Proyección vectorial
Proyección escalar
Distancias

Diapositivas realizadas por Efrén Giraldo T. MSc.

Su único objetivo es facilitar el estudio.

Enail: hegiraldo2@Gmail.com

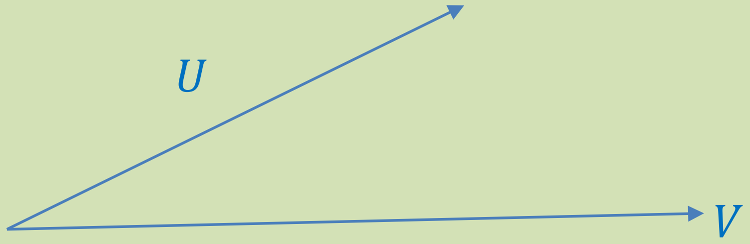
Proyección vectorial y proyección escalar de un vector

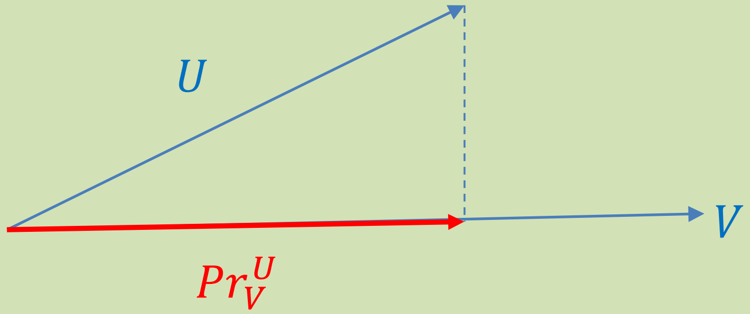
Las proyecciones de un vector pueden ser:

Proyección vectorial
Proyección escalar

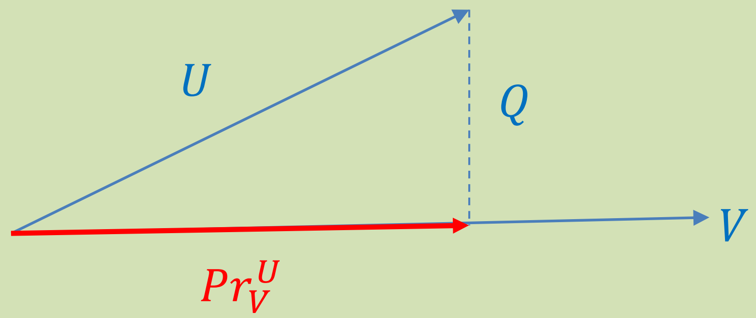
Proyección Vectorial

Proyección vectorial de un vector U sobre otro vector V





$$\text{Pr. } vect\ \genfrac{}{}{0pt}{}{U}{V} = \frac{U.V}{V^2}.V\langle x, y, z\rangle$$



Gráficamente el vector $\mathrm{Pr}\overrightarrow{Vect}_{V}^{U}$ es un vector paralelo al vector v.

$Pr.\overrightarrow{Vect}_{V}U$ va asociado a otro vector Q perpendicular a él.

La proyección vectorial del vector U sobre el vector V tiene una magnitud.

Esa magnitud se denomina la proyección escalar de $\vec{\mathrm{U}}$ sobre $\vec{\mathbf{V}}$.

Vector unitario correspondiente a V

$$Pr.Vect\,\frac{U}{V} = \frac{U.V}{|V|^2}.V\langle x,y,z\rangle = \frac{U.V}{|V| * |V|}.V\langle x,y,z\rangle = \frac{U.V}{|V|}.\boxed{\frac{V\langle x,y,z\rangle}{|V|}}$$

$$Pr.Vect\,\frac{U}{V} = \frac{U.V}{|V|}.\vec{v}$$

de donde:

v es el vector unitario de V y $\frac{U.V}{|V|}$ es la magnitud del vector proyección o también denominada Proyección escalar del Vector U sobre el vector V

$$Pr.vect\ _{V}^{U} = \boxed{\frac{U.V}{|V|}} \cdot \frac{V\langle x,y,z\rangle}{|V|}$$

