2

Ecuaciones de planos
Diapositivas realizadas por
Efrén Giraldo T. MSc.
Su único objetivo es facilitar el estudio.

Enail: hegiraldo2@Gmail.com

❖**MIS VALORES**

Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

❖**MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖**MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema.
Servir a las personas.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES PREVIOS

1.Vector que corresponde a dos puntos: se restan **sus coordenadas**.

2.Tercer vector perpendicular a dos vectores: se **halla por el producto cruz**

3.Para hallar un **vector director** de una **recta que es intercepción de 2 planos** se hallan el **producto vectorial** (cruz) de los vectores $N_1 \quad y \quad N_2$ normales a los 2 planos.

5. Conocer el protocolo para hallar un punto de la recta de intersección de 2 planos.

6. Un punto x_1, y_1, z_1 contenido en una recta: debe cumplir la ecuación de la recta.

6. Hallar las **coordenadas de un punto que pertenece a una recta**:
se lleva a la forma paramétrica , se da un valor al parámetro.

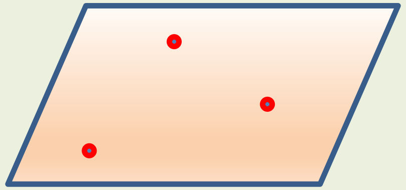
7. Para **sumar dos vectores se suman sus respectivas componentes**.

8. Si dos vectores son iguales sus respectivas componentes son iguales.

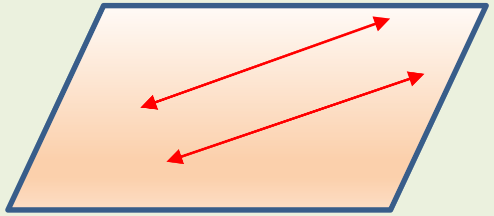
9. Si $N(a.b,c)$ es un vector **perpendicular** al plano, **N será perpendicular a todos los vectores del plano.**

Un plano se determina si:

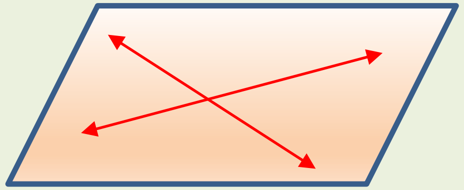
- Se conocen tres puntos no alineados.



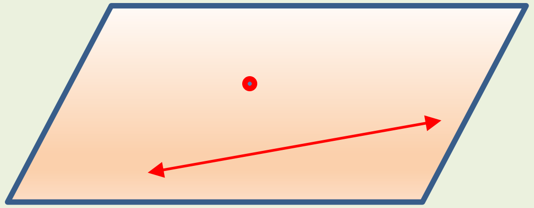
- Se tienen dos rectas paralelas no coincidentes.



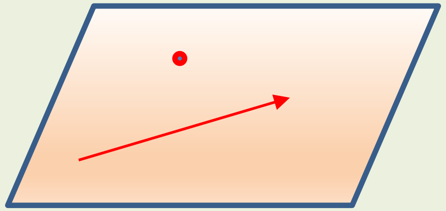
- Se tienen dos rectas secantes.



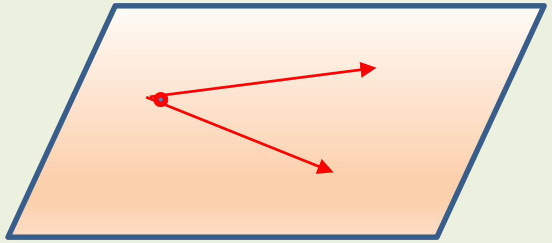
- Una recta y un punto externo.



- Un vector y un punto externo.



- **Dos vectores no paralelos y un punto**.



Ecuaciones del plano

1. Ecuación vectorial del plano.
2. Ecuaciones paramétricas del plano.
3. La ecuación analítica.
4. Ecuación implícita del plano.
5. Pasar de implícita a paramétrica

Dos vectores no paralelos y un punto determinan un plano

Determinar un plano es hallar una ecuación que represente todos los puntos del plano.

Todo se reduce en última instancia a dos vectores no paralelos y un punto de del plano.

En la demostración que veremos partimos de tres puntos pero terminamos con dos vectores y un punto.

Ecuación vectorial del plano

Si partimos de la ecuación vectorial de la recta donde se tiene un punto y un vector:

$$\mathbf{OP}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle = \mathbf{OA}\langle \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{z}_0\rangle + \alpha\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1\rangle$$

Además , si un plano se determina por 2 vectores no paralelos y un punto, es de esperar que la ecuación vectorial del plano esté en función del punto y de los dos vectores:

$$\mathbf{OP}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle = \mathbf{OA}\langle \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{z}_0\rangle + \alpha\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1\rangle + \beta\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{z}_2\rangle$$

Ecuación paramétrica del plano

Si un plano se determina por 2 vectores no paralelos y un punto es de esperar que la ecuación paramétrica del plano esté en función del punto y de los dos vectores.

Si partimos de la ecuación paramétrica de la recta donde se tiene un punto y un vector se tiene:

$$x = x_0 + \alpha x_1$$
$$y = y_0 + \alpha y_1$$
$$z = z_0 + \alpha z_1$$

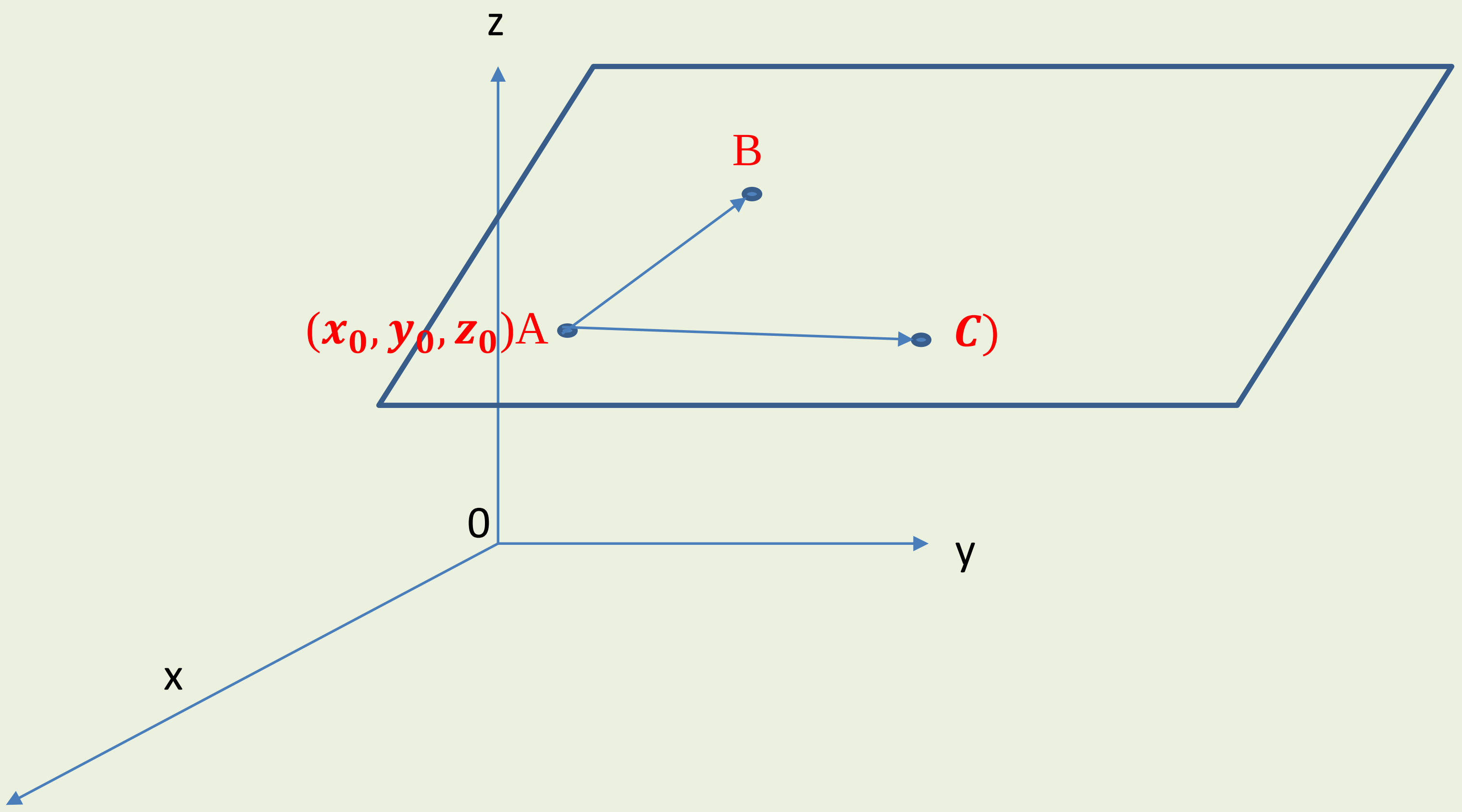
Ecuación ST paramétrica del plano

Como en un plano además se tiene otro vector, entonces es de esperar que la ecuación sea:

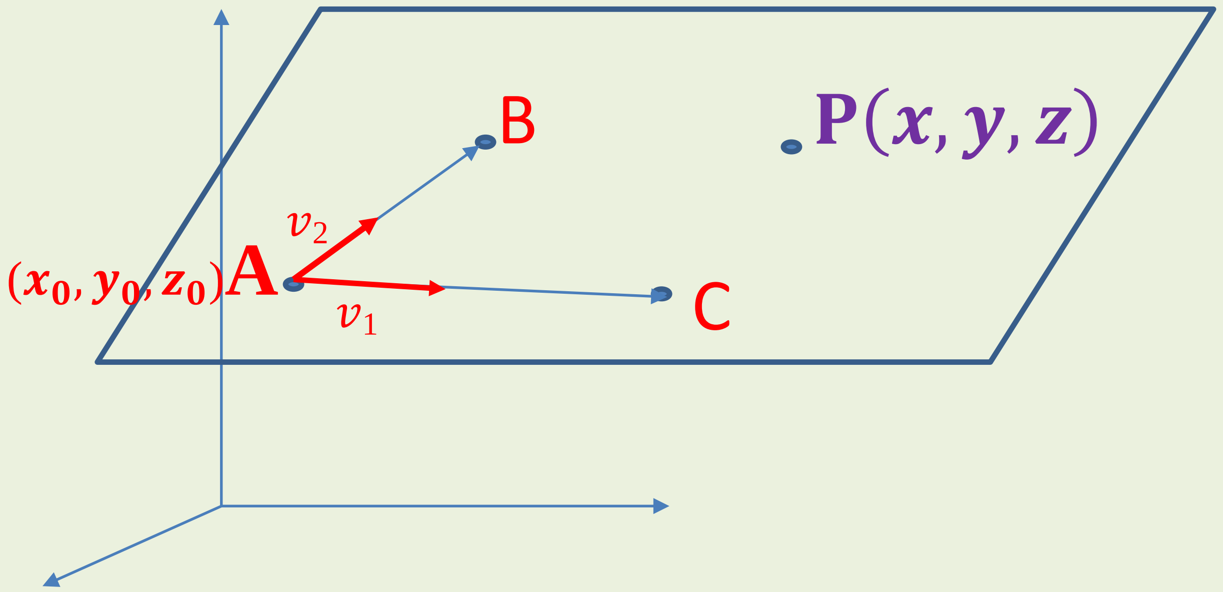
$$x = x_0 + \alpha x_1 + \beta x_2$$
$$y = y_0 + \alpha y_1 + \beta y_2$$
$$z = z_0 + \alpha z_1 + \beta z_2$$

$$x = x_0 + x_1\alpha + x_2\beta$$
$$y = y_0 + y_1\alpha + y_2\beta$$
$$z = z_0 + z_1\alpha + z_2\beta$$

