EJERCICIOS DE APLICACIÓN CAPÍTULO1

Conceptos previos

Todo punto que está sobre el eje x, tiene su segunda coordenada cero: P(x,0).

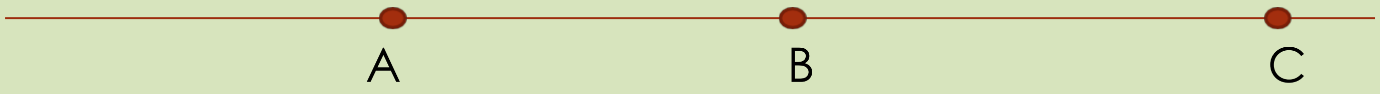
Todo punto que está sobre el eje y, tiene su primera coordenada cero P(0,y).

Equidistar es estar a igual distancia de dos o más puntos.

Trisecar

Si un segmento AB se divide por ejemplo en tercios, significa que se dividió en tres tercios o en tres partes iguales: **se trisecó.** Una parte será 1/3 de AB y la otra será 2/3 de AB. Si se divide en quintos, una parte será 1/5, la otra 4/5 de AB. Si una es 2/5AB la otra es 3/5AB.

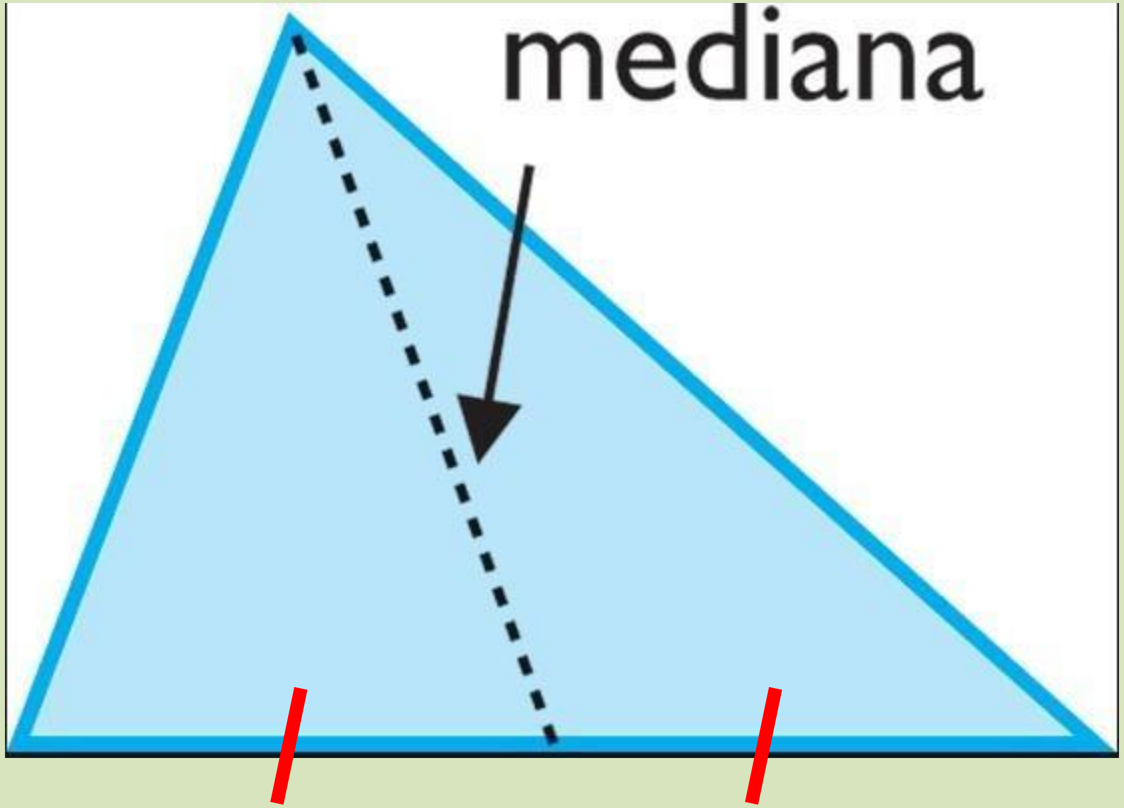
Colinealidad de puntos: puntos alineados



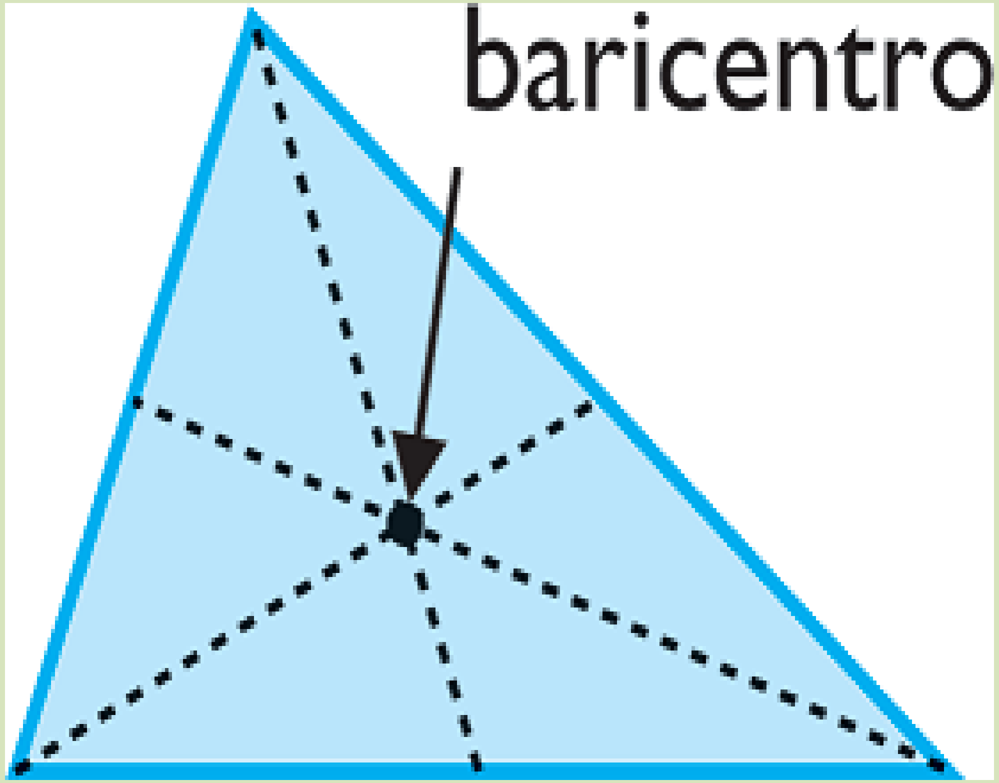
Dados tres puntos, para ver si son colineales, es recomendable primeramente graficarlos.

Después, para comprobar si los tres puntos son colineales, la distancia de los puntos más alejados debe ser igual a la suma de las dos distancias más cortas, es decir, la longitud del segmento más largo que se forma con dos de estos puntos, es igual a la suma de las longitudes de los segmentos más cortos.

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

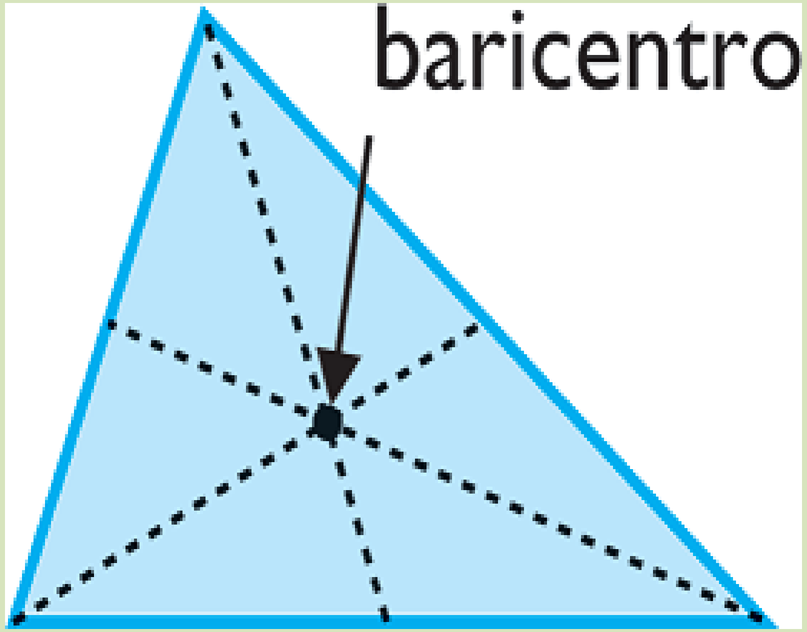


http://matematicasdelhijar.blogspot.com.co/2012/01/mediana-de-un-triangulo.html

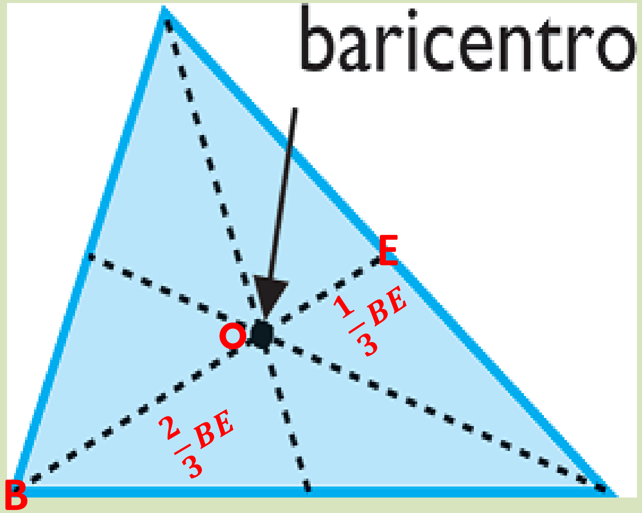


https://www.definicionabc.com/ciencia/baricentro.php

Una *mediana es* el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto en un triángulo. Por tanto, la mediana divide al lado en dos partes iguales.



El **baricentro** (también llamado *centroide*) de un triángulo es el punto de intersección de las medianas de dicho triángulo. Por ello, para representar gráficamente el baricentro debemos dibujar las tres medianas (o al menos dos) y localizar el punto en el que se cortan. Esta figura muestra el baricentro de un triángulo.



El baricentro del triángulo es el punto de cruce entre las medianas. Este punto se encuentra a los 2/3 de la distancia de toda la mediana tomado a partir del vértice (sobre la mediana). O a 1/3 de la longitud tomada desde la mitad del lado opuesto.

$$BO=\frac{2}{3}BE$$

$$OE=\frac{1}{3}BE$$

$$\frac{BO}{OE}=\frac{\frac{2}{3}BE}{\frac{1}{3}BE}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}*\frac{3}{1}=2$$

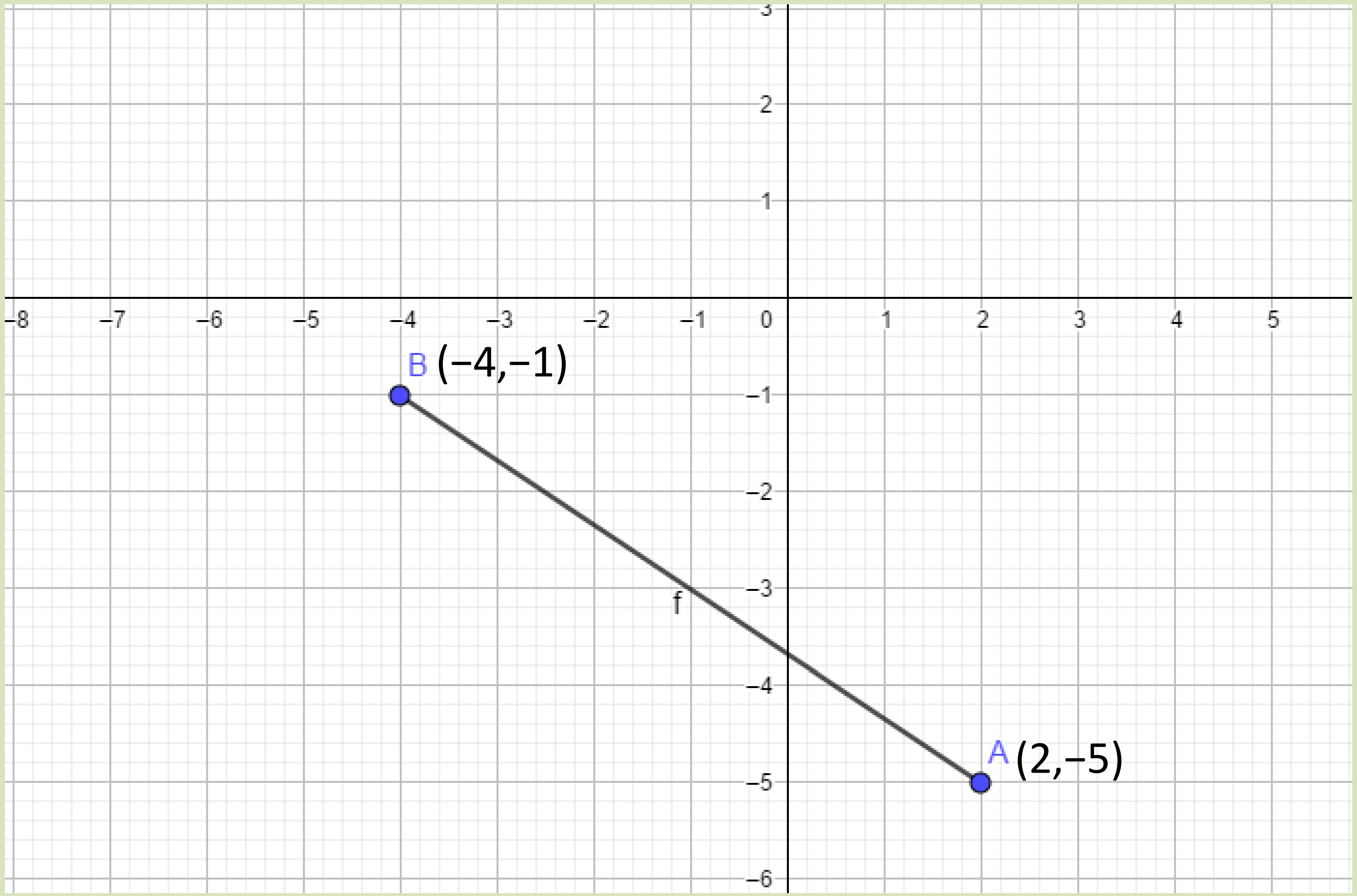
$$\boldsymbol{\frac{BO}{OE}=2}$$

BO= 2OE

O sea, que si se toma como relación el segmento más grande sobre el más pequeño (a partir del vértice), siempre se tendrá una razón igual a 2 para el baricentro. Esto simplifica grandemente este tipo de problemas.

Ejercicio 1

Hallar la distancia entre los puntos $A(2,-5)$ y $B(-4,-1)$.



