Ecuaciones de Rectas I

Diapositivas realizadas por
Efrén Giraldo T. MSc.

Su único objetivo es facilitar el estudio.

❖MIS VALORES

Entrega

Transparencia

Simplicidad

y Persistencia

❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema.
Servir a las personas.

Rectas y Vectores

¿Existe alguna relación matemática entre una recta y un vector paralelo a la recta?

Después del punto, la recta es el lugar geométrico más sencillo.

El manejo vectorial simplifica las ecuaciones en 3D.

Objetivos

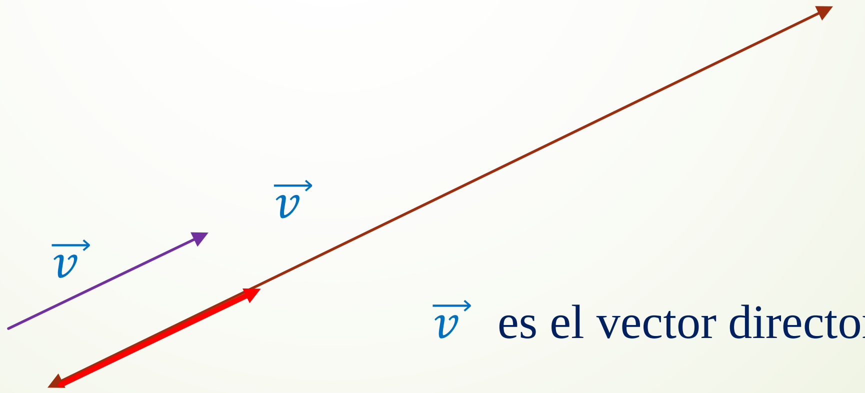
Al final de este capítulo Usted amigo estudiante debe:

- Tener una clara comprensión de las diversas ecuaciones que describen una línea recta.
- Pasar de un tipo de ecuación a otra
- Estar en capacidad de enfrentar problemas de rectas.

Para determinar la ecuación una recta son necesarios

1.Dos puntos R2
2. O un punto y un vector R3

Un vector director de una recta es cualquier vector que tenga la misma dirección que la recta dada. Puede estar en ella o ser paralelo.



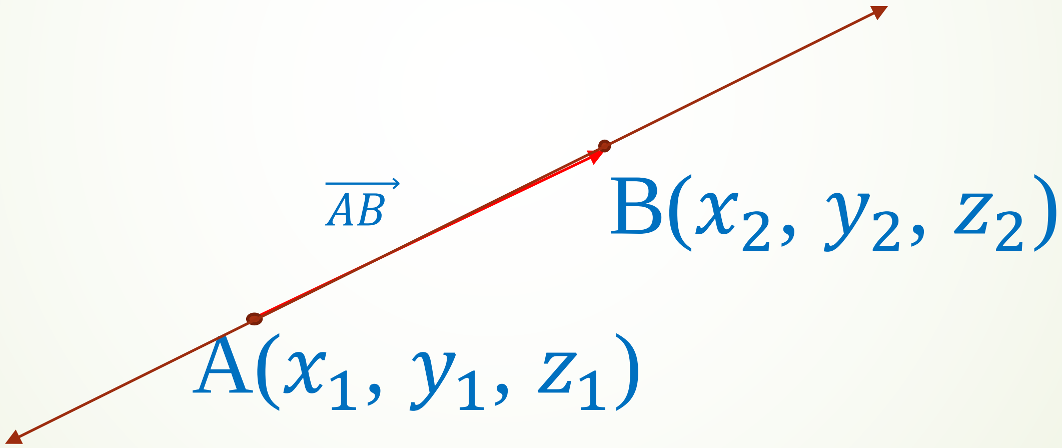
$\vec{v}$ es el vector director de la recta

VECTOR DIRECTOR INTERACTIVO

Sean los puntos A=(x_1, y_1, z_1) y B= ($x_{2,}$ $y_{2,}$ z_2), hallar el vector **AB**

Sencillamente se restan las coordenadas de B y A en x, y, z

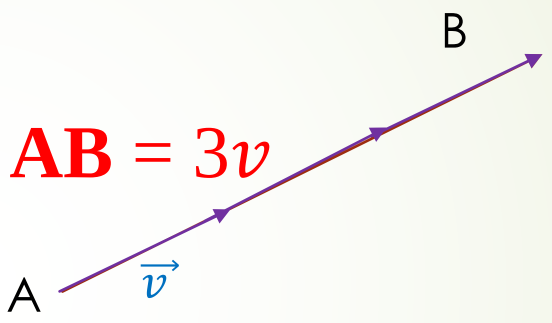
$$\mathbf{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$



El vector AB tiene la misma dirección que la línea AB en dirección +

Si dos vectores están en la misma línea, el vector **AB** se puede expresar en función de v, como proporcion de v, o lo que es lo mismo: como combinación lineal de $\overrightarrow{v}$:

$\mathbf{AB} = 3v$



$$\mathbf{AB} = \alpha\overrightarrow{v}$$

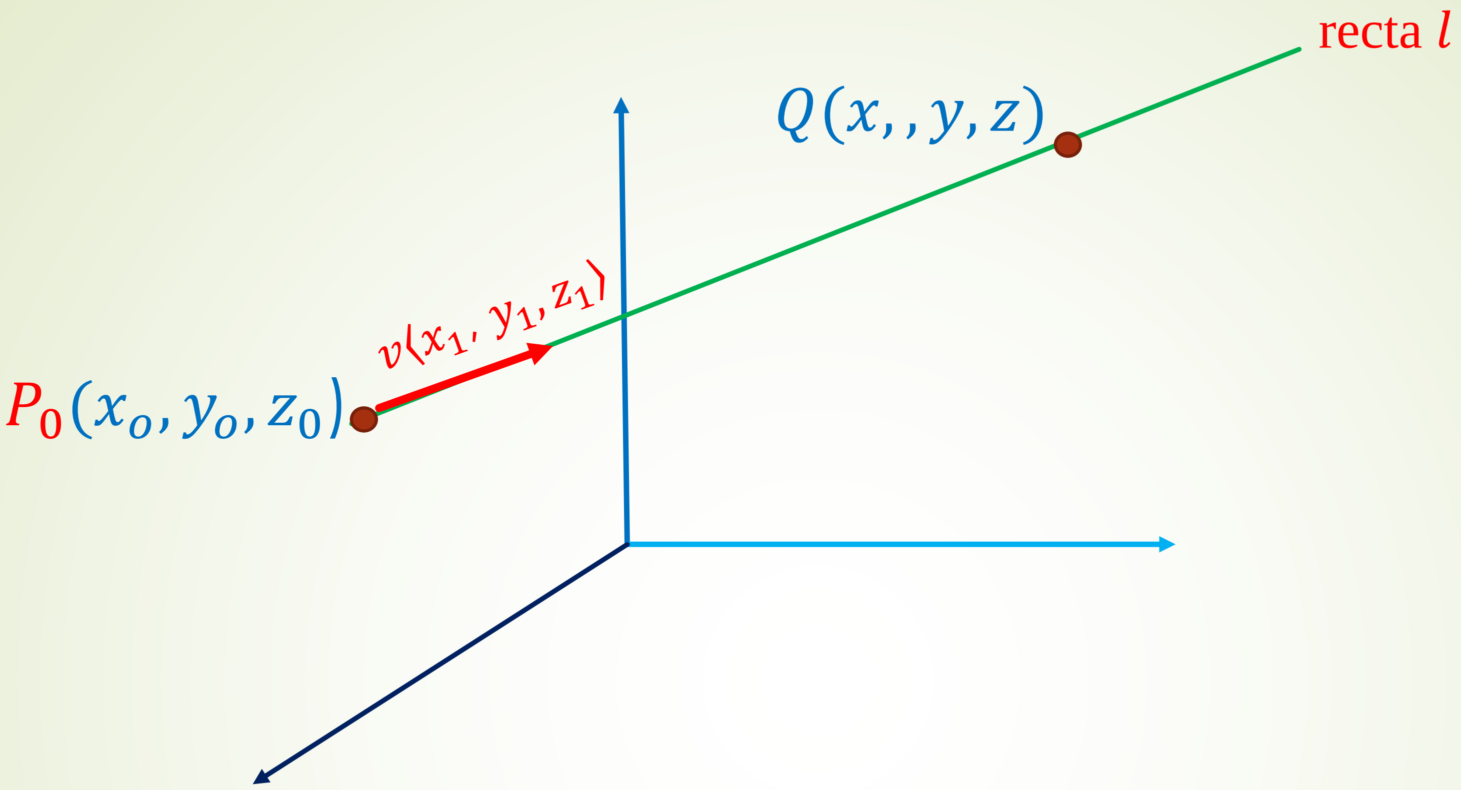
Siendo α un escalar (un parámetro):

Lo que significa que el vector **AB** es α veces v : en este caso es 3 veces v:
Si se suma tres veces v, da el vector v

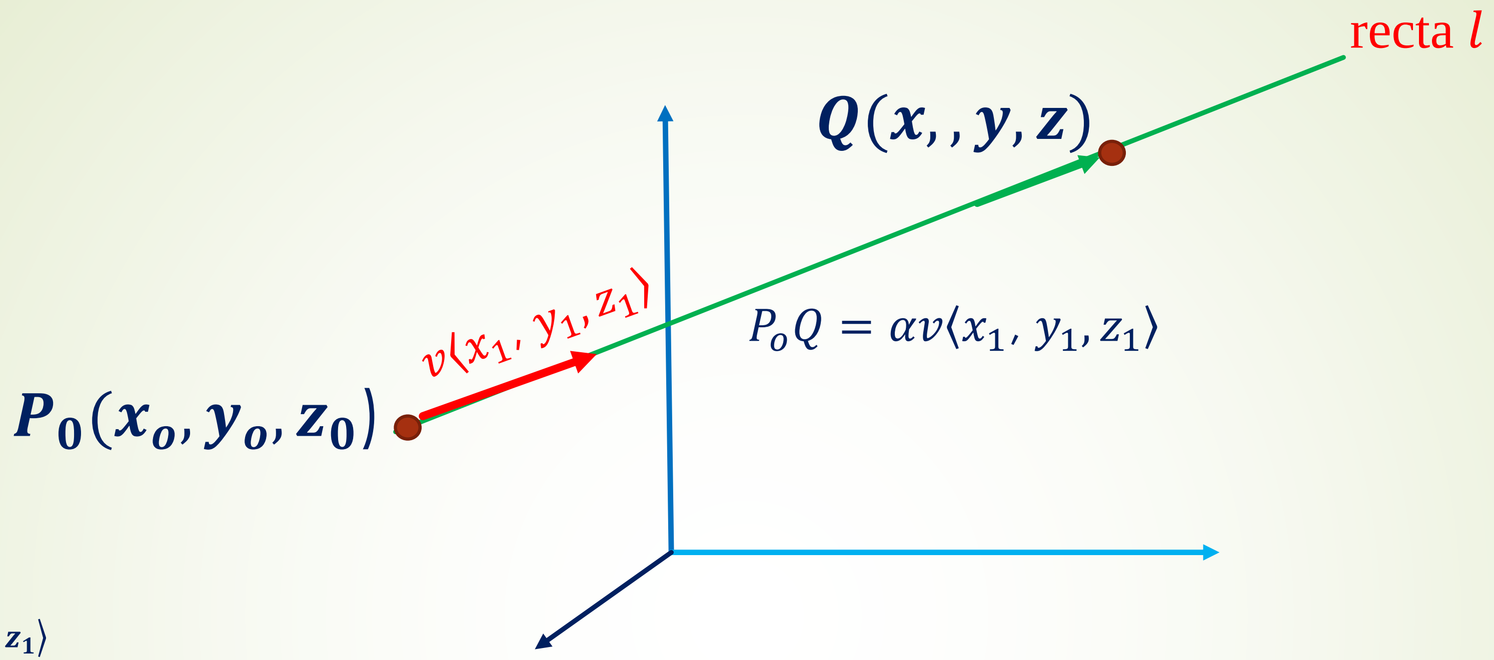
Ecuaciones de la recta

1. Ecuación Vectorial (4 formas)
2. Ecuación Paramétrica (una forma)
3. Ecuación Simétrica (dos formas)
4. La ecuación como la intersección de 2 planos $\pi_1 \ y \ \pi_2$

1. Ecuación vectorial de la recta



Para obtener la ecuación de una recta l, se requiere su vector director $v\langle x_1, y_1, z_1\rangle$ y de un punto $P_0(x_0 , y_0, z_0)$ de coordenadas conocidas. Además toda ecuación lleva otro punto Q(x, y, z) de coordenadas desconocidas que representa todos los puntos de la recta.



