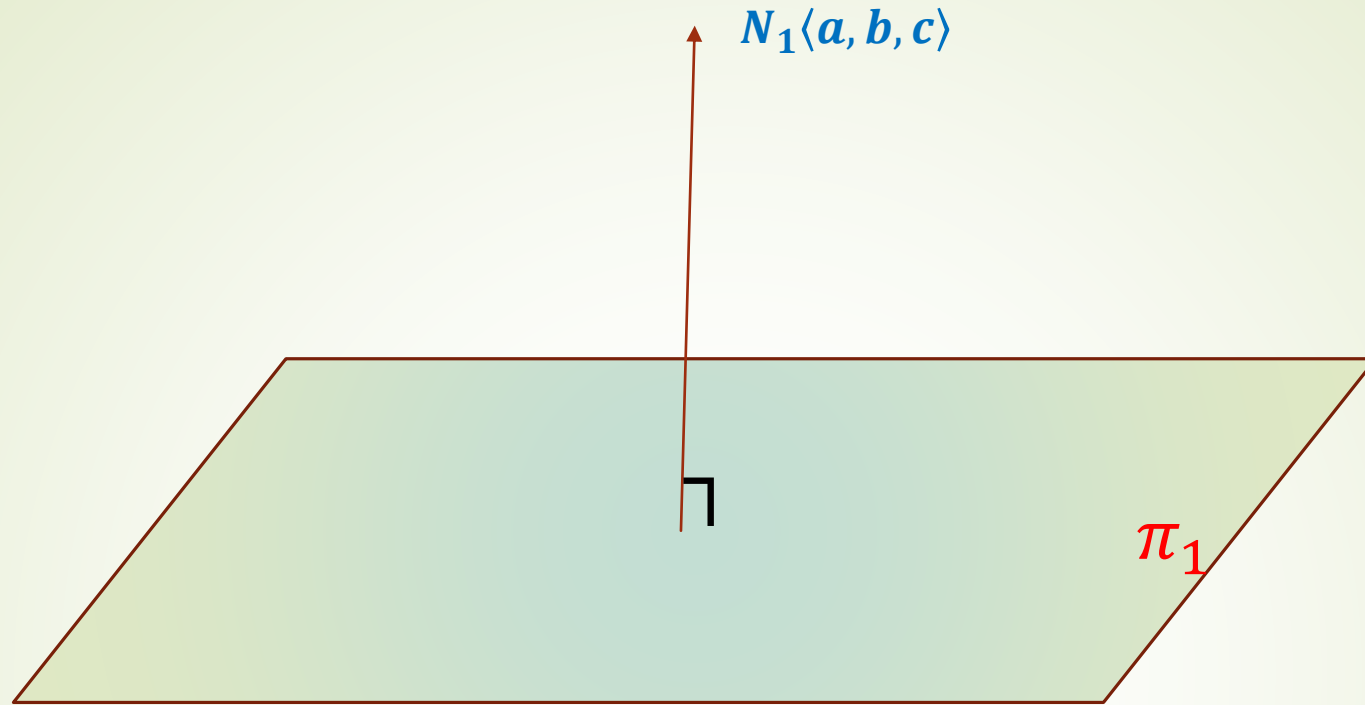
$$= \frac{z - (-0.4)}{0.4}$$

$$\alpha = \frac{x-0.33}{-0.66} = \frac{y-(-1)}{3} = \frac{z-(-0.4)}{0.4}$$

$$P_o(x_o, y_o, z_o) = (0.33, -1, -0.4)$$

$$v\langle x_1, y_1, z_1 \rangle = \langle -0.66, 3, 0.4 \rangle$$

Ecuación implícita, General o Cartesiana del plano



Un plano π_1 se identifica con su vector normal (perpendicular).

