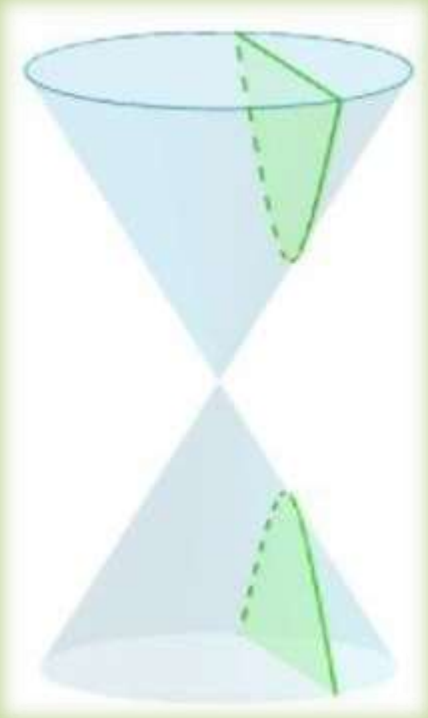
La Hipérbola



- **MIS VALORES**

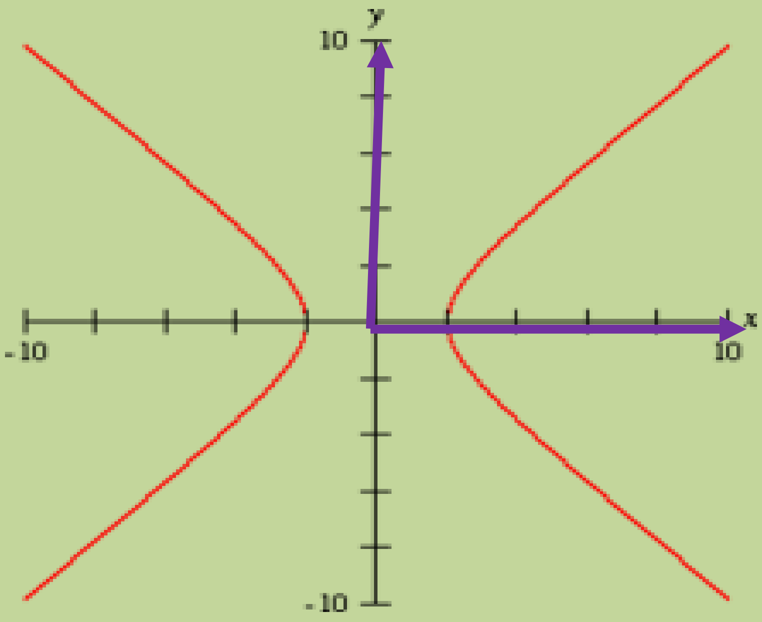
Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

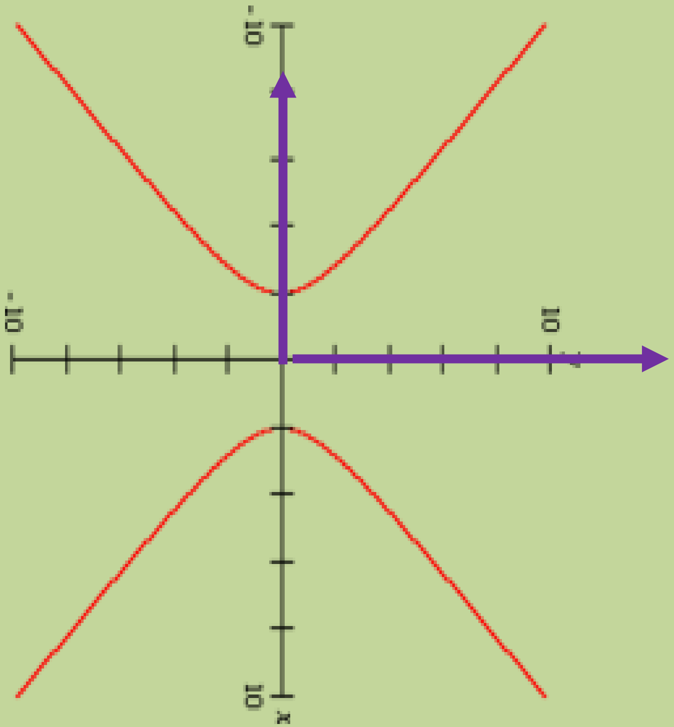
- **MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

- **MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema.
  Servir a las personas.

La ecuación de la hipérbola es parecida a la de la Elipse, solo que uno de los dos términos de la izquierda es negativo. No obstante, la forma de su gráfica es muy diferente.
Presenta dos ramales separados: uno a la izquierda y otro a la derecha.
Además, la orientación en uno u otro eje depende del término positivo y no de cuál eje sea mayor como acontece con la elipse.

HIPÉRBOLA: orientación



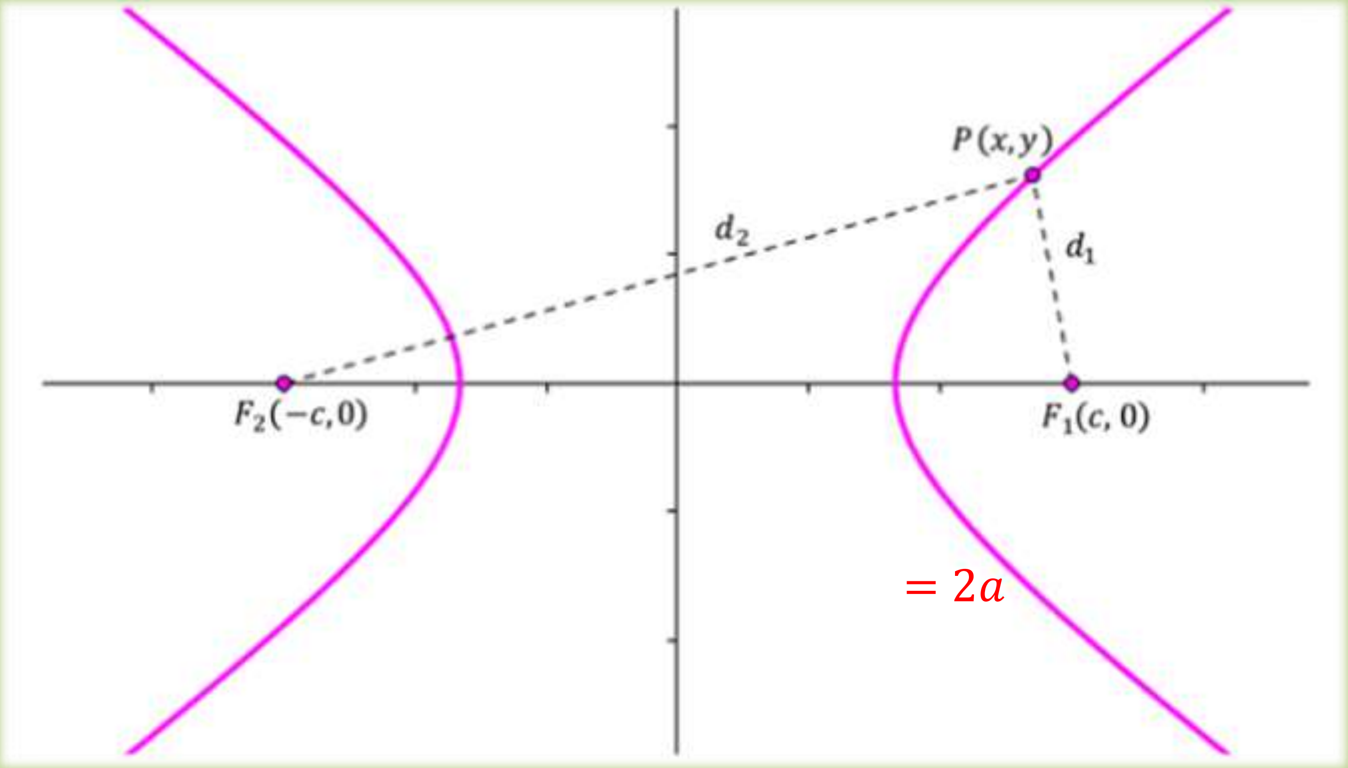


Eje focal horizontal x

Eje focal vertical y

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

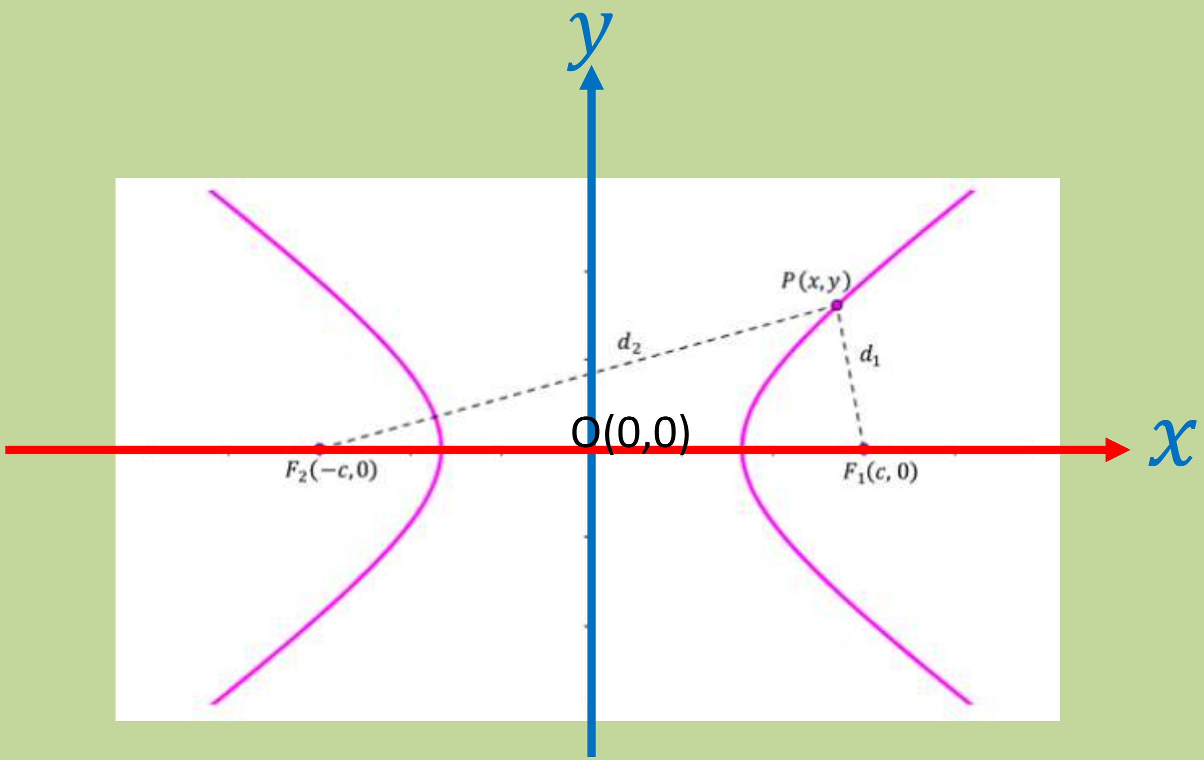
$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$



Hipérbola: conjunto de puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a los focos es constante.