$\overrightarrow{P_0Q}$ es **combinación lineal de** $\boldsymbol{v\langle x_1, y_1, z_1\rangle}$

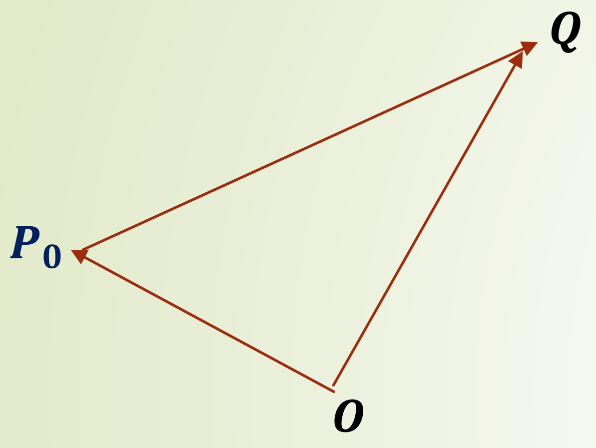
$\overrightarrow{P_0Q}$ es también la diferencia entre las coordenadas de Q y de P

$$\overrightarrow{P_oQ} = \alpha\vec{v}\langle x_1, y_1, z_1\rangle$$

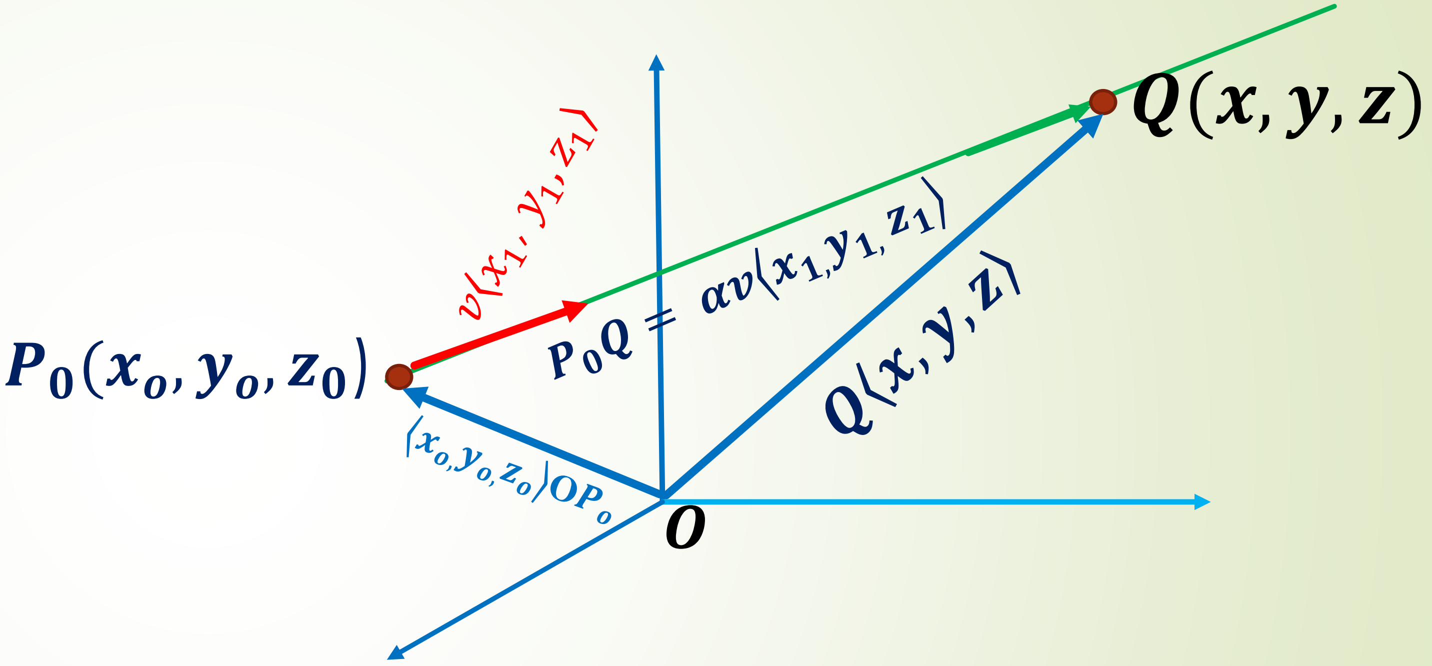
$$\overrightarrow{P_oQ} = \langle x - x_o, y - y_o, z - z_o\rangle$$

Estas son dos formas de la ecuación vectorial de la recta.

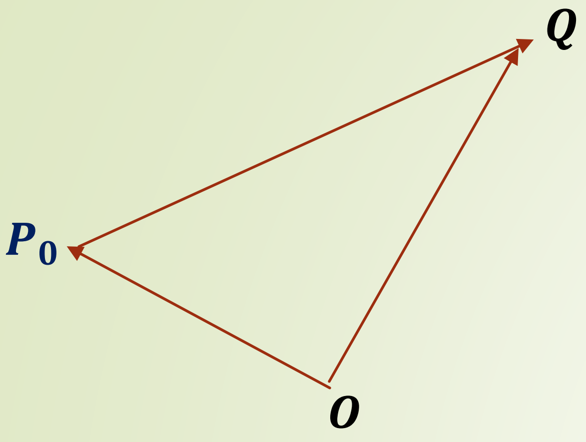
Si partimos del gráfico anterior y trazamos los vectores posición de $\boldsymbol{P_0}$ y de Q:



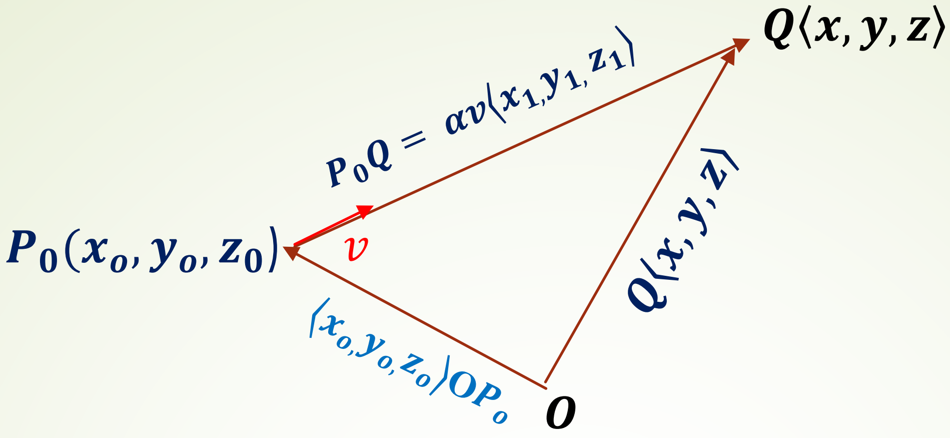
$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0Q}$$



