Ecuaciones de Rectas II

Diapositivas realizadas por
Efrén Giraldo T. MSc.
Su único objetivo es facilitar el estudio.

❖MIS VALORES

Entrega

Transparencia

Simplicidad

y Persistencia

❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema.

Servir a las personas.

Determinación de la ecuación de una recta dados dos puntos.

Procedimiento:

1. Obtener el vector que hay entre los dos puntos y este será el vector director de la recta.

2. Con el vector director y uno de los puntos, se determina la ecuación de la recta.

Si se tienen dos puntos de una recta $P_1(3,4,2) \quad y \quad P_2(6,8,10)$:
el vector director de la recta $\quad P_2P_1 \quad$ es:

$$P_2P_1\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle = \langle 3,4,8\rangle$$

Y la ecuación simétrica de la recta es:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-2}{8}$$

Hallar las ecuaciones paramétricas de las rectas

Ejercicio # 5

Ejercicio # 6

Ejercicio # 7

Ejercicio # 8 (efrenmatematica.jimdo.com)

Hallar las ecuaciones: vectorial, paramétrica y simétrica de la recta que tiene el punto P(3,4,5) y el vector director $v\langle 1,2,3\rangle$.

E. Vectorial

$$OQ\langle x, y, z\rangle = OP_0\left\langle x_o, y_o, z_o\right\rangle + \alpha . v\langle x_1, y_1, z_1\rangle$$

E. Parámétrica

$$x = x_0 + \alpha x_1$$
$$y = y_0 + \alpha y_1$$
$$z = z_0 + \alpha z_1$$

E. Simétrica

$$\propto = \frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1}$$

$$\overset{x_o, y_o, z_o}{} \qquad \overset{x_1,\ y_1, z_1}{}$$

El punto P(3,4,5) y $v\langle 1,2,3\rangle$.

$$\text{OQ}\langle x, y, z\rangle = \text{O}P_0\langle x_{o,} y_{o,} z_o\rangle + \alpha.\, v\langle x_1,\ y_1, z_1\rangle \longrightarrow \text{OQ}\langle x, y, z\rangle = \text{O}P_0\langle 3, 4{,}5\ \rangle + \alpha.\, v\langle 1{,}2{,}3\rangle$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha x_1 \\ y &= y_0 + \alpha y_1 \\ z &= z_0 + \alpha z_1 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x &= 3 + \alpha\ 1 \\ y &= 4 + \alpha\ 2 \\ z &= 5 + \alpha\ 3 \end{aligned}$$

$$\frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1} \longrightarrow \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 4}{2} = \frac{z - 5}{3}$$

Ejercicio

Dada la siguiente ecuación hallar el punto y el vector director:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{x-4}{-2}$$

Observamos que está estandarizada

$$\frac{x - \overset{x_0}{1}}{\underset{x_1}{2}} = \frac{y - \overset{y_0}{2}}{\underset{y_1}{3}} = \frac{x - \overset{z_0}{4}}{\underset{z_1}{-2}}$$

$$\frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1}$$

$P_o(x_o, y_o, z_o) = (1,2,4)$ $\quad$ $v\langle x_1, y_1, z_1\rangle = \langle 2, 3, -2\rangle$

Ecuación Simétrica Estandarizada (ST)

Para que una ecuación simétrica este estandarizada debe cumplir:

1. Que los coeficientes de la x, y, z deben de ser +1
2. El signo de la mitad debe ser –

Si aparece un signo + en la mitad se convierte en dos signos menos: $+ = -(-)$

$$\frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1}$$

Ejercicio

Dada la siguiente ecuación hallar el punto y el vector director:

$$\frac{3x-1}{-2}=\frac{-y-1}{-3}=\frac{-5z-2}{2}$$

Estandarizada

Expresión en x:

$$\frac{3x-1}{-2}$$

$\div$ *entre* 3 todos los términos de la expresión

$$\frac{\frac{3x}{3}-\frac{1}{3}}{\frac{-2}{3}}=\frac{x-0.33}{-0.66}$$

Expresión en y:

$$\frac{-y-1}{-3}$$

$\div\ entre\ \ -1$

$$\frac{\frac{-y}{-1}-\frac{1}{-1}}{\frac{-3}{-1}} =$$

$$= \frac{y+1}{3}$$

$+= -(-)$

$$\frac{y-(-1)}{3}$$

Expresión en z:

$$\frac{-5z-2}{-2}$$

$\div\ entre\ \ -5$

$$\frac{\frac{-5z}{-5}-\frac{2}{-5}}{\frac{-2}{-5}}$$

$$=\frac{z+0.4}{0.4}$$

$+=-(-)$

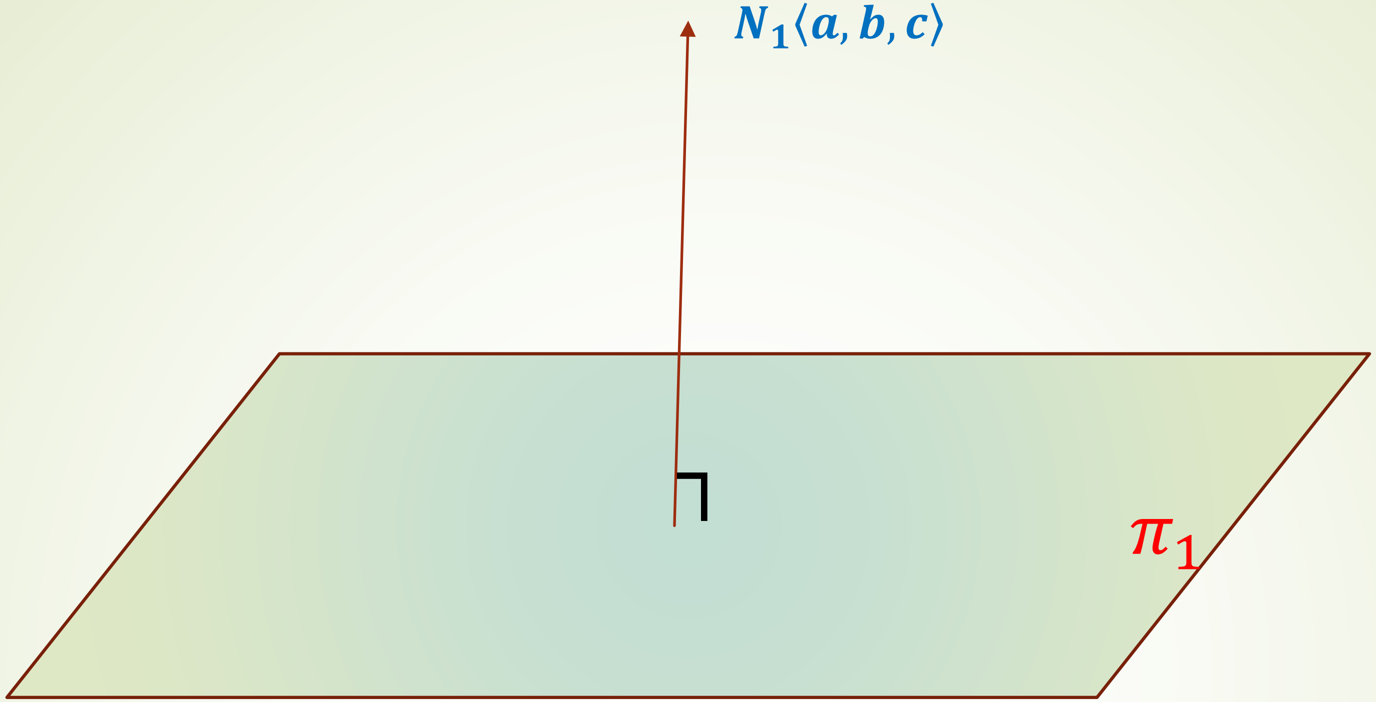
$$=\frac{z-(-0.4)}{0.4}$$

$$\alpha = \frac{x-0.33}{-0.66} = \frac{y-(-1)}{3} = \frac{z-(-0.4)}{0.4}$$

$$P_o\left(x_{o,} y_{o,} z_o\right) = (0.33, -1, -0.4)$$

$$v\langle x_1, \ y_1, z_1\rangle = \langle -0.66, 3, 0.4\rangle$$

Ecuación implícita, General o Cartesiana del plano



Un plano π_1 se identifica con su vector normal (perpendicular).

Si las coordenadas del vector normal son a,b,c. La ecuación del plano es:

$$ax + by + cz = d$$

La ecuación de un plano es:

$$ax + by \quad + cz = d$$

También denominada Ecuación implícita del plano, Cartesiana o General.

a, b, c son las coordenadas del vector perpendicular al plano, también denominado vector normal al plano.

d es una constante

Si sabemos que el vector $N_1\langle 3,7,4\rangle$ es perpendicular al plano π_1, su ecuación será:

$$\pi_1 \qquad 3x + 7y + 4z + d = 0$$

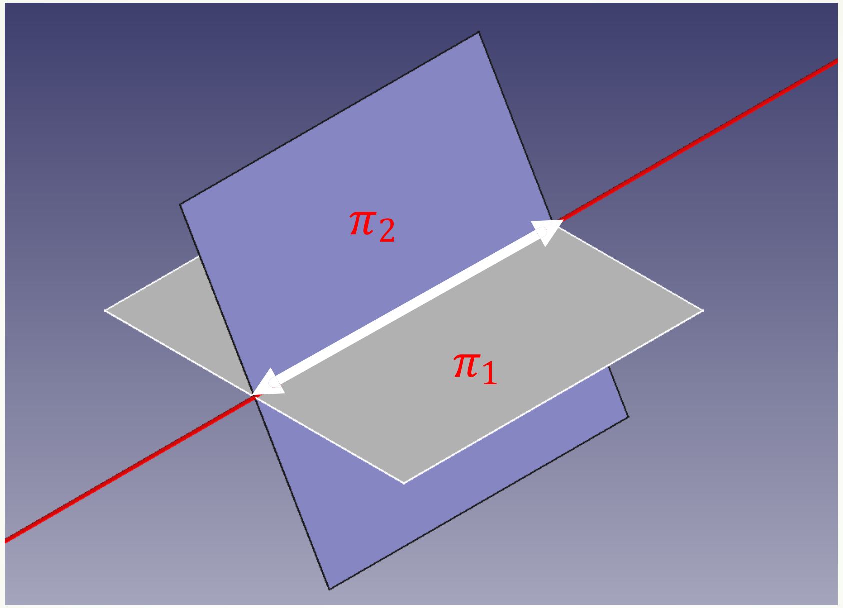
A su vez, si tenemos la ecuación del plano:

$$\pi_1 \qquad 0.3x - 4y - 5z + d = 0$$

Podemos decir que su vector normal es:

$$N_1\langle 0.3, -4, -5\rangle$$

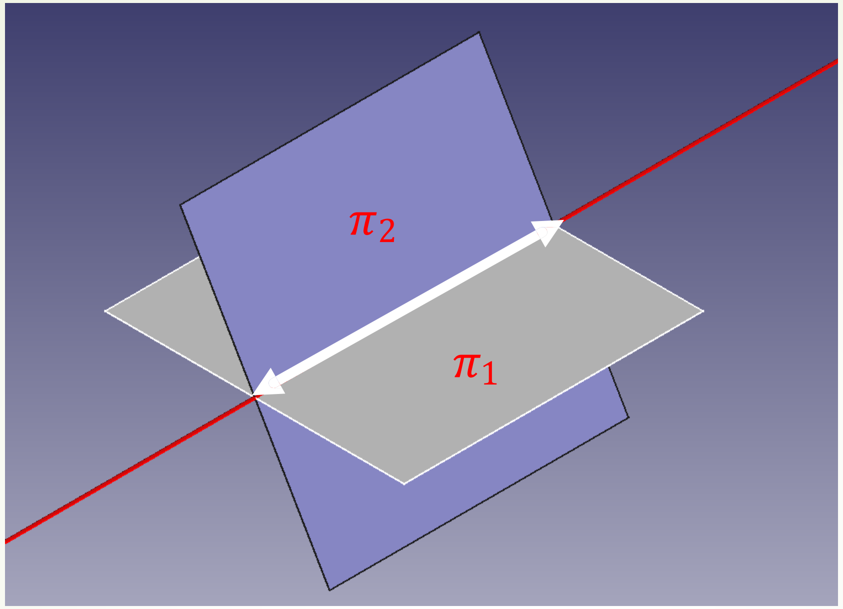
Ecuación de la recta como la intersección de 2 planos π_1, π_2 no paralelos



Dos planos no paralelos π_1 y π_2 siempre se interceptan en una línea recta.

Por tanto, las ecuaciones implícitas de los dos planos expresan la ecuación de una línea recta.

IMPORTANTE



Línea recta de intersección

$$\text{recta}\begin{cases} \boldsymbol{\pi_1} \rightarrow \boldsymbol{a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0} \\ \boldsymbol{\pi_2} \rightarrow \boldsymbol{a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0} \end{cases}$$

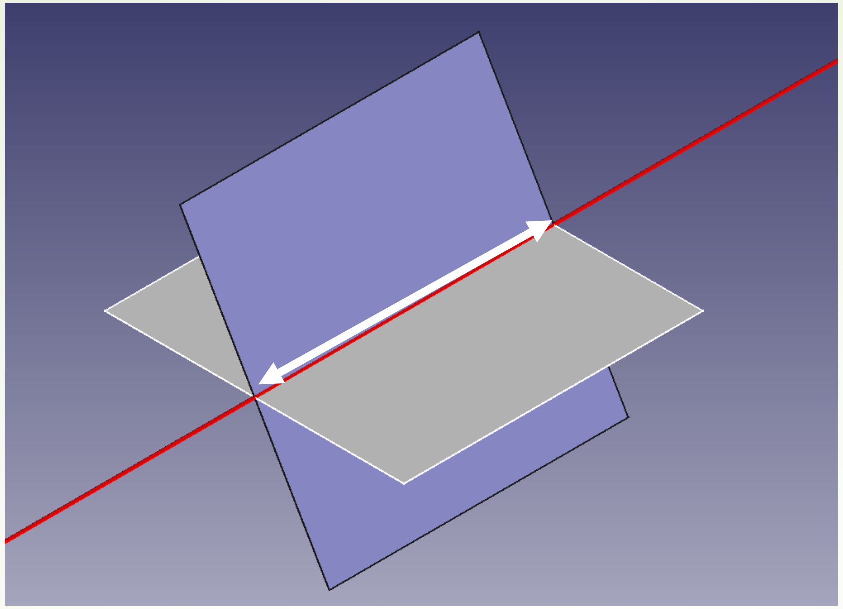
Ecuación de una línea recta que es intersección de 2 planos.