Si las coordenadas del vector normal son a, b, c . La ecuación del plano es:

$$ax + by + cz = d$$

La ecuación de un plano es:

$$ax + by + cz = d$$

También denominada Ecuación implícita del plano, Cartesiana o General.

a, b, c son las coordenadas del vector perpendicular al plano, también denominado vector normal al plano.

d es una constante

Si sabemos que el vector $N_1 \langle 3, 7, 4 \rangle$ es perpendicular al plano π_1 , su ecuación será:

$$\pi_1 \quad 3x + 7y + 4z + d = 0$$

A su vez, si tenemos la ecuación del plano:

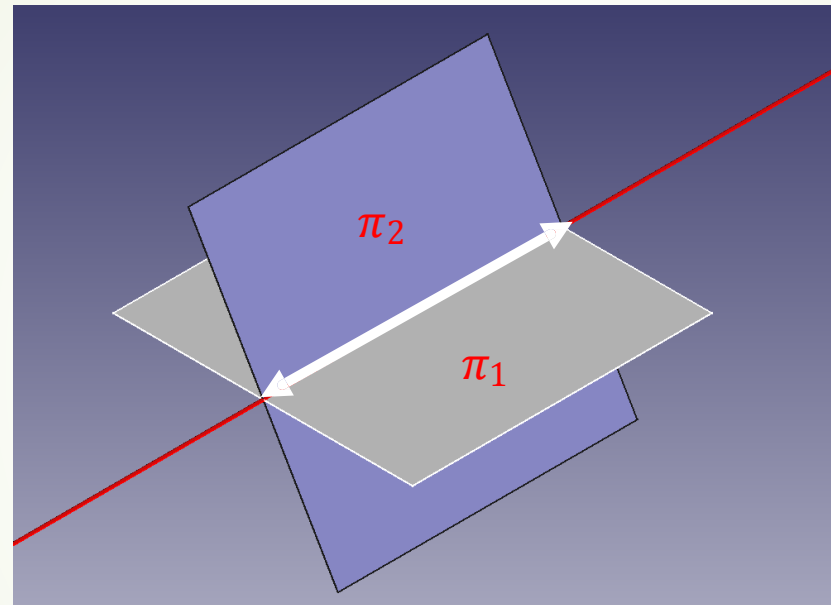
$$\pi_1 \quad 0.3x - 4y - 5z + d = 0$$

Podemos decir que su vector normal es:

$$N_1 \langle 0.3, -4, -5 \rangle$$

Recta definida como la intersección de 2 planos

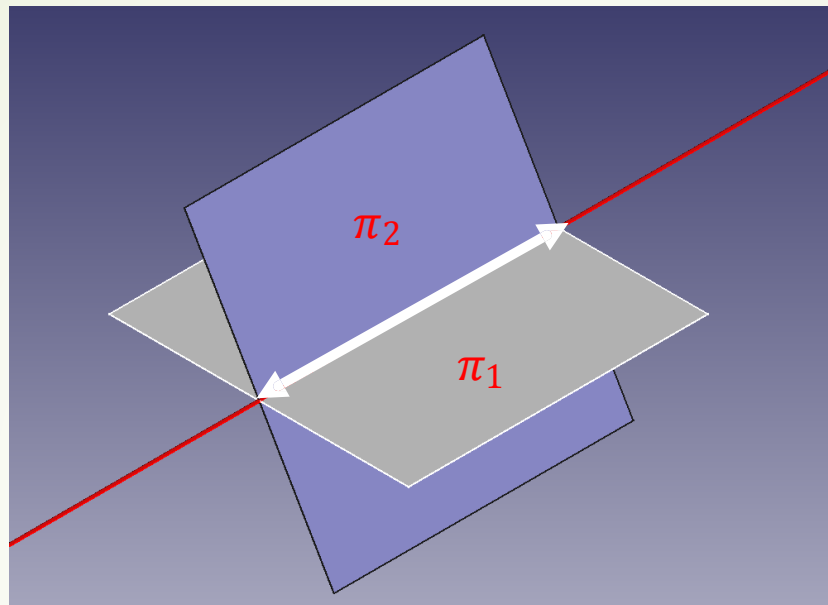
Ecuación de la recta como la intersección de 2 planos
 π_1, π_2 no paralelos



Dos planos no paralelos π_1 y π_2 siempre se interceptan en una línea recta.
Por tanto, las ecuaciones implícitas de los dos planos expresan la ecuación de una línea recta.

IMPORTANTE

27



Línea recta de intersección

recta $\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \rightarrow a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \pi_2 \rightarrow a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array} \right.$

Ecuación de una línea recta que es intersección de 2 planos.