Partimos del punto A($\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}$) y del vector AB y el vector AC



Sea $P(x, y, z)$ un punto general que representa a cualquier punto del plano



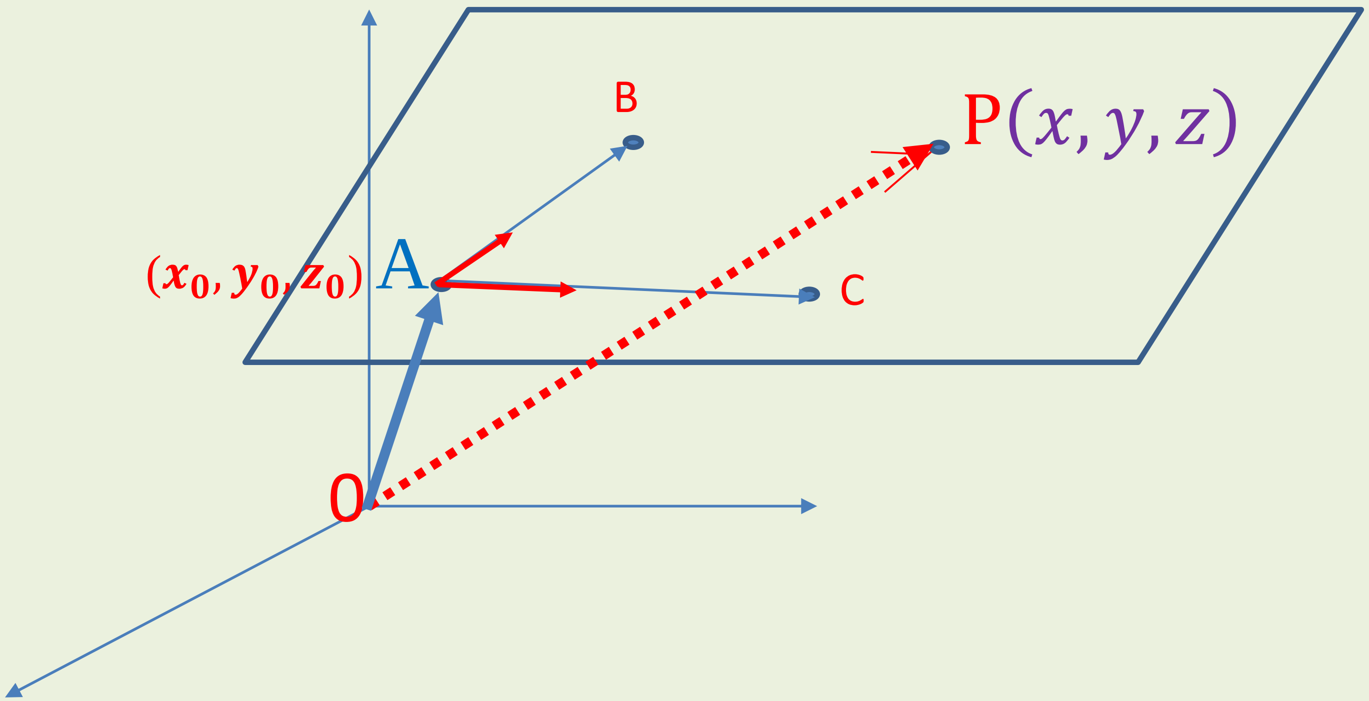
Sea $\boldsymbol{v_1}\ \langle \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1} \rangle$ *el vector director de la recta AC*

Sea $\boldsymbol{v_2}\ \langle \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2} \rangle$ *el vector director de la recta AB*

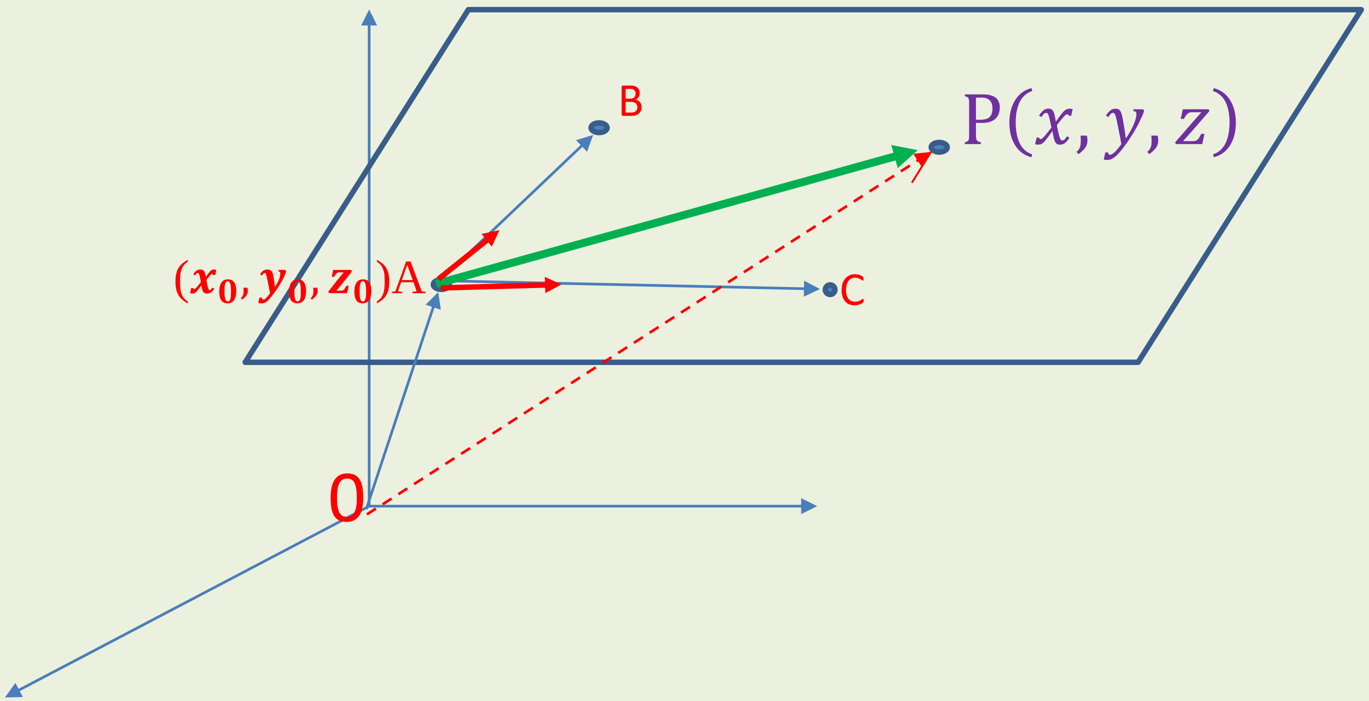
El vector $AC = \alpha v_1$ (1) Combinación lineal

El vector $AB = \beta v_2$ (2) Combinación lineal

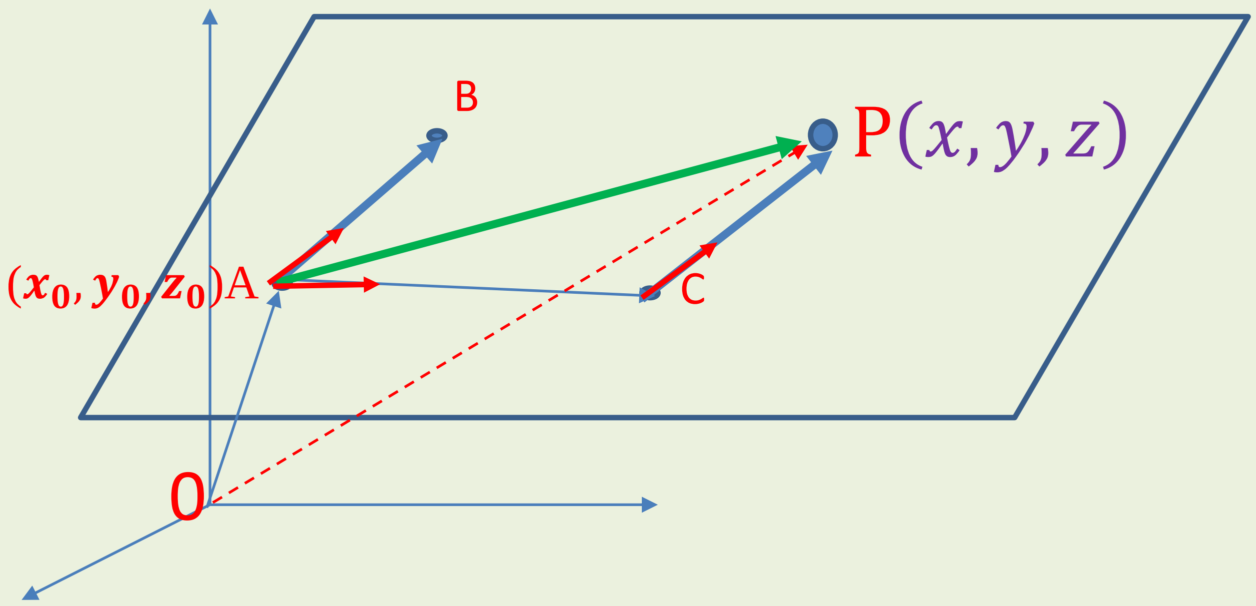
Trazo el vector posición del punto **P** $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ y el de A $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