$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0Q}$$



$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0Q}$$



$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0Q}$$

$$\mathrm{OQ}\langle x, y, z\rangle = \mathrm{OP}_0\left\langle x_o, y_o, z_o\right\rangle + \alpha . v\langle x_1, y_1, z_1\rangle$$

Vector posición de un punto de coordenadas conocidas

Vector director de la recta

Otras dos formas de la ecuación vectorial de la recta

Si la ecuación anterior se expresa en componentes:

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_o, y_o, z_o\rangle + \alpha\langle x_1, y_1, z_1\rangle$$

O en coordenadas:

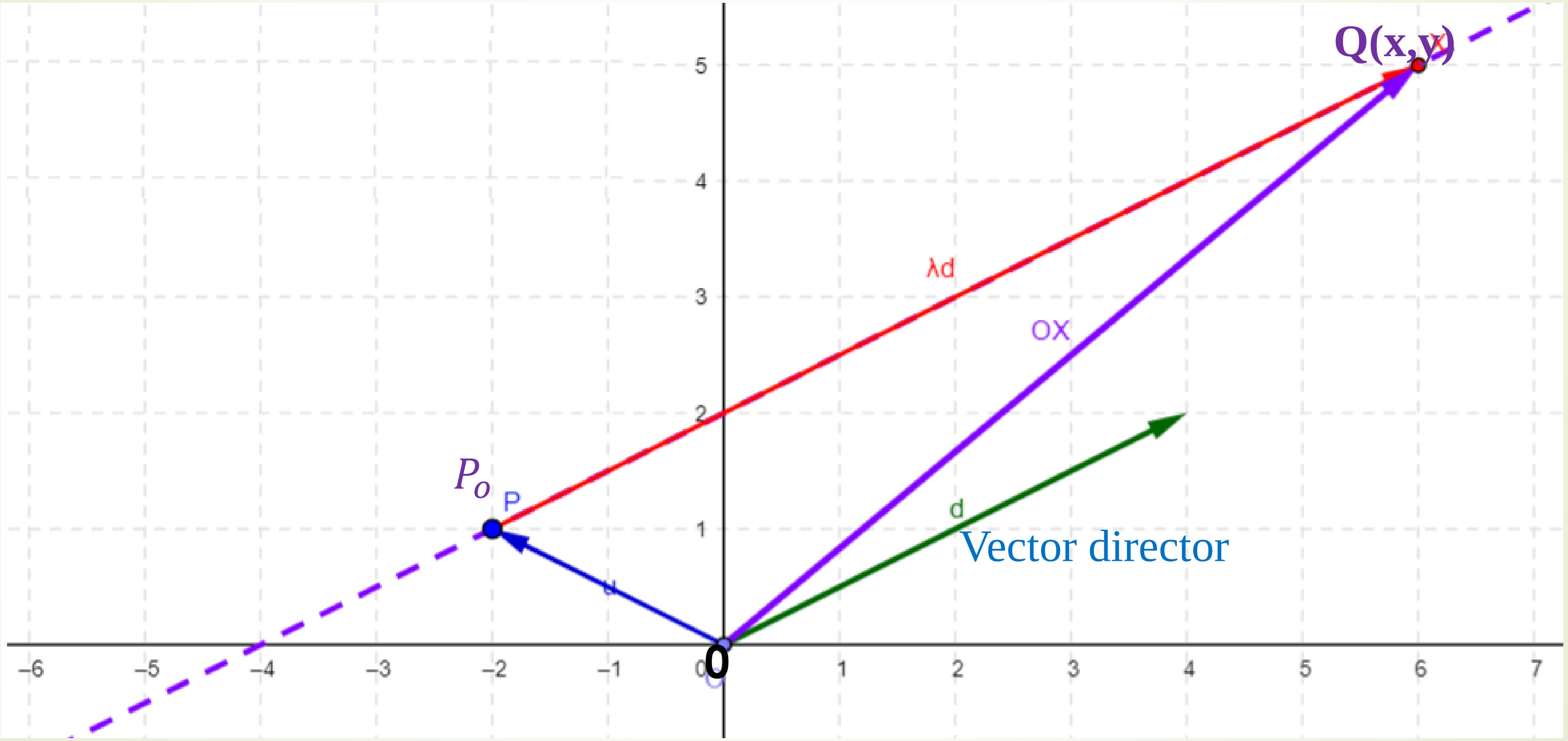
$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + \alpha(x_1, y_1, z_1)$$