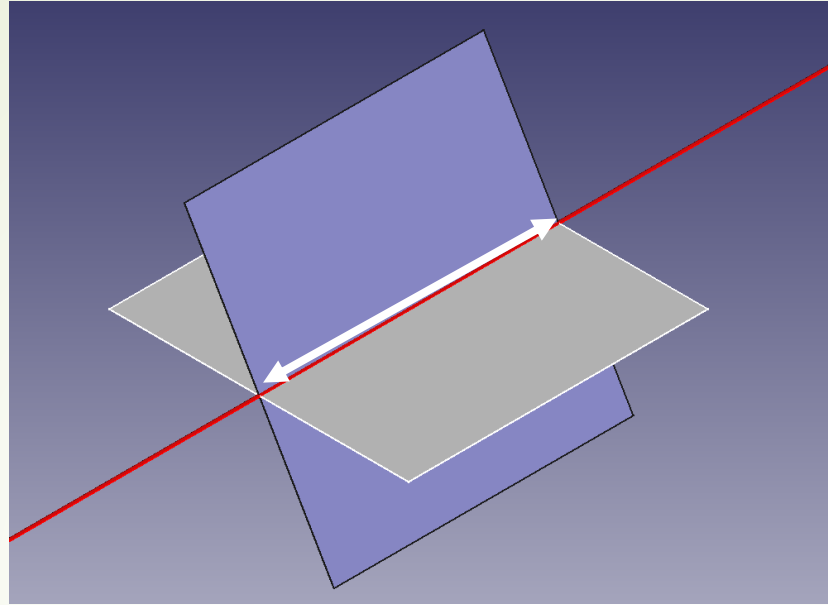
Si dos planos se interceptan (esto sucede cuando no son \parallel s) lo hacen en una línea recta, y esta línea es común a ambos planos.

Recta definida como la intersección de 2 planos

Ecuación de la recta como la intersección de 2 planos π_1, π_2 no paralelos

$$\text{Recta: } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & \pi_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & \pi_2 \end{cases}$$

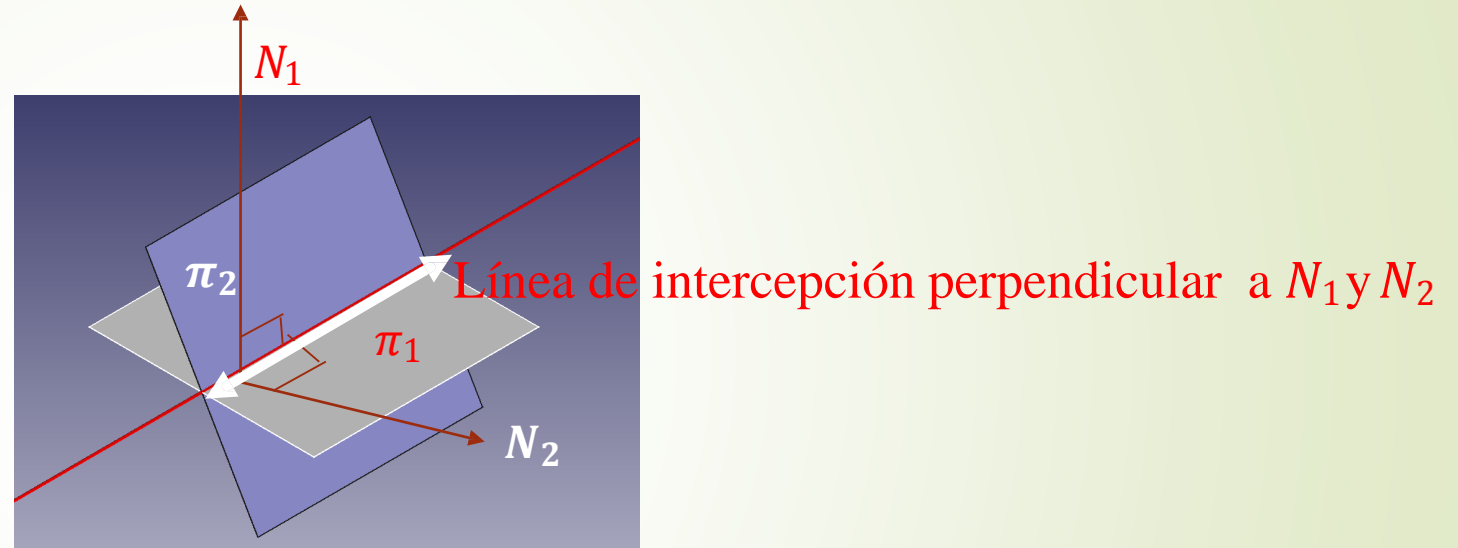
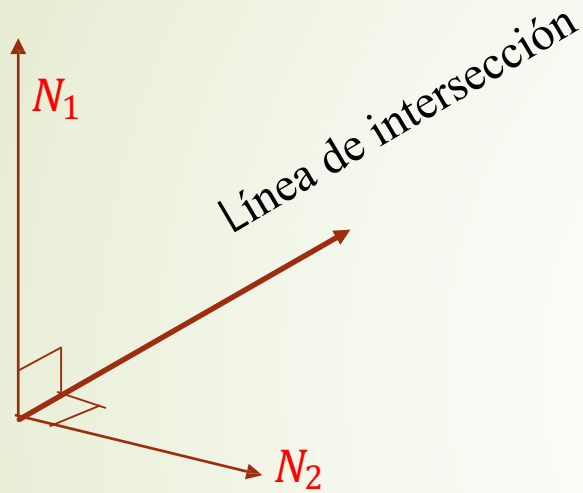
No obstante, esta forma es más un poco abstracta. Pero a partir de estas dos ecuaciones, podemos hallar el vector director y un punto para llevarla a la forma vectorial, paramétrica o simétrica.