(Pérez y Paniagua, 2013)

La distancia entre los puntos $A(2,-5)$ y $B(-4,-1)$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{((-4) - (2))^2 + ((-1) - (-5))^2}$$

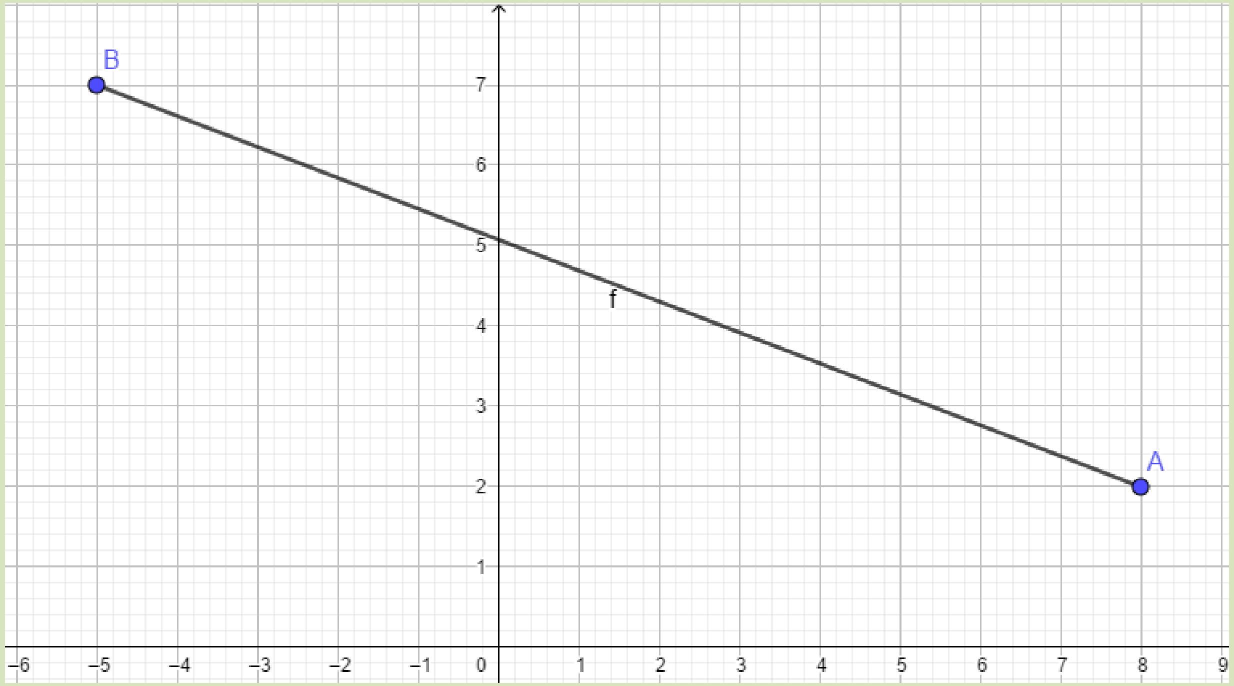
$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + (4)^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{52}$$

$$|\overline{AB}| = 2\sqrt{13}\ unidades$$

(Pérez y Paniagua, 2013)

Ejercicio 2



Ejemplos:

1. Encontrar las coordenadas del punto P que divide al segmento determinado por A(8,2) y B(-5,7) en la razón $r = \dfrac{3}{4}$.

(Pérez y Paniagua, 2013)

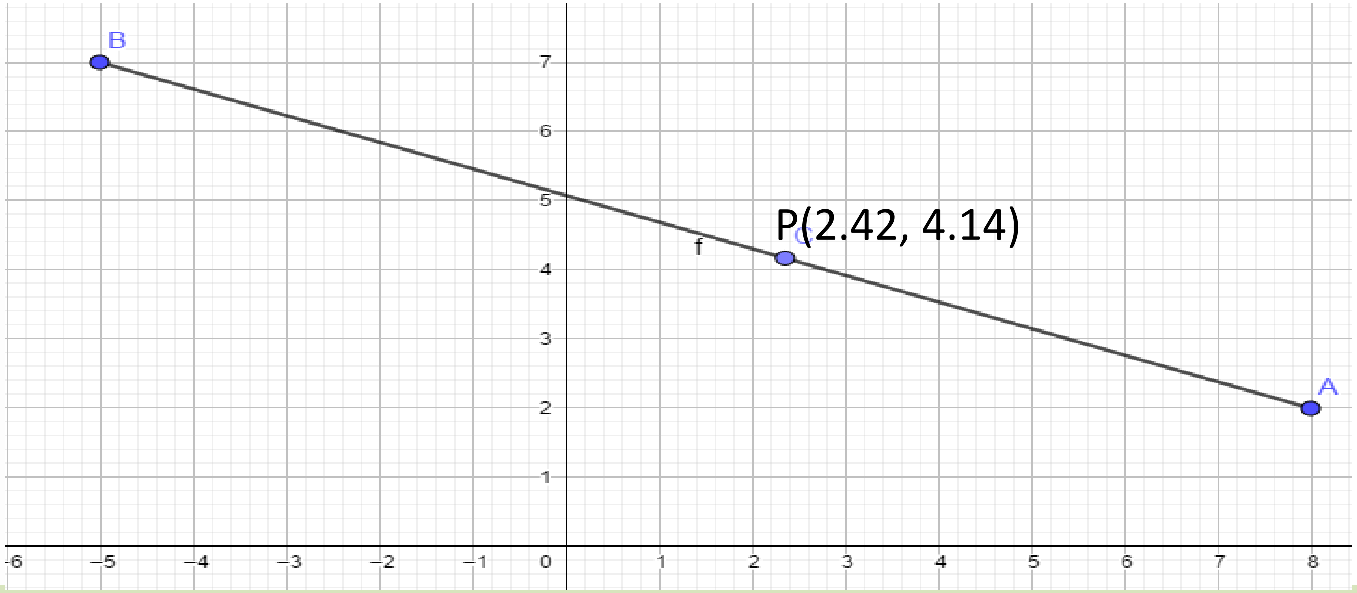
1. Encontrar las coordenadas del punto P que divide al segmento determinado por A(8,2) y B(-5,7) en la razón $r = \frac{3}{4}$.

Al sustituir en, $x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$, $y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$, tenemos:

$$x = \frac{8 + \left(\frac{3}{4}\right)(-5)}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{17}{7} \qquad y = \frac{2 + \left(\frac{3}{4}\right)(7)}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{29}{7}$$

$\therefore$ las coordenadas del punto buscado son $P\left(\frac{17}{7}, \frac{29}{7}\right)$

Al graficar:



(Pérez y Paniagua, 2013)

Ejercicio 3

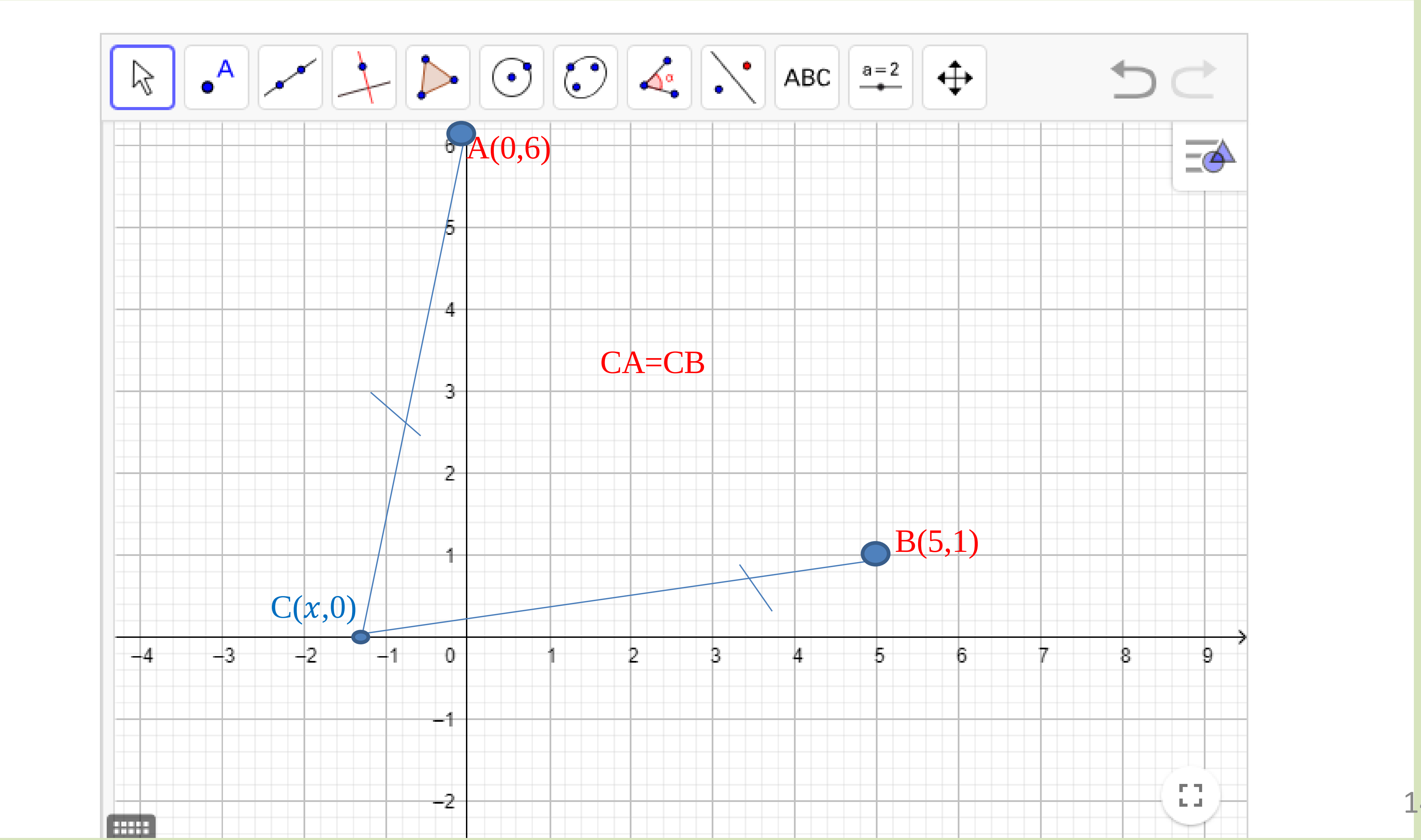
Se tienen dos puntos de coordenadas A(0,6) y B(5,1) en un plano, se quiere saber qué coordenadas tiene un punto C que está sobre el eje x, y que equidiste (este a igual distancia) del punto A y del pun to B.

Hallar las distancias CA, CB,AB.

Primero graficamos:

(Pérez y Paniagua, 2013)

https://www.geogebra.org/m/Adc44ZZq



Se grafican los punto A y B, el punto C se sabe que está sobre el eje x, por tanto, su segunda coordenada es 0.

El punto C se ubica a una distancia aproximada para que CA y CB sean iguales.

Como no se conoce la primera coordenada de C la denominamos por x.

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

C(x,0) B(5,1) A(0,6)

$$CA = CB$$

Ahora se pueden plantear dos ecuaciones con la fórmula de la distancia: CA y CB y se igualan.

$$CA = \sqrt{(x-0)^2 + (0-6)^2}$$

$$CB = \sqrt{(x-5)^2 + (0-1)^2}$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (0-1)^2},$$

$$(x-5)^2 = x^2 - 2 * x * 5 + 1^2 = x^2 - 10x + 25 + 1$$

(Pérez y Paniagua, 2013)

efectuando las operaciones dentro de log radicales, obtenemos;

$$\sqrt{x^2+36}=\sqrt{x^2-10x+25+1},$$

elevamos al cuadrado los dos lados de la ecuación y encontramos el valor de x;