Estas son otras dos formas de la ecuación vectorial de la recta

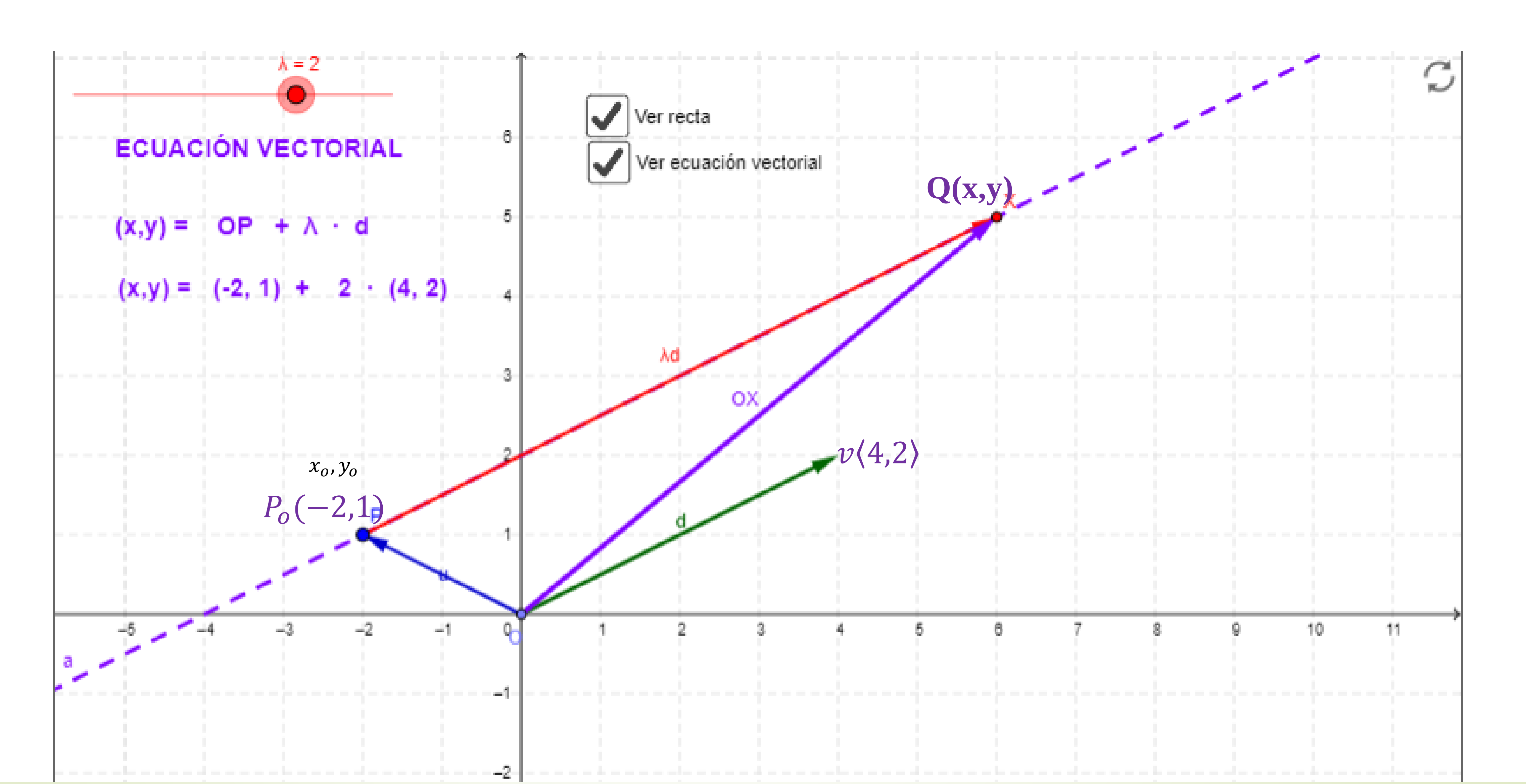
Ejercicio # 1. 2D (efrenmatematica.jimdo.com)

Hallar la ecuación vectorial de la recta P_0Q conocidos P_0 y el vector director de P_0Q.

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_o, y_o, z_o\rangle + \alpha\langle x_1, y_1, z_1\rangle$$

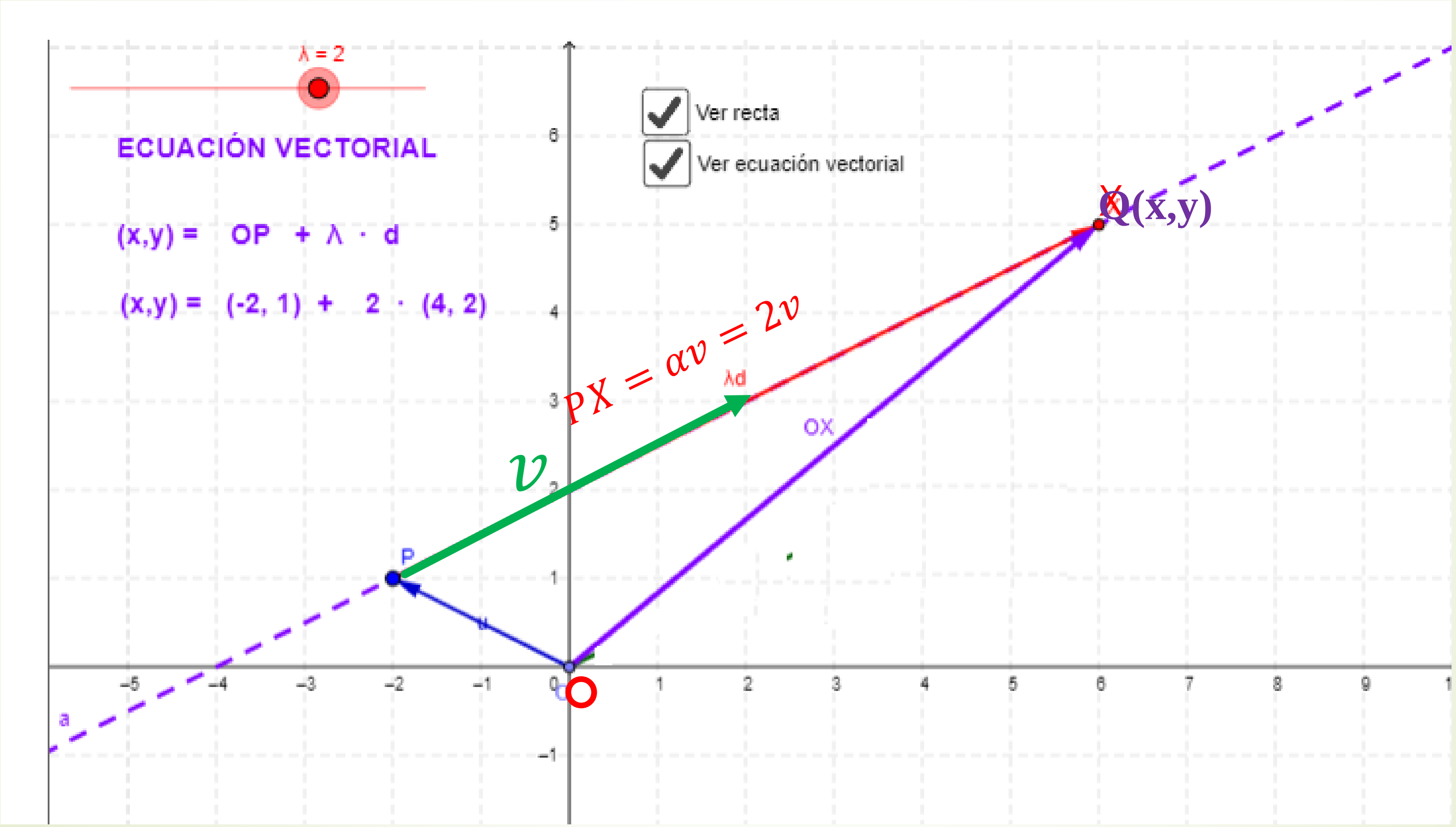


ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA



https://www.geogebra.org/m/s6rWwnAc

$\langle x, y, z\rangle = \langle -2, 1\rangle + \alpha\langle 4, 2\rangle$



https://www.geogebra.org/m/s6rWwnAc

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/v12ecuvectorial.htm

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle -\mathbf{2}, \mathbf{1} \rangle + \boldsymbol{\alpha} \langle \mathbf{4}, \mathbf{2} \rangle$$

Si me piden o quiero hallar las coordenadas de otro punto (fuera del punto obvio $\langle -\mathbf{2}, \mathbf{1} \rangle$), le doy valores al parámetro $\boldsymbol{\alpha}$.