Si dos planos se interceptan (esto sucede cuando no son ‖s) lo hacen en una línea recta, y esta línea es común a ambos planos.

Ecuación de la recta como la intersección de 2 planos π_1, π_2 no paralelos

$$\text{Recta:} \begin{cases} \boldsymbol{a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0} & \pi_1 \\ \boldsymbol{a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0} & \pi_2 \end{cases}$$

No obstante, esta forma en más un poco abstracta. Pero a partir de estas dos ecuaciones, podemos hallar el vector director y un punto para llevarla a la forma vectorial , paramétrica o simétrica.

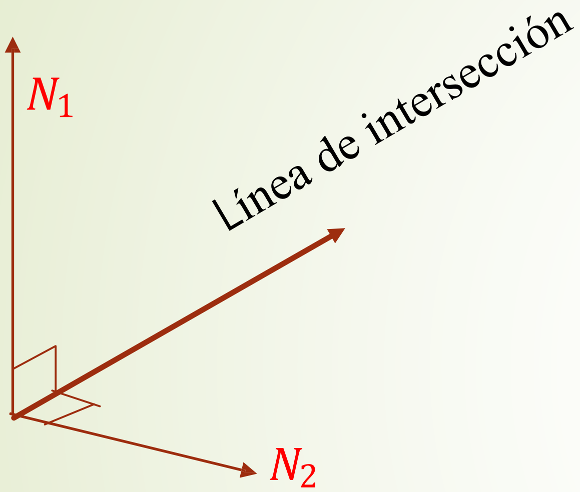


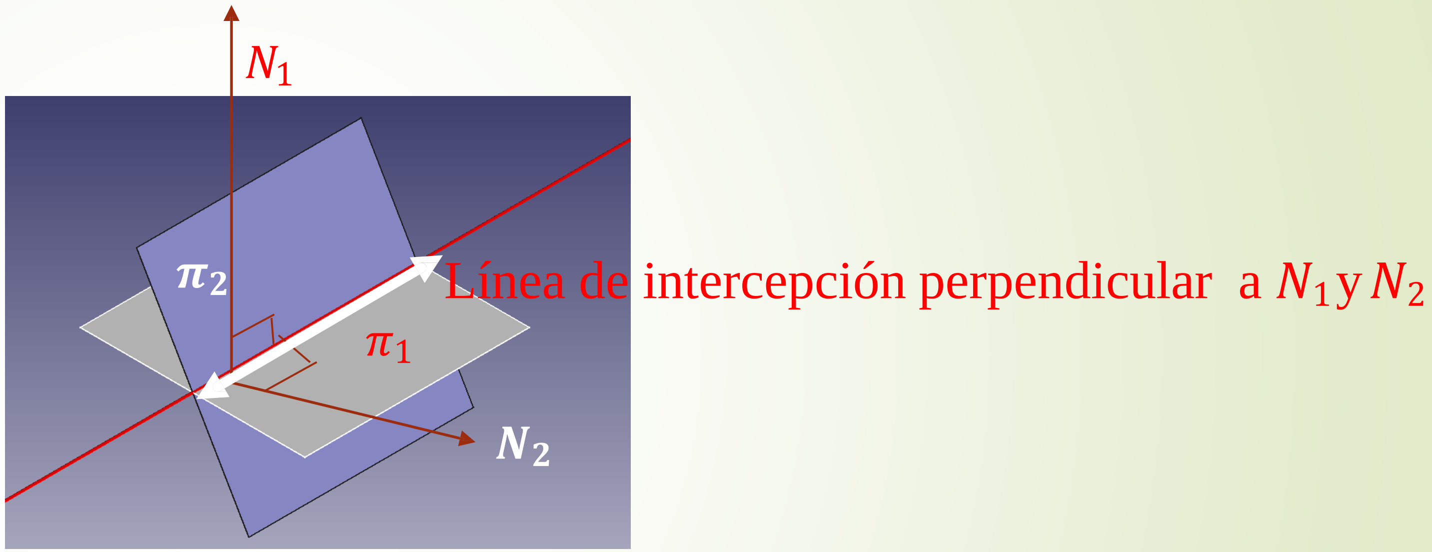
Hallar la ecuación de la recta de intersección de dos planos π_1 y π_2:

1. ***Se encuentra el vector director por medio de*** $N_1 \times N_2$
2. ***Se halla un punto de la recta de intersección.***

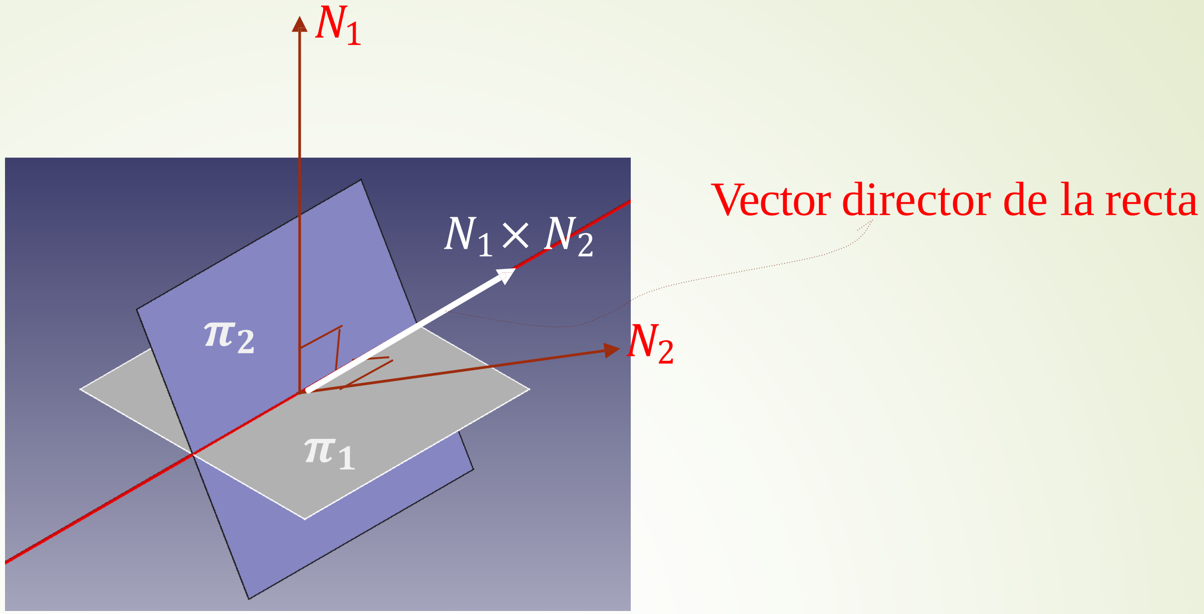
ELABORÓ MSc. EFRÉN GIRALDO T.

Hallar el vector director de la recta de intercepción de dos planos



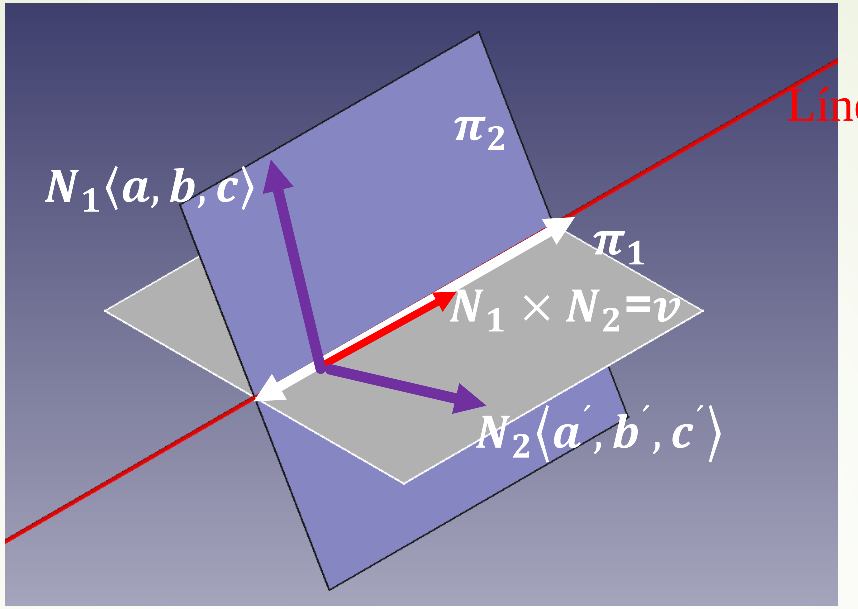


De la geometría clásica se conoce que **la línea de intersección es perpendicular** a la vez a los **2 vectores normales** a **cada plano. O sea, que los dos vectores** N_1 y N_2 y la recta de intersección son perpendiculares.