$$x^2+36=x^2-10x+25+1$$

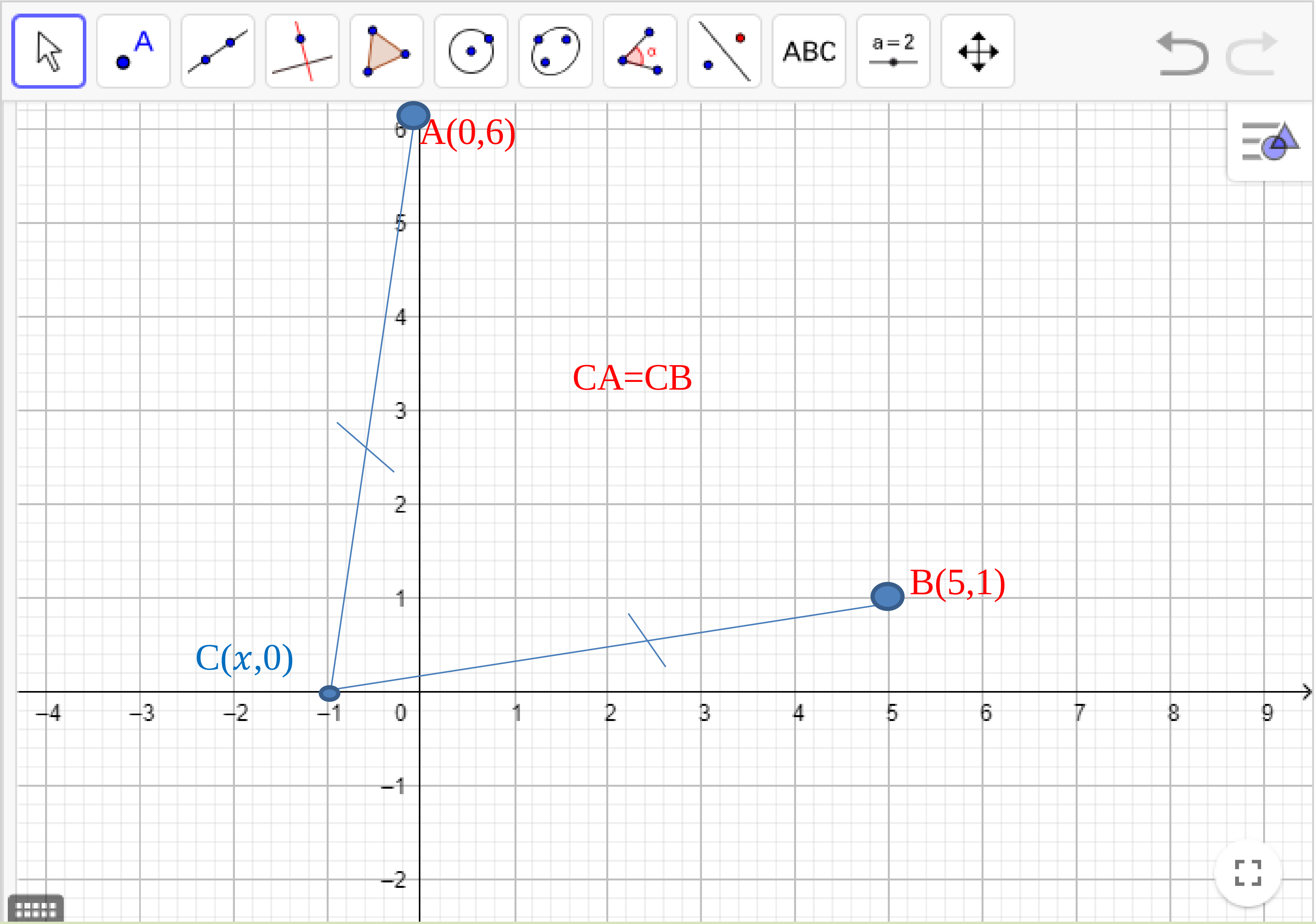
$$10x=-36+26=-10$$

$$x=-1$$

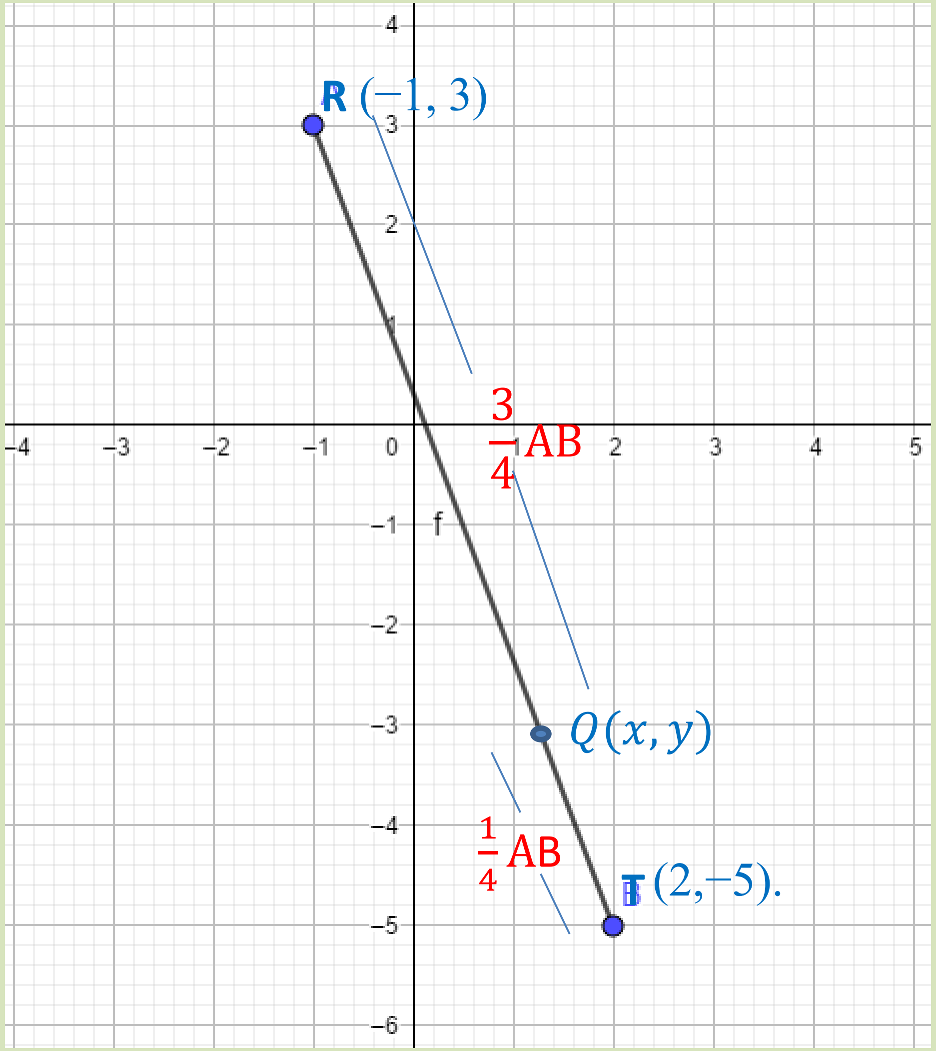
entonces el punto del eje X que equidista de A y B es $C(-1,0)$.

(Pérez y Paniagua, 2013)

https://www.geogebra.org/m/Adc44ZZq



Ejercicio 4



Hallar las coordenadas del punto Q que está a 3/4 de la distancia que va desde R$(-1, 3)$ a T$(2, -5)$. Solo falta hallar la razón para el punto $Q(x, y)$.

Solución

Sea $Q(x,y)$ las coordenadas del punto buscado, la razón r está dada por:

$$r = \frac{|\overline{RQ}|}{|\overline{QT}|}$$

Luego,

$$r = \frac{\frac{3}{4}|\overline{RT}|}{\frac{1}{4}|\overline{RT}|}$$

$$r = 3$$

Por tanto, las coordenadas del punto son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

(Pérez y Paniagua, 2013)

Reemplazando los valores dados tenemos:

$$x = \frac{-1 + (3)(2)}{1 + 3} \qquad y = \frac{3 + (3)(-5)}{1 + 3}$$

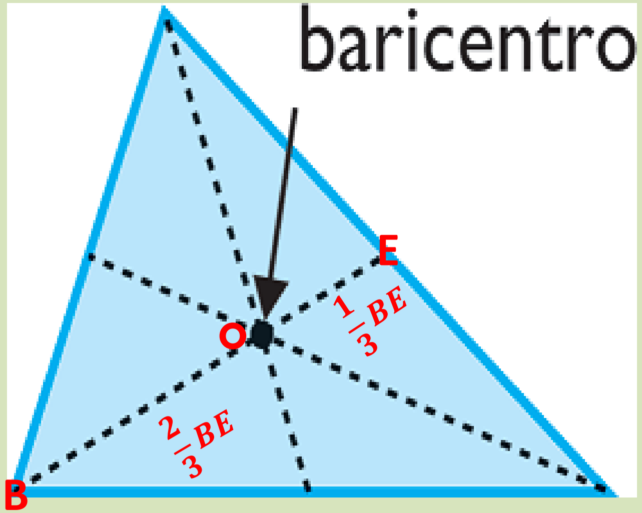
$$x = \frac{-1 + 6}{4} \qquad y = \frac{3 - 15}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} \qquad y = \frac{-12}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} \qquad y = -3$$

Las coordenadas del punto buscado son: $Q(\frac{5}{4}, -3)$

(Pérez y Paniagua, 2013)



El baricentro del triángulo es el punto de cruce entre las medianas. Este punto se encuentra a los 2/3 de la distancia de toda la mediana tomado a partir del vértice (sobre la mediana). O a 1/3 de la longitud tomada desde la mitad del lado opuesto.

$$BO=\frac{2}{3}BE$$

$$OE=\frac{1}{3}BE$$

$$\frac{BO}{OE}=\frac{\frac{2}{3}BE}{\frac{1}{3}BE}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}*\frac{3}{1}=2$$

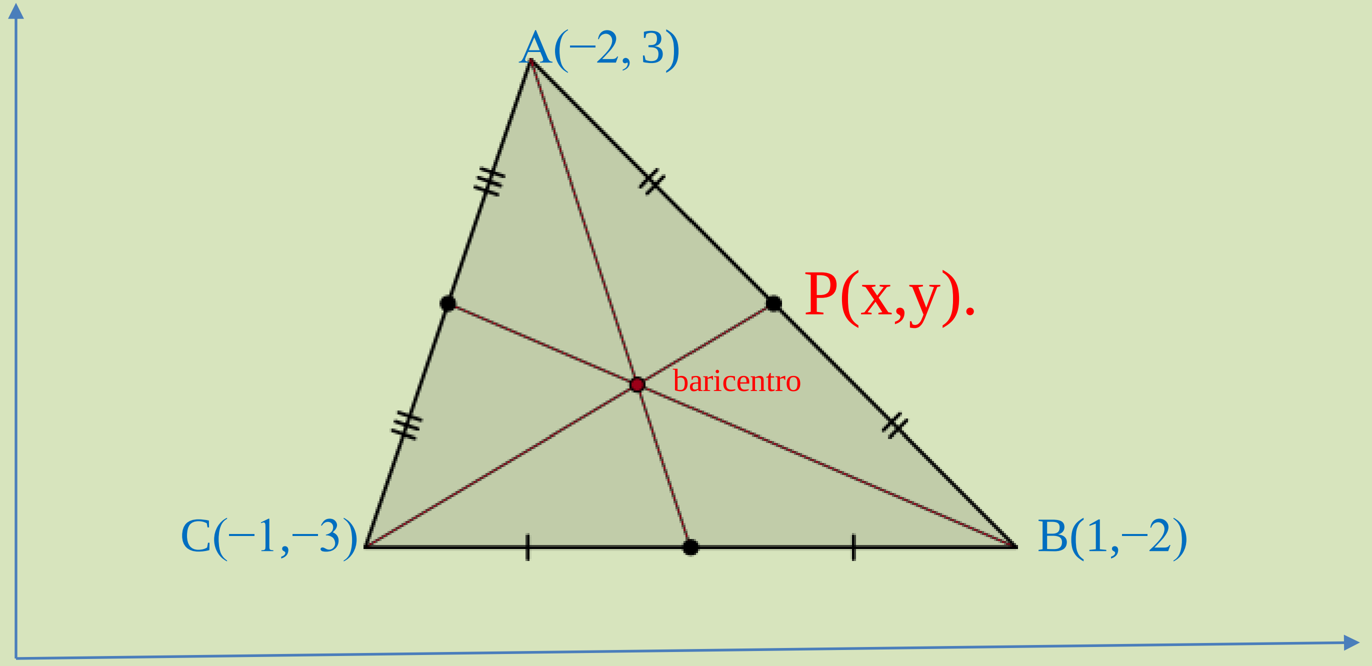
$$\frac{\boldsymbol{BO}}{\boldsymbol{OE}}=\mathbf{2}$$

BO= 2OE

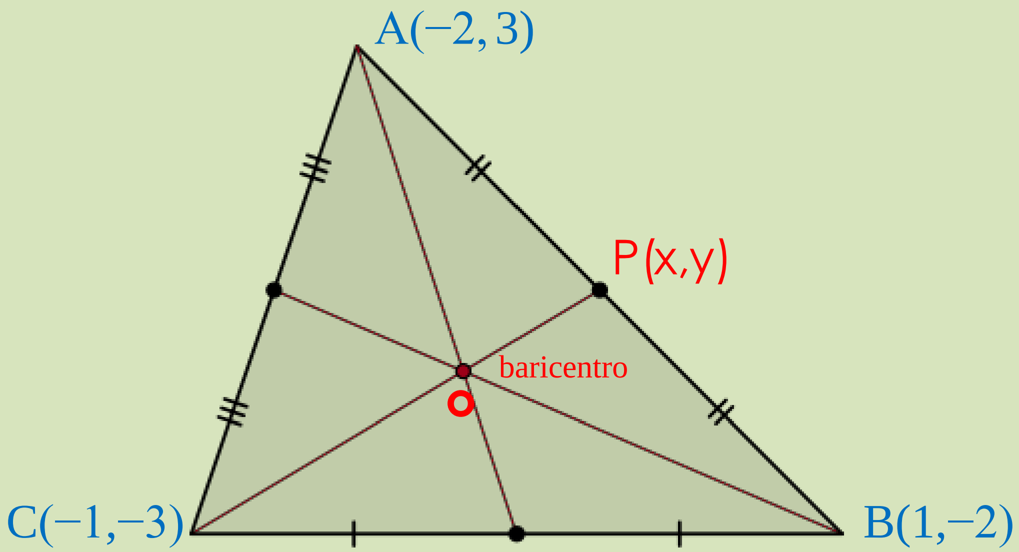
O sea, que si se toma como relación el segmento más grande sobre el más pequeño (a partir del vértice), siempre se tendrá una razón igual a 2 para el baricentro. Esto simplifica grandemente este tipo de problemas.

Ejercicio 5

¿Hallar las coordenadas del baricentro del triángulo cuyos vértices son: A(−2, 3), B(1,−2) y C(−1,−3).

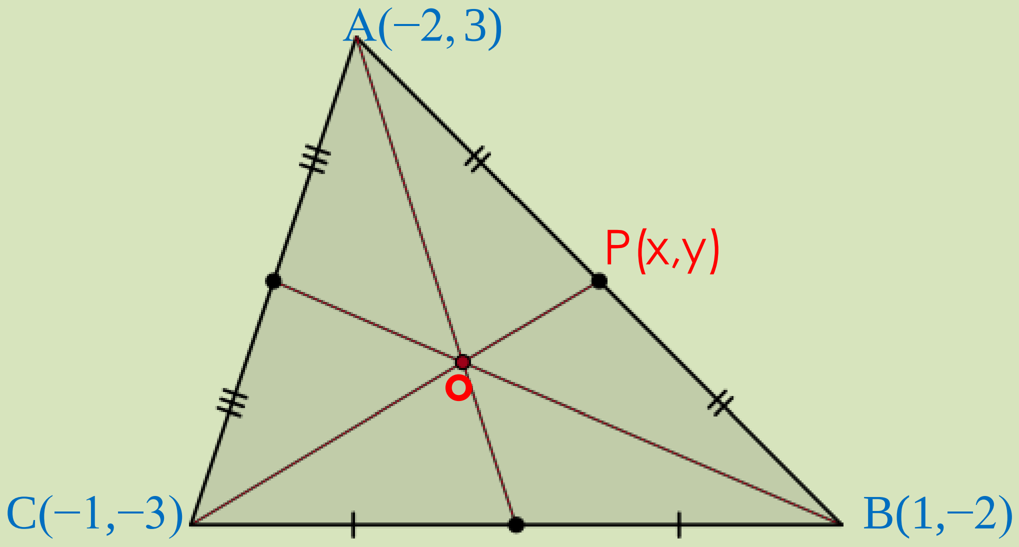


https://diccionarioactual.com/baricentro/



Procedimiento:

Conocemos la razón $\frac{CO}{OP}=2$ y si conociera las coordenadas del punto medio P(x,y) podríamos hallar las coordenadas del punto P ó baricentro:

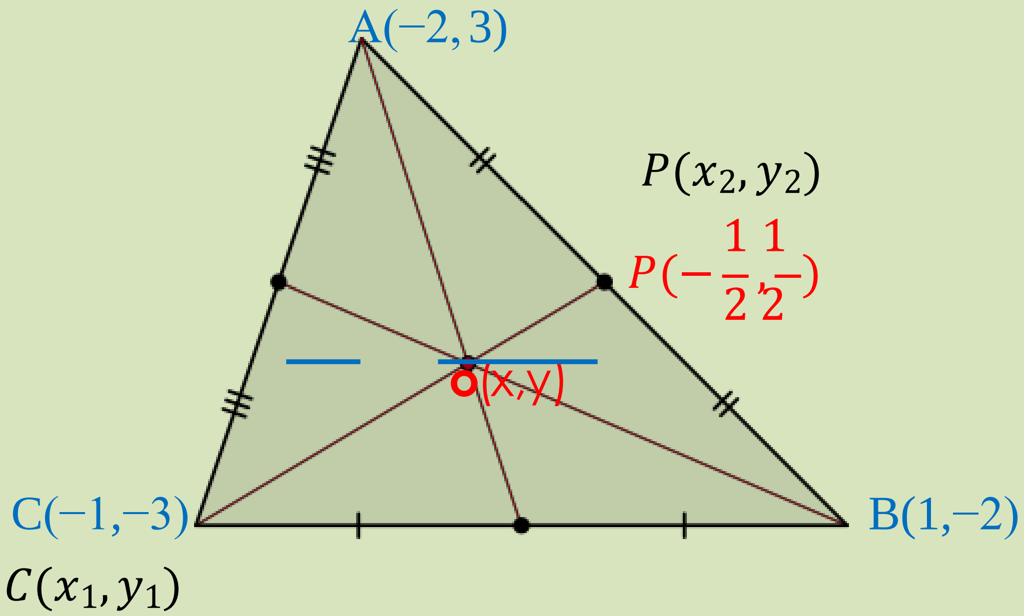


La ecuación para el punto medio P viene dada por:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(x,y) = P(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$



Con la razón $\frac{CO}{OP}$=2 y con las coordenadas P(-1/2, ½) y aplicando la ecuación de las coordenadas

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

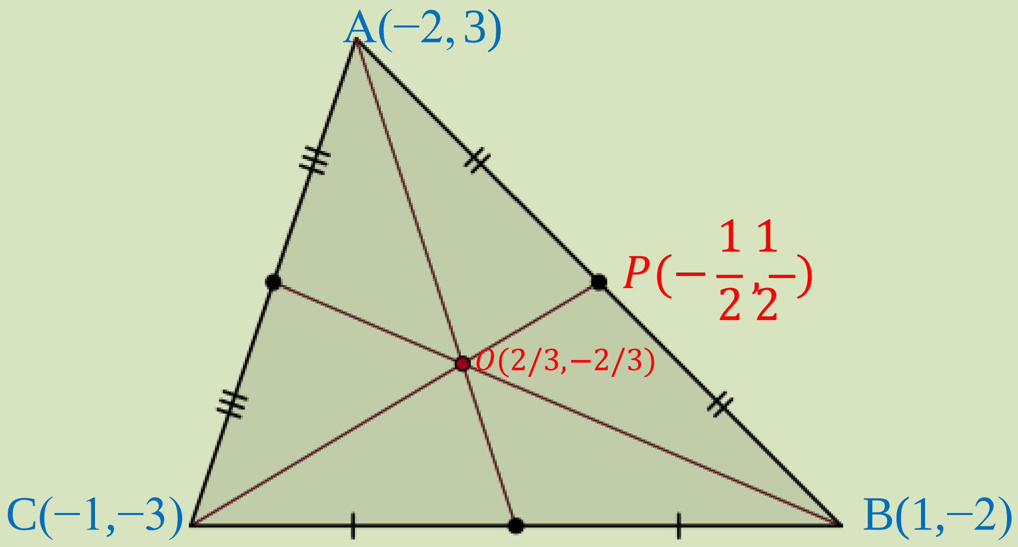
$C(-1,-3) \quad P(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