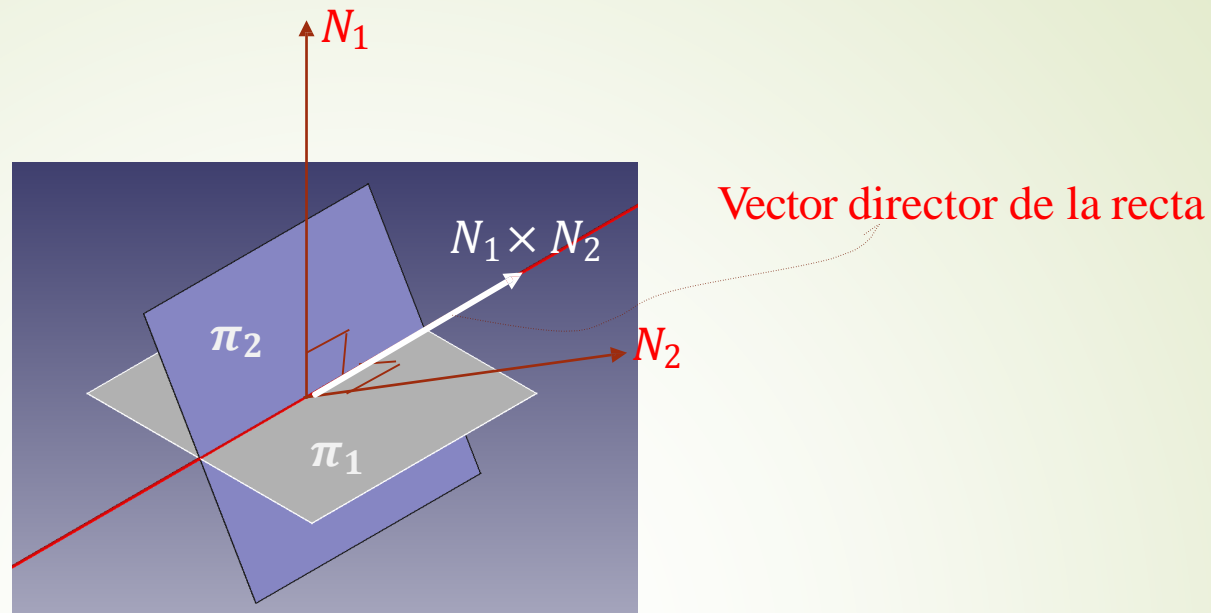
Hallar la ecuación de la recta de intersección de dos planos π_1 y π_2 :

- 1. Se encuentra el vector director por medio de $N_1 \times N_2$*
- 2. Se halla un punto de la recta de intersección.*

Hallar el vector director de la recta de intersección de dos planos



De la geometría clásica se conoce que la línea de intersección es perpendicular a la vez a los 2 vectores normales a cada plano. O sea, que los dos vectores N_1 y N_2 y la recta de intersección son perpendiculares.



Si se realiza el producto vectorial entre los vectores N_1 y N_2 se crea un nuevo vector $N_1 \times N_2$ perpendicular a los vectores N_1 y N_2 (propiedad del producto vectorial).