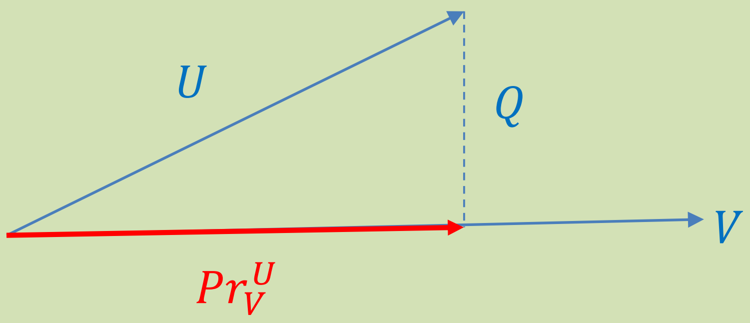
$\frac{U.V}{|V|}$ es la proyección escalar o componente escalar de U sobre V.

Proyección escalar o componente escalar

Proyección escalar o componente escalar

$$Pr.escalar\,\frac{U}{V} = \frac{U.V}{|\mathrm{V}|}$$

Es la proyección escalar o componente escalar de un vector U sobre V :

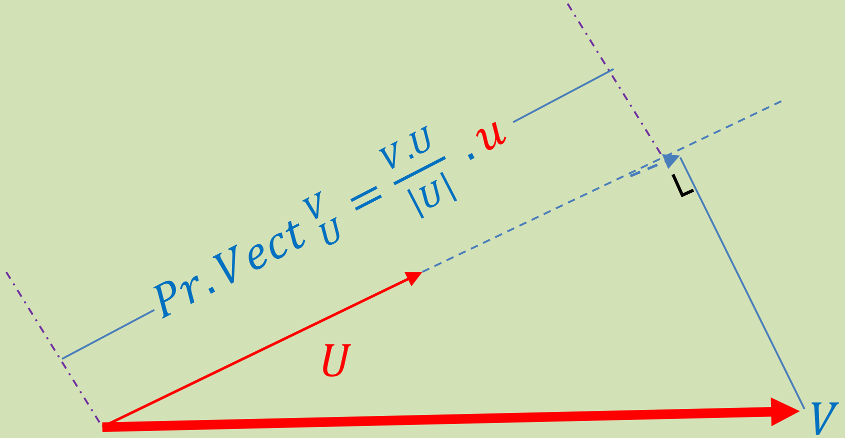


Ya se halló la componente del vector U sobre el vector V.
¿Se podrá hallar la componente vectorial o escalar del vector V sobre el vector **U** o sobre cualquier vector?

$$Pr.Vect\,\frac{V}{U} = \frac{V.U}{|U|}\cdot\vec{u}$$

La respuesta es sí. Para la magnitud se emplea la fórmula anterior:

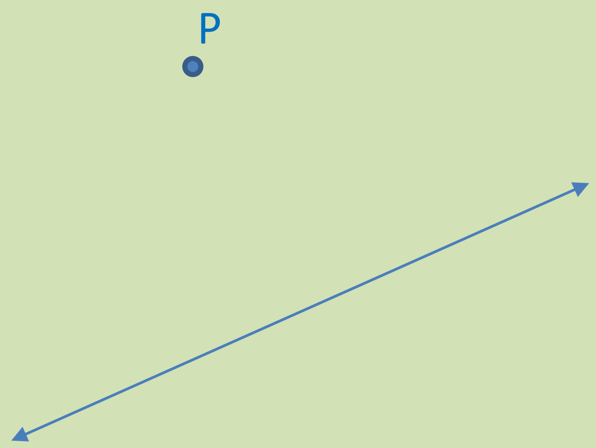
$$Pr.escalar\,\frac{V}{U} = \frac{V.\mathrm{U}}{|U|}$$