Con la ecuación de la razón obtenemos las coordenadas del baricentro.

$$x = \frac{x_1+Rx_2}{1 + R} \qquad y = \frac{y_1+Ry_2}{1 + R}$$

$$x = \frac{-1+2(-\frac{1}{2})}{1 + 2} = 2/3 \qquad y = \frac{-3+2(\frac{1}{2})}{1 + 2} = -2/3$$

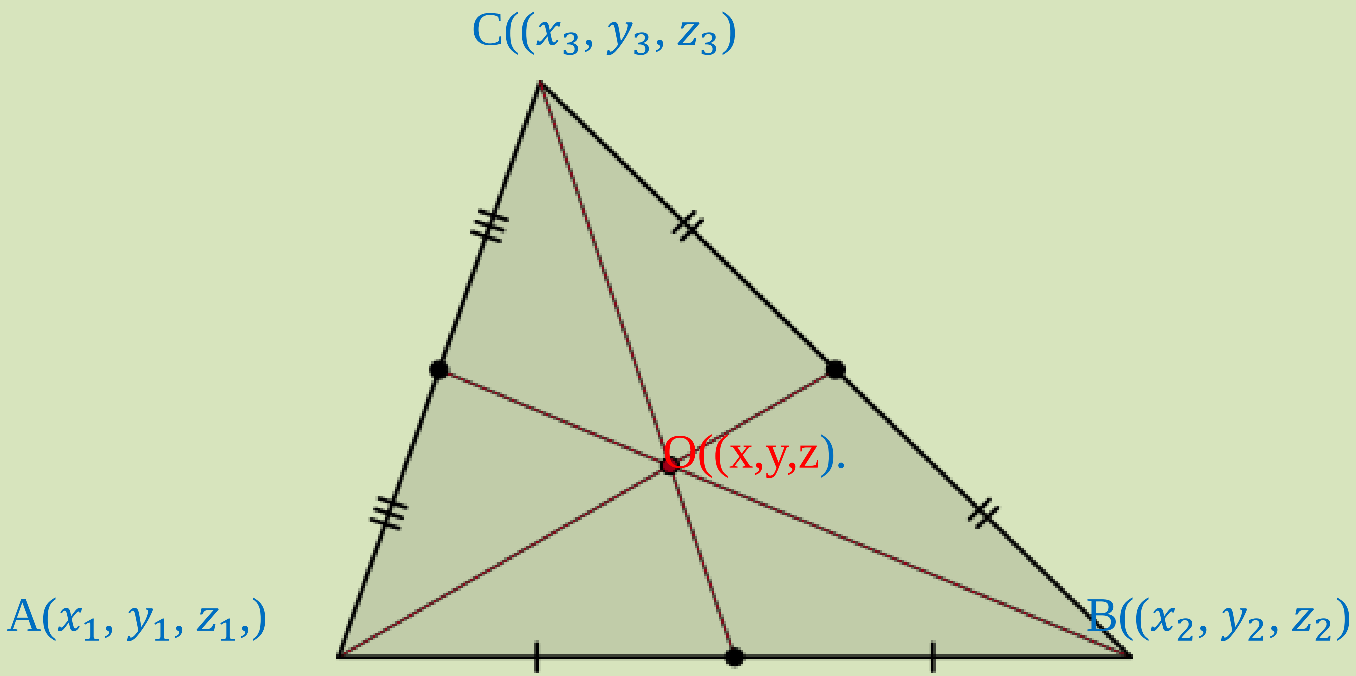
$$O(2/3,-2/3)$$

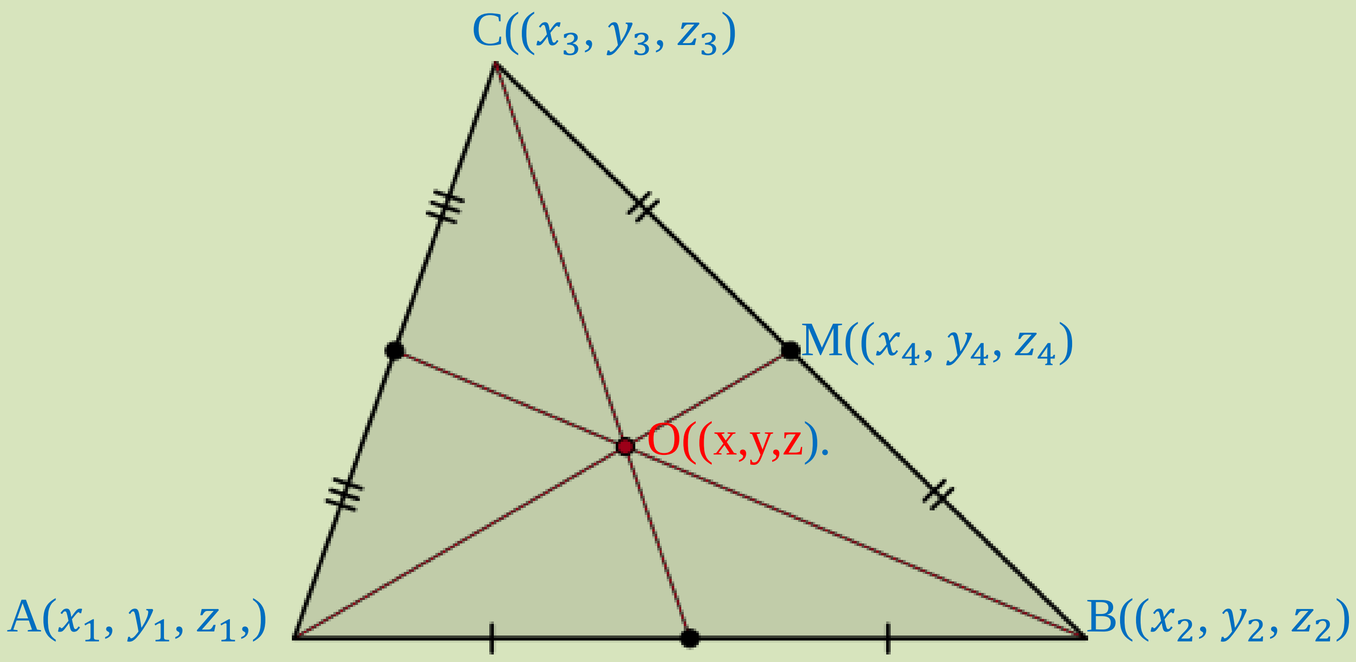

A(−2, 3)
P(−1/2, 1/2)
O(2/3,−2/3)
C(−1,−3)
B(1,−2)

Ejercicio 6

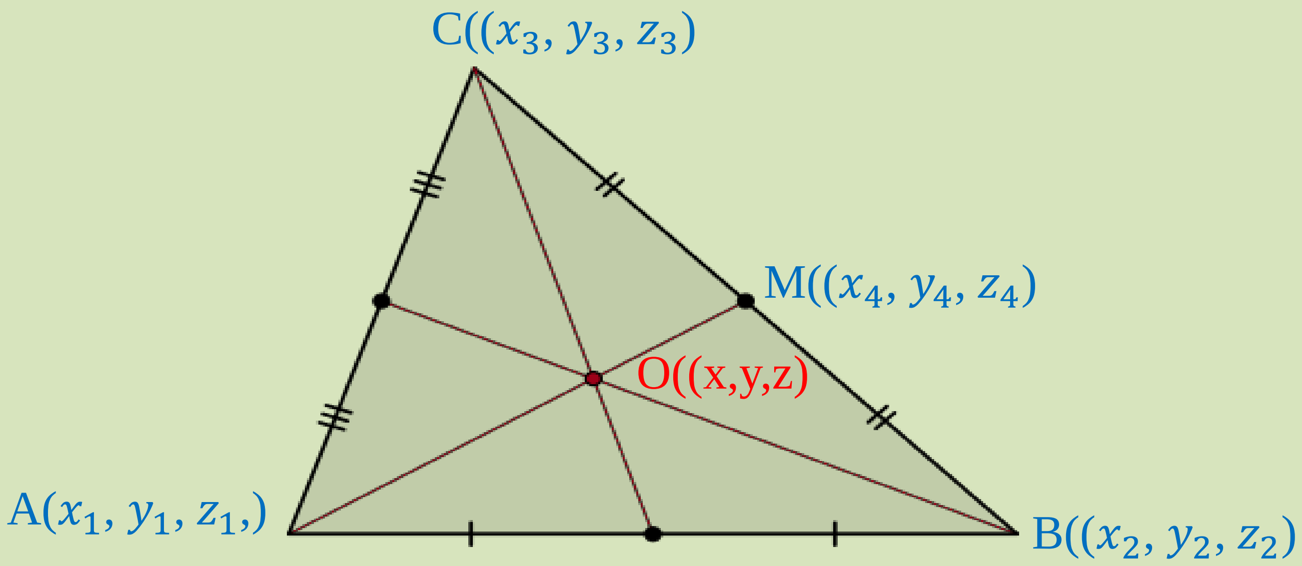
Ejercicio anterior generalizado

Hallar las coordenadas (x, y, z) del baricentro O del triángulo cuyos vértices son: A(x_1, y_1, z_1,), B((x_2, y_2, z_2) y C((x_3, y_3, z_3). Coordenadas conocidas.


C$((x_3, y_3, z_3)$
O((x,y,z).
A$(x_1, y_1, z_1,)$
B$((x_2, y_2, z_2)$



Como la razón en que el punto O divide al segmento AM (segmento dirigido de A hacia M) es 2, solo falta hallar las coordenadas del punto M (x_4, y_4, z_4).



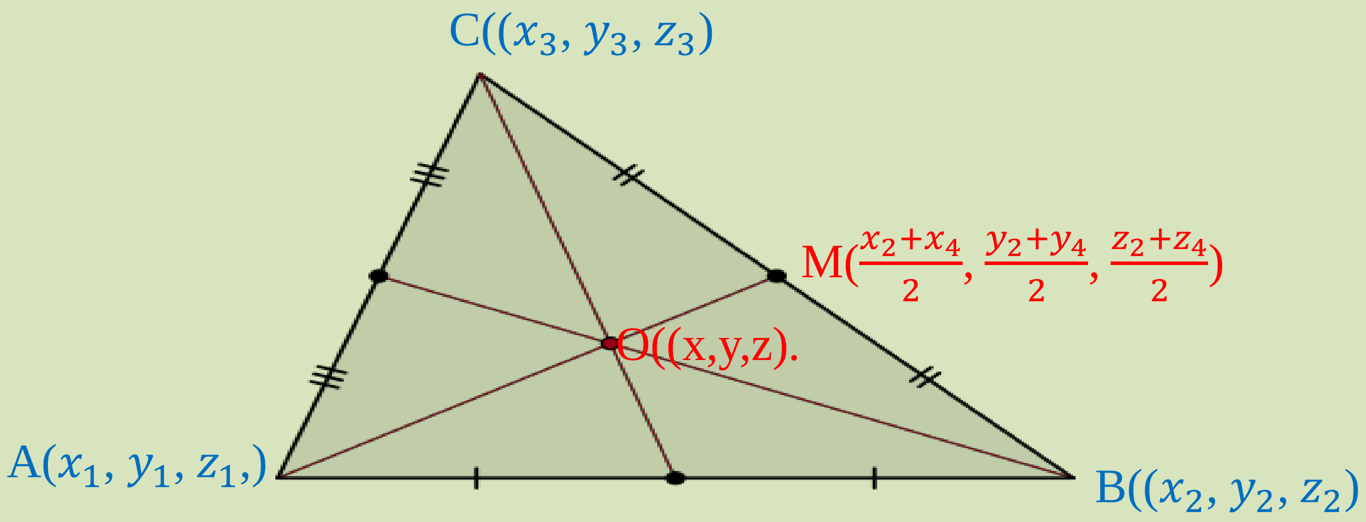
El punto M$((x_4, y_4, z_4)$ es el punto medio del segmento BC. Por tanto: las coordenadas son:

$$x_4 = \frac{x_2 + x_3}{2}$$

$$y_4 = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

$$z_4 = \frac{z_2 + z_3}{2}$$

Ahora, se requiere reemplazar los valores de x_4, y_4, z_4 en M.



Como ya se conocen las coordenadas del punto medio y la razón 2, se pueden calcular las coordenadas O((x,y,z).

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r}$$

Para el segmento AM, x_1 es x_1, x_2 *es la coordenada en x del punto M, la cual es* $\frac{x_2+x_4}{2}$, por tanto

$$x = \frac{x_1 + 2(\frac{x_2+x_4}{2})}{1+2}$$

El 2 está multiplicando y dividiendo, se puede cancelar

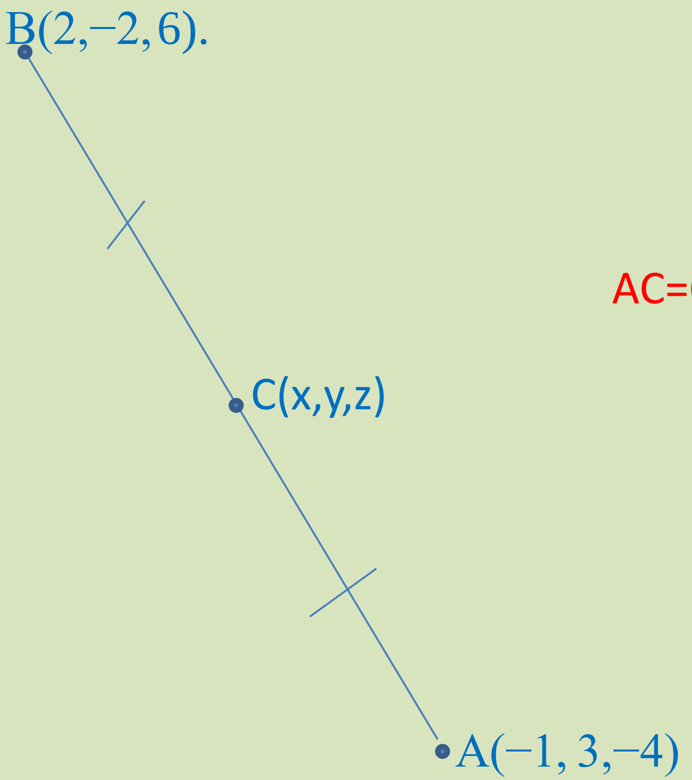
$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\mathrm{y}= \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$\mathrm{z}= \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

Ejercicio 7



AC=CB

Ejemplo. Hallar las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $A(-1, 3, -4)$ y $B(2, -2, 6)$.