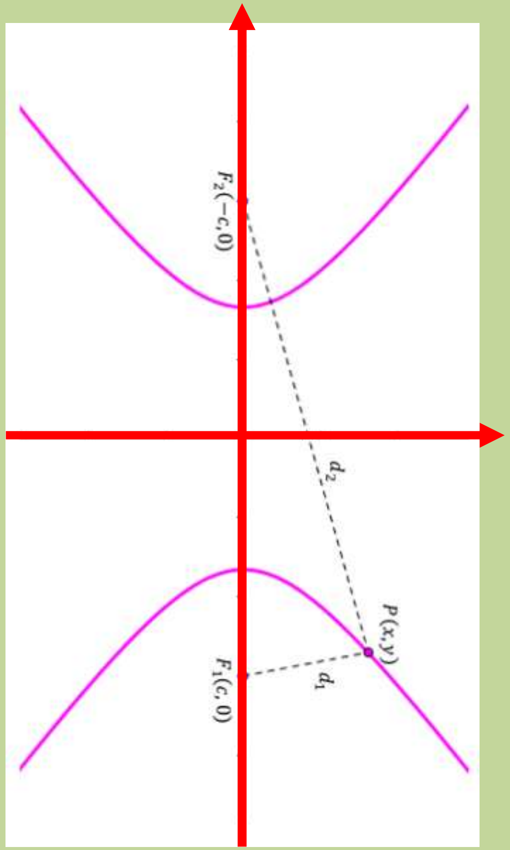
$$|d_1 - d_2| = 2a$$

Hipérbola con centro en O(0,0)



Eje focal horizontal x

$$+\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



Eje focal vertical y

$$+\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Ecuación canónica, estándar o reducida de la hipérbola

Si despejamos y

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2}$$

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$

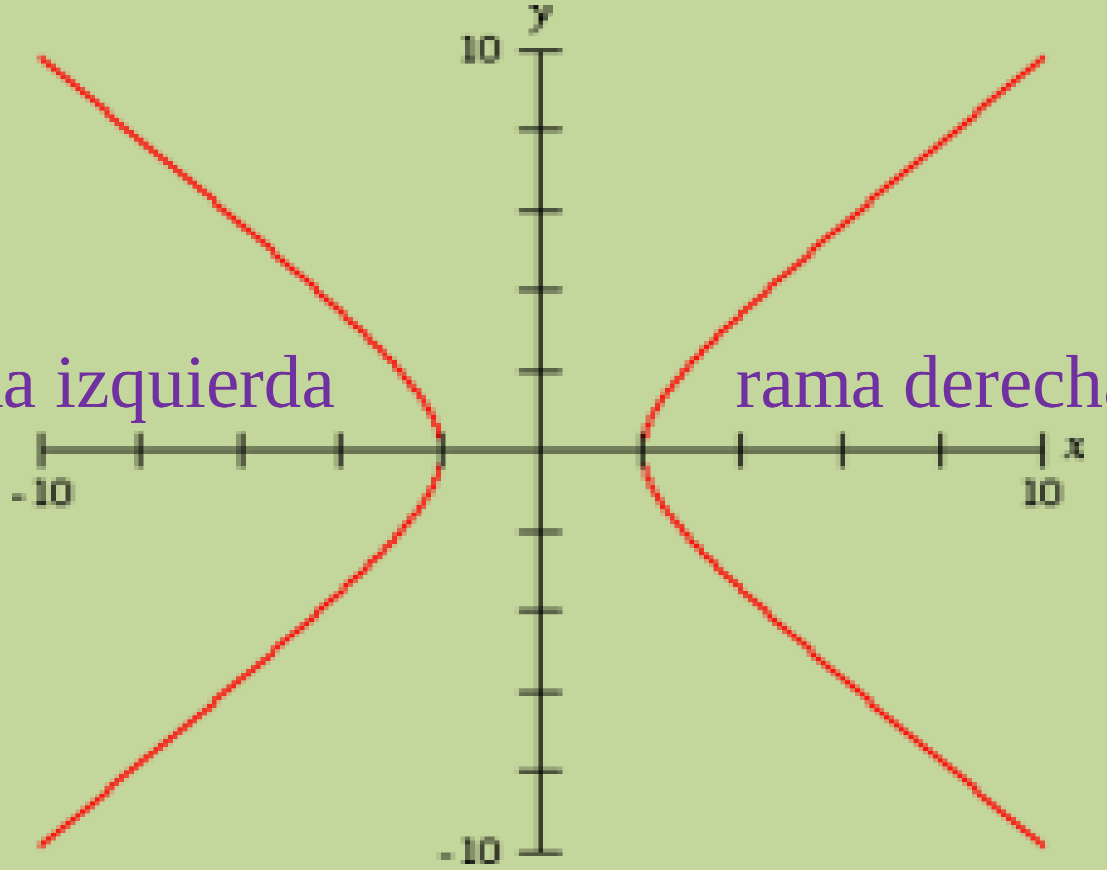
$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

rama izquierda rama derecha

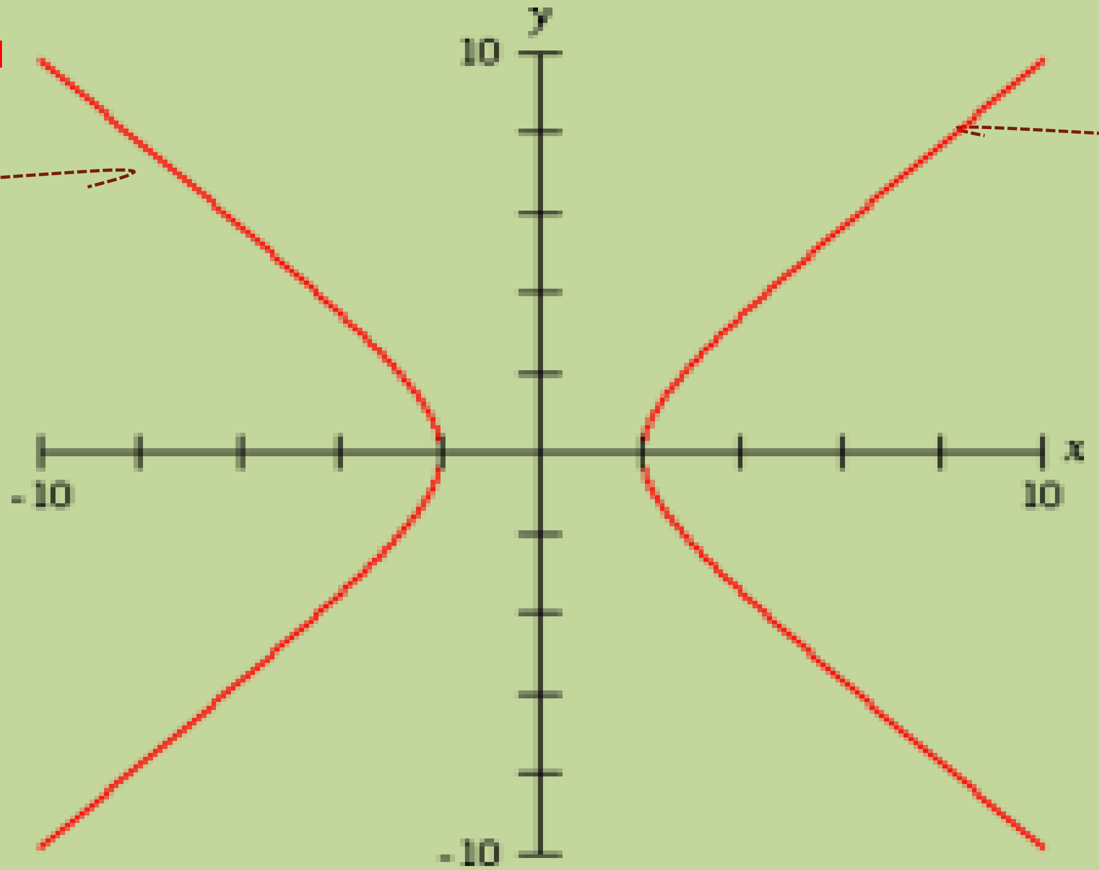
La hipérbola tiene dos ramas:



rama izquierda

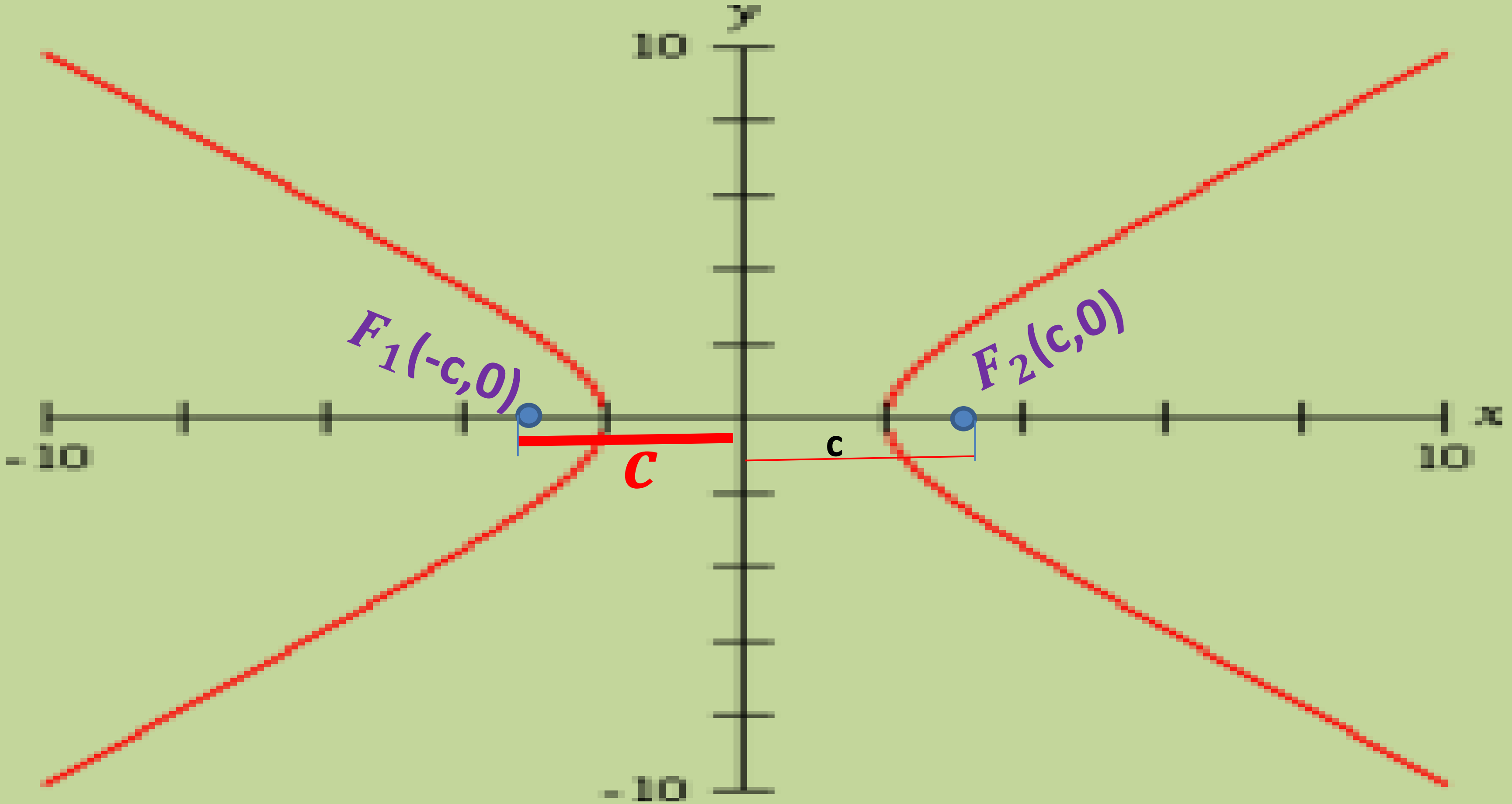
rama derecha

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$



$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

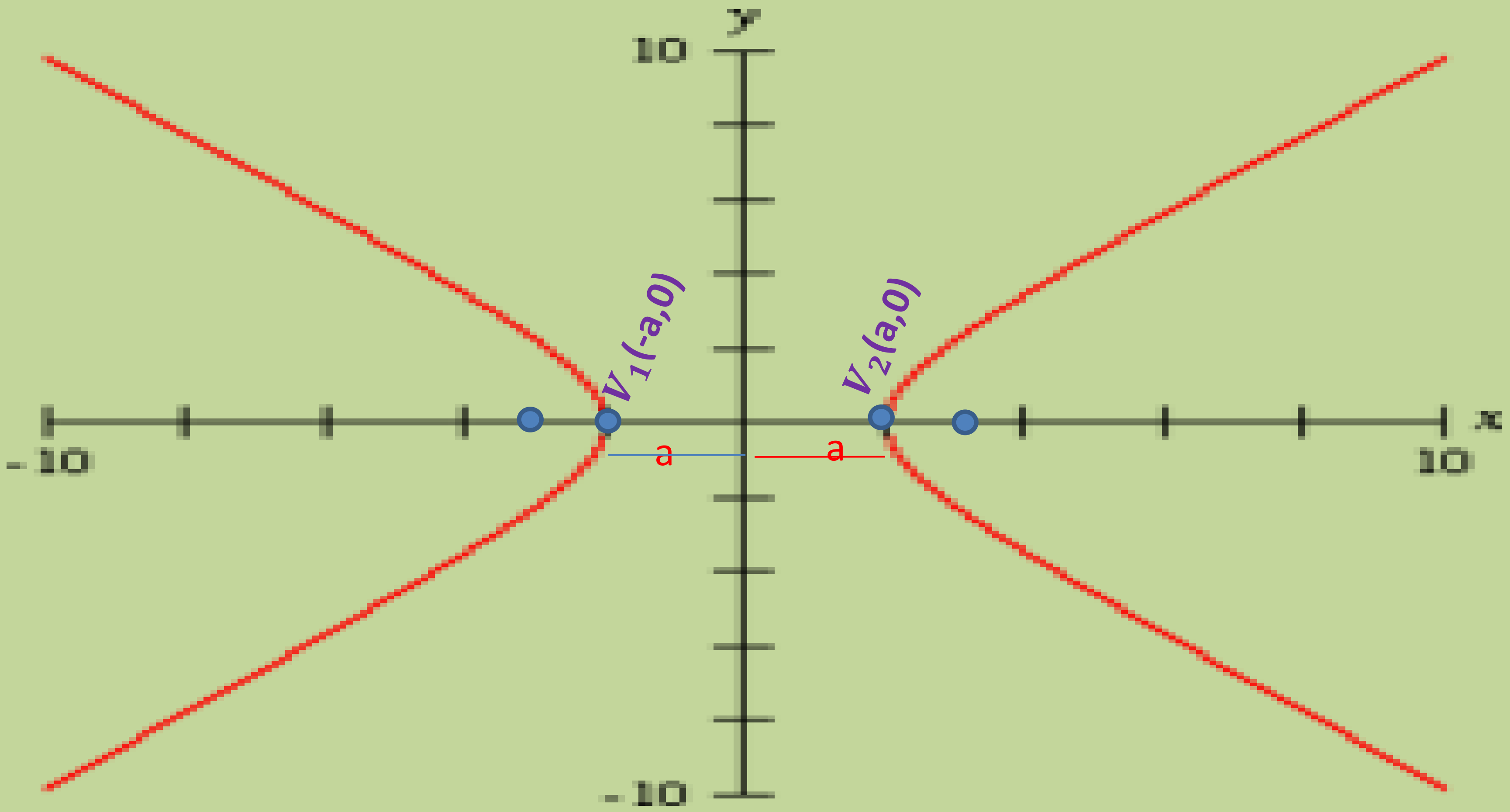
La hipérbola también tiene dos focos



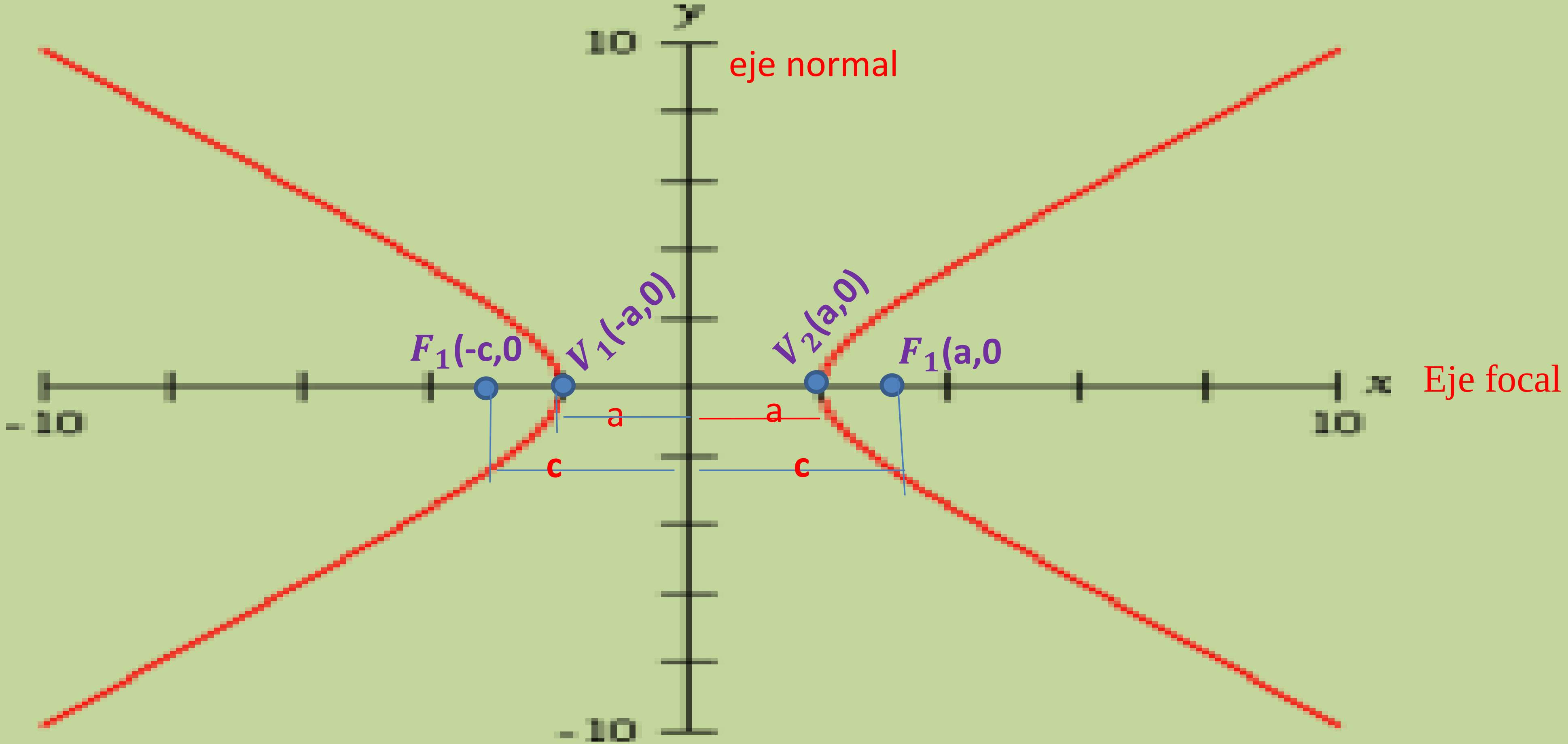
c es la distancia del foco al centro.