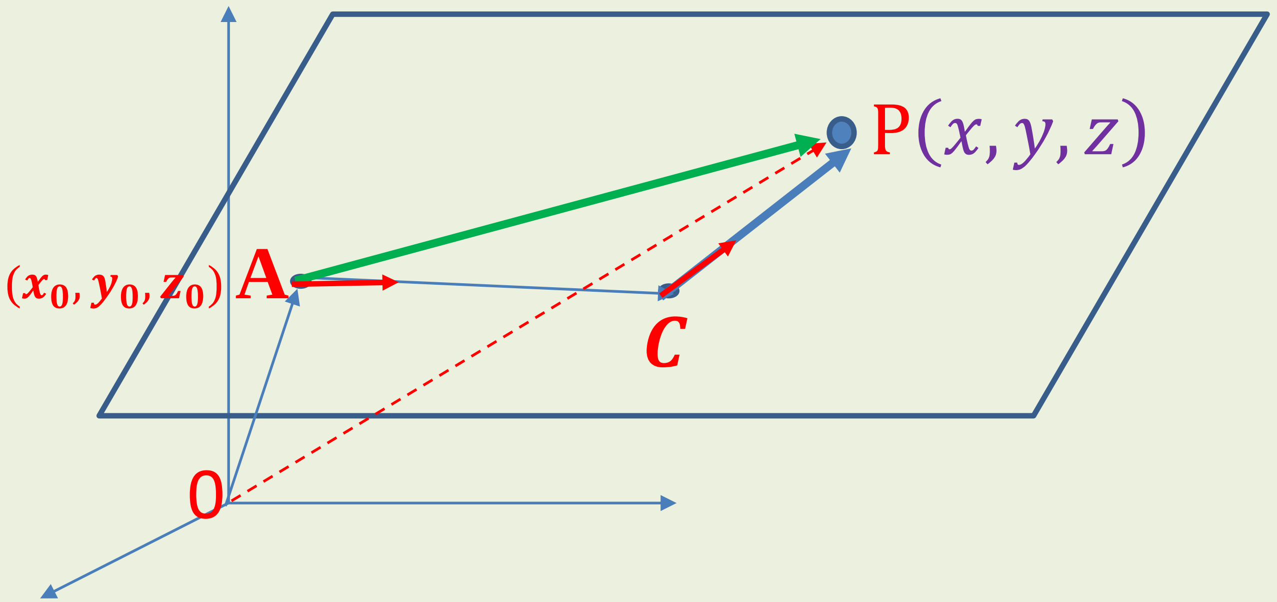


Trazo el vector AP



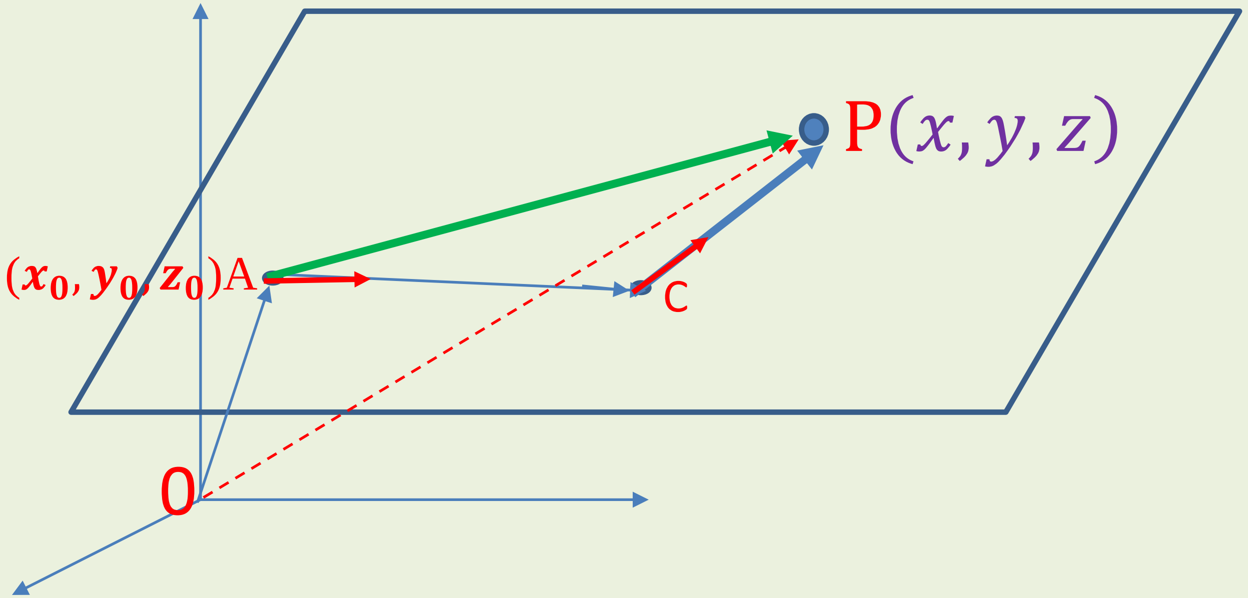
Traslado paralelamente el vector AB hasta C , es el mismo vector CP





Tenemos dos triángulos : ACP y OAC

$\overrightarrow{AP}$ pertenece a los 2 triángulos

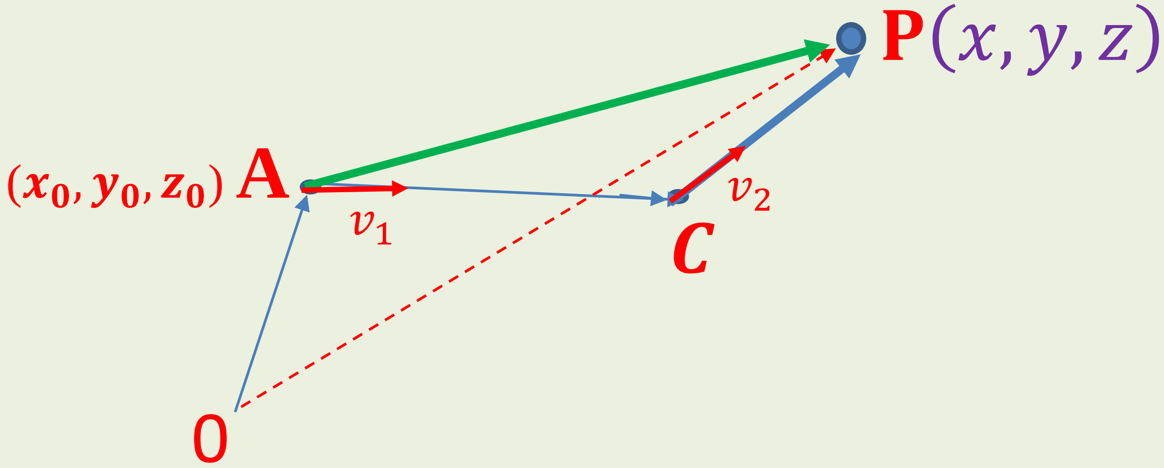


El vector AP en el triángulo ACP es la suma de AC más CP:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CP}}$$

El vector OP en el triángulo OAP es la suma de OA más AP:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}$$

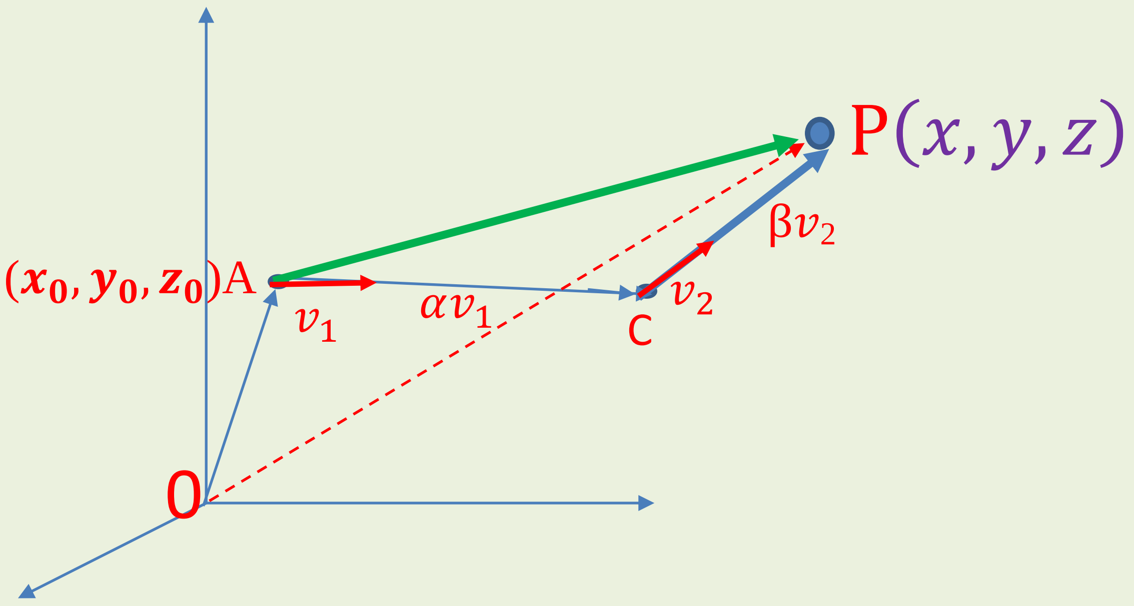


$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$\overrightarrow{AC}$ es combinación lineal de v_1 $\overrightarrow{AC} = \alpha v_1$

$\overrightarrow{CP}$ es combinación lineal de v_2 $\overrightarrow{CP} = \beta v_2$



$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$$

$AC = \alpha v_1 \qquad CP = \beta v_2$

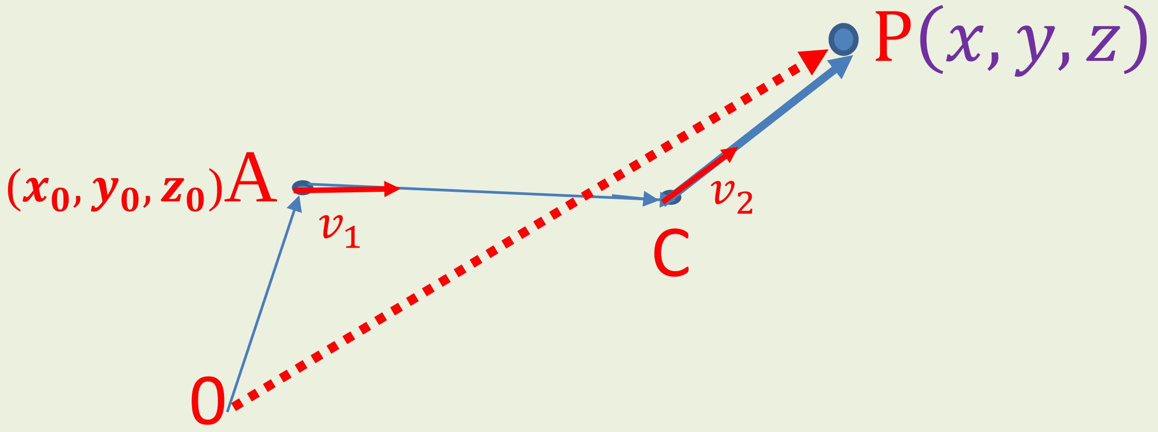
$$\overrightarrow{AP} = \alpha v_1 + \beta v_2$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