Solución

En el punto medio $r = 1$, entonces las coordenadas del punto medio $S(x, y, z)$ son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \qquad z = \frac{z_1 + rz_2}{1 + r}$$

Sustituyendo los valores tenemos:

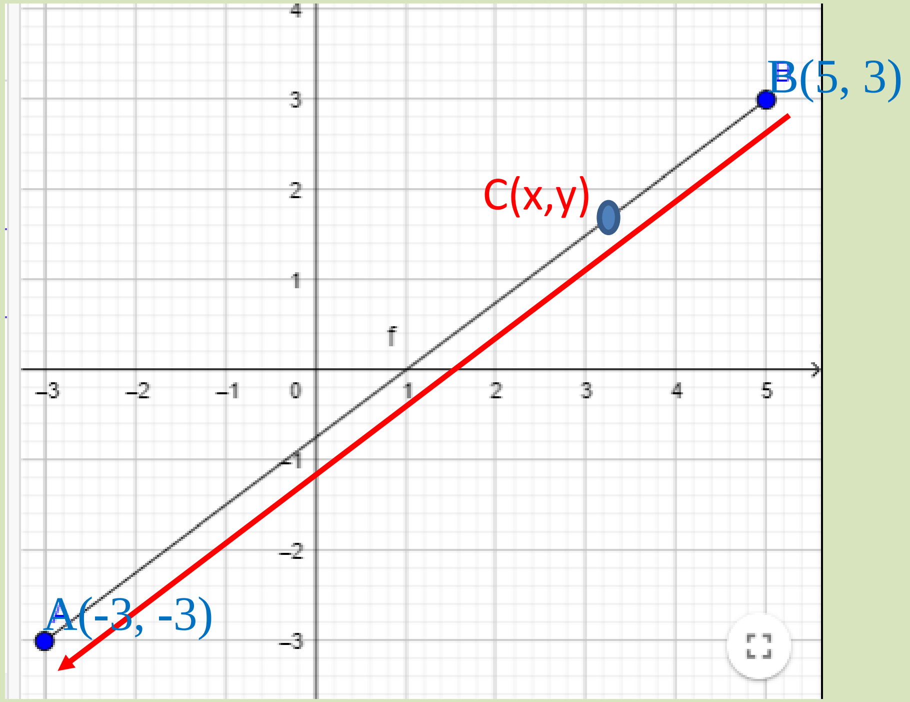
$$x = \frac{-1 + 2}{2} \qquad y = \frac{3 - 2}{2} \qquad z = \frac{-4 + 6}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{1}{2} \qquad z = 1$$

Luego, las coordenadas del punto medio S son: $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

Ejercicio 8

Sea B(5, 3) y A(-3, -3) los extremos del segmento BA, encuentre las coordenadas del punto C que lo divide en una razón r = 1/3



Ejercicio 9

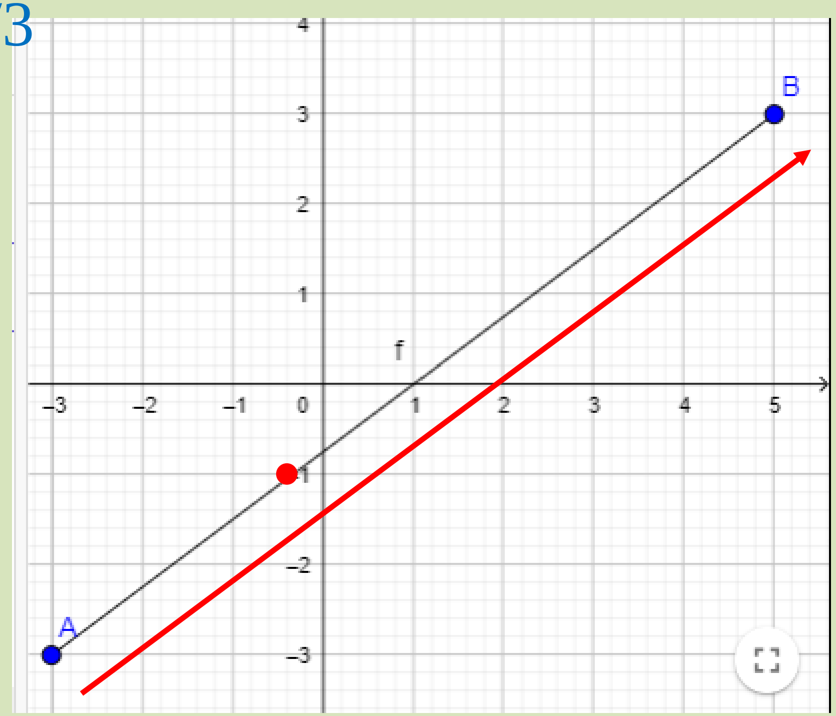
$(x_1\ y_1)$ $(x_2\ y_2)$

Sea A(-3, -3) y B(5, 3) los extremos del segmento AB. Encuentre las coordenadas del punto P que lo divide en una razón r = 1/3

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1+r} \qquad y = \frac{y_1 + r y_2}{1+r}$$

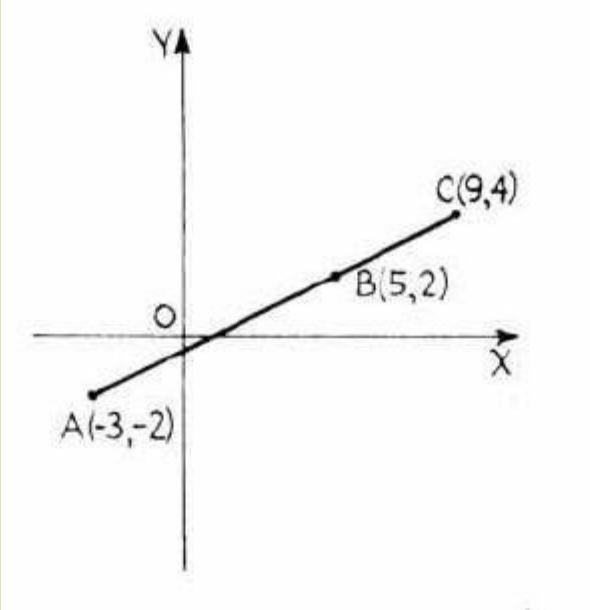
$$x = \frac{-3+\frac{1}{3}*5}{1+\frac{1}{3}} = -1$$

$$y = \frac{-3+\frac{1}{3}*3}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{-3+1}{\frac{4}{3}} = -2*\frac{3}{4} = -\frac{3}{2} = -1.5$$



Note la diferencia con el ejercicio anterior, en el cual se toma el segmento BA. En esta diapositiva se considera el segmento AB. Las coordenadas dan diferentes por la diferente orientación del segmento.

Ejercicio 10



Primero se grafica.
Se debe demostrar que la distancia AB + BC =AC

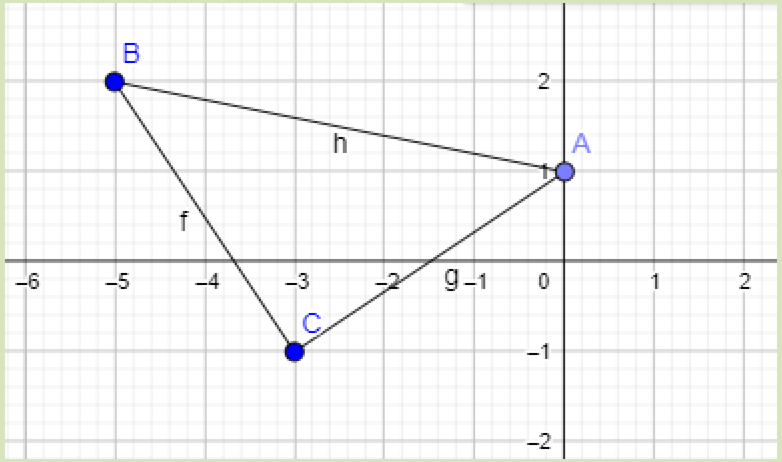
4. Demostrar que los tres puntos siguientes son colineales $A(-3, -2)$, $B(5, 2)$, $C(9, 4)$.

$$AB = \sqrt{(5+3)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{5} \qquad BC = \sqrt{(9-5)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(9+3)^2 + (4+2)^2} = 6\sqrt{5}$$

Como $AB + BC = AC$, o sea, $4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$, los puntos son colineales.

Ejercicio 11



Demuestre empleando la fórmula de la distancia que los puntos A(0,1), B(-5,2) y C(-3,-1) son los vértices de un triángulo rectángulo.

Del teorema de Pitágoras se tiene:

$$\mathrm{AB} = \sqrt{AC^2 + CB^2}$$

Si se demuestra que los lados del triangulo cumplen esa ecuación, se demuestra que el triángulo ACB es rectángulo

A(0,1), B(-5,2) y C(-3,-1)

SOLUCIÓN Debemos probar que se cumple la igualdad

$$[d(A,B)]^2 = [d(B,C)]^2 + [d(A,C)]^2$$

Primero calcularemos cada distancia al cuadrado

$$[d(A,B)]^2 = \left[\sqrt{(-5-0)^2+(2-1)^2}\right]^2 = \left[\sqrt{25+1}\right]^2 = \left[\sqrt{26}\right]^2 = 26$$

$$[d(B,C)]^2 = \left[\sqrt{(-3-(-5))^2+(-1-2)^2}\right]^2 = \left[\sqrt{4+9}\right]^2 = \left[\sqrt{13}\right]^2 = 13$$

$$[d(A,C)]^2 = \left[\sqrt{(-3-0)^2+(-1-1)^2}\right]^2 = \left[\sqrt{9+4}\right]^2 = \left[\sqrt{13}\right]^2 = 13$$

13+13= 26

Ejercicio 13

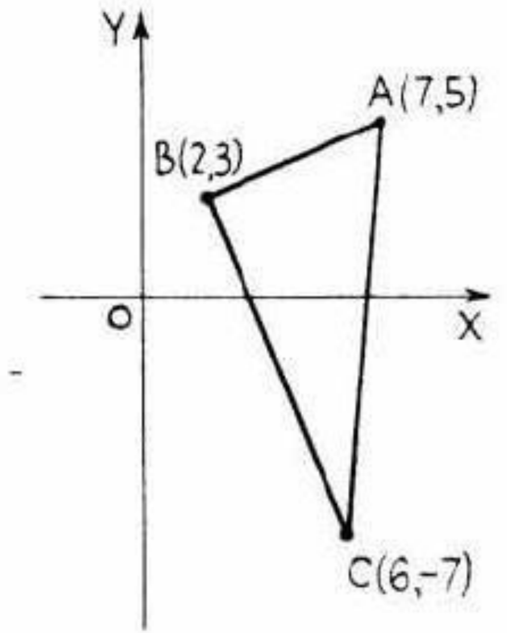
3. *a*) Demostrar que los puntos $A(7, 5)$, $B(2, 3)$, $C(6, -7)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.
b) Hallar el área del triángulo rectángulo.

a) $AB = \sqrt{(7-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{29}$ $\qquad BC = \sqrt{(2-6)^2 + (3+7)^2} = \sqrt{116}$

$$AC = \sqrt{(7-6)^2 + (5+7)^2} = \sqrt{145}$$

Como $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$, o sea, $29 + 116 = 145$, ABC es un triángulo rectángulo.

b) Area $= \frac{1}{2}(AB)(BC) = \frac{1}{2}\sqrt{29}\sqrt{116} = 29$ unidades de superficie.



Ejercicio 14

4. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son A(1,1), B(5,1), C(1,3) es un triángulo rectángulo.

$$d = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$$

distancia AB;

$$d = \sqrt{(1-5)^2 + (1-1)^2}$$

$$d = \sqrt{(4)^2 + (0)^2} = \sqrt{4^2}$$

$$d = 4$$

distancia AC;

$$d = \sqrt{(1-1)^2 + (1-3)^2}$$

$$d = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = \sqrt{4}$$

$$d = 2$$

distancia BC;

$$d = \sqrt{(5-1)^2 + (1-3)^2}$$

$$d = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20}$$

$$d = \sqrt{20}$$

Comprobación de que el triángulo ABC es rectángulo:

Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$\left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{AC}\right)^2 + \left(\overline{AB}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{20}\right)^2 = 2^2 + 4^2$$

$$20 = 4 + 16$$

$20 = 20$ por lo cual, el triangulo ABC es rectángulo.

Ejercicio 15

Calcular la longitud de la mediana AM del triángulo ABC, cuyos vértices son los puntos: A(0, 0); B(3, 7) y C(5, –1).

Solución

El punto M, es punto medio del segmento BC por tanto:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{7 + (-1)}{2} = 3$$

Luego la longitud de la mediana AM está dado por la distancia:

$$d_{AM} = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$$

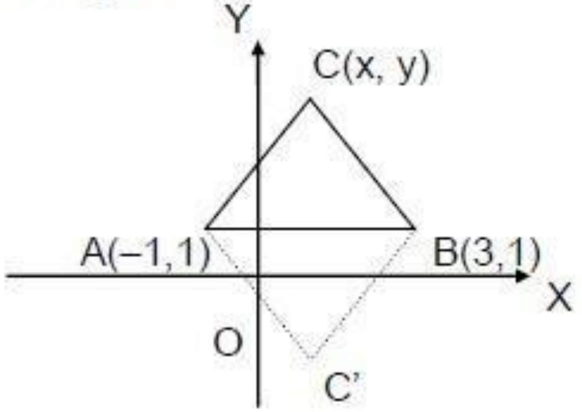
$$d_{AM} = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16 + 9} \Rightarrow d_{AM} = 5$$

Ejercicio 16

Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los A(–1, 1); B(3, 1). Hallar las coordenadas del tercer vértice.

Solución

Sea la figura:



$$d(A, B) = \sqrt{(3-(-1))^2 + (1-1)^2} = 4$$

Como el triángulo ABC, es equilátero:

$$d(B, C) = d(A, C)$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$$

$$(x - 3)^2 = (x - 1)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2x + 1$$

$$x = 1$$

Ahora: $d(B, C) = d(A, B)$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = 4$$

$$(1 + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$$

$$(y - 1)^2 = 12$$

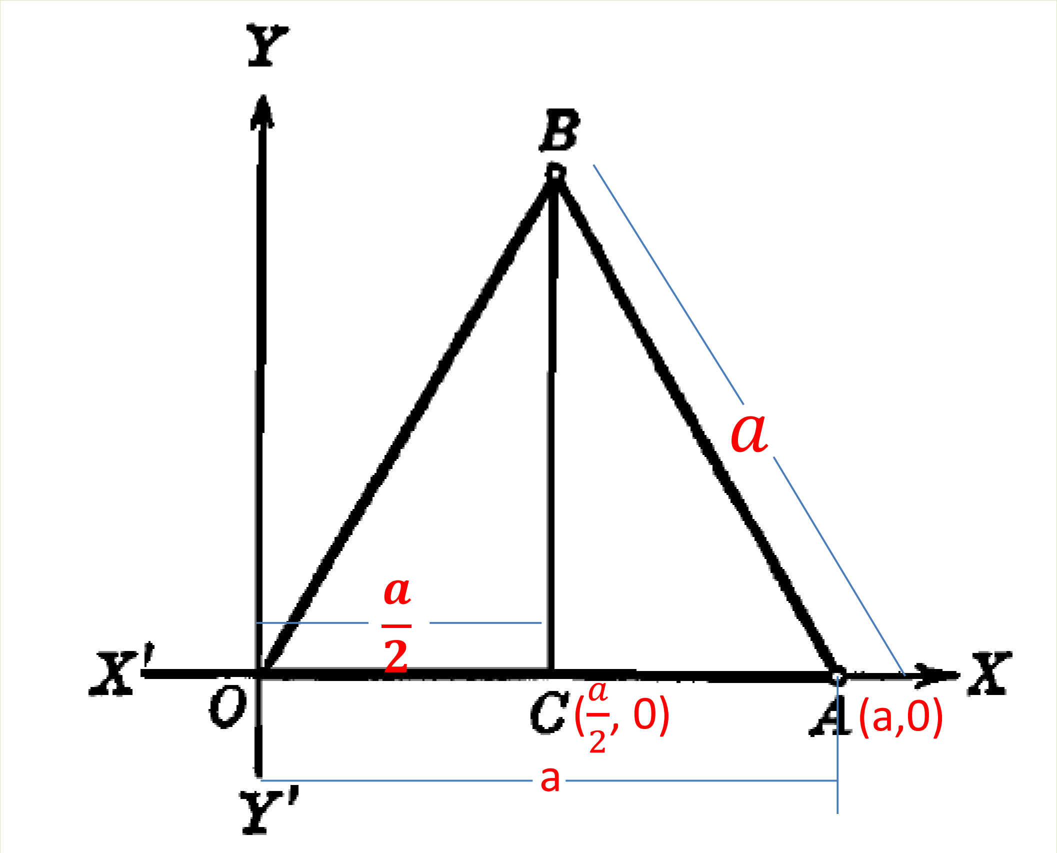
De donde: $y = 1 + 3\sqrt{2}$ ó $y = 1 - 3\sqrt{2}$