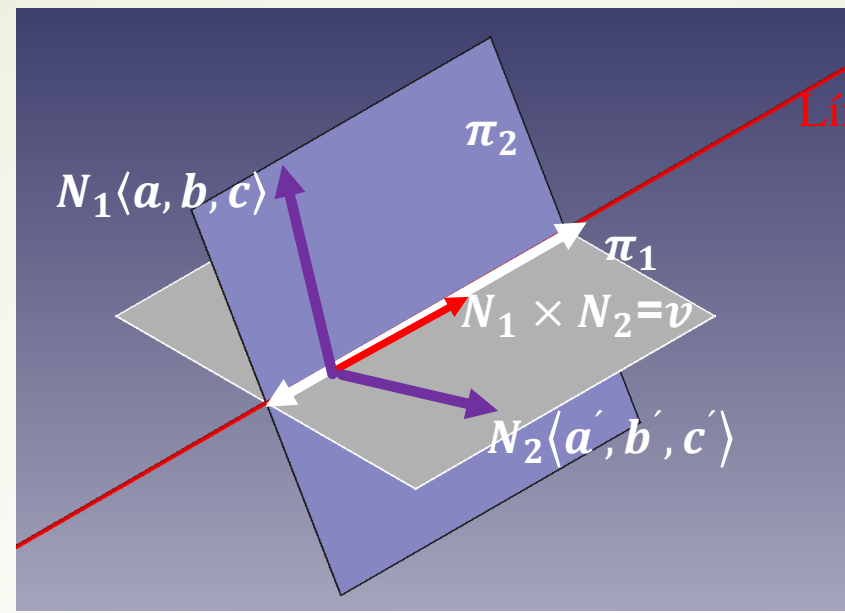
Por tanto:

El vector $N_1 \times N_2$ también es paralelo a la recta de intersección (geometría clásica).

Por consiguiente, $N_1 \times N_2$ es el vector director de la línea de intersección de los 2 planos.

IMPORTANTE

29



Línea recta de intersección de los dos planos
 $N_1 \langle a, b, c \rangle$

$$\text{recta } r \equiv \begin{cases} ax + by + cz = d & \pi_1 \\ a'x + b'y + c'z = d' & \pi_2 \end{cases}$$

$N_2 \langle a', b', c' \rangle$

Importante

El vector director de la recta de intercepción de 2 planos π_1 y π_2 se halla por medio del producto vectorial $N_1 \times N_2$ de los 2 vectores normales a los 2 planos

Ejercicio 8

Hallar el vector director de la línea de intersección de los planos π_1 y π_2

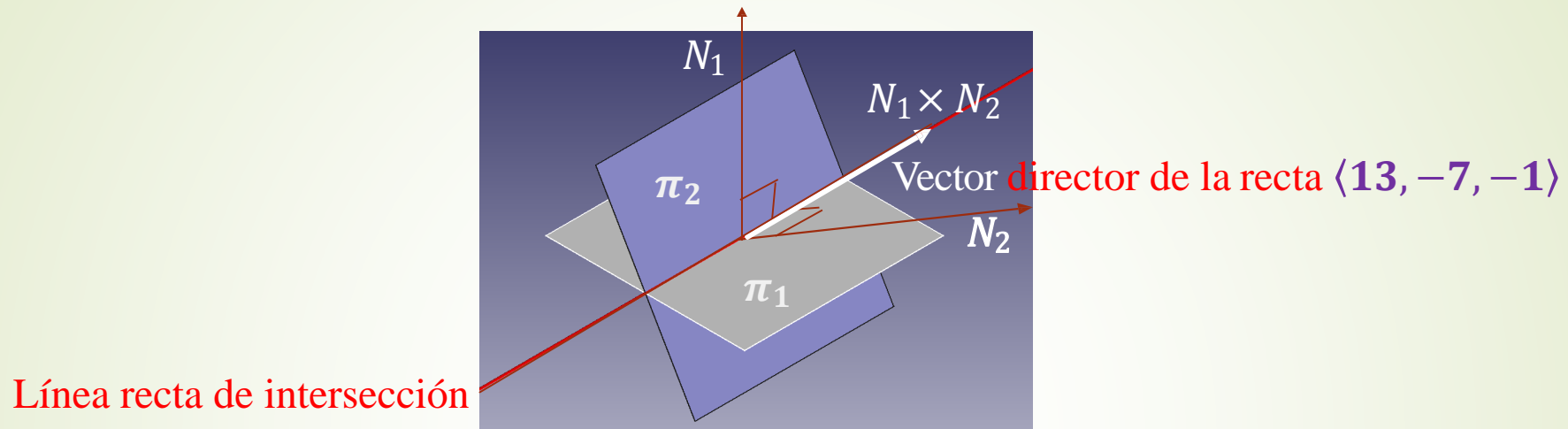
$$3x + 5y + 4z + 1 = 0 \quad \pi_1 \rightarrow N_1 \langle 3, 5, 4 \rangle$$