Si se realiza el producto vectorial entre los vectores N_1 y N_2 se crea un nuevo vector $N_1 \times N_2$ perpendicular a los vectores N_1 y N_2(propiedad del producto vectorial).
Por tanto:
El vector $N_1 \times N_2$ también es paralelo a la recta de intersección (geometría clásica).

Por consiguiente, $N_1 \times N_2$ es el vector director de la línea de intersección de los 2 planos.



Línea recta de intersección de los dos planos

$N_1\langle a, b, c\rangle$

$$\text{recta } r \equiv \begin{cases} ax + by + cz = d & \pi_1 \\ a'x + b'y + c'z = d' & \pi_2 \end{cases}$$

$N_2\langle a', b', c'\rangle$

Importante

El vector director de la recta de intercepción de 2 planos π_1 y π_2 se halla por medio del producto vectorial $N_1 \times N_2$ de los 2 vectores normales a los 2 planos

Hallar el vector director de la línea de intersección de los planos $\boldsymbol{\pi_1}$ y $\boldsymbol{\pi}_2$

$$3x + 5y + 4z + 1 = 0 \qquad \pi_1 \rightarrow N_1\langle 3,5,4\rangle$$

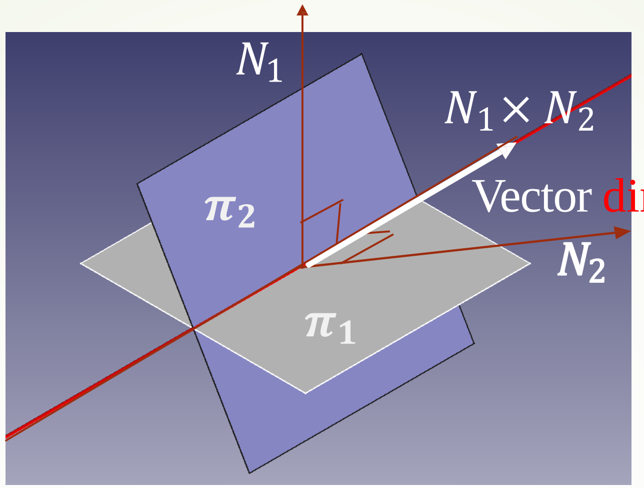
$$2x + 3y + 5z + 2 = 0 \qquad \pi_2 \rightarrow N_2\langle 2,3,5\rangle$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$i(25-12) - j(15-8) + k(9-10) =$$

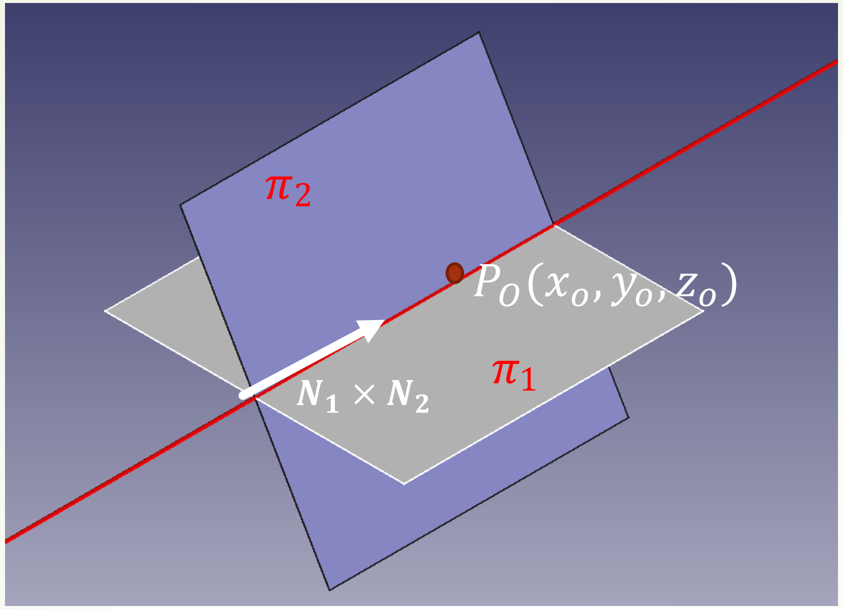
$$i(13) - j(7) - k$$

$$\langle 13, -7, -1\rangle$$



$$13i - 7j - k$$

Este vector $\langle 13, -7, -1 \rangle$ es el vector director de la línea de intersección de los planos $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{1}}$ y $\boldsymbol{\pi}_2$ y es perpendicular a los vectores $N_1\langle 3,5,4 \rangle$, $N_2\langle 2,3,5 \rangle$.