La distancia entre los dos focos es 2c

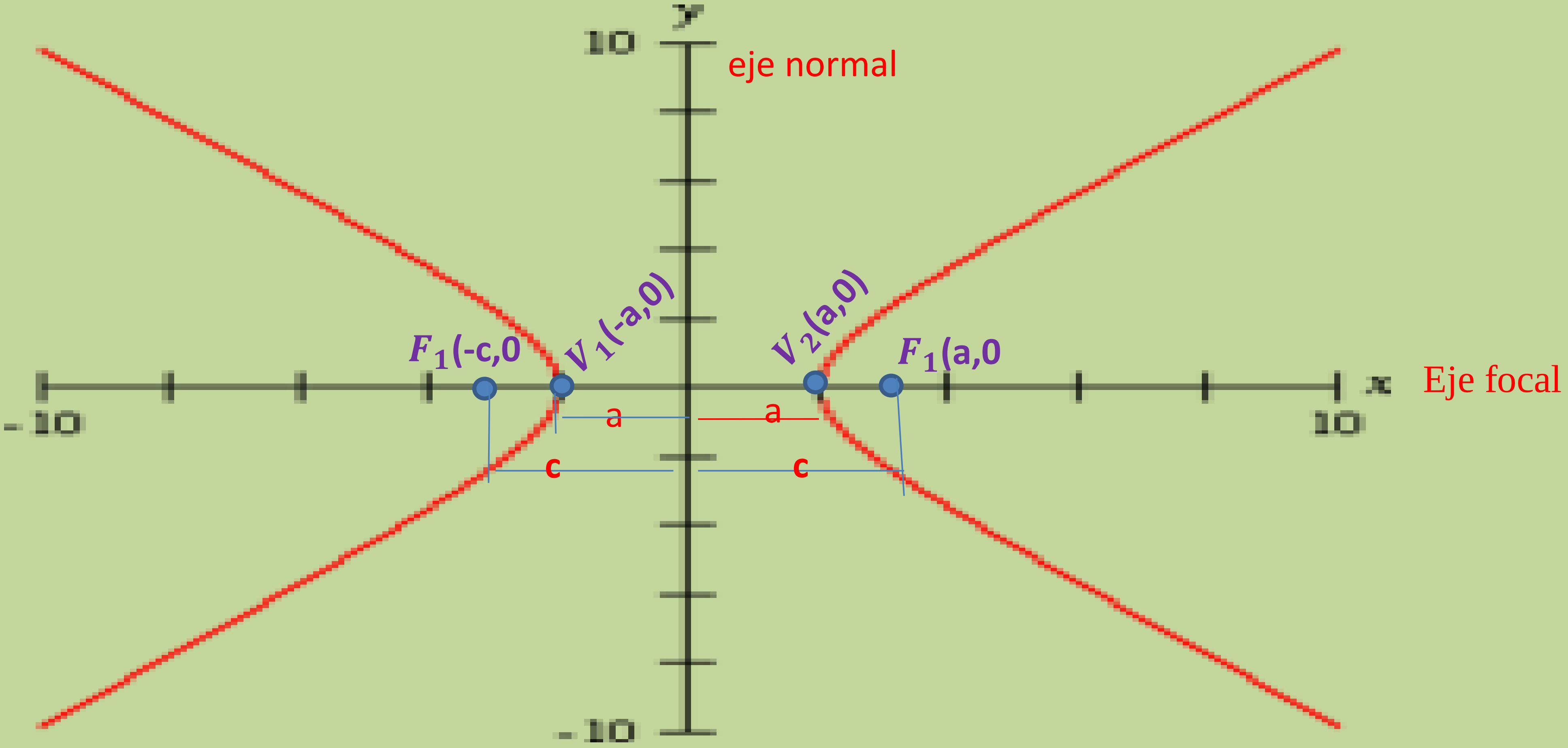
La hipérbola tiene dos vértices



a es la distancia del vértice al centro.
La distancia entre los dos vértices es 2a



1. Focos: son los puntos fijos F_1, F_2.
2. Distancia focal: es la distancia entre los focos y se representa por 2c. c distancia del foco a (0,0).
3. Eje focal: es la recta que pasa por los focos.
4. Vértices: son los puntos donde el eje focal corta la hipérbola: V_1, V_2. Distancia entre vértices:2ª.

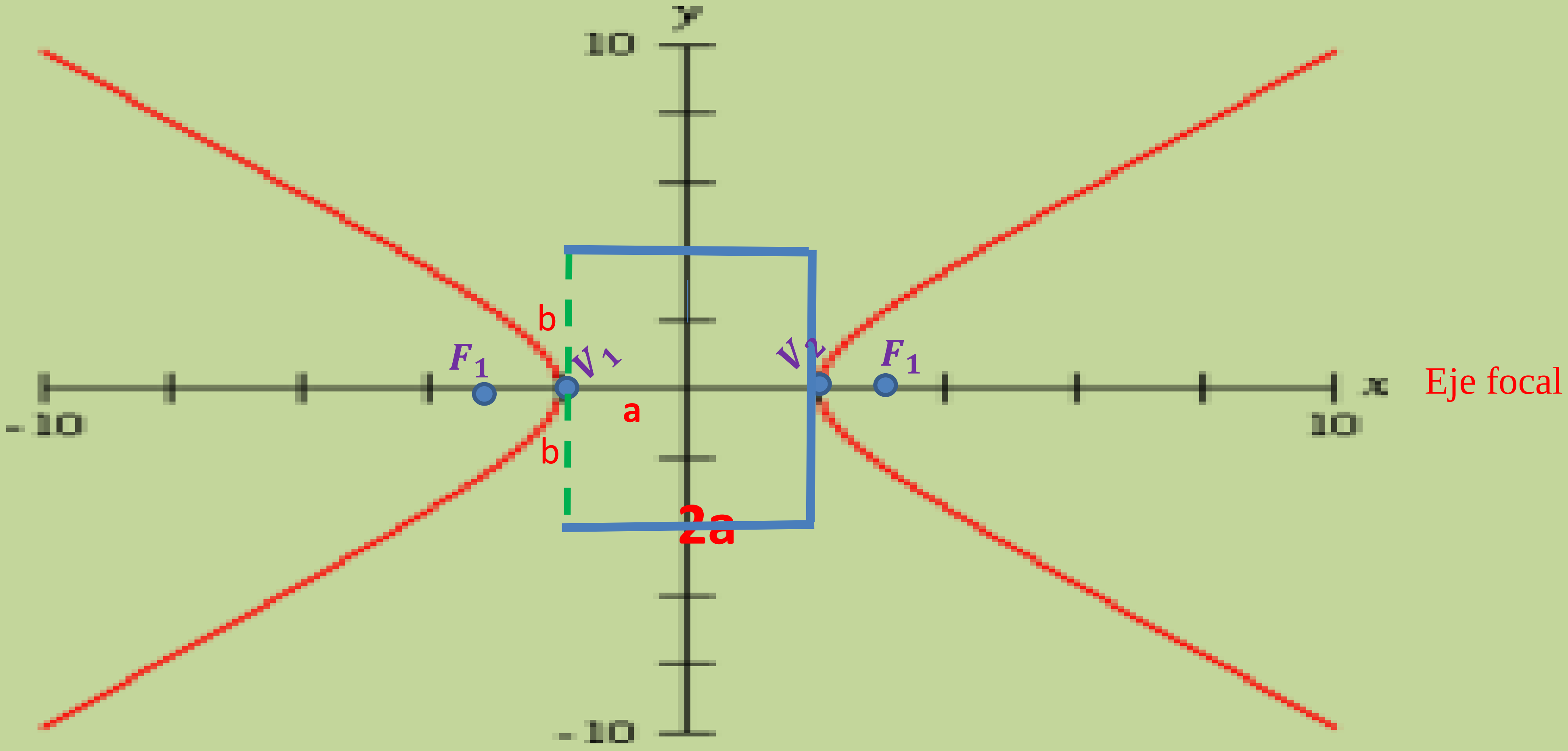


5. Eje transverso: es el segmento entre los vértices V1 y V2.

6. Centro: es el punto medio del segmento V1 y V2.

7. Eje normal: es la recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro de la hipérbola.

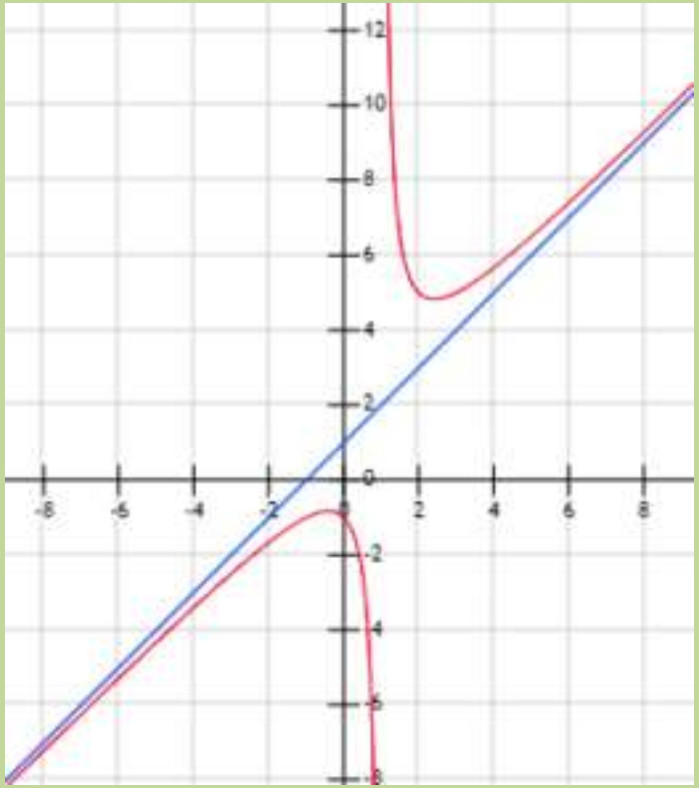
Si el valor de b se sitúa en el eje y, se tiene el rectángulo central de dimensiones 2a*2b:



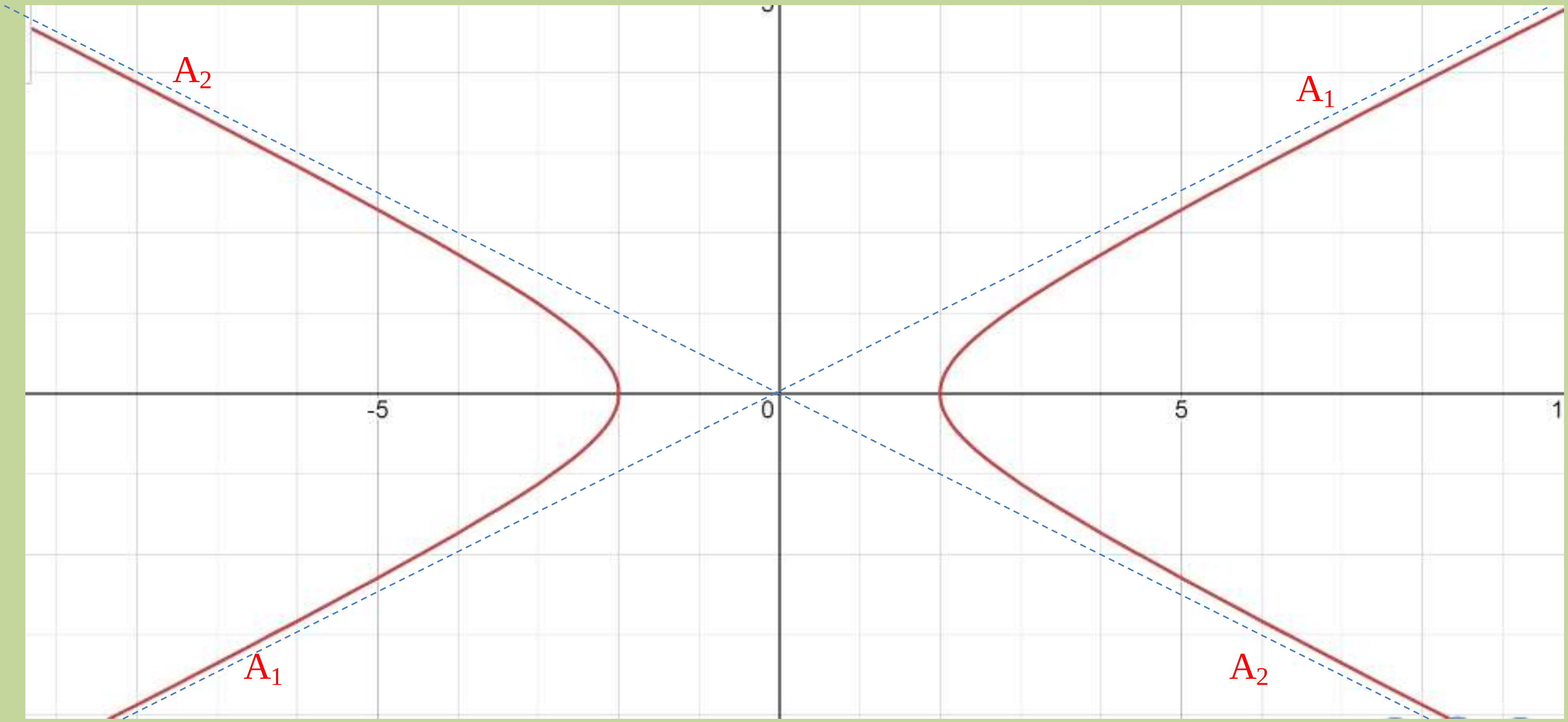
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c=\sqrt{a^2 + b^2}$$

Asíntota



Cuando una recta trata de acercarse más y más a una curva pero nunca la alcanza, la recta se denomina asíntota.



Las Asíntotas de la hipérbola (A_1 y A_2) son dos líneas rectas que se aproximan cada vez más a la hipérbola pero no llegan a intersectarla. Cada vez la recta está más cerca de la curva de la hipérbola pero no llega a tocarla.

https://www.mathway.com/es/Graph

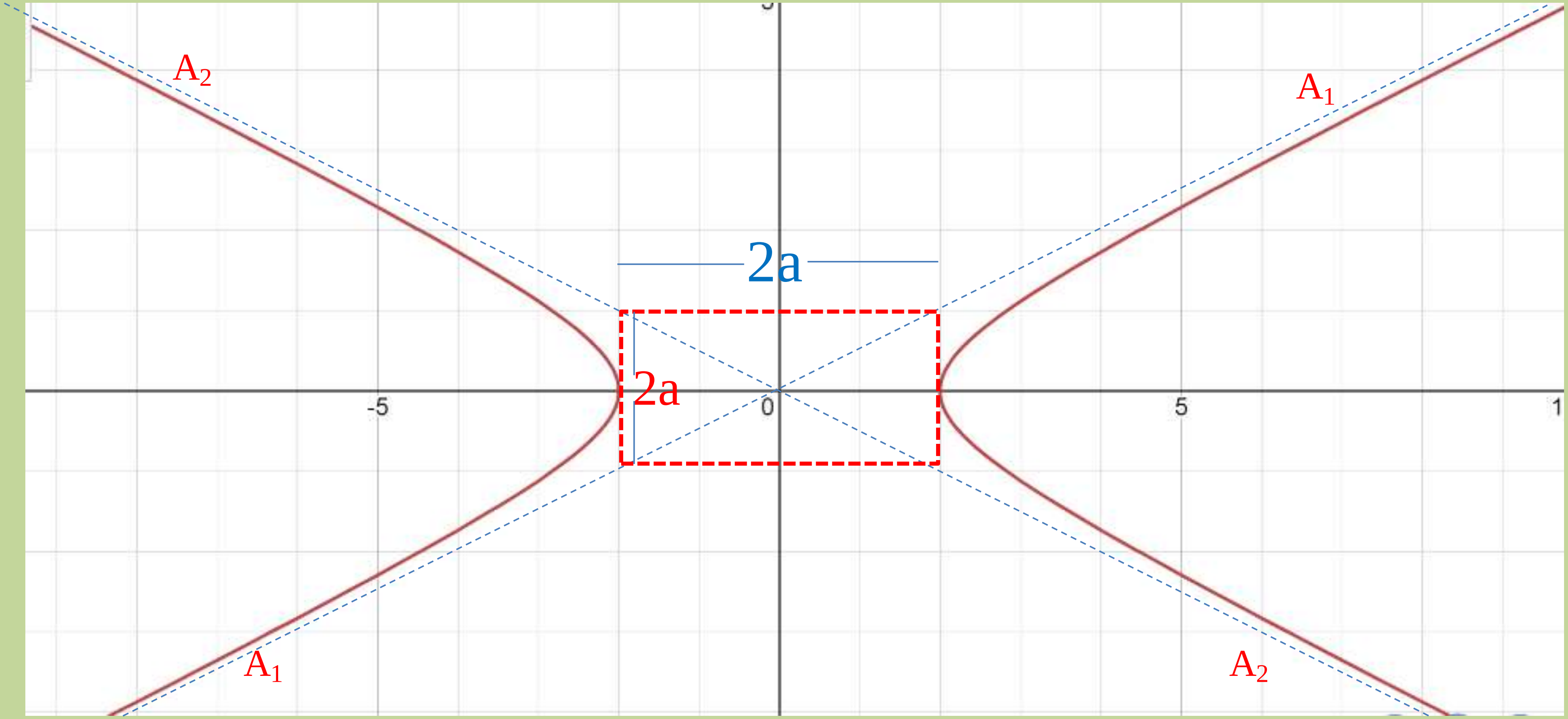
Ecuaciones de las Asíntotas de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si se hace un tratamiento algebraico conveniente a partir de la ecuación de la hipérbola se obtienen las asíntotas:

$$\boldsymbol{y = -\frac{b}{a}x}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{b}{a}x}$$



Las asíntotas de la hipérbola son dos líneas que se cortan en el origen de coordenadas, o en el centro de la hipérbola. Con el rectángulo central formado por 2a y 2b son de gran ayuda para graficarla.