$$2x + 3y + 5z + 2 = 0 \quad \pi_2 \rightarrow N_2 \langle 2, 3, 5 \rangle$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$i(25 - 12) - j(15 - 8) + k(9 - 10) =$$

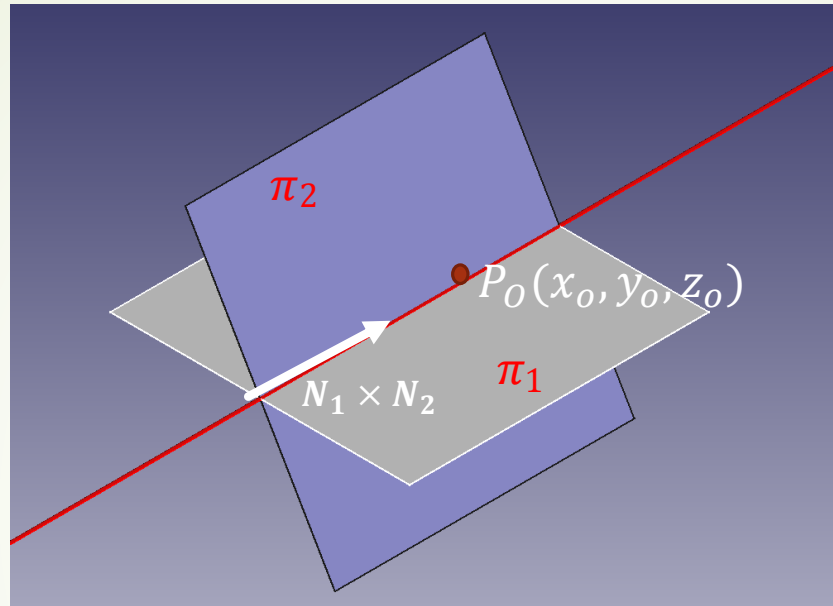
$$i(13) - j(7) - k$$
$$\langle 13, -7, -1 \rangle$$



$$13i - 7j - k$$

Este vector $\langle 13, -7, -1 \rangle$ es el vector director de la línea de intersección de los planos π_1 y π_2 y es perpendicular a los vectores $N_1 \langle 3, 5, 4 \rangle$, $N_2 \langle 2, 3, 5 \rangle$.

IMPORTANTE



Hallar las coordenadas de un punto de la línea de intercepción de dos planos.

Cuando se tienen el mismo número de ecuaciones y el mismo número de incógnitas, las soluciones a las ecuaciones se hallan fácilmente como vimos en clase por el método de eliminación.

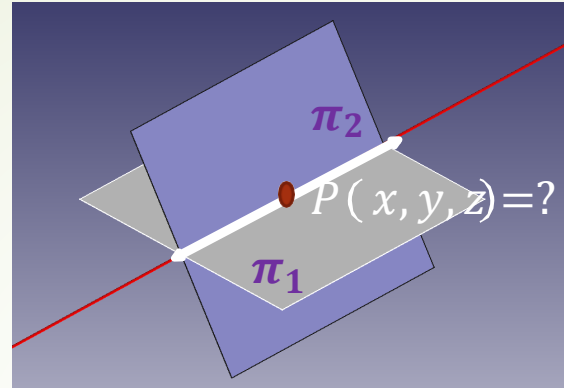
Resolución de sistemas de ecuaciones donde se tienen más incógnitas que ecuaciones

Cuando se tienen más incógnitas que ecuaciones se debe llevar el sistema a **uno donde el número de ecuaciones y de incógnitas sea el mismo.**

Por ejemplo si se tienen 2 ecuaciones y 3 incógnitas, le damos el valor a la x de cero, **$x = 0$** en las 2 ecuaciones y con esto eliminamos una de las incógnitas y resulta un sistema de 2 ecuaciones y dos incógnitas que ustedes ya saben resolver.