$\boldsymbol{\alpha}$=2

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle -\mathbf{2}, \mathbf{1} \rangle + \mathbf{2} \langle \mathbf{4}, \mathbf{2} \rangle$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle -\mathbf{2}, \mathbf{1} \rangle + \langle \mathbf{8}, \mathbf{4} \rangle$$

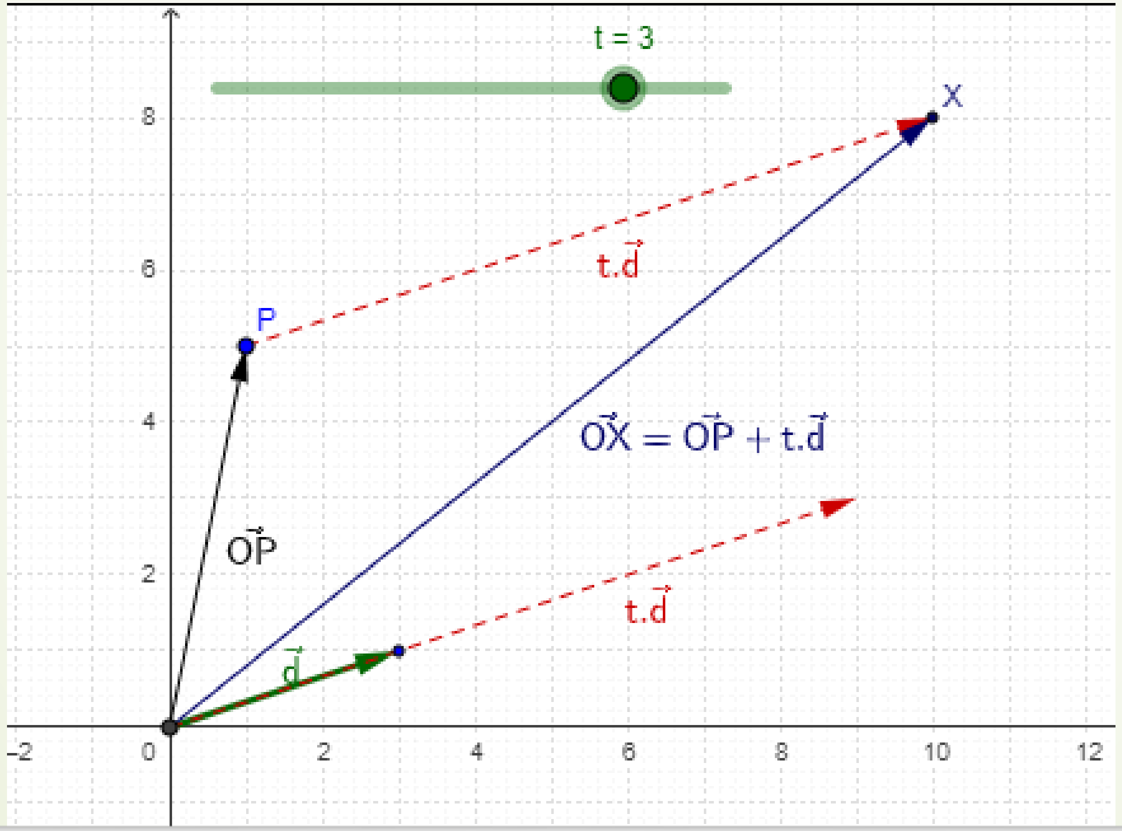
Y esto es una suma de vectores

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \mathbf{6}, \mathbf{5} \rangle$$

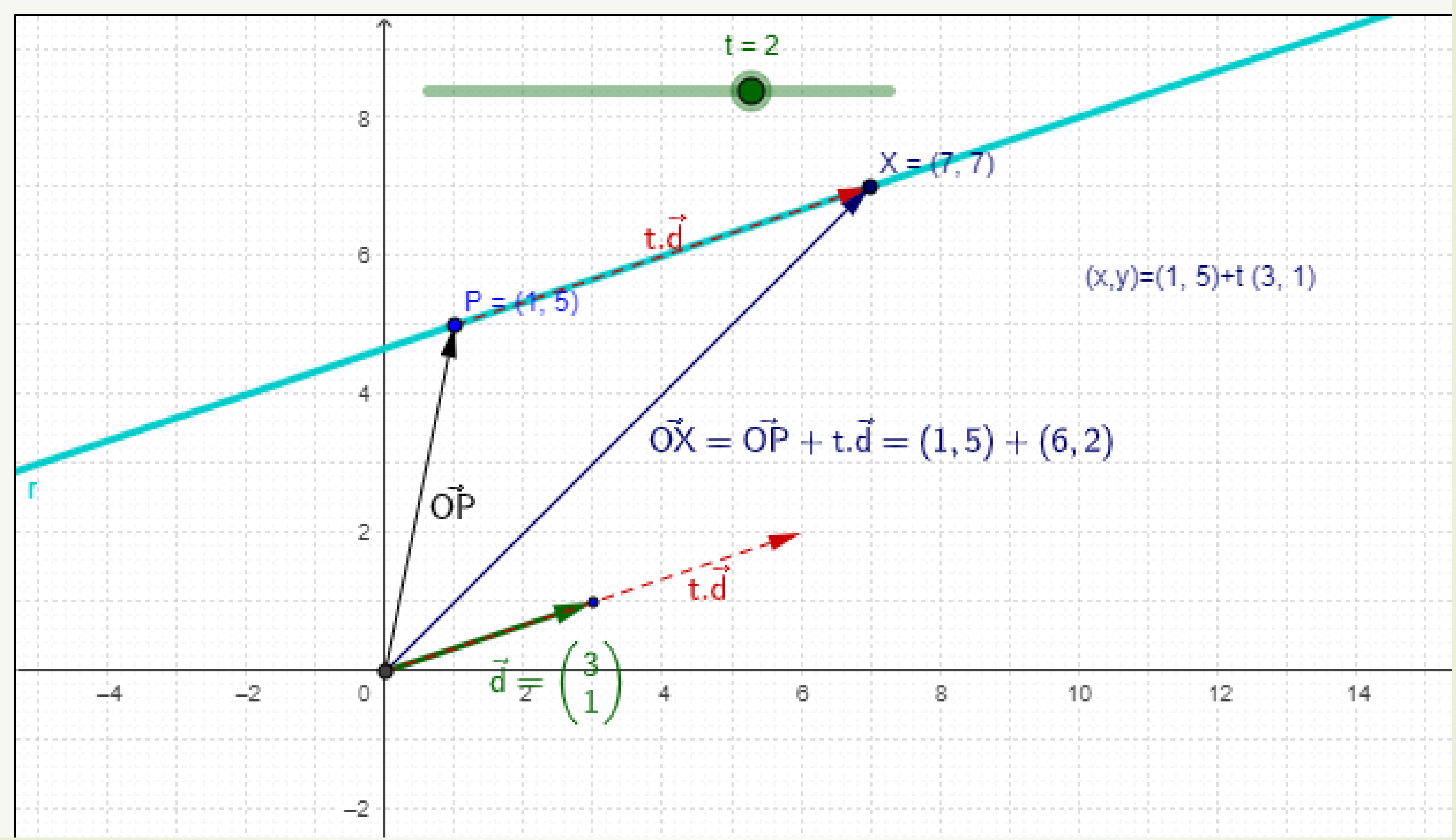
Este punto es otro punto de la recta P_0Q