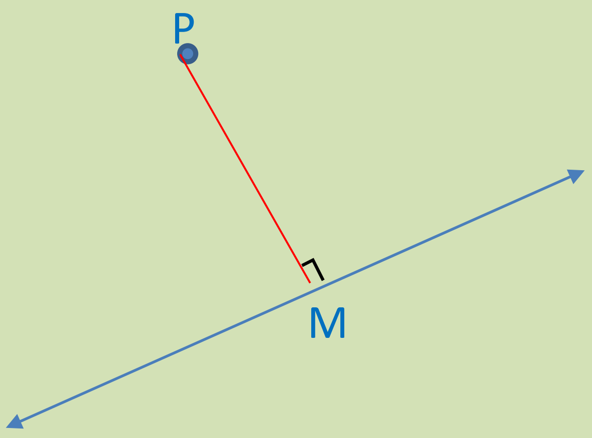


"U" puede ser un vector unitario, un vector director o cualquier vector sobre el que se requiera conocer la componente en la dirección de ese vector y también se puede hallar la proyección vectorial si fuere necesario.

Y lo más importante, la proyección puede ser mayor o menor que U

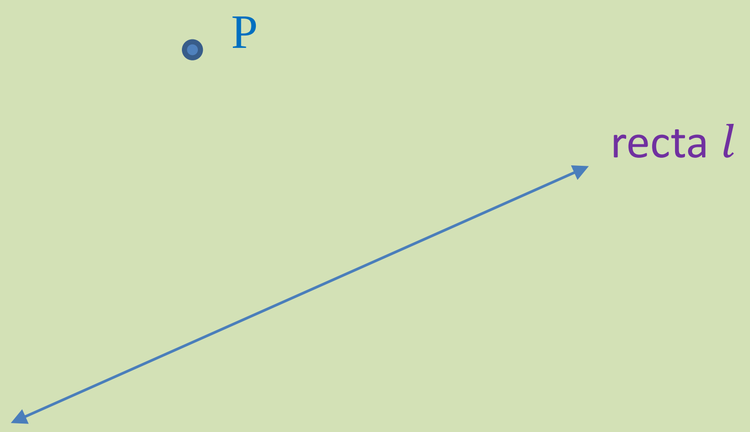
Distancia entre un punto y una recta



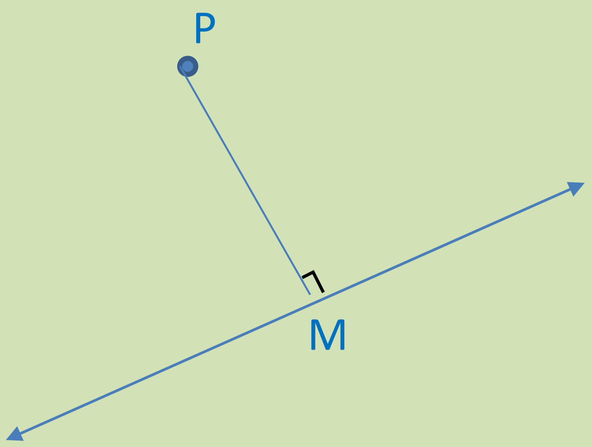


La distancia entre un punto y una recta es el valor o magnitud de la perpendicular trazada desde del punto hasta la recta.