Reemplazo $\overrightarrow{AP}$ en $\overrightarrow{OP}$

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \alpha v_1 + \beta v_2}$$

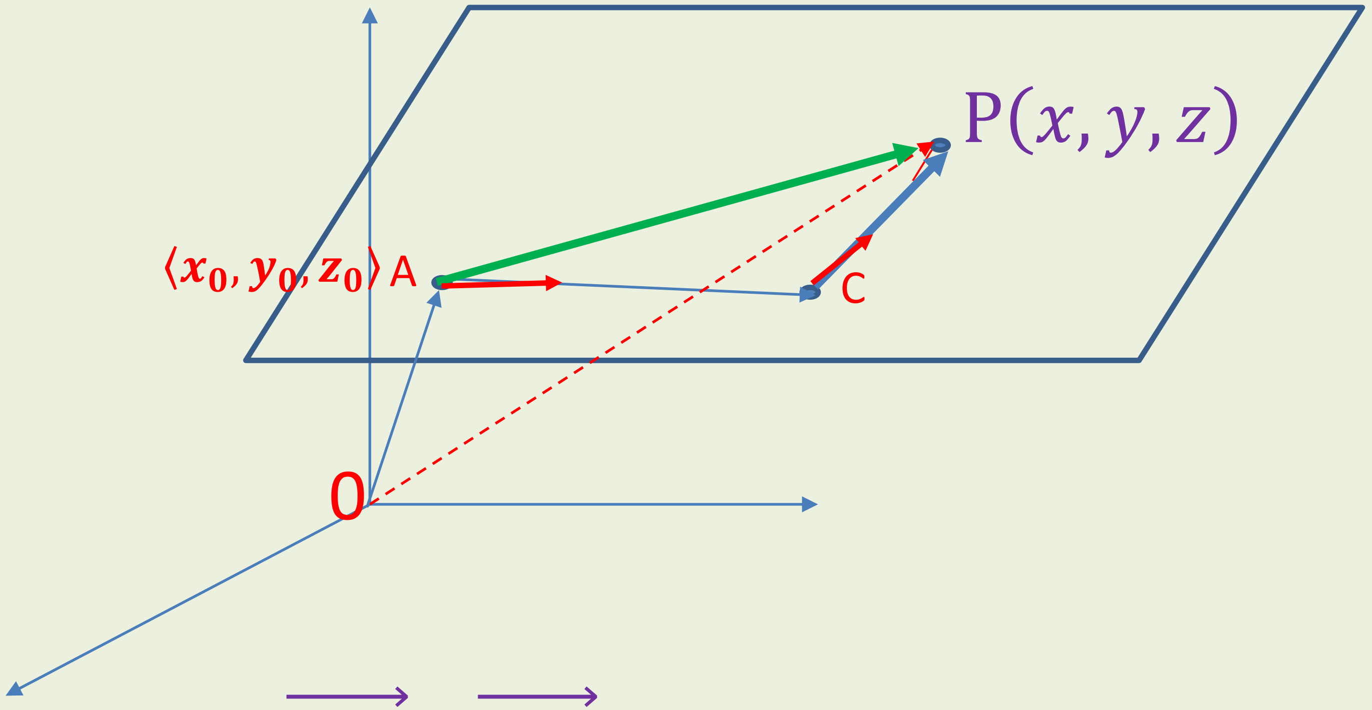
Otra manera de ver la situación en la siguiente:



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \alpha\langle x_1, y_1, z_1\rangle + \beta\langle x_2, y_2, z_2\rangle$$

Una forma de la Ecuación vectorial del plano



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \alpha v_1 + \beta v_2$$

$$\mathbf{OP}\langle x, y, z\rangle = \mathbf{OA}\langle x_0, y_0, z_0\rangle + \alpha\langle x_1, y_1, z_1\rangle + \beta\langle x_2, y_2, z_2\rangle$$

Deducción de la ecuación paramétrica

$$\mathbf{OP}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle = \mathbf{OA}\langle \boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}\rangle + v_1\langle \alpha \boldsymbol{x_1}, \alpha \boldsymbol{y_1}, \alpha \boldsymbol{z_1}\rangle + v_2\langle \beta \boldsymbol{x_2}, \beta \boldsymbol{y_2}, \beta \boldsymbol{z_2}\rangle$$

Esta ecuación es la suma de tres vectores, por tanto el vector resultante OP es la suma de sus respectivas componentes:

$$\mathbf{OP}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle = \langle \underline{x_0 + \alpha x_1 + \beta x_2}, y_0 + \alpha y_1 + \beta y_2, \boldsymbol{z_0} + \boldsymbol{\alpha z_1} + \boldsymbol{\beta z_2}\rangle$$

$$x = \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{\alpha x_1} + \boldsymbol{\beta x_2}$$

$$y = y_0 + \alpha y_1 + \beta y_2$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z_0} + \boldsymbol{\alpha z_1} + \boldsymbol{\beta z_2}$$

Ejercicio 1

Hallar la ecuación paramétrica del plano conociendo un punto y dos vectores

$$\overset{x_0\ \ y_0\ \ z_0}{P_0(2,-2,\ 3)} \qquad v_1\langle -4,\ \ 3,\ \ 3\rangle \qquad v_2\langle -2, -2, -1\rangle$$

$$v_1\langle -4, \qquad 3, \qquad 3\rangle$$

$$v_2\langle -2, \qquad -2, \qquad -1\rangle$$

Compruebe que los vectores AB y AC no son paralelos

$$\frac{-4}{-2}, \qquad \frac{3}{-2}, \qquad \frac{3}{1} \qquad \text{Son diferentes}$$

El punto y los vectores se pueden organizar también en forma de columna. Así es más fácil para las ecuaciones paramétricas.

Un punto del plano

$$P_0(\overset{x_0}{2},\overset{y_0}{-2},\overset{z_0}{3}) \quad = P_0\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array}$$

Primer vector

$$v_1 \left\langle \overset{x_1}{-4}, \ \overset{y_1}{3}, \ \overset{z_1}{3} \right\rangle = v_1 \left\langle \begin{array}{c} -4 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{array}$$

Segundo vector

$$v_2 \left\langle \overset{x_2}{-2}, \overset{y_2}{-2}, \overset{z_2}{-1} \right\rangle \quad v_2 \left\langle \begin{array}{c} -2 \\ -2 \\ -1 \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{array}$$

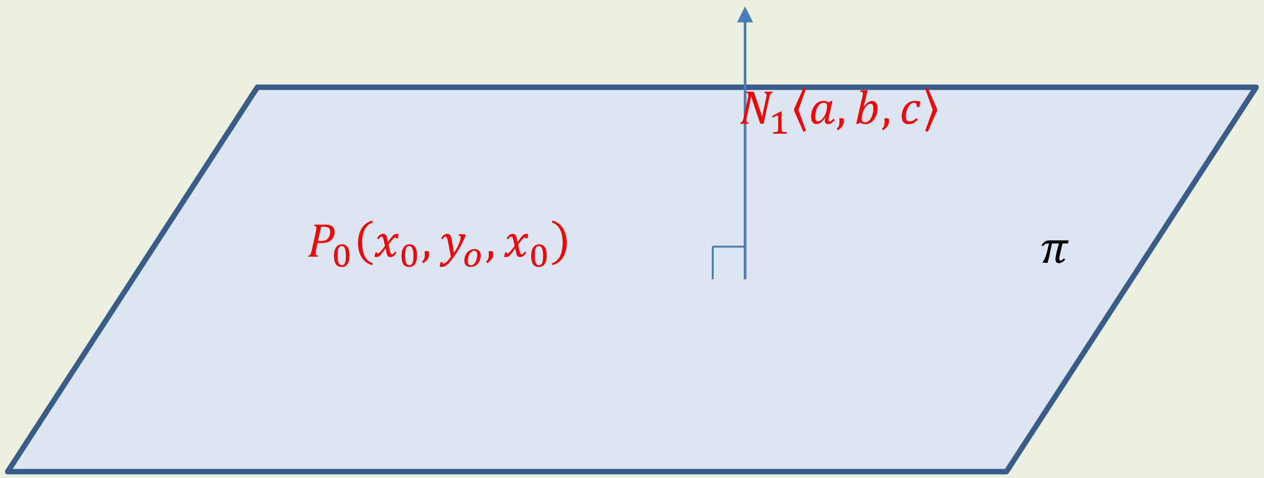
$$P_0\begin{array}{c}\\ \end{array}\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} & \begin{array}{c}x_0\\y_0\\z_0\end{array}\end{array}\qquad v_1\begin{array}{cc}\left\langle\begin{array}{c}-4\\3\\3\end{array}\right\rangle & \begin{array}{c}x_1\\y_1\\z_1\end{array}\end{array}\qquad v_2\begin{array}{cc}\left\langle\begin{array}{c}-2\\-2\\-1\end{array}\right\rangle & \begin{array}{c}x_2\\y_2\\z_2\end{array}\end{array}$$