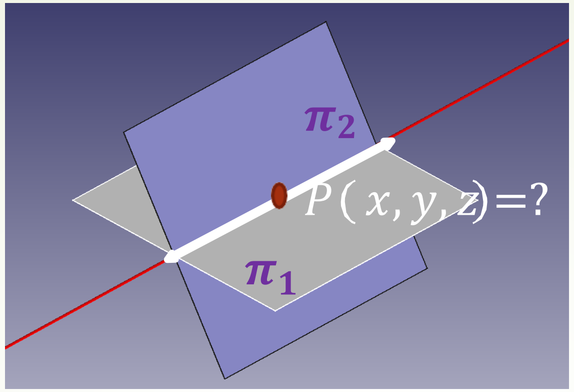
Hallar las coordenadas de un punto de la línea de intercepción de dos planos, Cuando se tienen el mismo número de ecuaciones y el mismo número de incógnitas, las soluciones a las ecuaciones de hallan fácilmente como vimos en clase por el método de eliminación.

Resolución de sistemas de ecuaciones donde se tienen más incógnitas que ecuaciones

Cuando se tienen más incógnitas que ecuaciones se debe llevar el sistema a uno donde el número de ecuaciones y de incógnitas sea el mismo.

Por ejemplo si se tienen 2 ecuaciones y 3 incógnitas, le damos el valor a la x de cero, $x = 0$ en las 2 ecuaciones y con esto eliminamos una de las incógnitas y resulta un sistema de 2 ecuaciones y dos incógnitas que ustedes ya saben resolver.

Obviamente que al dar el valor a $x = 0$, ya tenemos el primer valor de x, y luego por eliminación hallaremos los valores de y e z.



Recta r: $\begin{cases} \pi_1 & a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \pi_2 & a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$

$x = 0$

$$\begin{aligned} b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= valor\ 0 \\ y &= valor\ \ y_0 \\ z &= valor\ \ z_0 \end{aligned} \longrightarrow P_0(0, y_0, z_0)$$

Con las coordenadas del punto y el vector director se hallan las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta.

Ejercicio # 9

Hallar las coordenadas de un punto de la recta de intersección de los planos:

$$\text{recta:} \begin{cases} 2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} + 1 = \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\pi_1} \\ 3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + 4\boldsymbol{z} + 2 = \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\pi}2 \end{cases}$$

$2x + 3y + z + 1 = \mathbf{0}$ $\quad \boldsymbol{\pi_1}$ $\quad N_1\langle 2,3,1\rangle$

$3x + 2y + 4z + 2 = \mathbf{0}$ $\quad \boldsymbol{\pi}2$ $\quad N_2\langle 3,2,4\rangle$

Con $N_1\langle 2,3,1\rangle$ y $N_2\langle 3,2,4\rangle$ se forma $N_1 \times N_2$ y se obtiene el vector director y se saca la ecuación paramétrica.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$N_1 \times N_2 = i(12-2) - j(8-3) + k(4-9)$$

$$N_1 \times N_2 \langle 10, -5, -5 \rangle$$

es el vector director de la recta de intercepción de 2 planos π_1 y π_2

$$2x + 3y + z + 1 = \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{\pi_1}$$

$$3x + 2y + 4z + 2 = \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{\pi}2$$

Al hacer x=0 en las dos ecuaciones anteriores resulta

$$3y + z + 1 = \mathbf{0} \qquad (1)$$

$$2y + 4z + 2 = \mathbf{0} \qquad (2)$$

El coeficiente de y en la primera ecuación es 3. El coeficiente de y en la segunda ecuación es 2. Intercambio coeficientes. La primera ecuación la multiplico por (-2), la segunda por 3, por los dos ser positivos., para qu un sigo de contario al otro y se anulen ambos términos.

La primera ecuación la multiplico por (-2)

La segunda por 3.

$$-2.(3y + z + 1 = \mathbf{0})$$

$$3.(2y + 4z + 2 = \mathbf{0})$$

$$-6y - 2z - 2 = \mathbf{0}$$

$$6y + 12z + 6 = \mathbf{0}$$

Realizo la suma.

$$0 + 10z + 4 = 0$$

$$10\,z + 4 = 0$$

$$10\,z = -4$$

Despejo z

$$z = -\frac{4}{10} = -0.4$$

Reemplazo el valor de z= -0.4 en (1) o en (2)