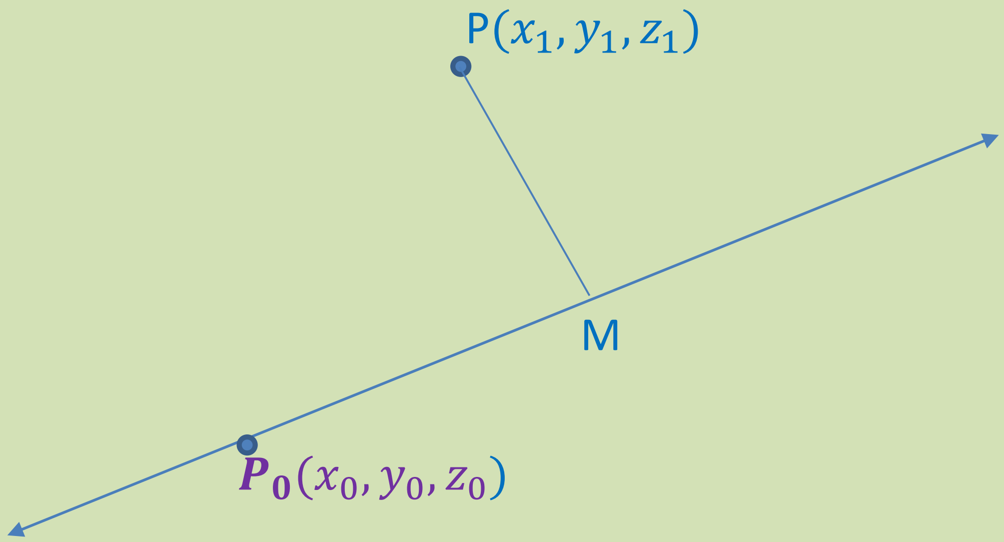
Distancia entre un punto P y una recta



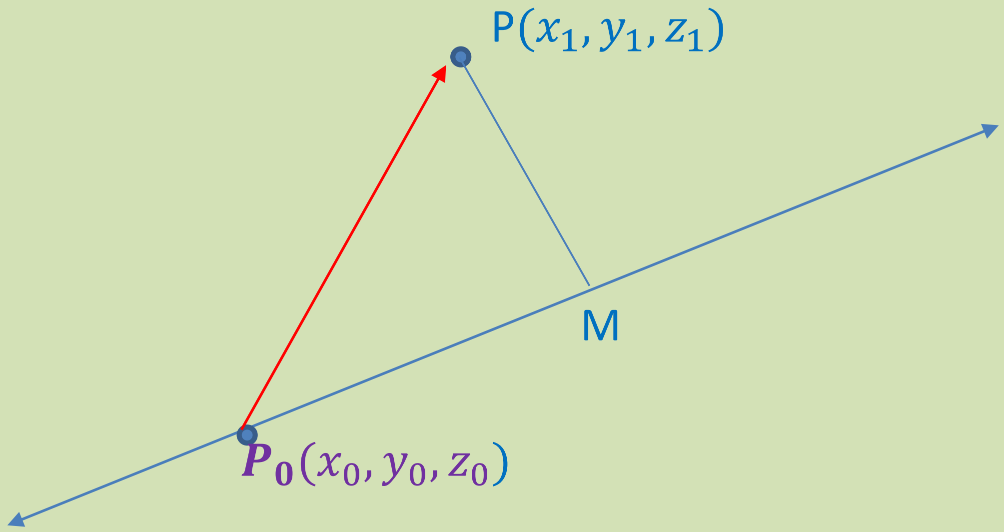
Para calcular la distancia entre el punto P y una recta l de **ecuación conocida,** utilizaremos la **proyección escalar** de un vector sobre otro; como la recta es conocida, se conoce de ella **su vector director *v*, y un punto P_0 conocido**



Se traza una **perpendicular desde del punto hasta la recta**, al punto de intersección lo denominamos **M**. La distancia PM es lo que requerimos calcular.