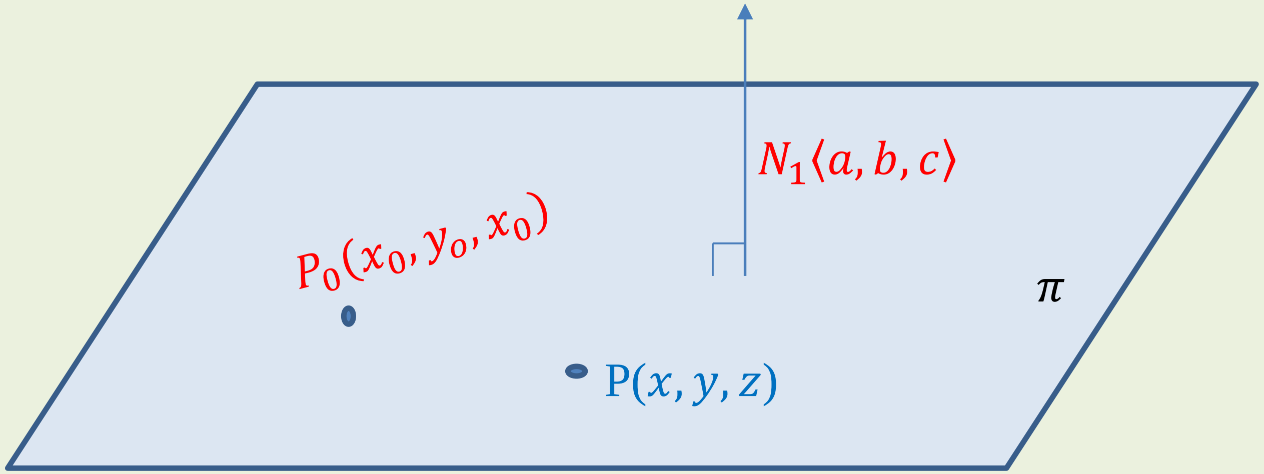
$$\begin{array}{l} x = x_0 + \alpha x_1 + x_2\beta \\ y = y_0 + \alpha y_1 + y_2\beta \\ z = z_0 + \alpha z_1 + z_2\,\beta \end{array} \longrightarrow \begin{cases} x = 2 + (-4)\alpha + (-2)\beta \\ y = -2 + 3\alpha + (-2)\beta \\ z = 3 + 3\alpha + (-1)\beta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 2 - 4\alpha - 2\beta \\ y = -2 + 3\alpha - 2\beta \\ z = 3 + 3\alpha - \beta \end{cases}$$

Ecuación analítica del plano

Se requiere de un punto del plano y un vector normal

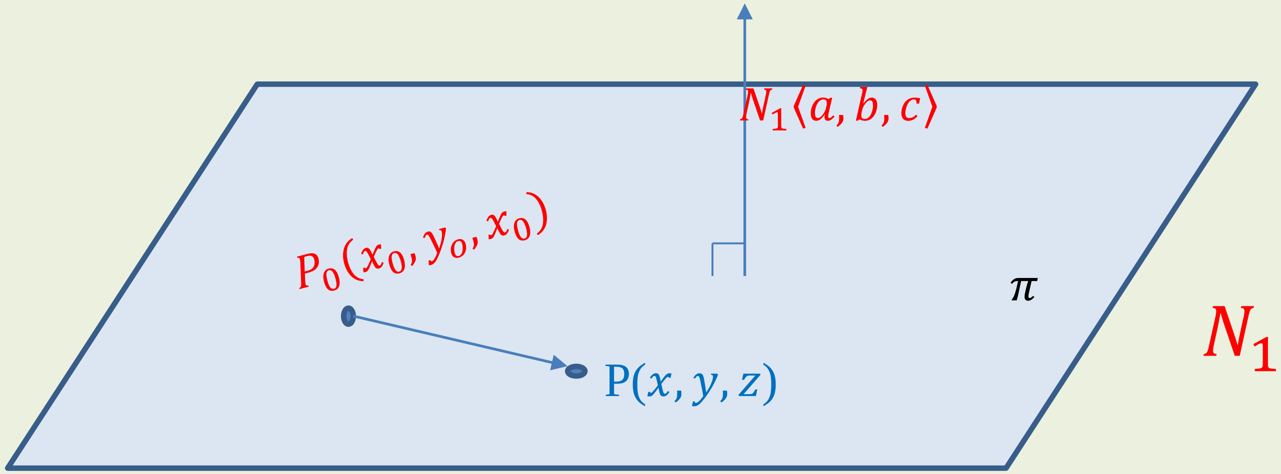
Hallaremos la ecuación del plano π que pasa por un punto $P_0(x_0, y_o, x_0)$, Y es normal (perpendicular) al vector $N_1\langle a, b, c\rangle$





Supongamos un punto general $\mathrm{P}(x, y, z)$ que representa cualquier punto del plano π.

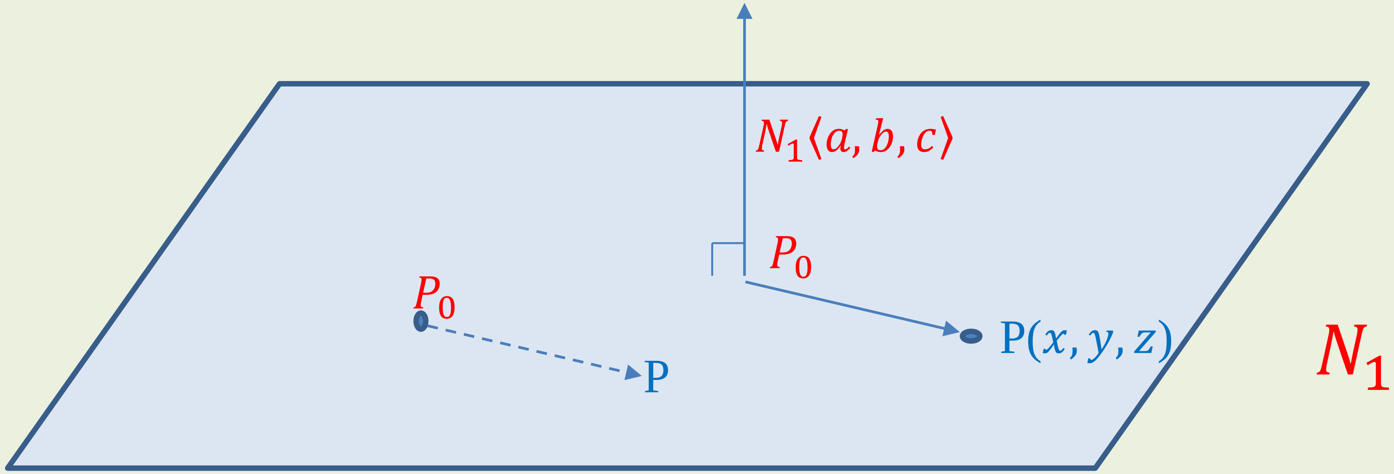
¿Qué condición debe cumplir el punto P para pertenecer al plano?



$N_1\langle a, b, c\rangle \perp \overrightarrow{P_0\,P}$

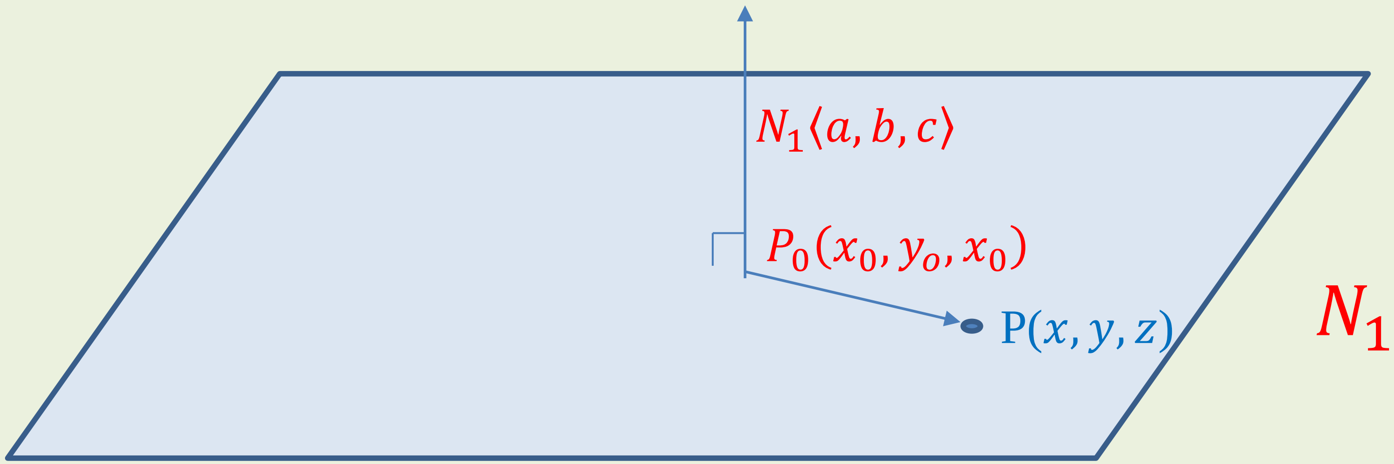
Trazamos el vector $\overrightarrow{P_0\,P}$ correspondiente a los puntos P_0 y P.

Por la geometría euclidiana sabemos que cualquier vector del plano π es perpendicular al vector v_1 , por tanto el vector $P_0\,P$ es perpendicular al vector v_1.



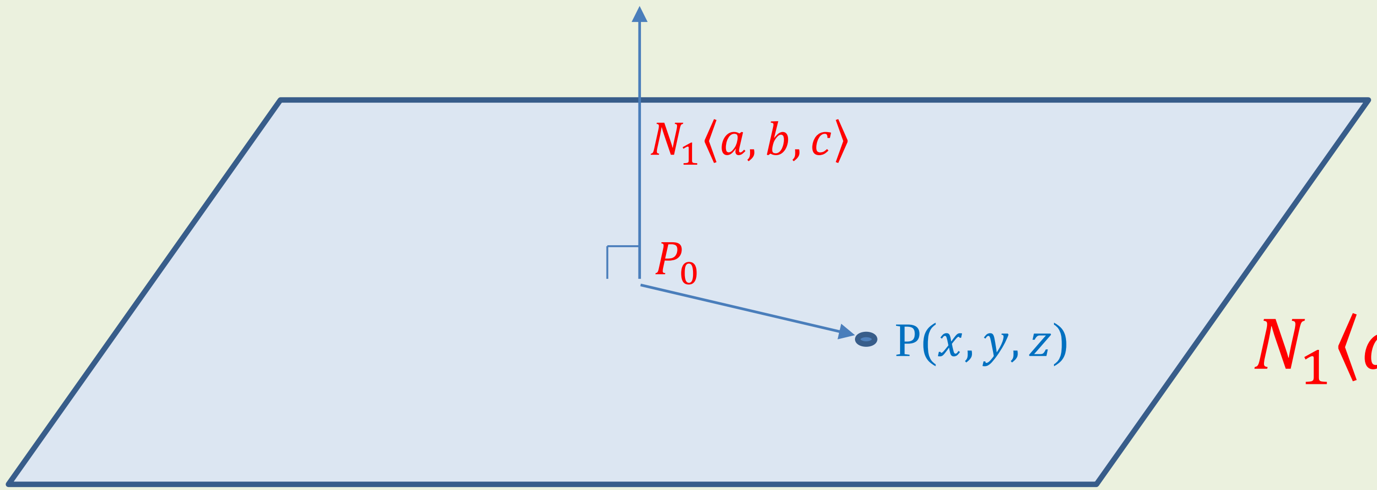
$N_1\langle a, b, c\rangle \perp \overrightarrow{P_0\ P}$

Trasladamos el vector $\overrightarrow{P_0\ P}$



$N_1\langle a, b, c\rangle \perp \overrightarrow{P_0\ P}$

El vector $P_0\ P$ tiene coordenadas $P_0\ P\ \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle$.



$$N_1\langle a, b, c\rangle \perp \overrightarrow{P_0\,P}$$

$$\boldsymbol{P_0\,P\,\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle}$$

Como los vectores $\boldsymbol{N_1\langle a, b, c\rangle}$ y $\boldsymbol{P_0\,P\,\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle}$ son dos vectores perpendiculares, su producto punto debe ser igual a 0.

$$\langle a, b, c\rangle . \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0$$

$$a(x - x_0) + \mathrm{b}(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Ecuación analítica del plano

$$a(x - x_0) + \mathrm{b}(y - y_0) + c(z - z_0)=0$$

La ecuación analítica requiere de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *y un vector normal* de coordenadas a, b, c.