$$2y + 4z + 2 = 0 \quad (2)$$

$$2\boldsymbol{y} + 4(-\,0.4) + 2 = \mathbf{0}$$

2y – 1.6 +2=0

2y + 0.4=0

2y=-0.4

$$y=-\frac{0.4}{2}$$

$$y = -0.2$$

$$\boldsymbol{P_o(0, -0.2, -0.4)}$$

$$2x + 3y + z + 1 = 0 \qquad \pi_1$$

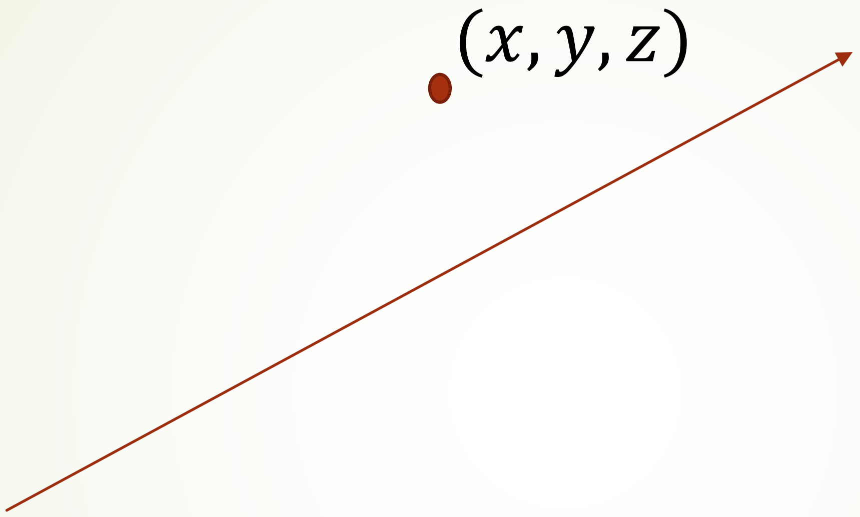
$$3x + 2y + 4z + 2 = 0 \qquad \pi_2$$

$P_o(0, -0.4, -0.2)$ son las coordenadas de un punto de la recta de intersección de los planos. Con este punto y el vector director se hallan las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta de intersección de $\boldsymbol{\pi_1}$ y $\boldsymbol{\pi}_2$

$$\boldsymbol{P_o(0, -0.2, -0.4)}$$
$$v\langle 10, -5, -5\rangle$$

$$\boldsymbol{x = 0 + \alpha 10}$$
$$\boldsymbol{y = -0.2 + \alpha(-5)}$$
$$\boldsymbol{z = -0.4 + \alpha(-5)}$$

Verificar que un punto es externo a una recta.



Esto se logra reemplazando las coordenadas del punto en la ecuación simétrica de la recta; si no se cumple la igualdad, el punto es externo.

Ejercicio # 11

Verifique que el P(-1,2,1) no está dentro de la recta siguiente:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}$$

Verificar que el punto P(-1,1,-3) no está en la recta.

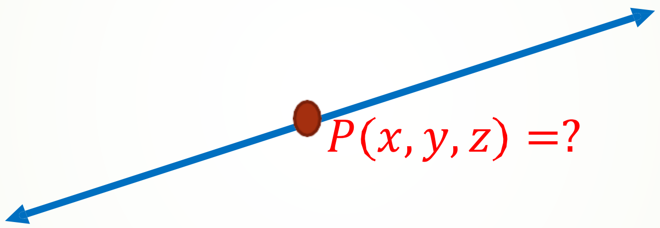
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}$$

$$\frac{-1-1}{3} \quad \frac{1-2}{4} \quad \frac{-3-3}{2}$$

$$\frac{-2}{3} \neq \frac{-1}{4} \neq \frac{-6}{2} \longrightarrow$$ El punto es externo a la recta

Hallar las coordenadas de un punto de una recta

dada la ecuación simétrica de la recta.



Se pasa la ecuación simétrica a paramétrica y ahí se le da un valor al parámetro α y se obtienen la coordenadas del punto

Ejercicio 10

Hallar las coordenadas de un punto que pertenece a una recta, dada la ecuación simétrica de la recta.

$$\alpha = \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}$$

$$x = 1 + 3\alpha$$
$$y = 2 + 4\alpha$$
$$z = 3 + 2\alpha$$

Si $\alpha = 1$

$$x = 1 + 3 = 4$$
$$y = 2 + 4 = 6$$
$$z = 3 + 2 = 5$$

$P(4,6,5)$

Ejercicio # 12

Pasar de la ecuación simétrica a la paramétrica: otra forma

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{4}$$

$$\frac{x-5}{2}=\alpha \longrightarrow x-5=2\alpha \longrightarrow x=5+2\alpha$$

$$\frac{y-3}{3}=\alpha \longrightarrow y-3=3\alpha \longrightarrow y=3+3\alpha$$

$$\frac{z-1}{4}=\alpha \longrightarrow z-1=4\alpha \longrightarrow z=1+4\alpha$$

VIDEOS

http://www.monserrat.proed.unc.edu.ar/pluginfile.php/6906/mod_resource/content/2/Rectas%20alabeadas%20animaci%C3%B3n.mp4

Departamento de Matemáticas Universidad de Extremadura

http://matematicas.unex.es/~pjimenez/hedima/12espacio.pdf

Vectores interactivos en el espacio

https://www.intmath.com/vectors/3d-space-interactive-applet.php

http://galeon.com/jjisach/u-5.pdf