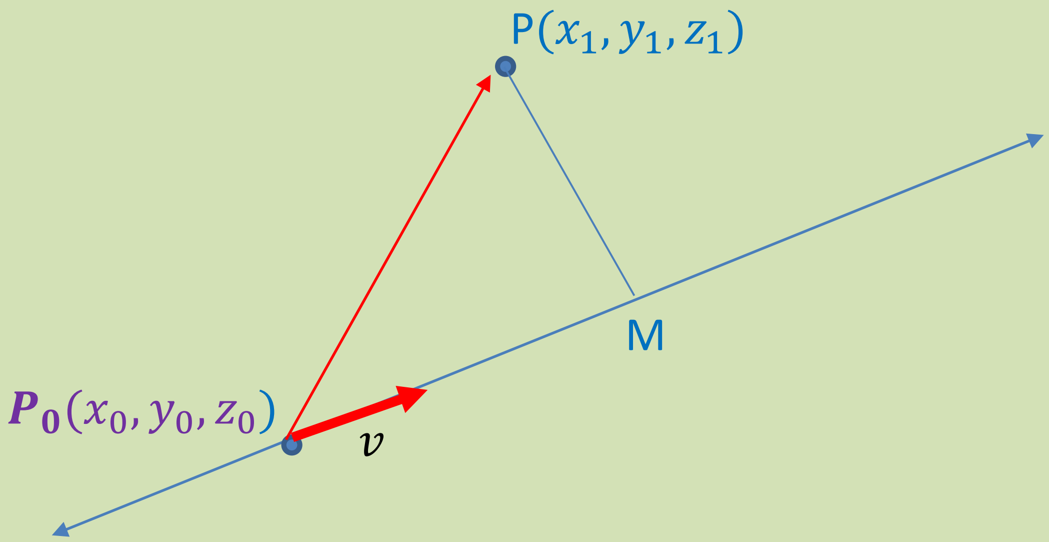


Como la recta es de ecuación conocida, se extrae de ella su **vector director *v***, y un punto obvio $\boldsymbol{P_0}$.

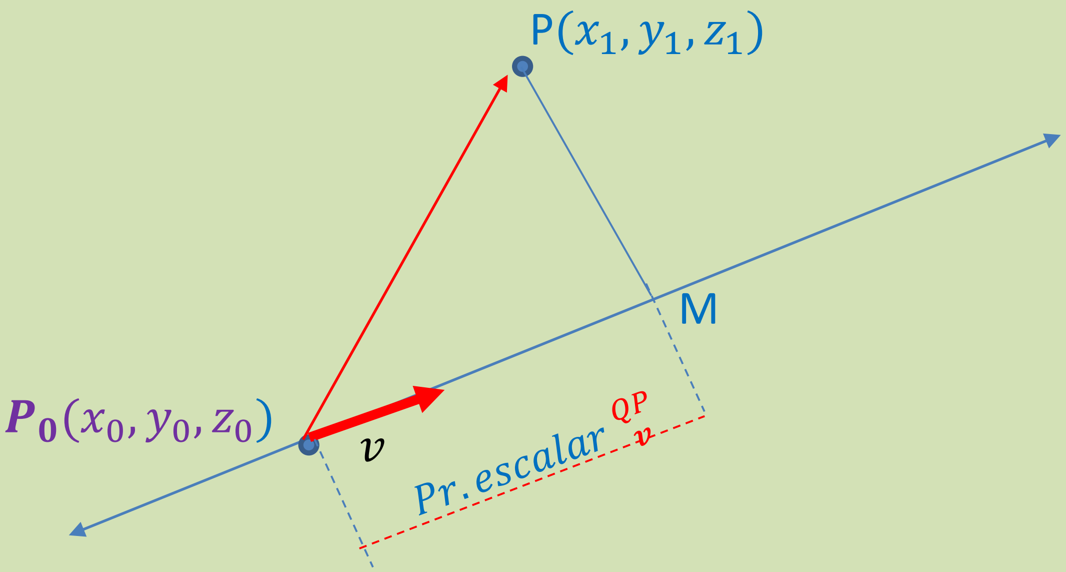


Con los puntos $\boldsymbol{P_0}$ y P formaremos el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{P_0}\mathrm{P}}$.

Al conocer las coordenadas de $\boldsymbol{P_0}$ y de P, la magnitud de $\overrightarrow{\boldsymbol{P_0}\mathrm{P}}$ se puede conocer.