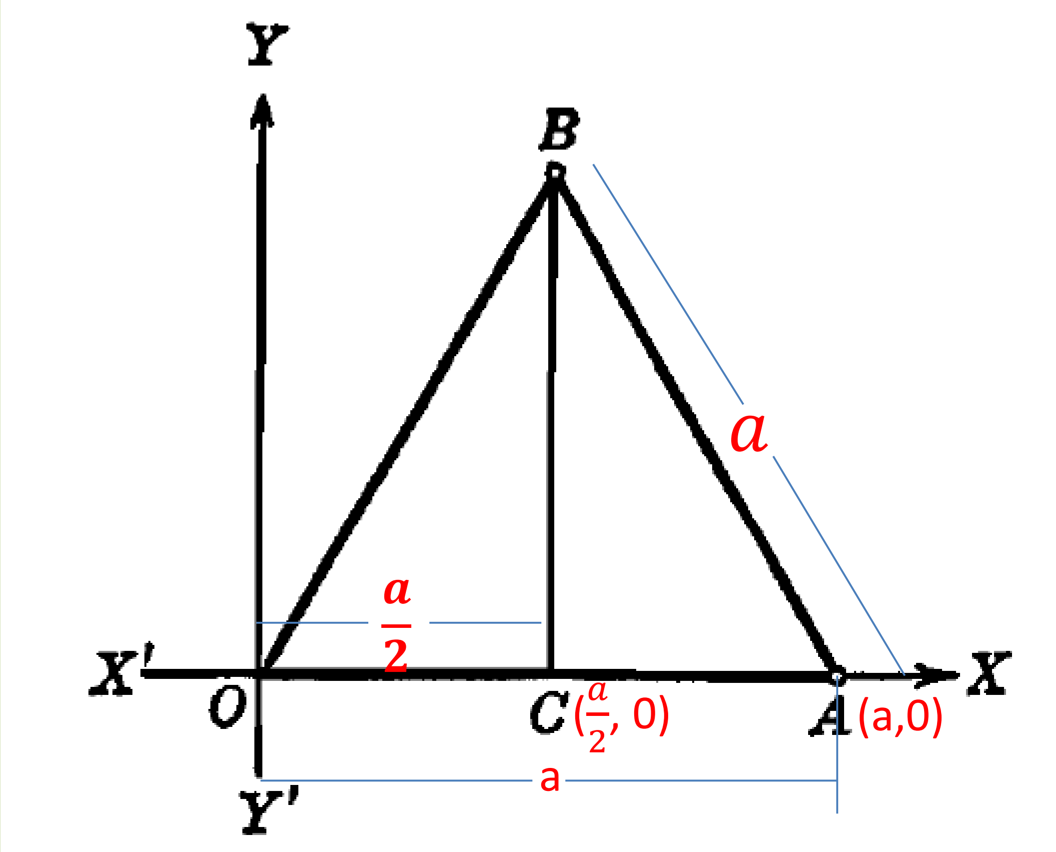
Por tanto existe dos soluciones posibles:

$C(1, 1 + 3\sqrt{2})$ ó $C'(1, 1 - 3\sqrt{2})$

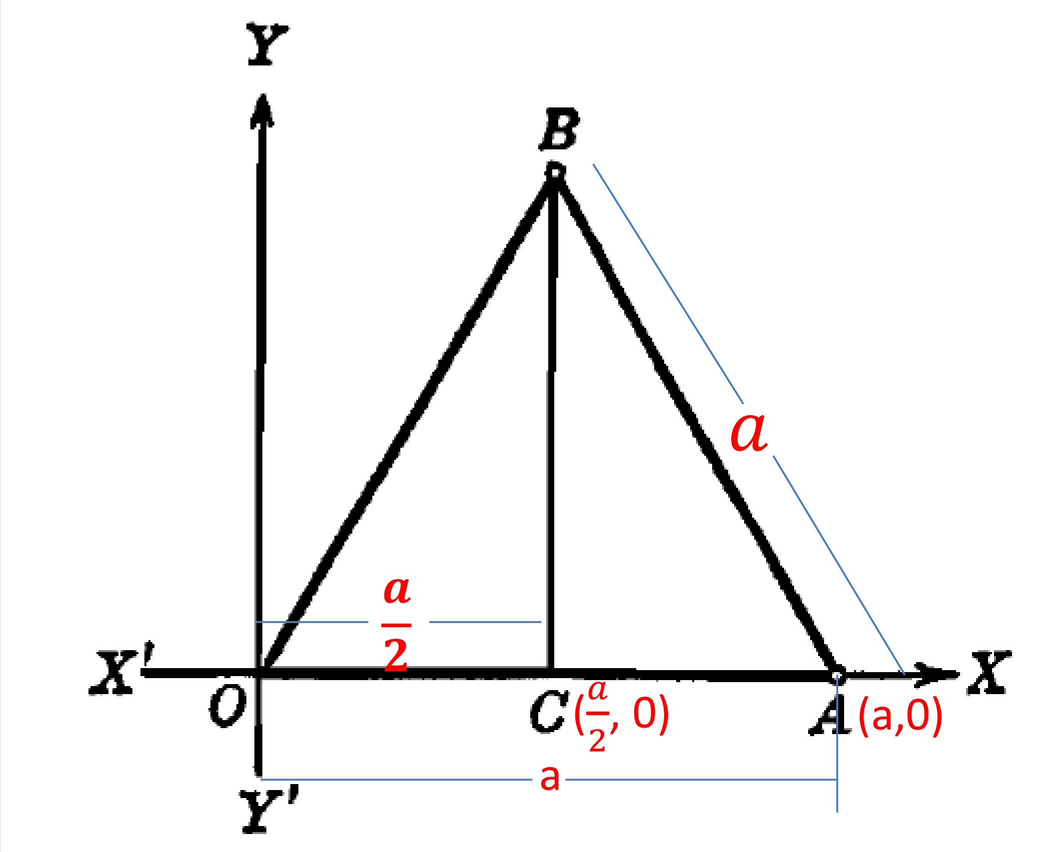
Ejemplo. Un triángulo equilátero OAB cuyo lado tiene una longitud a está colocado de tal manera que el vértice O está en el origen, el vértice A está sobre el eje de las X y a la derecha de O, y el vértice B está arriba del eje X. Hallar las coordenadas de los vértices A y B y el área del triángulo.

$$OA = AB = BO = a$$

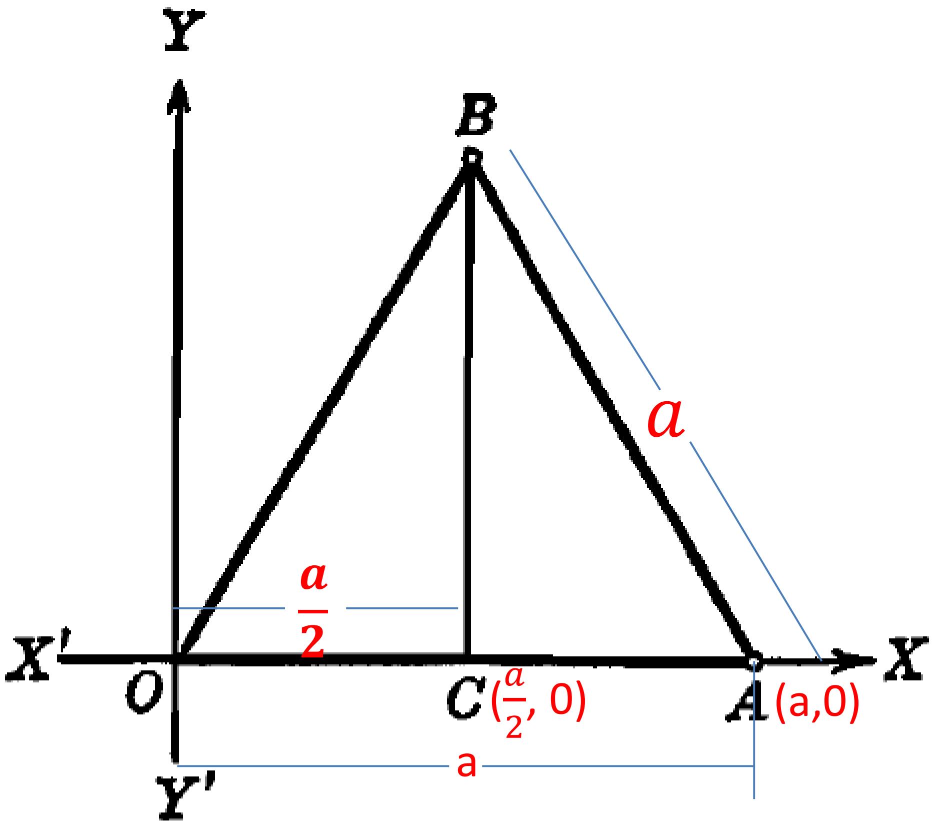




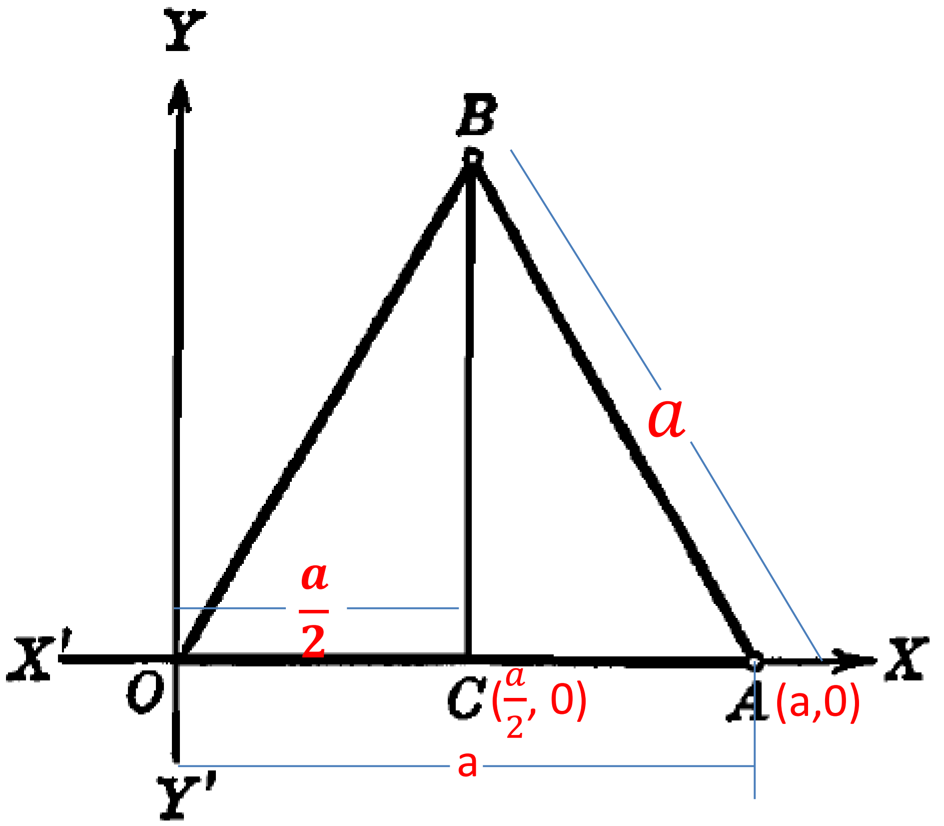
Solución. Con referencia a los ejes coordenados, el triángulo está en la posición indicada en la figura 6. Como $\overline{OA} = a$, la abscisa del punto A es a. También, por estar A sobre el eje de las X, su ordenada es 0. Por tanto, las coordenadas del vértice A son $(a, 0)$.



Si trazamos la altura BC, perpendicular al lado OA, sabemos, por la Geometría elemental, que C es el punto medio de OA.



Por tanto, la abscisa de C es $\frac{a}{2}$. Como BC es paralela al eje Y, la abscisa del punto B es también $\frac{a}{2}$. La ordenada de B se obtiene ahora muy fácilmente por el teorema de Pitágoras; dicha ordenada es



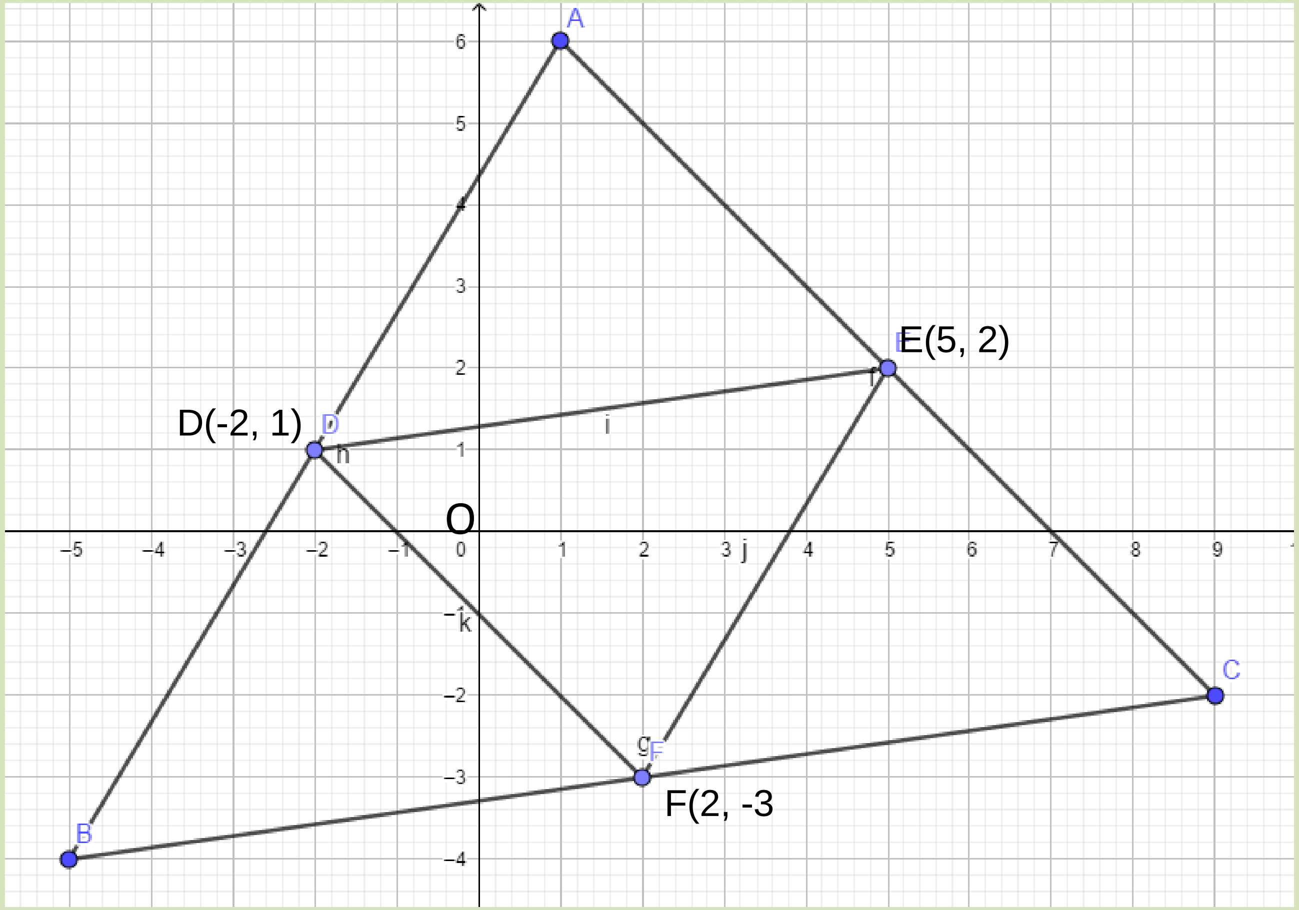
$$BC = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{CA}^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Las coordenadas del vértice B son, pues, $\left(\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