El vector normal puede requerir 2 vectores no paralelos.

Coordenadas del vector perpendicular o normal al plano N $= \langle a, b, c\rangle$

$$\mathrm{a}(x - x_0) + \mathrm{b}(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Coordenadas de un punto del plano $= P_0(x_0, y_0, z_o)$

Es de anotar que todo plano admite esta ecuación

Ecuación implícita del plano

Que si se resuelve completamente, en última instancia resulta:

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_o = 0$$

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_o \ ax$$

$_0 + by_0 + cz_o$ es un número real d

$$ax + by + cz = d$$

De donde:

a, *b*, *c* son las componentes del vector perpendicular o normal al plano y *d* es un escalar.

Paramétrica estandarizada del plano

Paramétrica ST del plano

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{x_1\alpha} + \boldsymbol{x_2\beta} \\ y &= y_0 + y_1\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{y_2}\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{z_0} + \ \boldsymbol{z_1\alpha} + \ \boldsymbol{z_2\beta} \end{aligned}}$$

Puede aparecer así:

$$x = 3 + \alpha 5 + 6\beta$$
$$y = 2 + \alpha 6 + 7\beta$$
$$z = 4 + \alpha 3 + \ \beta$$

O así:

$$x = 3 \ + \ 5\alpha + 6\beta$$
$$y = 2 \ + \ 6\alpha + 7\beta$$
$$z = 4 \ + \ 3\alpha + \ \beta$$

De donde se extraen el punto y los dos vectores

$$P_0(x_0, y_o, x_0) = \quad (3,4,5)$$
$$v_1\langle x_1, y_1, z_2\rangle = \quad \langle 5,6,3\rangle$$
$$v_2\langle x_2, y_2, z_2\rangle = \langle 6,7,1\rangle$$

Ejercicio 1: de paramétrica no ST a paramétrica ST

Si tenemos la ecuación siguiente

$$x = 2 + 4\alpha + 6\beta$$

$$\left.\begin{aligned} y &= 6\alpha \\ z &= \beta \end{aligned}\right\}$$ Los términos faltantes son cero

Comparándola con la ST

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha x_1 + \beta x_2 \\ y &= y_0 + \alpha y_1 + \beta y_2 \\ z &= z_0 + \alpha z_1 + \beta z_2 \end{aligned}}$$

Como no hay término en y_0, y_0=0

No término en βy_2 , $y_2 = 0$

z_0=0, 0α

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 + 4\alpha + 6\beta \\ y &= 0 + 6\alpha + 0\beta \\ z &= 0 + 0\alpha + \beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$P_0(x_0, y_o, x_0) = (2,0,0)$$

$$v_1\langle x_1, y_1, z_2\rangle = \langle 4,6,0\rangle$$

$$v_2\langle x_2, y_2, z_2\rangle = \langle 6,0,1\rangle$$

Ejercicio 2

Pasar de la ecuación implícita del plano a la paramétrica

$$\pi_1 \qquad x - 2y + z - 1 = 0$$

Se despeja x

$$x = 2y - z + 1$$

Se reorganiza la ecuación

$$x = 1 + 2y - z$$

Ejercicio 3

Se parametrizan x, y (se pasan de incógnitas a parámetros) haciendo $\begin{array}{l} y=\alpha \\ z=\beta \end{array}$

$$y=\alpha$$
$$z=\beta$$

Se reemplazan en ecuación (1)

$$x=1+2y-z$$

$$x=1+2\alpha-\beta \quad (1)$$

Se comparan $y = \alpha$, $z = \beta$
con las ecuaciones ST
y se estandarizan

$$y = \boldsymbol{y_0} + \boldsymbol{\alpha y_1} + \boldsymbol{\beta y_2}$$

$$y = \alpha \longrightarrow y = 0 + 1\alpha + 0\beta \qquad (2)$$

$$z = \boldsymbol{z_0} + \boldsymbol{\alpha z_1} + \boldsymbol{\beta z_2}$$

$$z = \beta \longrightarrow z = 0 + 0\alpha + 1\beta \qquad (3)$$

Se reorganizan la ecuaciones
(1)
(2)
(3)

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 + 2\alpha - 1\beta \\ y &= 0 + 1\alpha + 0\beta \\ z &= 0 + 0\alpha + 1\beta \end{aligned}} \Longrightarrow \begin{array}{l} P(1, 0, 0) \\ v_1\langle 2, 1, 0\rangle \\ v_2\langle -1,0,1\rangle \end{array}$$

39

Ejercicio 4

Dada la ecuación implícita del plano hallar un punto que pertenece a dicho plano,

De las tres variables de la ecuación del plano se le da valores numéricos a dos de ellas y luego se despeja la tercera.

$$2x + 3y + 5z - 5 = 0$$

$Si\ x = 0, y = 0$

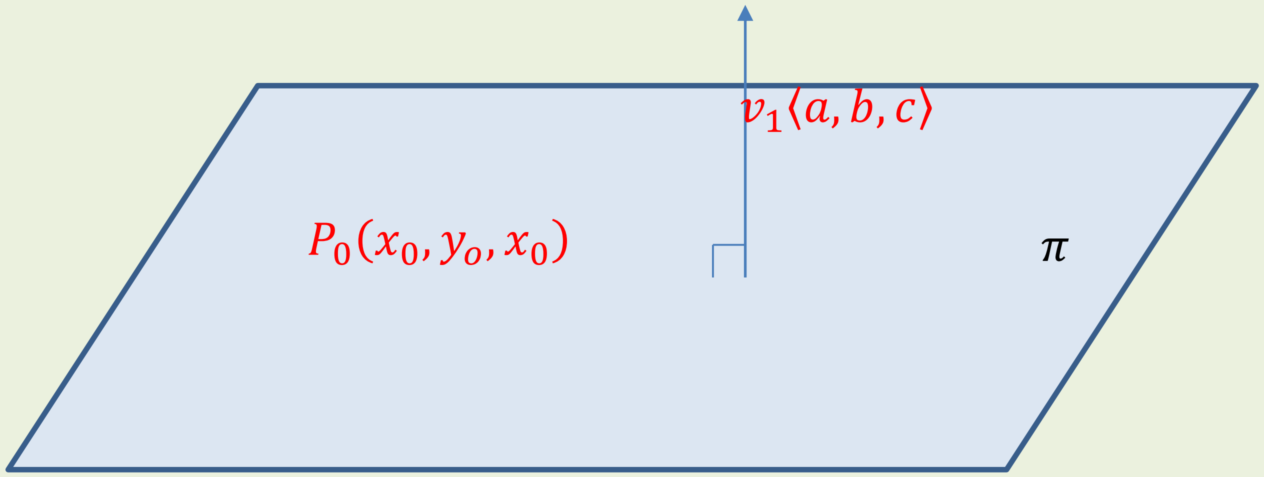
5z -5 =0

5z= 5

z=1

P(0,0,1)

Ejercicio 5



Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P_0(1,1,-1)$ y es perpendicular al vector $v_1=\langle 3,2,1\rangle$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

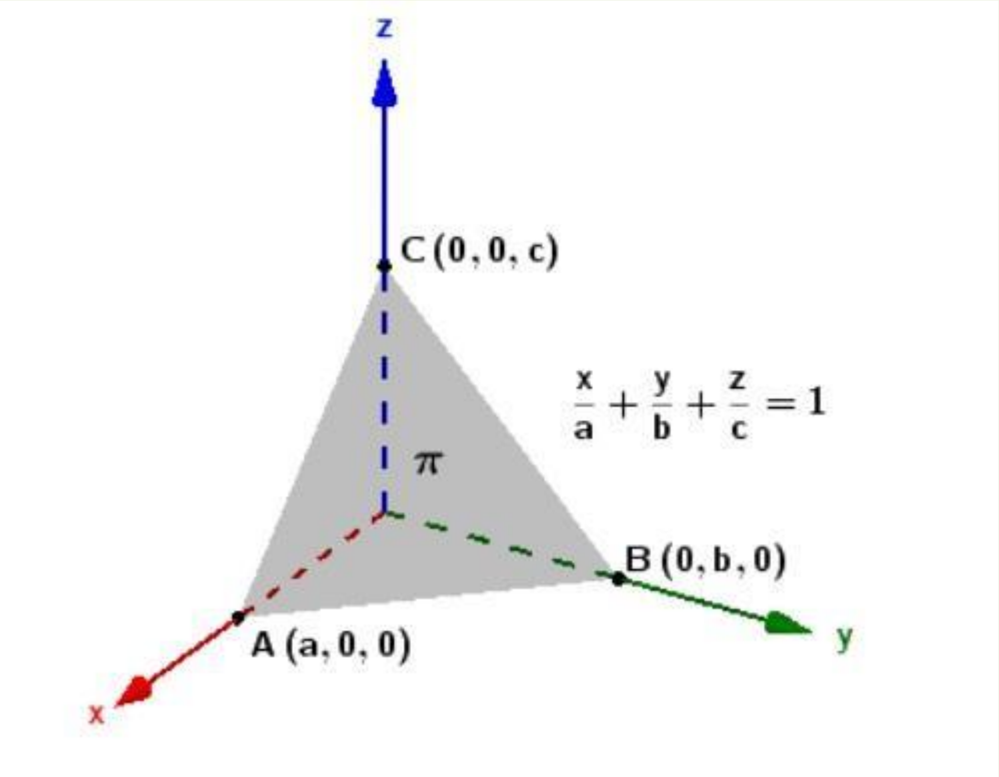
$v_1\langle 3,2,1\rangle$ =N$\langle 3,2,1\rangle$

(a,b,c)

$$a(x-1)+b(y-1)+c(z-(-1))=0$$

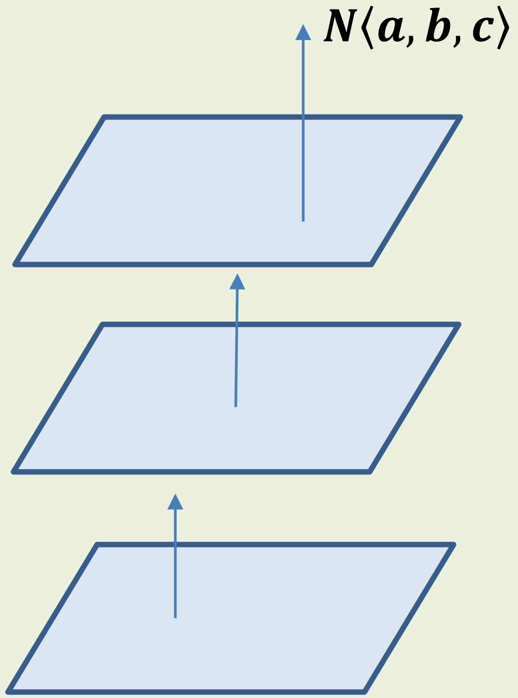
Ecuación segmentaria: corta a los ejes en 3 puntos

Un plano π no paralelo a ninguno de los tres ejes, ni al los planos cartesianos y que no pasa por el origen, corta a los ejes en tres puntos.