Ejercicio # 2

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_o, y_o, z_o\rangle + \alpha\langle x_1, y_1, z_1\rangle$$



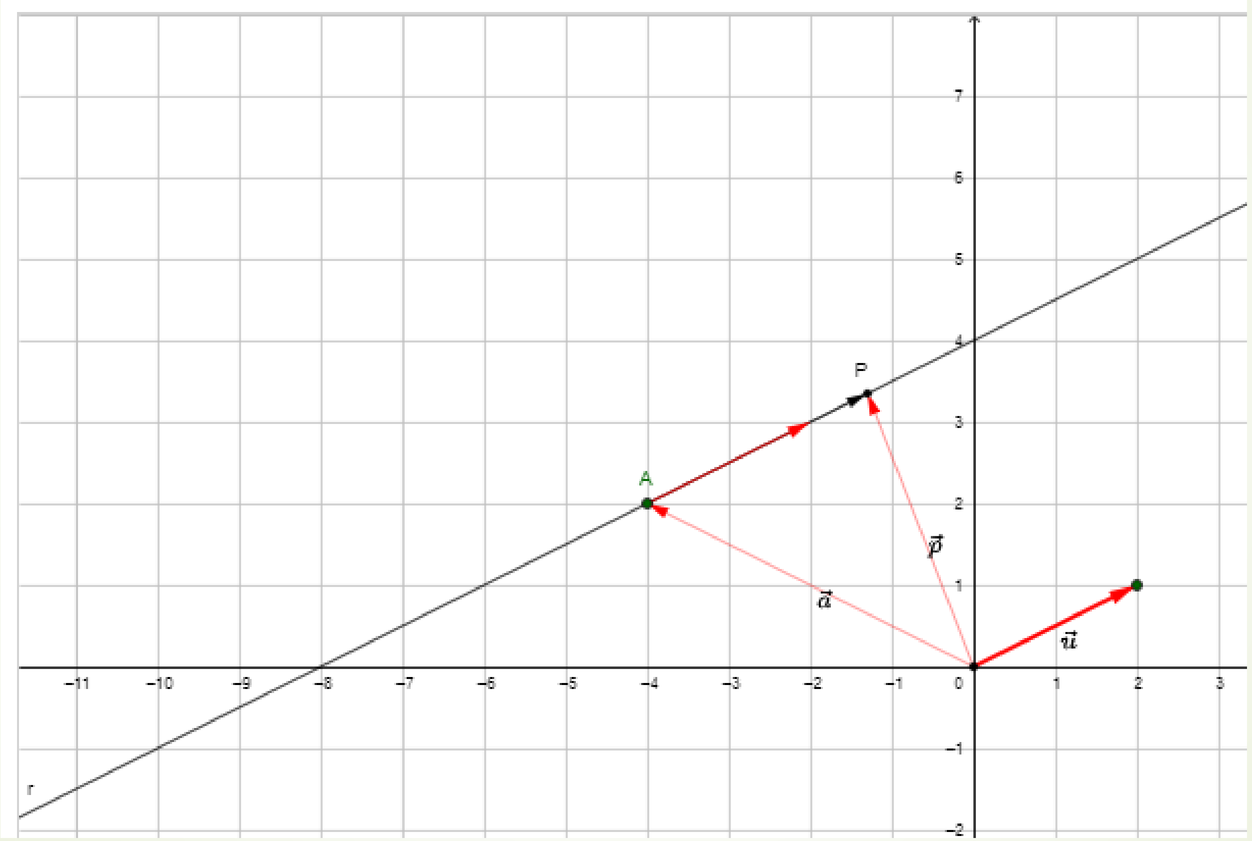
ECUACION VECTORIAL DE LA RECTA (INTERACTIVA)