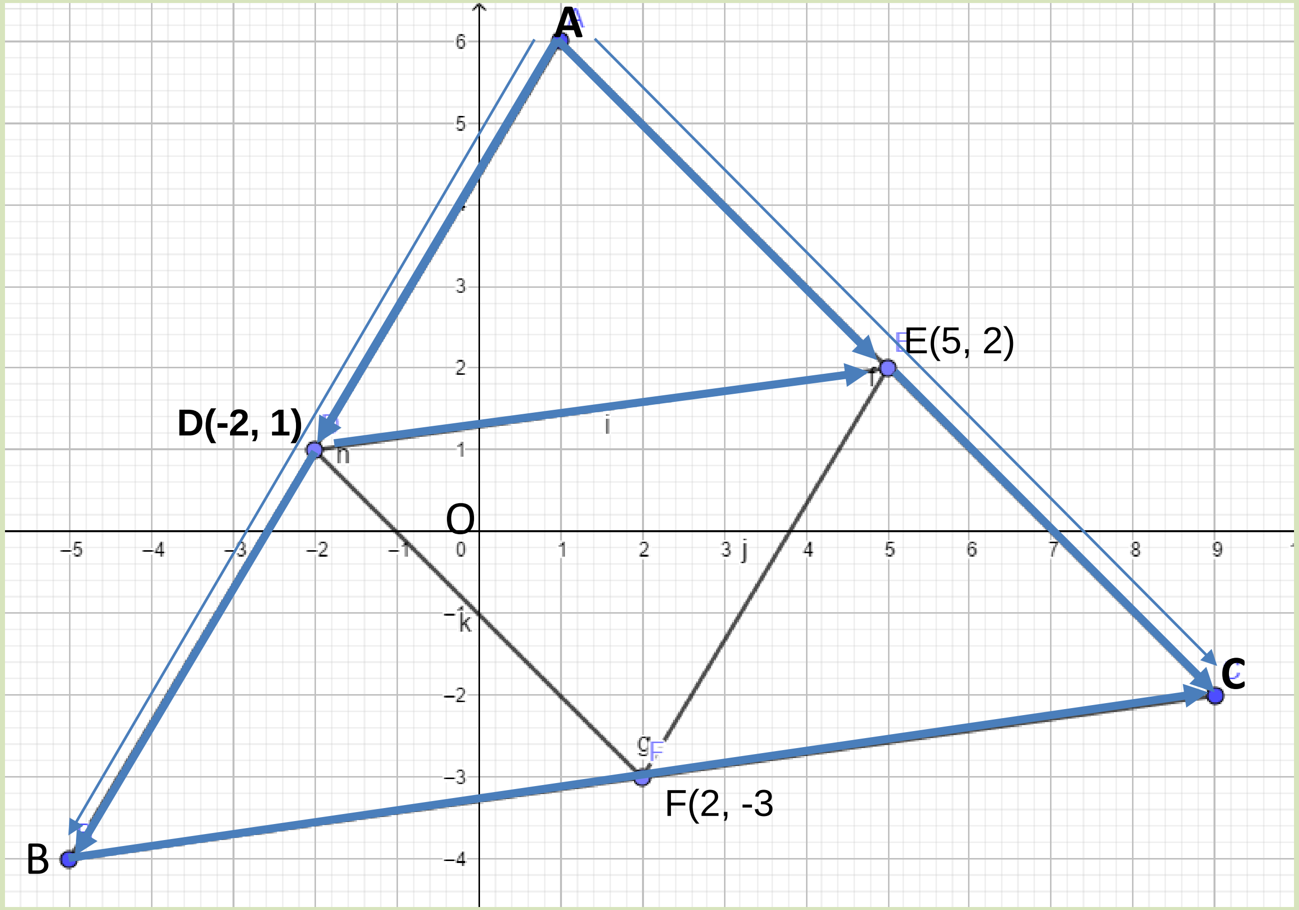
El área del triángulo (Apéndice IA, 1) es

$$K = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Ejercicio 17



Demostrar que los lados del triángulo DEF formado al unir los puntos medios de los lados del triángulo ABC, son la mitad de los lados paralelos del triángulo ABC.

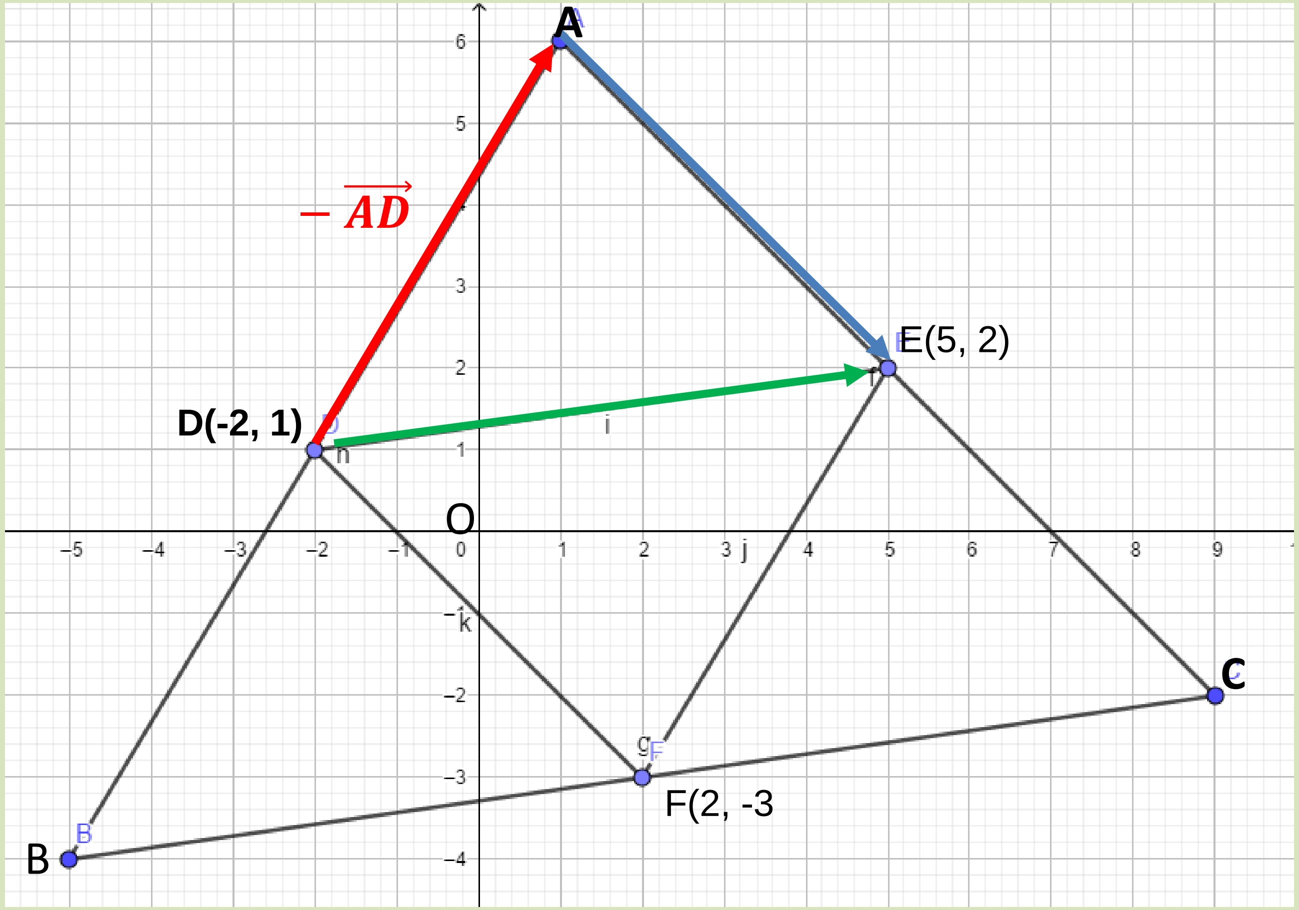


Del lado AB $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$ (1) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$ (2) (lado AC)

Del triángulo ABC $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (3)

(1) y (2) en (3) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ (despejando $\overrightarrow{BC}$)

$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AE} - 2\,\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}\,)$ (4)



$$\overrightarrow{AE} + (-\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{DE} \quad \text{en (4)}$$

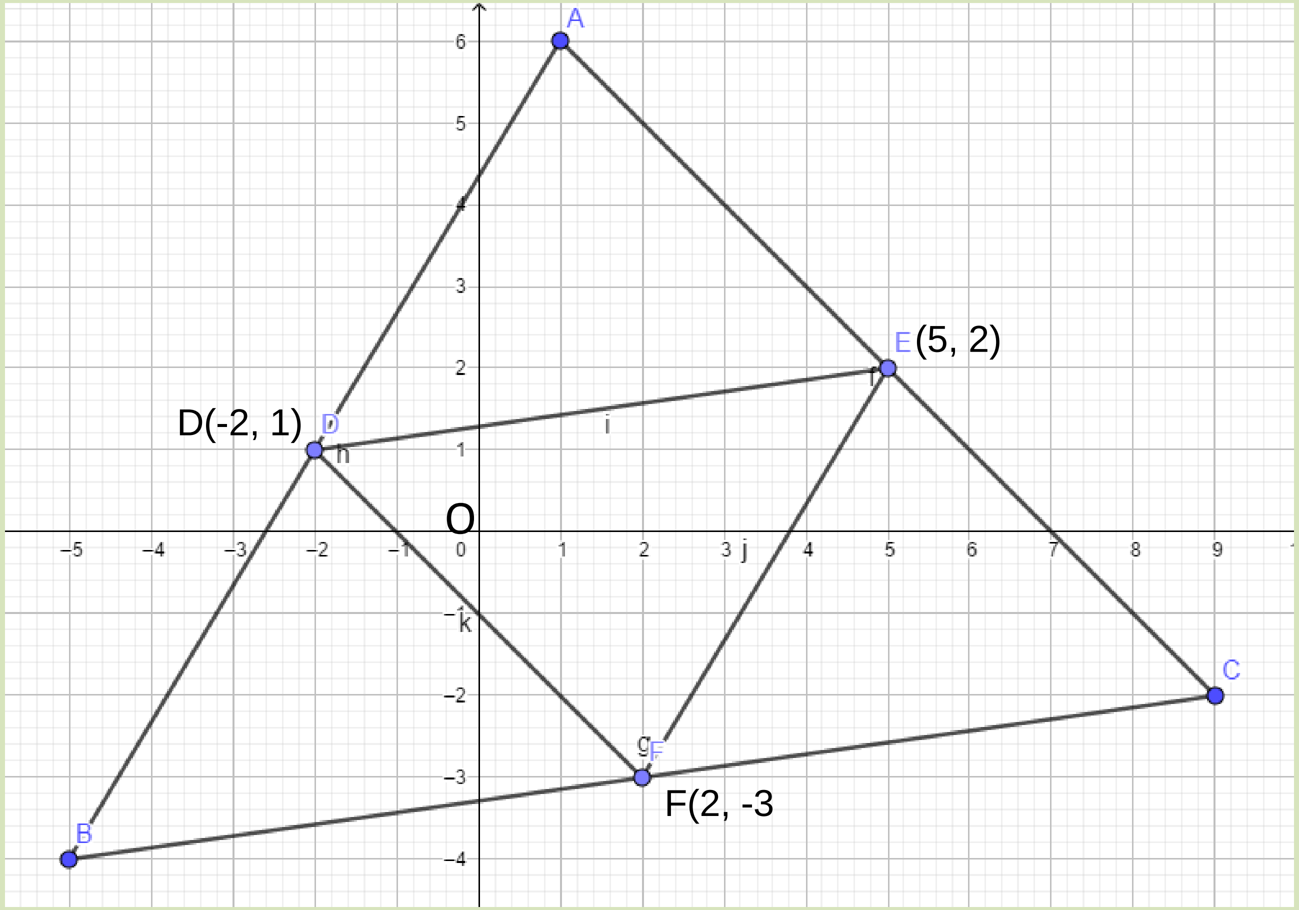
q

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{DE}$$

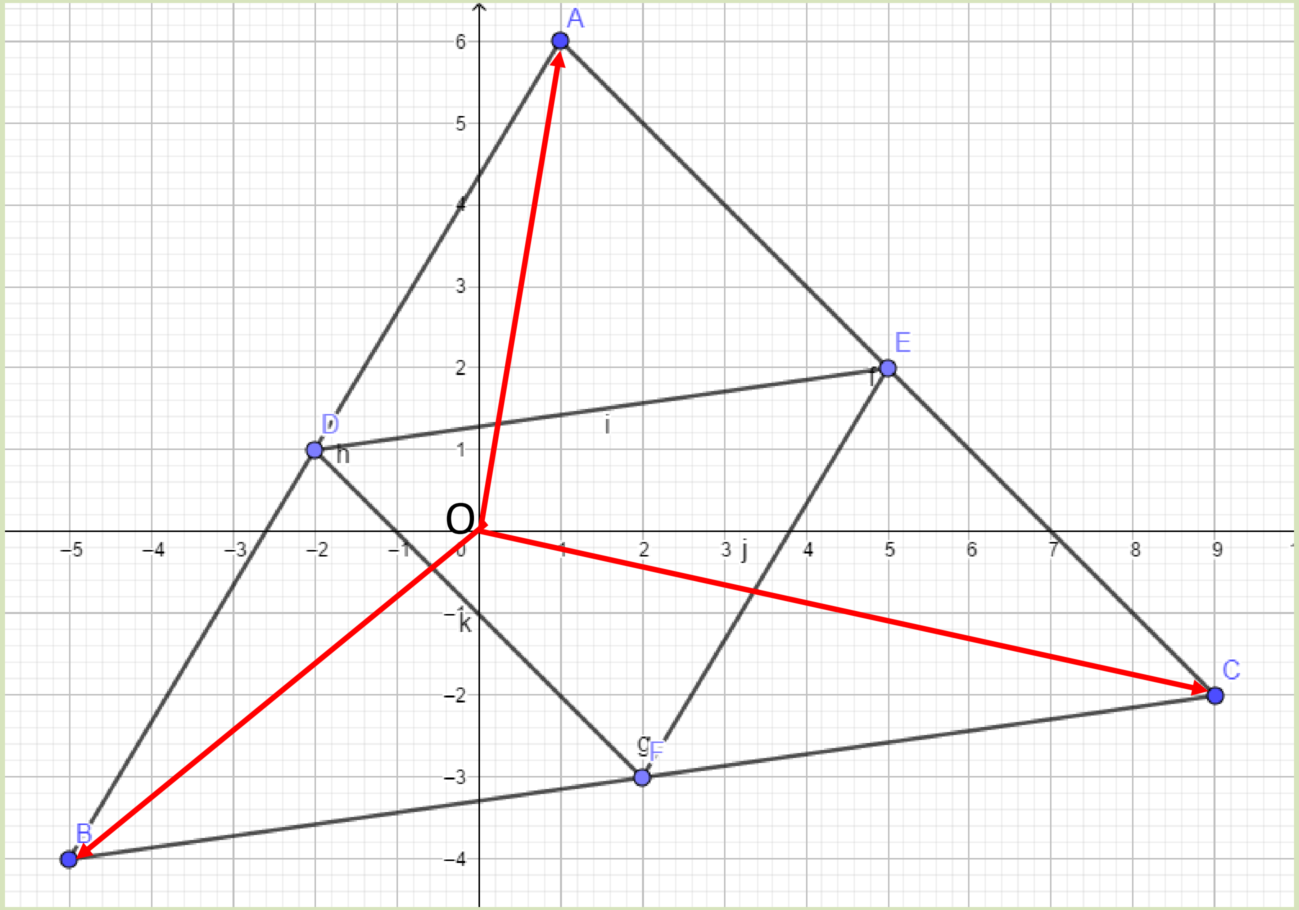
$$\overrightarrow{DE} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$$