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Haz de planos paralelos



Todos los planos que son paralelos entres si tienen el mismo vector Normal (o un vector Normal múltiplo). Su ecuación se diferencia en el término independiente.

$ax + by + cz = d$ d es diferente para cada plano

Ejercicio 6

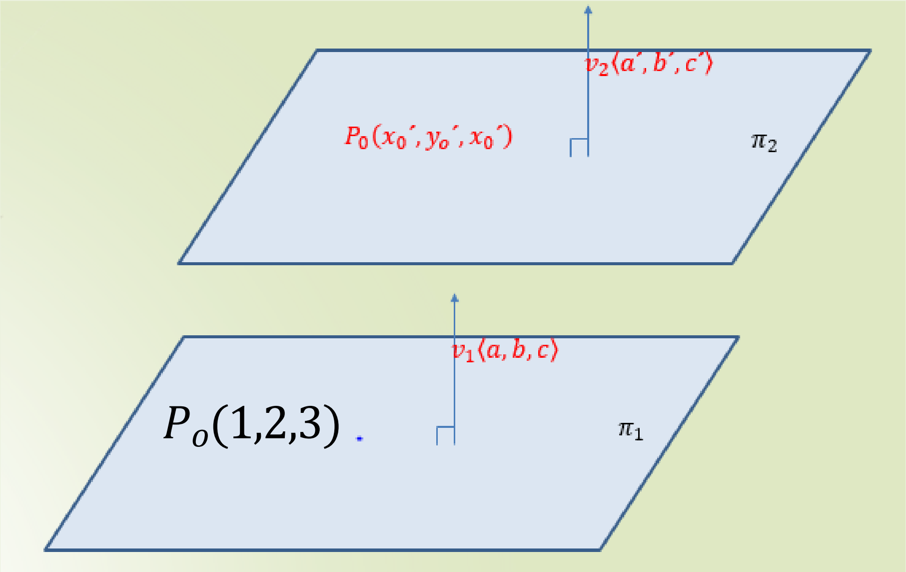
Hallar la ecuación analítica del plano que pasa por el punto $P_o(1,2,3)$ y es paralelo al $plano \quad 3x - 5y + z = 0.$

Primero que todo debemos hacer un dibujo y especificar el ejercicio.

Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto $P_o(1,2,3)$ y es paralelo al $plano$ π_2 con ecuación $3x - 5y + z = 0$.

$\pi_1 \parallel \pi_2$

$v_1 \parallel v_2$



$N_2\langle 3, -5, 1\rangle$

$N_1 = N_2 = \langle 3, -5, 1\rangle$

El vector $v_1 \parallel v_2$. Por tanto, el vector v_2 es normal también al plano π_1, sirve de vector normal al plano , $N_1 = N_2 = \langle 3, -5,1\rangle$

π_1 $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)=0$

π_1 $3(x - 1) -5(y - 2) + 1(z -3)=0$

Ejercicio 7 para resolver

Hallar las ecuaciones analítica e implícita del plano que pasa por el punto $P_o(1,1,2)$ y es paralelo al $plano\ \ x - 3y + 4z = 0.$

Ejercicio 8

Hallar las ecuaciones analítica e implícita del plano que pasa por el punto $P_o(1,1,1)$ y es paralelo al $plano$ $2x - 3y + 4z = 0$.

El vector normal es el mismo $N\langle 2, -3,4\rangle$ por ser paralelos los dos plano.

Aplicamos la ecuación analítica del plano para un punto:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)=0$$

$$2(x - 1) - 3(y - 1) + 4(z - 1) = 0$$

$$2x - 2 - 3y + 3 + 4z - 4 = 0$$

$$2x - 3y + 4z - 2 + 3 - 4 = 0$$

$$2x - 3y + 4z - 3 = 0$$

$$2x - 3y + 4z = 3$$

Ejercicio 9

Hallar la ecuación paramétrica, analítica e implícita del plano dados los 3 puntos siguientes:

A(2,-4,6), B(-2,1,3), C(0,-2,2)

Recordar que si se tienen dos puntos con sus coordenadas, se puede hallar un vector que corresponde a esos dos puntos, restando simplemente sus coordenadas.

También recordar que si se tienen dos vectores y quiero hallar un tercer vector perpendicular a los dos vectores, hallo el producto cruz (producto vectorial) y este me da el vector perpendicular a los dos.

A(2,-2,3), B(-2,1,6), C(0,-4,2)

Obtenemos 2 vectores no paralelos y con el punto hallamos la ecuación.

$$AB\langle -2-2, 1-(-2), 6-3\rangle$$

$$\mathbf{AB}\langle \mathbf{-4},\ \ \mathbf{3},\ \ \mathbf{3}\rangle$$
$$\mathbf{AC}\langle \mathbf{-2}, \mathbf{-2}, \mathbf{-1}\rangle$$

Compruebe que los vectores AB y AC no son paralelos

Un punto del plano

$$\overset{x_0\ \ y_0\ \ z_0}{A(2,-2,3)} = A\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array}$$

Primer vector

$$\overrightarrow{AB}\langle \overset{x_1}{-4}, \overset{y_1}{3}, \overset{z_1}{3}\rangle = \overrightarrow{AB}\left\langle \begin{matrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{matrix} \right\rangle \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{array}$$

Segundo vector

$$\overrightarrow{AC}\langle \overset{x_2}{-2}, \overset{y_2}{-2}, \overset{z_2}{-1}\rangle \qquad \overrightarrow{AC}\left\langle \begin{matrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{matrix} \right\rangle \begin{array}{l} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = x_0 + \alpha x_1 + x_2\beta \\ y = y_0 + \alpha y_1 + y_2\beta \\ z = z_0 + \alpha z_1 + z_2\beta \end{array} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + (-4)\alpha + (-2)\beta \\ y = -2 + 3\alpha + (-2)\beta \\ z = 3 + 3\alpha + (-1)\beta \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 4\alpha - 2\beta \\ y = -2 + 3\alpha - 2\beta \\ z = 3 + 3\alpha - \beta \end{array} \right.$$

Para hallar la ecuación analítica, tomamos los dos vectores no paralelos hallados, se encuentra el vector perpendicular a ellos ($\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$) y con este vector y uno de los puntos se ensambla la ecuación analítica.

A(2,-2,3)

$$\mathbf{AB}\langle -\mathbf{4},\ \ \mathbf{3},\ \ \ \mathbf{3}\rangle$$
$$\mathbf{AC}\langle -\mathbf{2}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1}\rangle$$

A(2,-2,3)

$$\mathbf{AB}\langle -4,\quad 3,\quad 3\rangle$$
$$\mathbf{AC}\langle -2, -2, -1\rangle$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -4, & 3, & 3 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{i}(-3+6) - \boldsymbol{j}(4+6) + k(8+6)$$

$$\boldsymbol{i}(3) - \boldsymbol{j}(10) + k(14)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \langle 3, -10, 14\rangle$$

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{x_0} \quad \boldsymbol{y_0} \quad \boldsymbol{z_0} \\ \mathrm{A}(2,-2,3) \end{array}$$

$$N_1\langle 3, -10, 14\rangle$$

$$a \quad b \quad c$$

Este es el vector normal al plano π_1, con este y el punto A(2,-2,3) hallamos la ecuación analítica del plano.

$$a(x-x_0)+\mathrm{b}(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$3(x-2)-10(y+2)+14(z-3)=0$$

$$3(x-2)-10(y+2)+14(z-3)=0$$

$$3x-10y+14z-68=0$$

Ejercicio 10

Hallar la ecuación analítica del plano dada la ecuación de una recta y un punto P(-1,2,1).

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}$$

Debemos verificar que el punto P_0(-1,2,3) no está en la recta. Esto se logra reemplazando las coordenadas del punto en la ecuación que nos dieron de la recta, si no se cumple la igualdad, el punto es externo.

$$\frac{(x-1)}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}$$

$$\frac{-1-1}{3} \neq \frac{2-2}{-4} \neq \frac{3-3}{2}$$ → El punto es externo a la recta

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}$$

Un punto lo podemos extraer directamente de la ecuación de la recta : P(1,2,3)

El vector $v_1\langle 3,4,2\rangle$ director de la recta, también es un vector del plano.

Tenemos un punto $P_0(1,2,3)$ de la recta y por tanto del plano.
También tenemos el punto P(-1,2,1) que nos dieron y que hace parte del plano.

Falta hallar un segundo vector P_0P con estos puntos.

$$P_0\mathrm{P}\,\langle -1-1,\ 2-2,\ \ 1-3\rangle$$
$$P_0\mathrm{P}\,\langle -2,\ 0,\ -2\rangle$$

Y con estos dos vectores hallo el vector normal al plano mediante $v_1 \times P_0\mathrm{P}$.

$$v_1\langle 3,4,2\rangle \times P_0\mathrm{P}\ \langle -2, 0, -2\rangle$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$i(-8) - j(-6-(-8)), k(0-(-8)=$$

$$\boldsymbol{-8i + 2\,j + 8k}$$

Lo que implica que los vectores v_1 y $P_0\mathrm{P}$ no son perpendiculares.