Obviamente que al dar el valor a **$x = 0$** , ya tenemos el primer valor de x , y luego por eliminación hallaremos los valores de **y e z** .

IMPORTANTE



Recta r:
$$\begin{cases} \pi_1 & a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \pi_2 & a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ \nearrow \times

$$\begin{aligned} b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \text{valor } 0$$

$$y = \text{valor } y_0$$

$$z = \text{valor } z_0$$

$$\longrightarrow P_0(0, y_0, z_0)$$

Con las coordenadas del punto y el vector director se hallan las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta.

Ejercicio # 9

Hallar las coordenadas de un punto de la recta de intersección de los planos:

$$\text{recta: } \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + z + 1 = 0 \quad \pi_1 \\ 3x + 2y + 4z + 2 = 0 \quad \pi_2 \end{array} \right.$$

38

$$2x + 3y + z + 1 = 0 \quad \pi_1 \quad N_1 \langle 2, 3, 1 \rangle$$

$$3x + 2y + 4z + 2 = 0 \quad \pi_2 \quad N_2 \langle 3, 2, 4 \rangle$$

Con $N_1 \langle 2, 3, 1 \rangle$ y $N_2 \langle 3, 2, 4 \rangle$ se forma $N_1 \times N_2$ y se obtiene el vector director y se saca la ecuación paramétrica.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$N_1 \times N_2 = i(12 - 2) - j(8 - 3) + k(4 - 9)$$

$$N_1 \times N_2 \langle 10, -5, -5 \rangle$$

es el vector director de la recta de intercepción de 2 planos π_1 y π_2

$$2x + 3y + z + 1 = 0 \quad \pi_1$$

$$3x + 2y + 4z + 2 = 0 \quad \pi_2$$

Al hacer $x=0$ en las dos ecuaciones anteriores resulta

$$3y + z + 1 = 0 \quad (1)$$

$$2y + 4z + 2 = 0 \quad (2)$$

El coeficiente de y en la primera ecuación es 3. El coeficiente de y en la segunda ecuación es 2. Intercambio coeficientes. La primera ecuación la multiplico por (-2), la segunda por 3, por los dos ser positivos., para que un signo de contario al otro y se anulen ambos términos.

La primera ecuación la multiplico por (-2)

La segunda por 3.

$$-2 \cdot (3y + z + 1 = 0)$$

$$3 \cdot (2y + 4z + 2 = 0)$$

$$-6y - 2z - 2 = 0$$

$$6y + 12z + 6 = 0$$

$$0 + 10z + 4 = 0$$

Realizo la suma.

$$10z + 4 = 0$$

$$10z = -4$$

Despejo z

$$z = -\frac{4}{10} = -0.4$$

Reemplazo el valor de $z = -0.4$ en (1) o en (2)

$$2y + 4z + 2 = 0 \quad (2)$$

$$2y + 4(-0.4) + 2 = 0$$

$$2y - 1.6 + 2 = 0$$

$$2y + 0.4 = 0$$

$$2y = -0.4$$

$$y = -\frac{0.4}{2}$$

$$y = -0.2$$

$$P_o(0, -0.2, -0.4)$$

$$2x + 3y + z + 1 = 0 \quad \pi_1$$

$$3x + 2y + 4z + 2 = 0 \quad \pi_2$$

$P_o(0, -0.4, -0.2)$ son las coordenadas de un punto de la recta de intersección de los planos. Con este punto y el vector director se hallan las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta de intersección de π_1 y π_2