Ejercicio 1

Se tiene la siguiente ecuación $x^2 - 4y^2 = 4$ hallar todos sus elementos y graficarla.

$$x^2 - 4y^2 = 4*1$$

$$\frac{x^2 - 4y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{4y^2}{1} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a = 2, \quad b = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} = 2.2$$

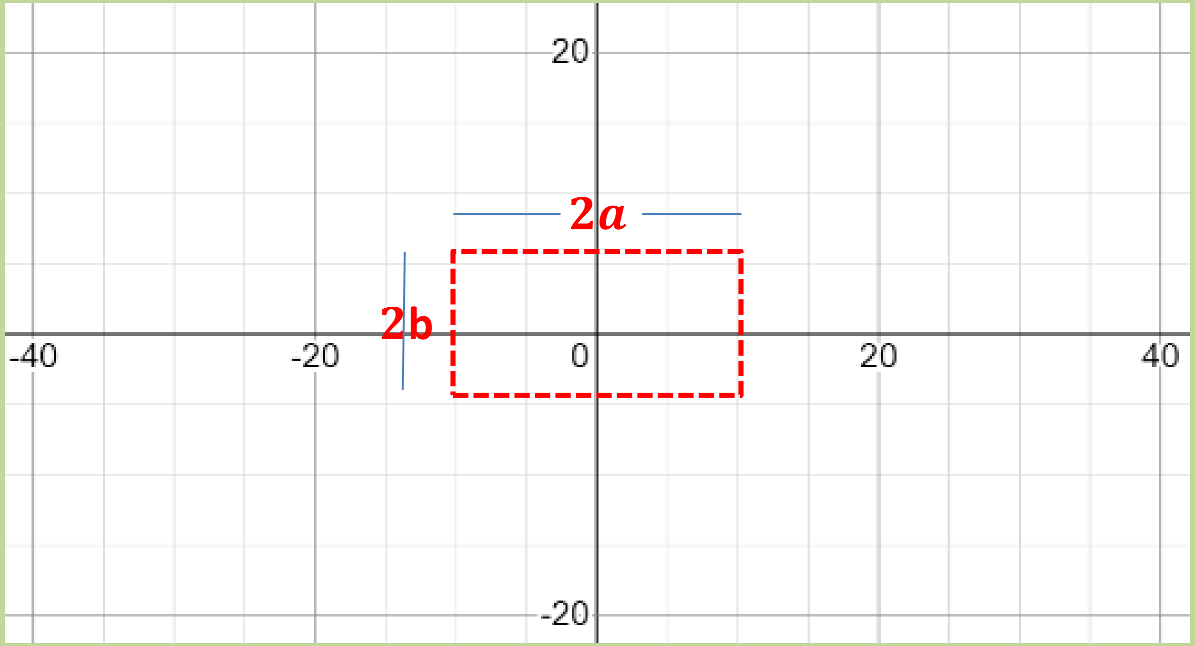
La ecuación es igual a 1 y $\frac{x^2}{a^2}$ es positiva, la hipérbola tiene eje focal horizontal.

Como el centro coincide con los ejes coordenados, se deduce que:

Los vértices: V_1 está ubicado $-a$ del centro: $V_1(-a,0)$, $V_2(a,0)$:$V_1(-2,0)$, $V_2(2,0)$.
Los focos: F_1 está ubicado $-$c del centro: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$:$F_1(-2.2,0)$, $F_2(2.2,0)$.
Distancia focal es: 2c =2*2.2=4.4
Distancia entre vértices (eje transverso)= 2a=2*2=4

Pasos para graficar la hipérbola

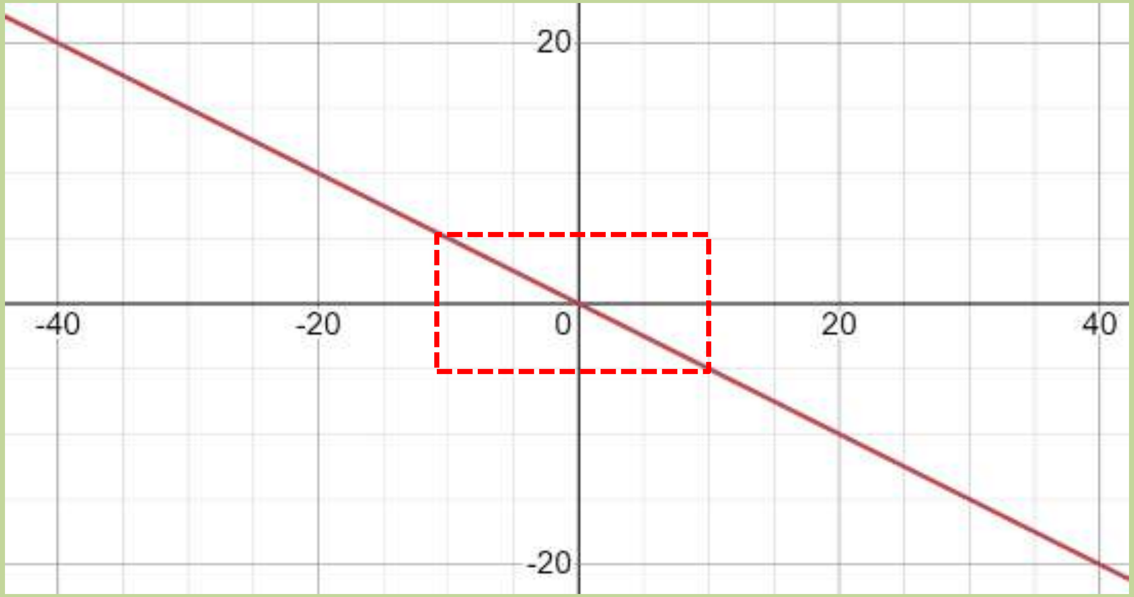
$$a = 2, \qquad b = 1$$



Conocidos sus elementos, se grafica el rectángulo central formado por 2a y 2b.