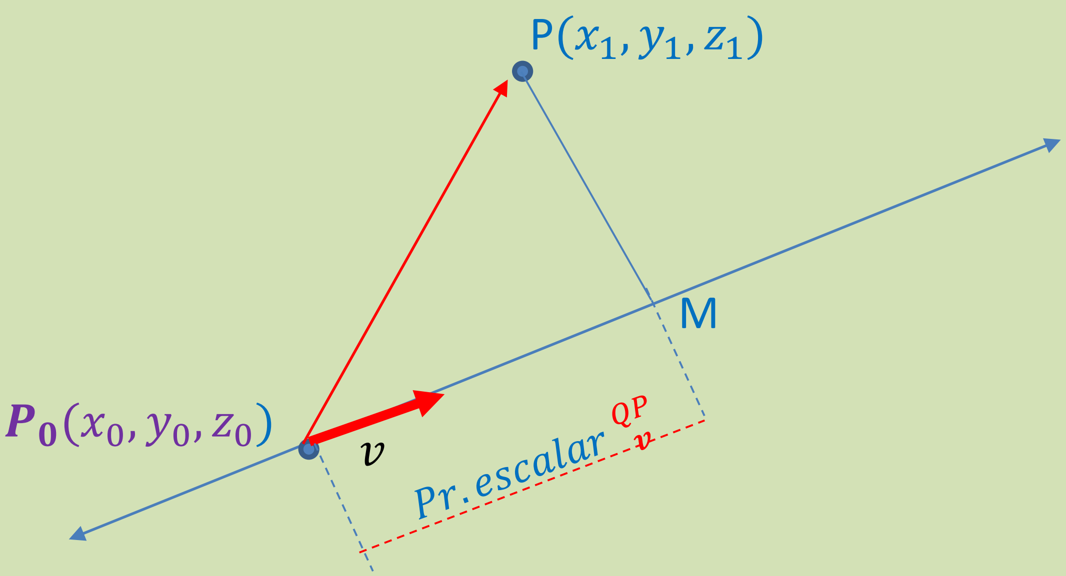


El vector vector director v de la recta se conoce,

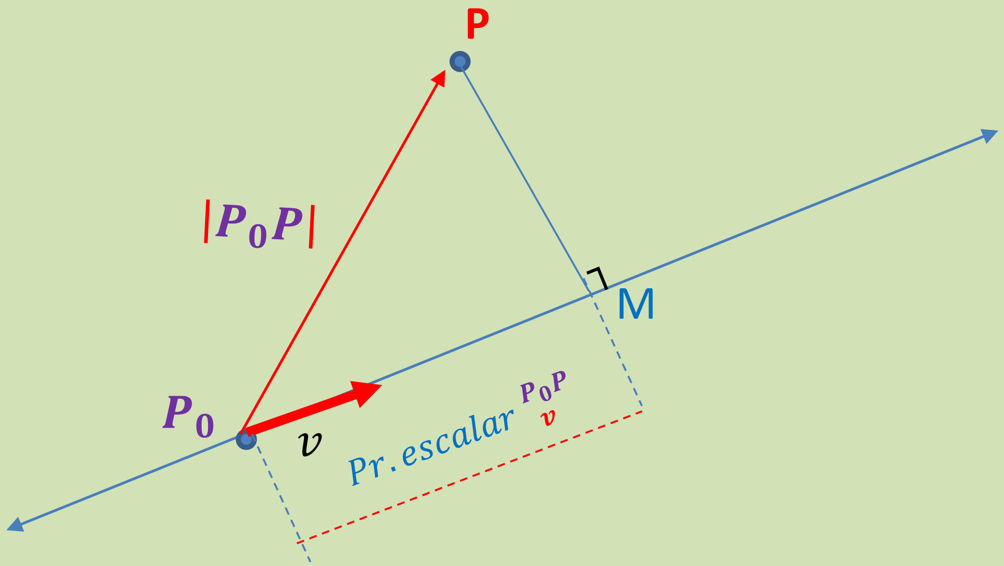


La magnitud de $\overrightarrow{\boldsymbol{P_0}\mathrm{M}}$ se puede hallar mediante la proyección escalar de

$\overrightarrow{\boldsymbol{P_0}\mathrm{P}}$ sobre el vector director v de la recta l.



Del triángulo $\boldsymbol{P_0}$MP se conoce su hipotenusa $\boldsymbol{P_0}$P y el cateto $\boldsymbol{P_0}$M.