$$P_o(0, -0.2, -0.4)$$

$$v\langle 10, -5, -5 \rangle$$

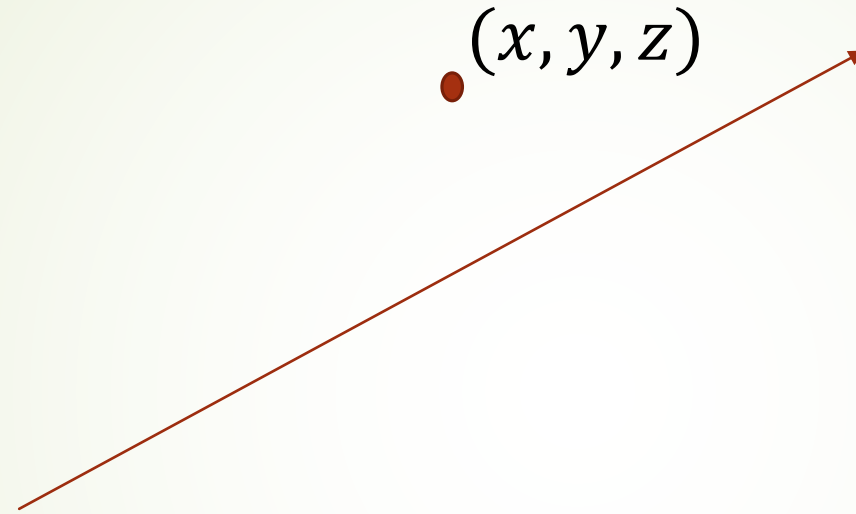
$$x = 0 + \alpha 10$$

$$y = -0.2 + \alpha(-5)$$

$$z = -0.4 + \alpha(-5)$$

IMPORTANTE

Verificar que un punto es externo a una recta.



Esto se logra reemplazando las coordenadas del punto en la ecuación simétrica de la recta; si no se cumple la igualdad, el punto es externo.

Ejercicio # 10

Verifique que el P(-1,2,1) no está dentro de la recta siguiente:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}$$

Verificar que el punto $P(-1,1,-3)$ no está en la recta.

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}$$

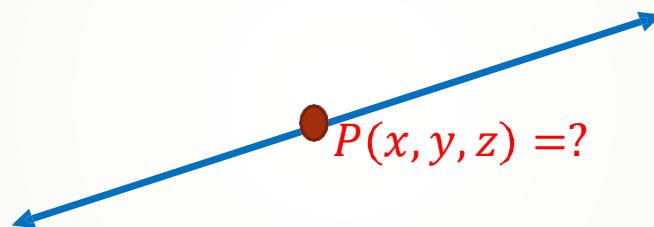
$$\frac{-1-1}{3} = \frac{1-2}{4} = \frac{-3-3}{2}$$

$$\frac{-2}{3} \neq \frac{-1}{4} \neq \frac{-6}{2} \longrightarrow \text{El punto es externo a la recta}$$



6

Hallar las coordenadas de un punto de una recta
dada la ecuación simétrica de la recta.



Se pasa la ecuación simétrica a paramétrica y ahí se le da un valor al parámetro α y se obtienen la coordenadas del punto

Ejercicio 11

Hallar las coordenadas simétricas de un punto que pertenece a una recta, dada la ecuación

$$\alpha = \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}$$

$$x = 1 + 3\alpha$$

$$y = 2 + 4\alpha$$

$$z = 3 + 2\alpha$$

Si $\alpha = 1$

$$x = 1 + 3 = 4$$

$$y = 2 + 4 = 6$$

$$z = 3 + 2 = 5$$

$P(4,6,5)$

Ejercicio # 12

51
Pasar de la ecuación simétrica a la paramétrica: otra forma

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{4}$$

$$\frac{x-5}{2} = \alpha \longrightarrow x-5 = 2\alpha \longrightarrow x = 5 + 2\alpha$$

$$\frac{y-3}{3} = \alpha \longrightarrow y-3 = 3\alpha \longrightarrow y = 3 + 3\alpha$$

$$\frac{z-1}{4} = \alpha \longrightarrow z-1 = 4\alpha \longrightarrow z = 1 + 4\alpha$$

Bibliografía

Paniagua, J. Pérez, J. (2012). Geometría Vectorial y analítica. Grossman Stanley, Séptima Edición, 2012.

HEDIMA. **Universidad de Extremadura España.** Herramientas digitales de auto-aprendizaje para Matemáticas. HEDIMA, Grupo de innovación didáctica Departamento de Matemáticas.
<http://matematicas.unex.es/~pjimenez/hedima/12espacio.pdf>

Gonzalez F.J. (2004). Proyecto MaTEX. UNICAN. Rectas y Planos.
https://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_2/rectasC2.pdf

<http://galeon.com/jjisach/u-5.pdf>

<http://galeon.com/jjisach/u-5.pdf>