https://www.mathway.com/es/Graph

Primera asíntota

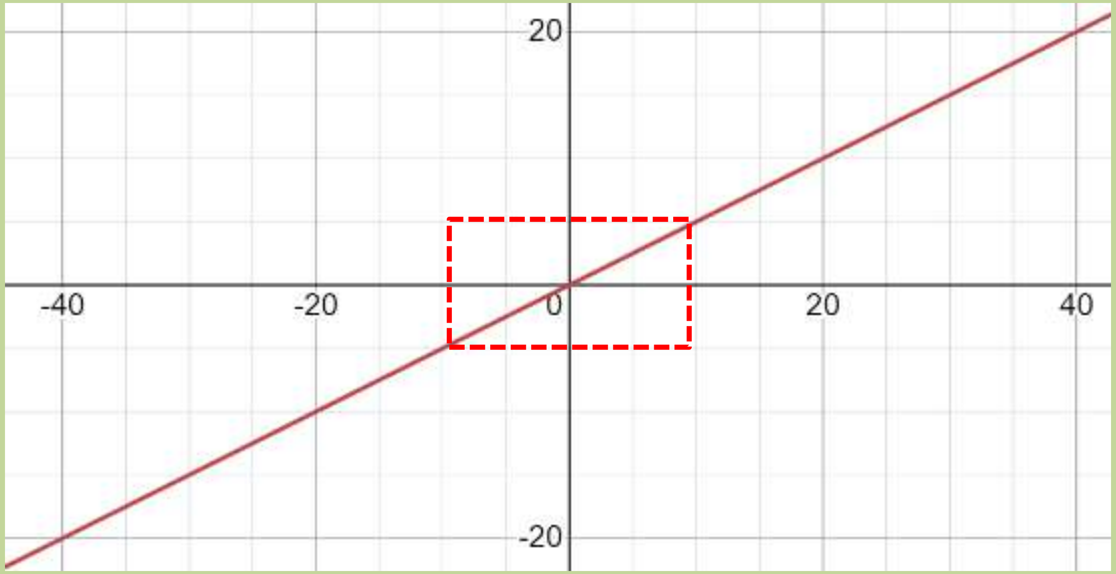


$$y = -\frac{b}{a}x, \qquad y = -\frac{1}{2}x$$

La primera recta asíntota se grafica fácilmente por la diagonal del rectángulo

https://www.mathway.com/es/Graph

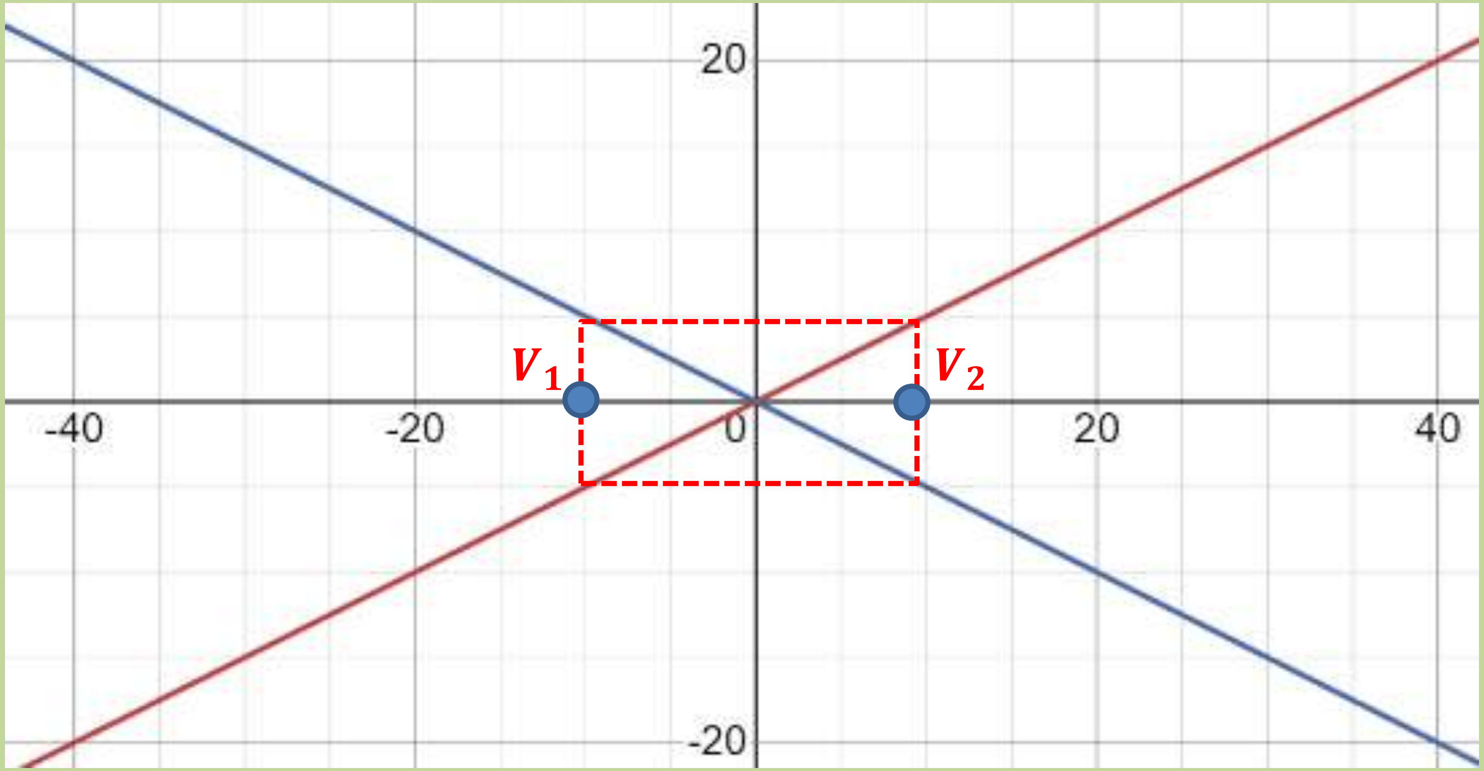
Segunda asíntota



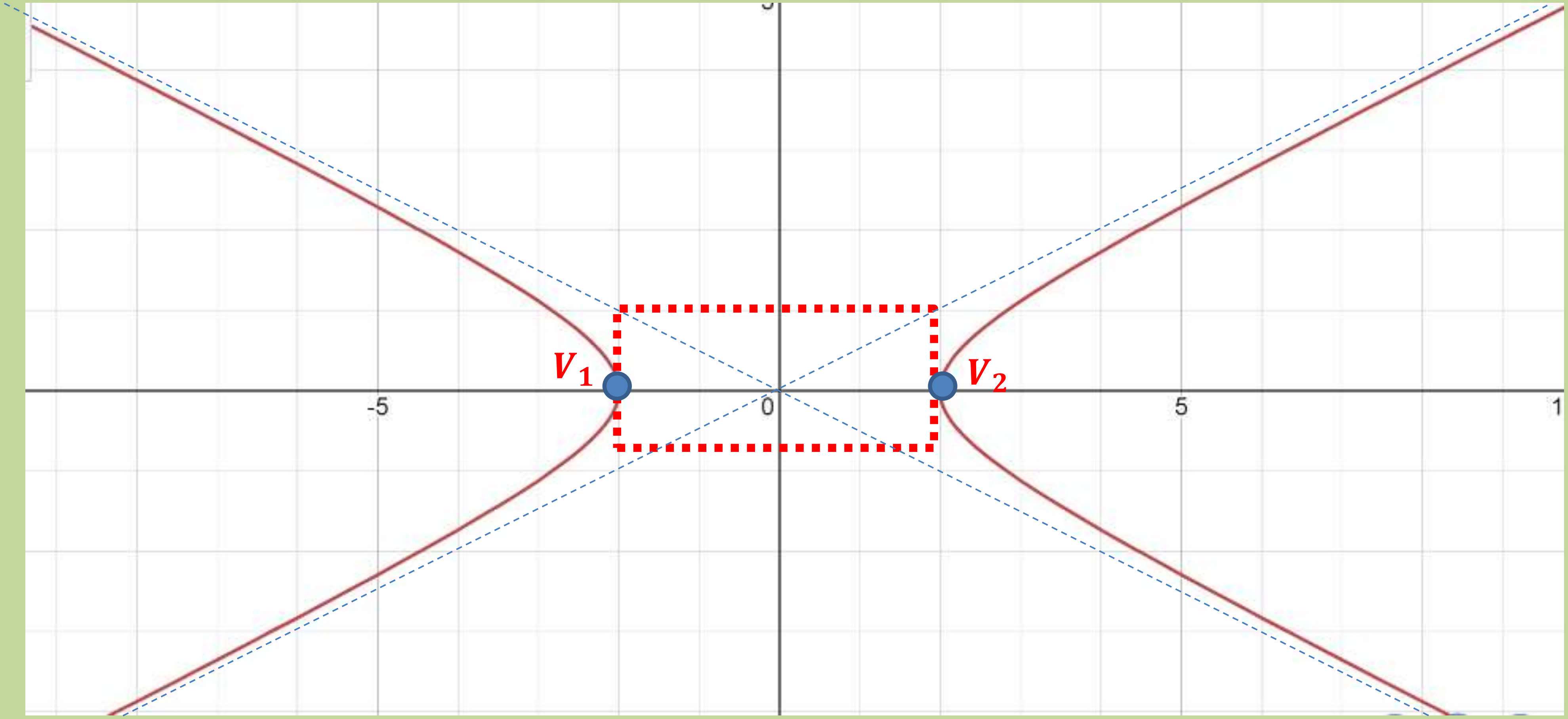
$$y = \frac{b}{a}x, \qquad y = \frac{1}{2}x$$

La segunda recta asíntota se grafica por la otra diagonal del rectángulo.

https://www.mathway.com/es/Graph

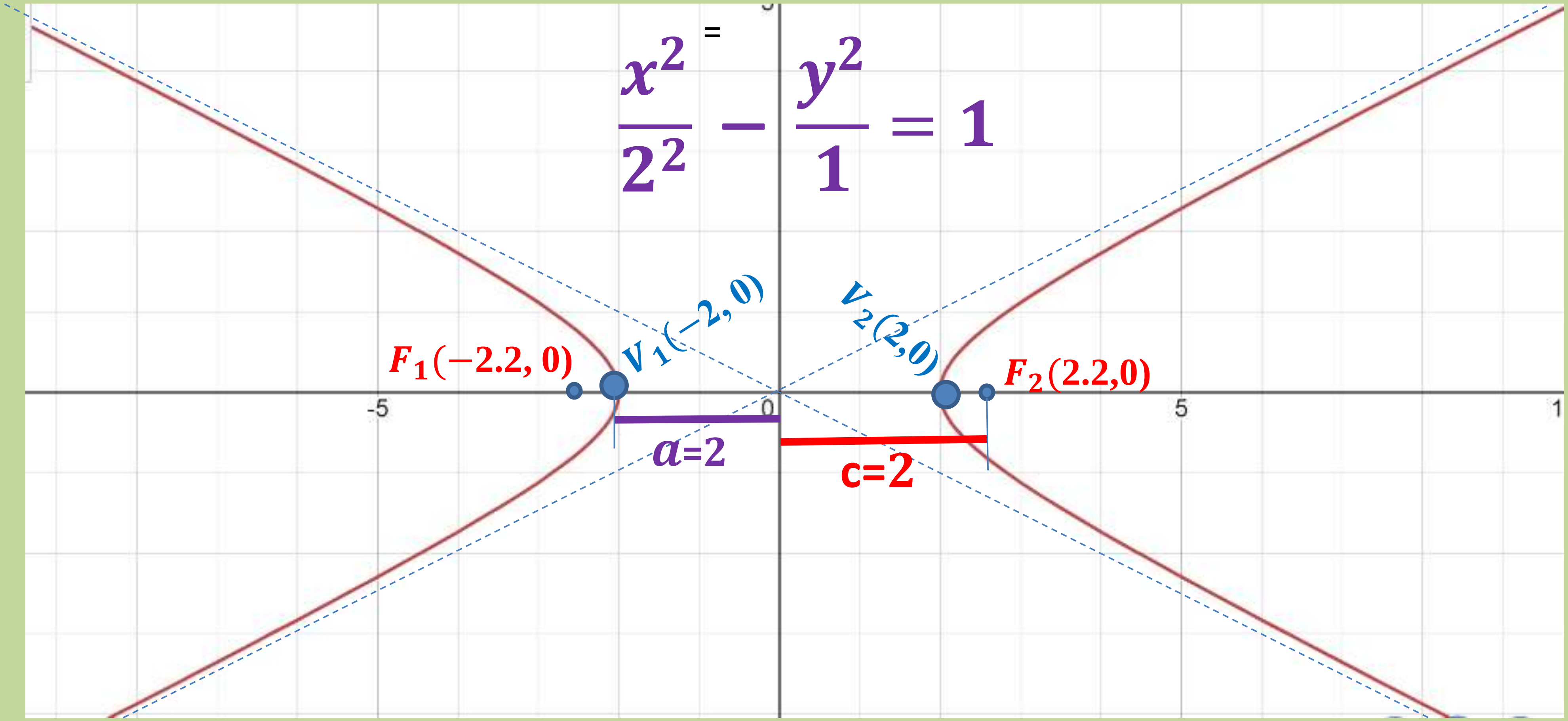


Se procede a trazar en forma aproximada la hipérbola partiendo de los puntos V_1 y V_2 que son los vértices y cuidando de que la curva se vaya acercando poco a poco a las rectas.



$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1} = 1$$

https://www.mathway.com/es/Graph



Se procede a ubicar los demás elementos de la hipérbola. Si se lo permiten, con una aplicación como la usada en estas diapositivas se grafica fácilmente cualquier tipo de curva: https://www.mathway.com/es/Graph

Traslación de la hipérbola centrada en el origen a cualquier punto del plano.

Se procede de la misma manera como se hizo con la elipse.

La ecuación de la hipérbola con centro O’(h, k) y eje focal paralelo al eje x (horizontal):

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k^2)}{b^2} = 1$$

Esta ecuación representa una hipérbola con centro Ó (h, k) y eje focal paralelo al eje x.