El triángulo $\boldsymbol{P_0}$MP es rectángulo, por tanto aplicando Pitágoras:

$$|PM|^2 = |\boldsymbol{QP}|^{\,2} - (Pr.\,escalar\,{}^{\boldsymbol{P_0P}}_{\boldsymbol{v}})^2$$

$$\boldsymbol{PM} = \sqrt{|\boldsymbol{QP}|^{\,2} - (\boldsymbol{Pr.\,escalar}\,{}^{\overrightarrow{\boldsymbol{P_0P}}}_{\boldsymbol{v}})^2}$$

Halle la distancia entre la recta l y el punto P $(1,-3, 1)$

Primero, verifique que el punto P = $(1,-3, 1)$ no pertenece a la recta l.

$$l \left\{ \begin{array}{l} x=3-2\propto, \\ y=4+5\propto, \\ z=8-1\propto \end{array} \right.$$

$$l : \langle 3-2\propto,\ 4+5\propto,\ 8-\propto \rangle$$

y halle la distancia entre la recta y el punto.

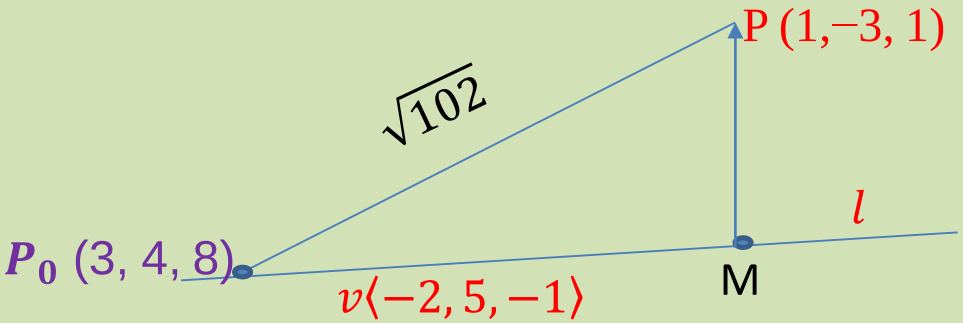
$\boldsymbol{P_0}\ (3,4,8)$ $\quad v\langle -2,\ 5, -1 \rangle$

$$\boldsymbol{P_0}(3, 4, 8) \qquad P(1, -3, 1)$$

$$\boldsymbol{P_0}\langle \mathbf{-2, -7, -7} \rangle$$

$$|\boldsymbol{P_0}P| = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{102}$$

$$|\boldsymbol{P_0}P|^2 = 102$$



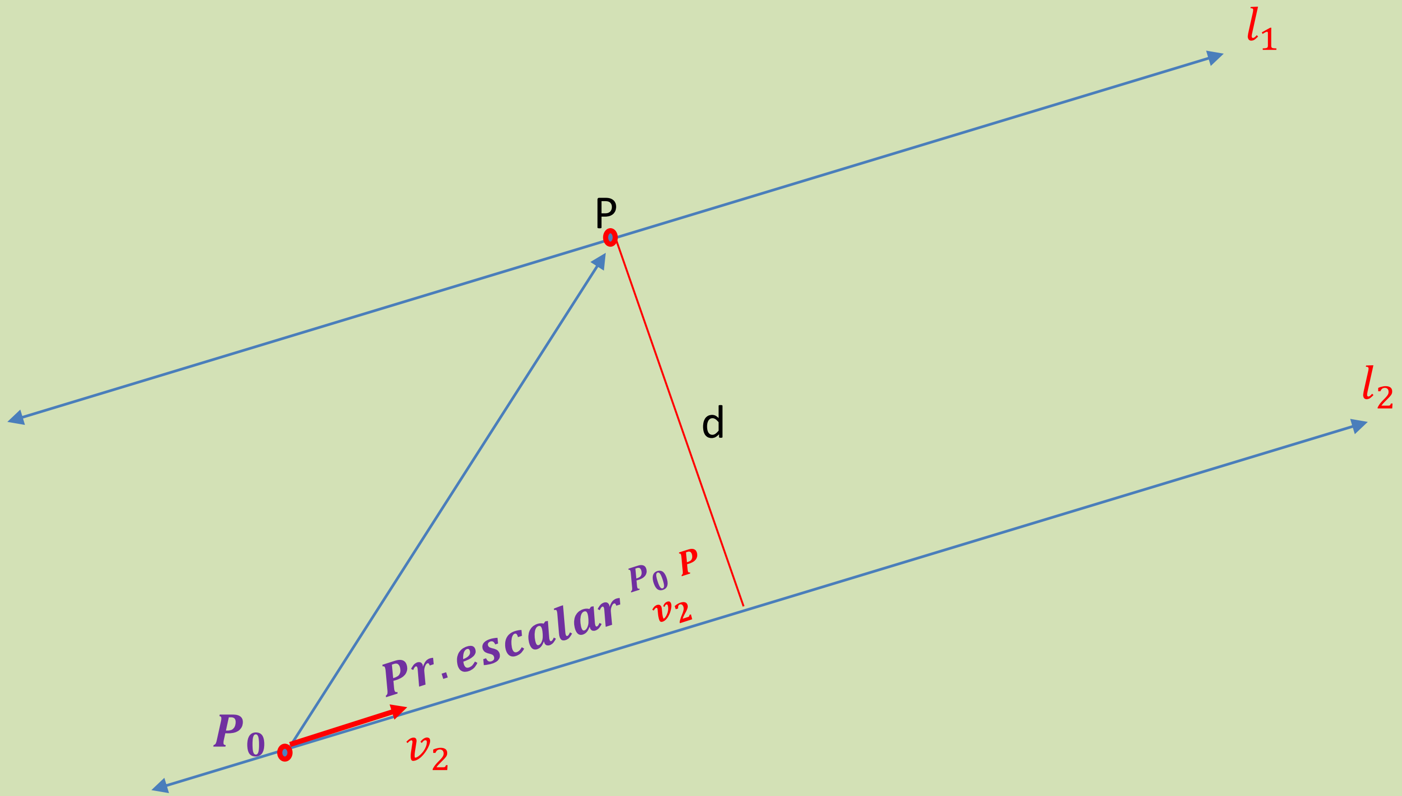
$$|v\langle 2,\ 5,-1\rangle| = \sqrt{4+25+1} = 5.47$$