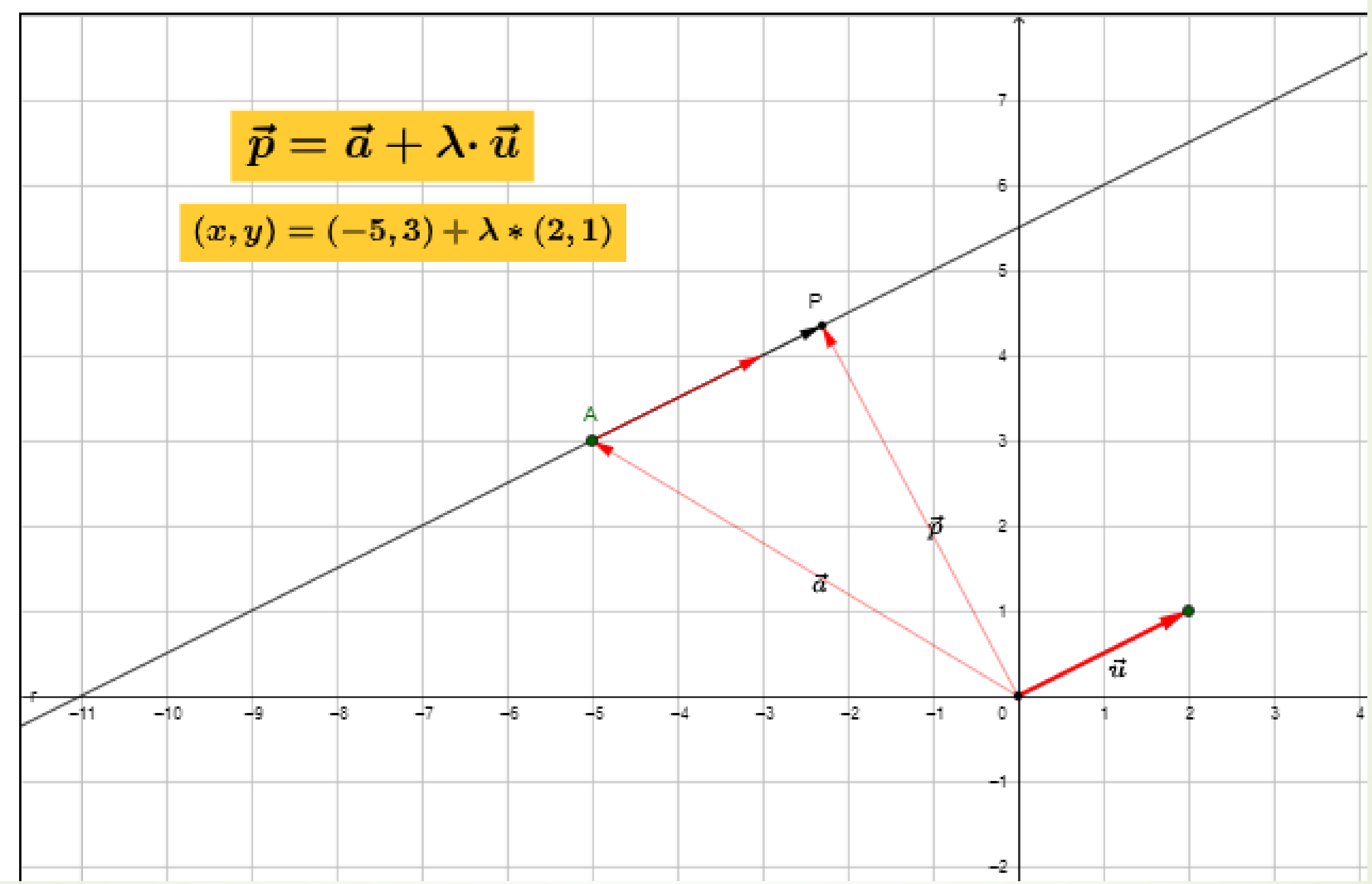
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/v12ecuvectorial.htm

Ejercicio # 3

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_o, y_o, z_o\rangle + \alpha\langle x_1, y_1, z_1\rangle$$



https://www.geogebra.org/m/7n8u425a



$\vec{p} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$
$(x, y) = (-5, 3) + \lambda * (2, 1)$
P
A
$\vec{p}$
$\vec{a}$
$\vec{u}$

Ejercicio # 4

Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos P_0 (3,2,1) y P_2 (-1,1,0).

De los puntos P_0 y P_2 se obtiene el vector P_0P_2. Este vector sirve de vector director de la recta P_0P_2.

$$v\langle -1-3, 1-2, 0-1\rangle$$

$$v\langle -4, -1, -1\rangle$$

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 3,2,1\rangle + \alpha\langle -4,-1,-1\rangle$$

Para cada valor de α se obtiene un punto que pertenece a la recta o un vector de posición del punto (x, y, z) de la recta:

Si $\alpha = 1$, se tiene:

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 3,2,1\rangle + 1\langle -4,-1,-1\rangle = \langle -1,1,0\rangle \text{ o } (-1,1,0)$$

2. Ecuación paramétrica de la recta

efrenmatematica.jimdo.com

$$(x,y,z) = (x_{0,} y_0, z_0) + \alpha(x_1, y_1, z_1)$$

$$(x,y,z) = (x_{0,} y_0, z_0) + (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

$$(x,y,z) = (x_0 + \alpha y_1,\ y_0 + \alpha y_1, z_0 + \alpha z_1)$$

$$x = x_0 + \alpha x_1$$
$$y = y_0 + \alpha y_1$$
$$z = z_0 + \alpha z_1$$

Ecuaciones paramétricas

Ecuaciones paramétricas de la recta conocidos el vector director y un punto.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \propto x_1 \\ y &= y_0 + \propto y_1 \\ z &= z_0 + \propto z_1 \end{aligned} \qquad (3)$$

Coordenadas del punto

coordenadas del vector director

4.Ecuación simétrica de la recta

efrenmatematica.jimdo.com

A partir de la ecuación paramétrica

$$x = x_0 + \propto x_1$$
$$y = y_0 + \propto y_1$$
$$z = z_0 + \propto z_1$$

Despejando el parámetro α de cada ecuación anterior, se tiene:

$$x - x_0 = \propto x_1 \qquad \propto = \frac{x - x_0}{x_1}$$

$$y - y_0 = \propto y_1 \qquad \alpha = \frac{y - y_0}{y_1}$$

$$z - z_0 = \alpha Z_1 \qquad \alpha = \frac{Z - Z_0}{Z_1}$$

Ecuación simétrica de la recta

coordenadas del punto

$$\propto = \frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1}$$

coordenadas del vector director

Que se conoce como las ecuación simétrica de la recta .

VIDEOS

http://www.monserrat.proed.unc.edu.ar/pluginfile.php/6906/mod_resource/content/2/Rectas%20alabeadas%20animaci%C3%B3n.mp4

Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

http://matematicas.unex.es/~pjimenez/hedima/12espacio.pdf

Vectores interactivos en el espacio

https://www.intmath.com/vectors/3d-space-interactive-applet.php

http://galeon.com/jjisach/u-5.pdf