Ejercicio 18

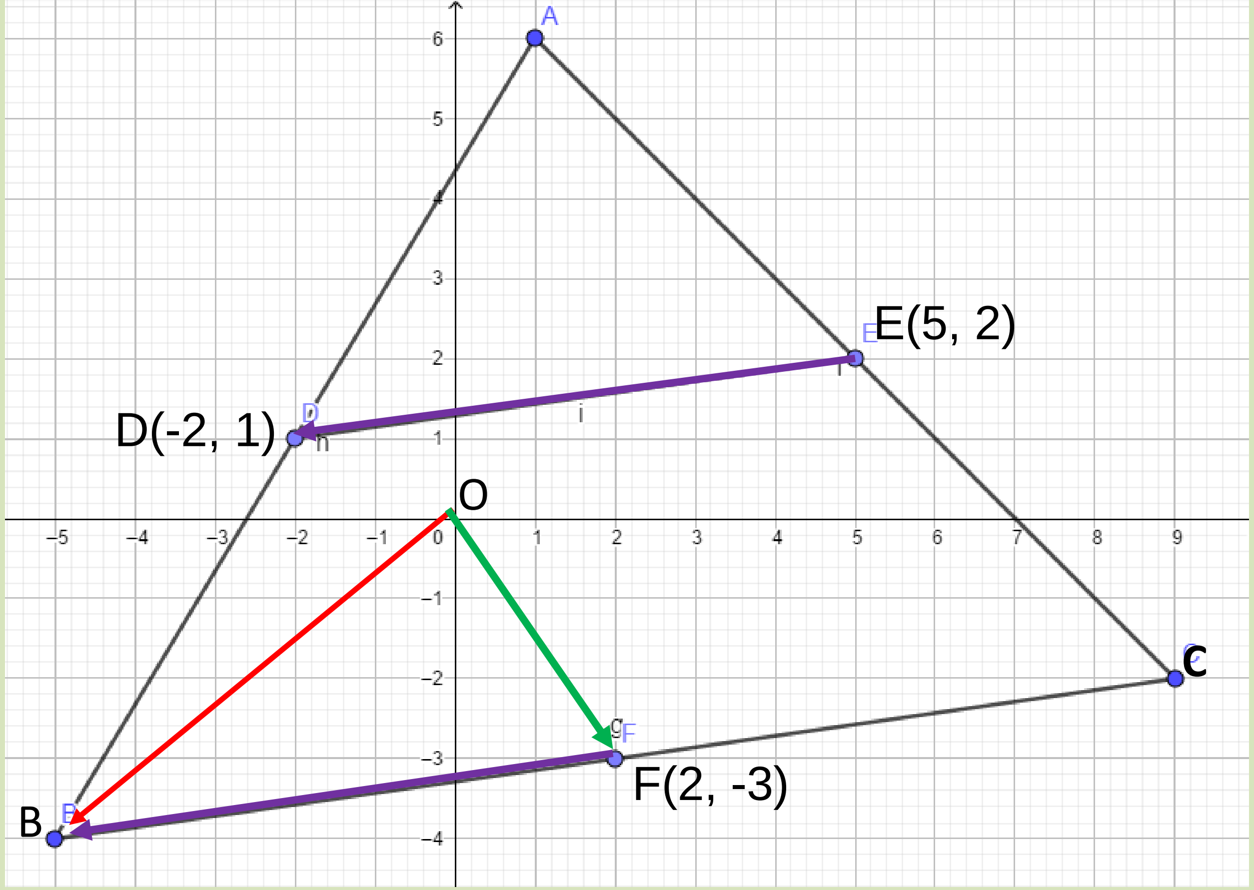
Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo A,B,C sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son D(-2,1), F(5,2),E (2,-3).



El triángulo buscado tiene sus lados paralelos al triángulo interior formado por los puntos medios y sus lados miden el doble que el triángulo interior.



Si se encuentran los vectores posición $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ el ejercicio estará resuelto, porque las componentes del vector posición son las mismas coordenadas del punto correspondiente.

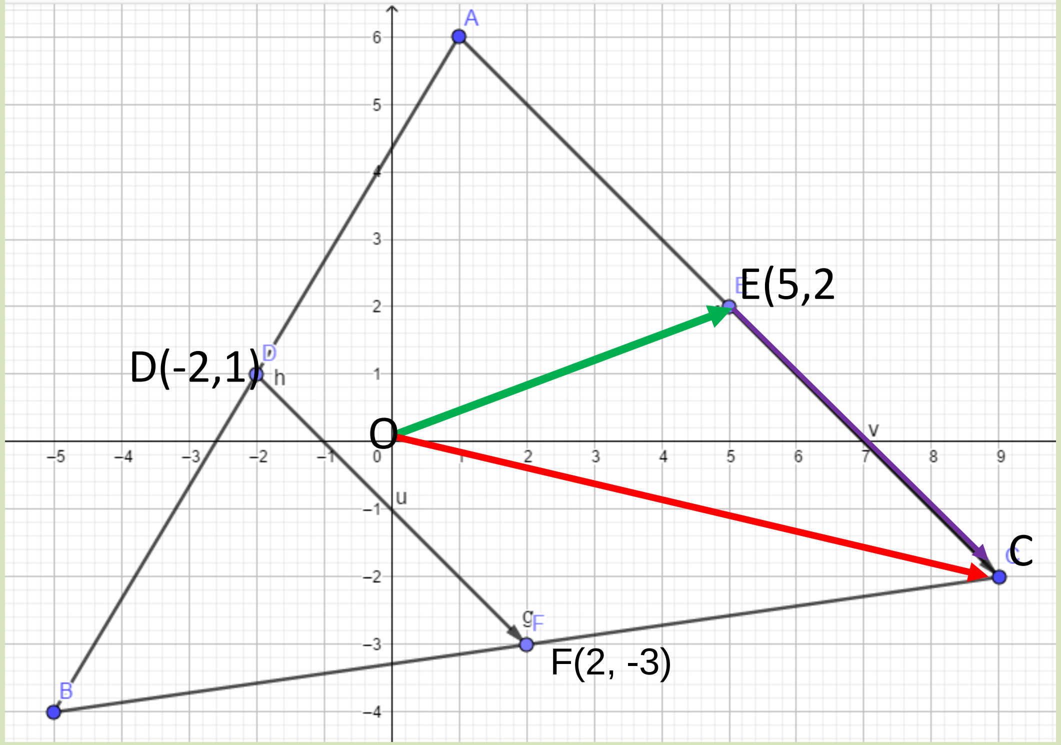


$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FB} \qquad \overrightarrow{OF} = \langle 2, -3 \rangle \qquad \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{ED}$$

$$\overrightarrow{ED} = \langle -2-5, 1-2 \rangle = \langle -7, -1 \rangle$$

$$\overrightarrow{OB} = \langle 2, -3 \rangle + \langle -7, -1 \rangle$$

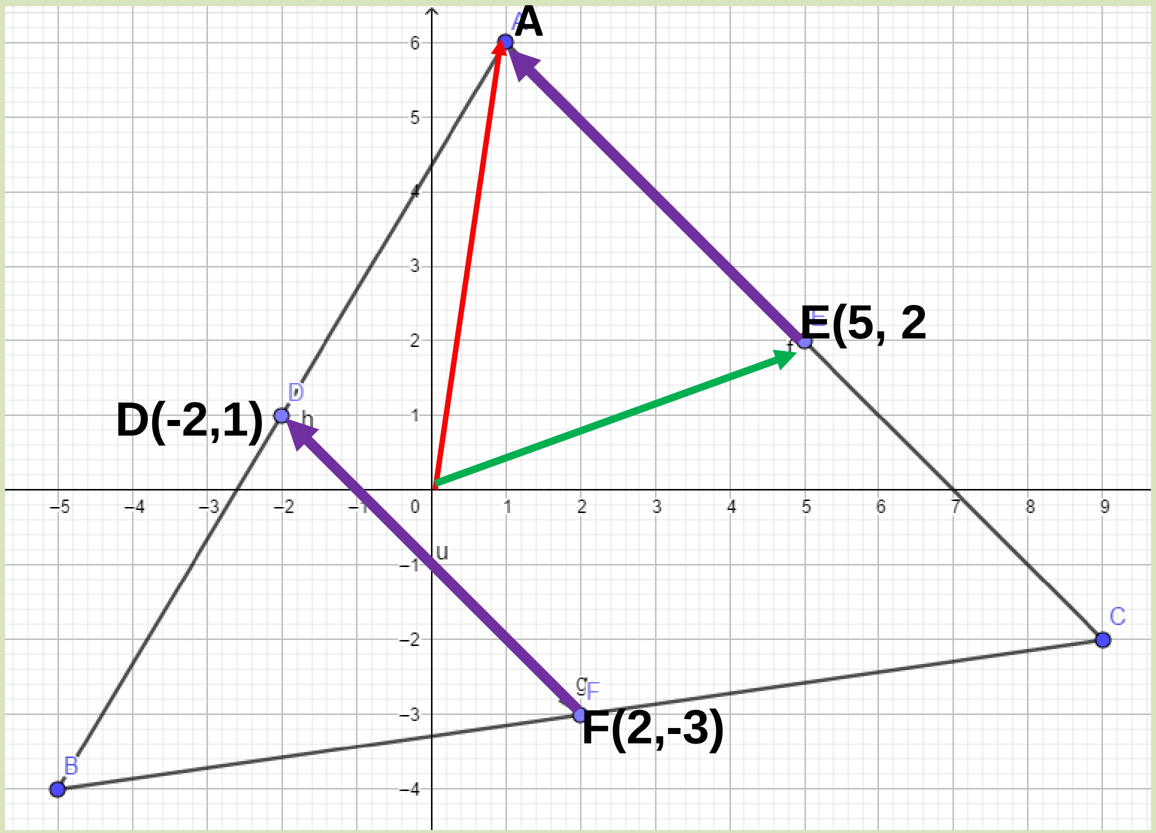
$$\overrightarrow{OB} = \langle -5, -4 \rangle \longrightarrow \textbf{B(-5,-4)}$$



$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EC} \qquad \overrightarrow{OE} = \langle 5,2\rangle$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DF} = \langle 2-(-2), -3-1\rangle = \langle 4,-4\rangle$$

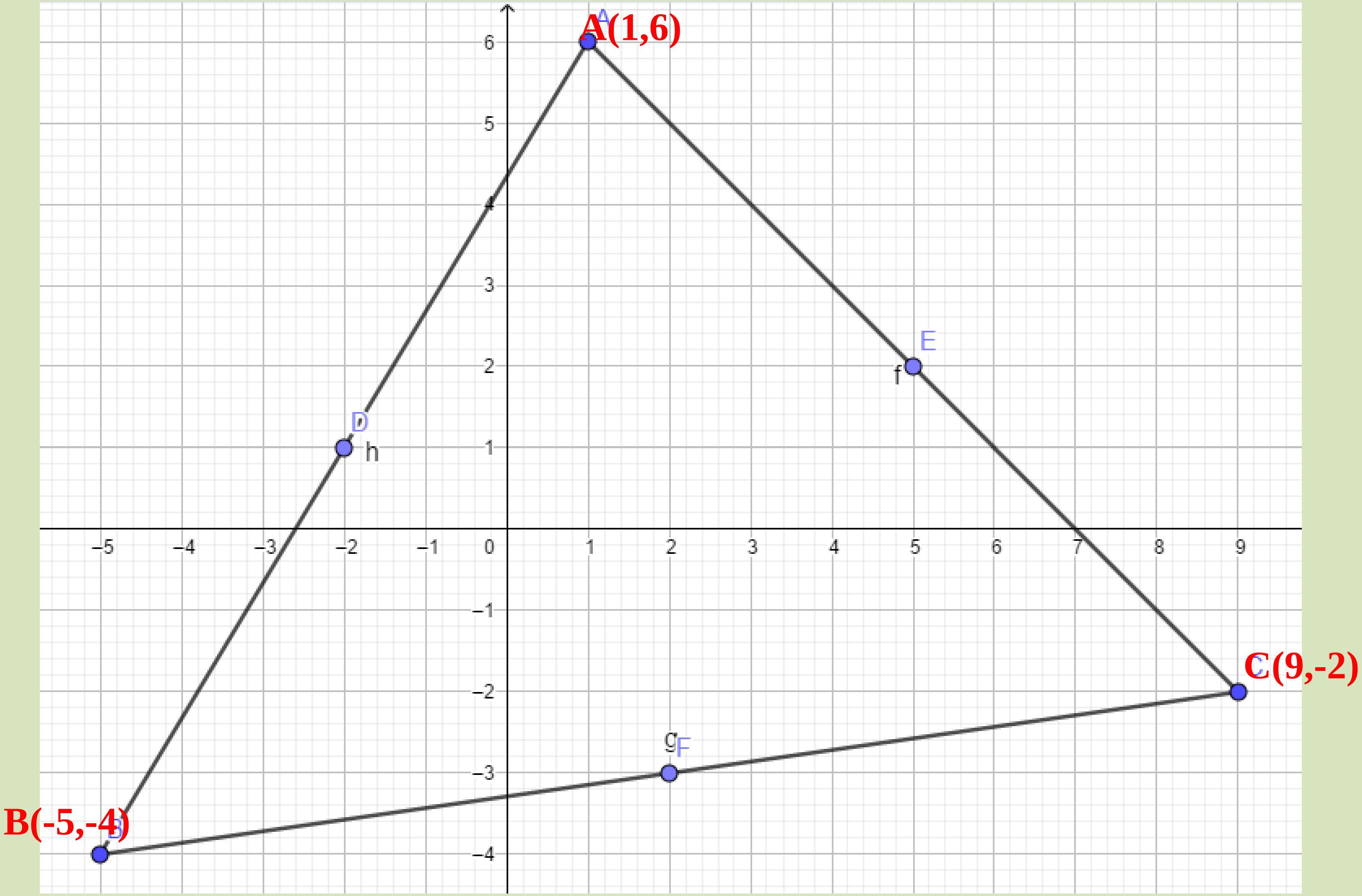
$$\overrightarrow{OC} = \langle 5,2\rangle + \langle 4,-4\rangle = \langle 9,-2\rangle \longrightarrow \mathbf{C(9,\text{-}2)}$$



$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA} \qquad \overrightarrow{OE} = \langle 5,2 \rangle$$

$$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FD} = \langle -2-2,\ 1-(-3)\rangle = \langle -4, 4\rangle$$

$$\overrightarrow{OA} = \langle 5,2\rangle + \langle -4, 4\rangle = \langle 1,6\rangle \longrightarrow A(1,6)$$


A(1,6)
B(-5,-4)
C(9,-2)
D
E
F
h
f
g
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9