Ejercicio 2

Se tiene la siguiente $ecuación\ 9x^2\ ^{-}\ 4y^2\ + 54x + 16y + 29 = 0$
Demostrar que corresponde a una hipérbola, hallar sus elementos y graficarla.

$$B^2 - 4AC = ?$$

$0 - 4 * 9 * (-4) = 144$ es +

La ecuación representa una hipérbola.

$$9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 29 = 0$$

$$9x^2 + 54x - 4y^2 + 16y + 29 = 0$$

$$9\{x^2 + 6x\} - 4\{y^2 - 4y\} + 29 = 0$$

$$9\{(x^2 + 6x)\} - 4\{(y^2 - 4y)\} + 29 = 0$$

$$9\{(x^2 + 6x + 9 - 9)\} - 4\{(y^2 - 4\text{y} + 4 - 4)\} + 29 = 0$$

$$9\{(x + 3)^2 - 9\} - 4\{(y - 2)^2 - 4\} + 29 = 0$$

$$9\{(x + 3)^2 - 9\} - 4\{(y - 2) - 4)\} + 29 = 0$$

$$9(x+3)^2 - 81 - 4(y-2)^2 + 16 + 29 = 0$$

$$9(x+3)^2 - 4(y-2)^2 - 36 = 0$$

$$9(x+3)^2 - 4(y-2)^2 = 36$$

$$9(x\ +3)^2 - 4(y-2)^2 = 36 * 1$$

$$\frac{9(x\ +3)^2}{36} - \frac{4(x-\ 2)^2}{36} = 1$$

$$\frac{9(x\ +3)^2}{36} - \frac{4(x-\ 2)^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x\ +3)^2}{4} - \frac{(y-\ 2)^2}{9} = 1$$

Hipérbola con centro en **(-3,2)**

$$\frac{(x\ +3)^2}{2^2}-\frac{(y-\ \ 2)^2}{3^2}=1 \qquad \frac{(\boldsymbol{x}-(-\mathbf{3})\ )^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}^{\mathbf{2}}}-\frac{(\boldsymbol{y}-\mathbf{2}))^{\mathbf{2}}}{\mathbf{3}^{\mathbf{2}}}=\mathbf{1}$$

$$a=2$$

$$b=3$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}=3.6$$

La hipérbola tiene eje focal paralelo al eje x, entonces los vértices son:

$$x' = x - h$$

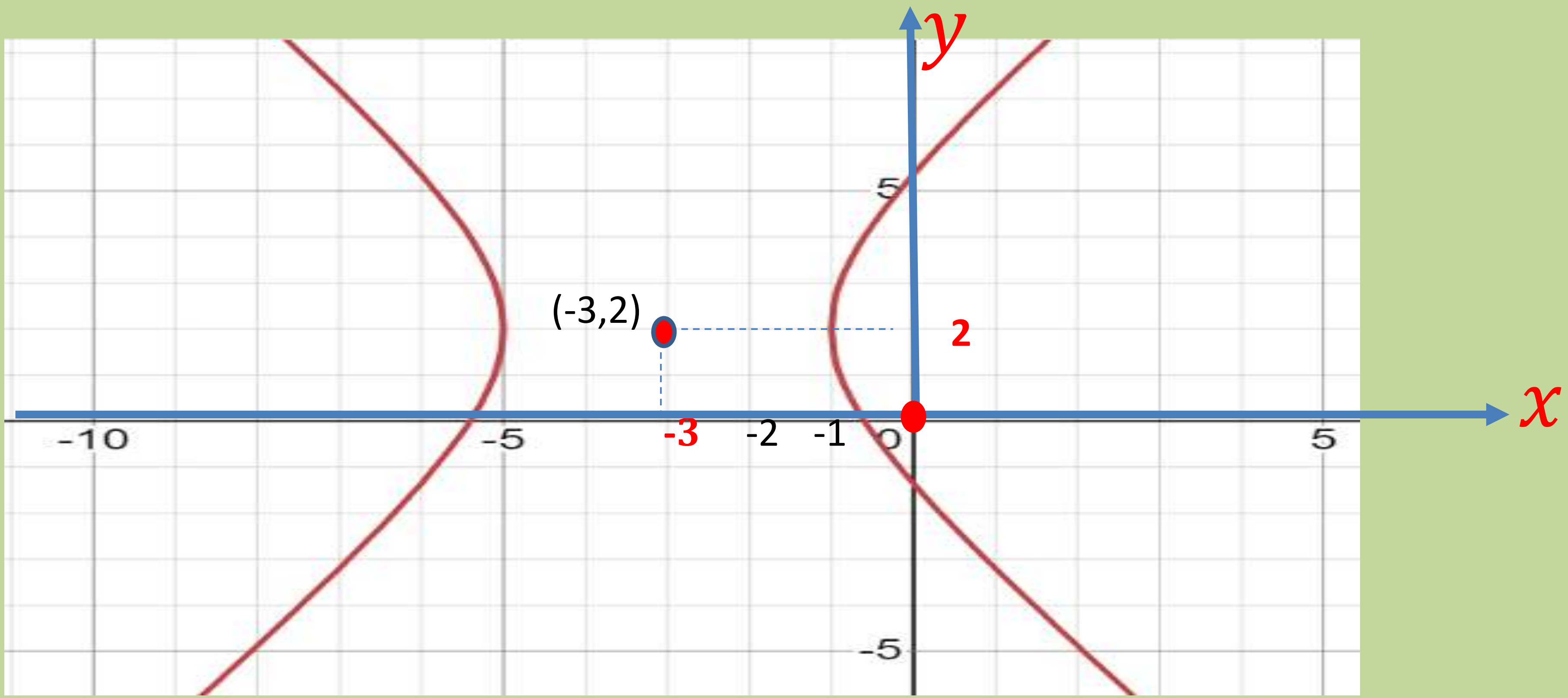
$$V_1 = (h - a, k) = (-3 - 2,2) = (-5, 2)$$

$$V_2 = (-3 + 2,2) = (-1, 2)$$

Los focos son:

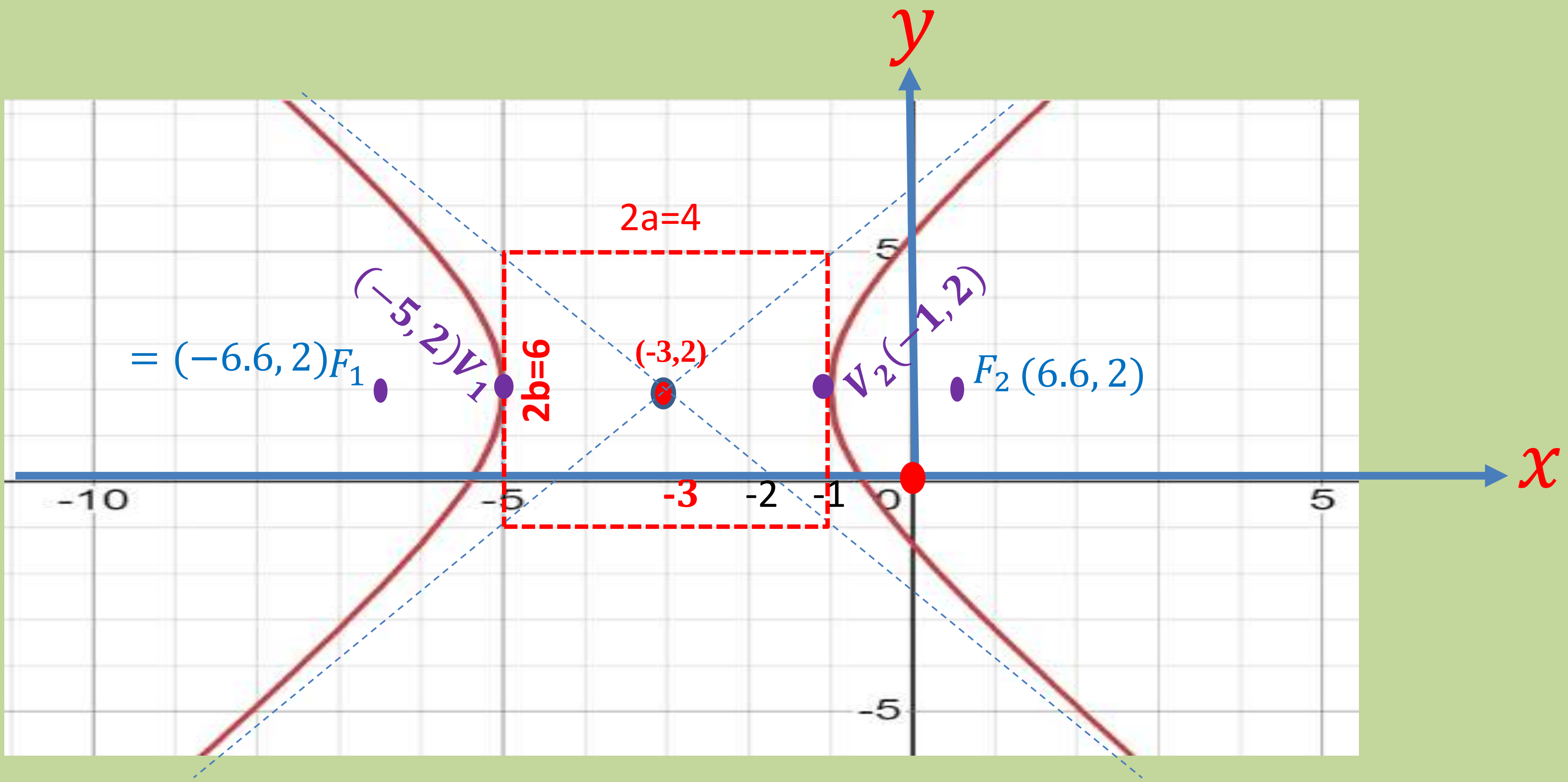
$$F_1 = (h - c, k) = \left(-3 - \sqrt{13}\,, 2\right) = (-6.6, 2)$$

$$F_2 = (h + c, k) = \left(3 + \sqrt{13}, 2\right) == (6.6, 2)$$



https://www.mathway.com/es/Graph

Elementos de a hipérbola $\frac{(x+3)^2}{2^2} - \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$



Jugar con la hipérbola:

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/c9_hiperbola_ecuacion2.html