El vector $\boldsymbol{-8i + 2\,j + 8k}$ es normal al plano.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$-8(x - (-1) + 2(y - 2) + 8(z - 1) = 0$$

Ejercicio 11

50

Hallar la ecuación del plano dadas 2 rectas que pertenecen al plano.

$$\frac{-2+x}{2}=\frac{-y+1}{-2}=\frac{1+z}{3} \qquad \frac{x-2}{1}=\frac{1-y}{-1}=\frac{z+3}{1.5}$$

$$\frac{-2+x}{2}=\frac{-y+1}{-2}=\frac{1+z}{3}$$

$$\frac{x-2}{1}=\frac{1-y}{-1}=\frac{z+3}{1.5}$$

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-(-1)}{3}$$

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-(-3)}{1.5}$$

$P_0(2,1,-1)$

$v_1\langle 2,2,3\rangle$

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-(-1)}{3}$$

$P_0(2,1,-3)$

$v_2\langle 1,1,1.5\rangle$

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-(-3)}{1.5}$$

Probar que las rectas son paralelas pero no coincidentes

Las rectas no son coincidentes pero son paralelas, ¿por qué? ¿cómo son los vectores $v_1\langle 2,2,3\rangle$ y $v_2\langle 1,1,1.5\rangle$?

Si las rectas son coincidentes, los puntos de una serán también de la otra. Demuestre que el punto $P_0(2,1,-3)$ de la segunda recta no es de la primera.

Ejercicio 12

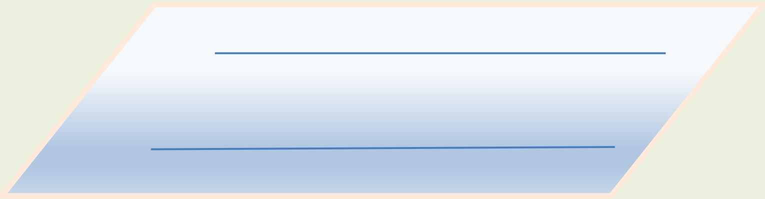
Hallar las ecuaciones de un plano conocidas dos rectas paralelas

l_1

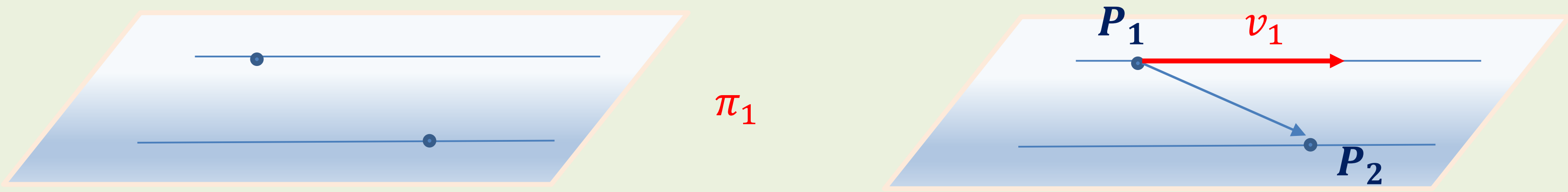
$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}$$

l_2

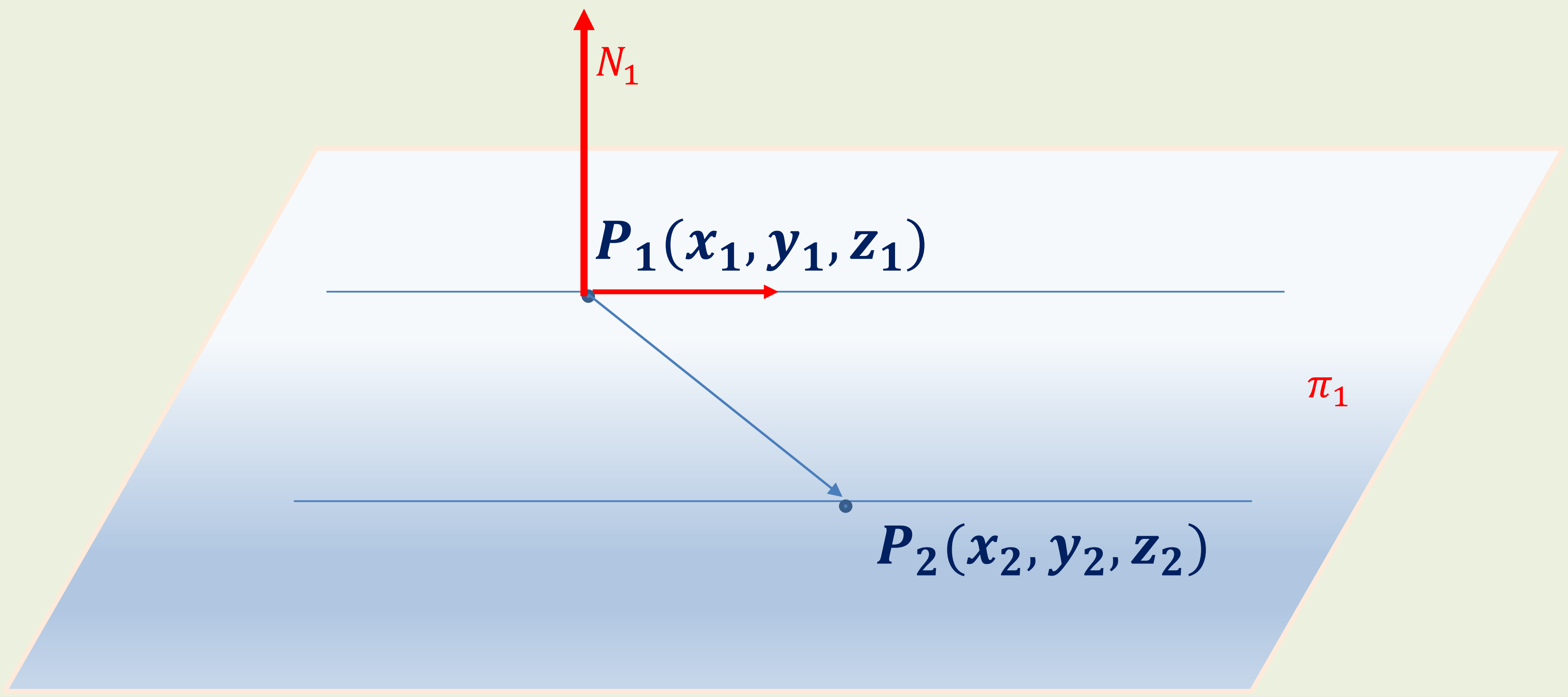
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3)}{1.5}$$



Como las rectas son paralelas no podemos emplear el producto vectorial para hallar el vector normal al plano (¿por que?).



Con dos puntos conocidos de las 2 rectas se halla un vector $\boldsymbol{P_1P_2}$. Con uno de los vectores directores y el vector hallado, se halla el vector normal del plano que contiene a las dos rectas paralelas. Y con estos elementos de halla la ecuación o ecuaciones.



N_1
$P_1(x_1, y_1, z_1)$
π_1
$P_2(x_2, y_2, z_2)$

l_1

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}$$

l_2

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3)}{1.5}$$

Extraemos un punto de la recta l_1: $P_0\ (2, 1, -1)$

Extraemos un punto de la recta l_2: $P_0(2,\ 1, -3)$

Hallamos el vector v_3 entre estos dos puntos $\boldsymbol{v_3}\langle\mathbf{0}, \mathbf{0}, -\mathbf{2}\rangle$

Con uno de los vectores de la recta, por ejemplo $\boldsymbol{v_1\langle 2, 2, 3\rangle}$ y el vector hallado $\boldsymbol{v_3\langle 0, 0, -2\rangle}$, encontramos $v_1{\times}v_3$

$$v_1\langle 2,2,3\rangle{\times}v_3\langle 0,0,-2\rangle = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$v_1\langle 2,2,3\rangle \times v_3\langle 0,0,-2\rangle = i(-4) - j(-4) + k(0) = -4i + 4j + k(0)$$

La ecuación analítica del plano es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$-4(x - x_0) + 4(y - y_0) + 0(z - z_0) = 0$$

$Cualquiera\ de\ los\ puntos\ \ P_0(2,1,-1)\ y\ \ P_0(2,1,-3)$ servirían

$$-4(x - 2) + 4(y - 1) + 0(z - (-1)) = 0$$

$$\mathbf{-4(x - 2) + 4(y - 1) = 0}$$

Ejercicio 13. Resolver

Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P(2, −1, 3) y contiene a la recta determinada por los planos:

$$\text{Recta r:}\quad \begin{cases} x - y + z = \;\;\, 2 & \pi_2 \\ 2x + y - z = -1 & \pi_3 \end{cases}$$

Todo se reduce a hallar la ecuación r como la intersección de los planos π_2 y π_3

Hallar un punto del plano a partir de la ecuación de coordenadas

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0}) + \alpha(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_1},\boldsymbol{z_1}) + \beta(\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{y_2},\boldsymbol{z_2})$$

Si conocemos P(1,2,3), $v_1\langle 2,3,4\rangle$, $v_2\,\langle 3,4,6\rangle$

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}) + \alpha(2,3,4,) + \beta(3,4,6)$$

Si $\alpha = 1$ $\quad\beta = 2$

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}) + (2,3,4,) + 2(3,4,6)$$

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3},\mathbf{2}+\mathbf{3}+\mathbf{4},\mathbf{3}+\mathbf{4}+\mathbf{6} = (\mathbf{6},\mathbf{9},\mathbf{13})$$

Hallar un vector posición a partir de la ecuación vectorial

Si hacemos lo mismos en la ecuación vectorial obtendríamos, no un punto sino un vector del plano

$$\mathbf{OP}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle = \mathbf{OA}\langle \boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}\rangle + \alpha\langle \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1}\rangle + \beta\langle \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2}\rangle$$

$$\mathbf{P}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle = \langle \mathbf{6}, \mathbf{9}, \mathbf{13}\rangle$$

Bibliografía

Paniagua, Juan. Pérez, John. Geometría Vectorial y analítica. 2017. Grossman Stanley, Septima Edición, 2012.

HEDIMA. **Universidad de Extremadura España.** Herramientas digitales de auto-aprendizaje para Matememáticas. HEDIMA, Grupo de innovación didáctica Departamento de Matemáticas**.**
http://matematicas.unex.es/~pjimenez/hedima/12espacio.pdf

Gonzalez F.J. (2004). Proyecto MaTEX. UNICAN. Rectas y Planos.
https://personales.unican.es/gonzaleof/Ciencias_2/rectasC2.pdf