$$Pr.escalar\ {}^{P_0P}_{v} = \frac{P_0P.v}{|v|} = \frac{\langle -2,-7,-7\rangle.\langle -2,5,-1\rangle}{5.47}$$

$$= \frac{-4.2}{5.47} = -7.6 \qquad |-7.6| = 7.6$$

$$d = \sqrt{|QP|^2 - |\mathrm{Comp}_v\, QP|^2} = \sqrt{102-57.8} = 6.6$$

Distancia entre dos recta l_1 y l_2 paralelas

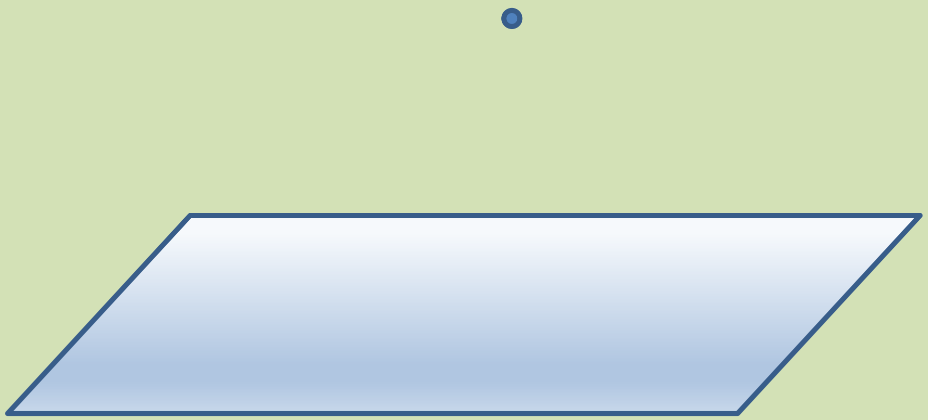


Se procede en forma similar al caso de la distancia entre un punto y una recta. Tomaremos dos puntos: $\boldsymbol{P_0}$ en l_2 y P en l_1 y formaremos el vector y $\boldsymbol{P_0}$**P** como muestra la Figura. $\boldsymbol{P_0}$P lo proyectamos escalarmente sobre el vector v_2 que es conocido. Luego aplicamos Pitágoras:

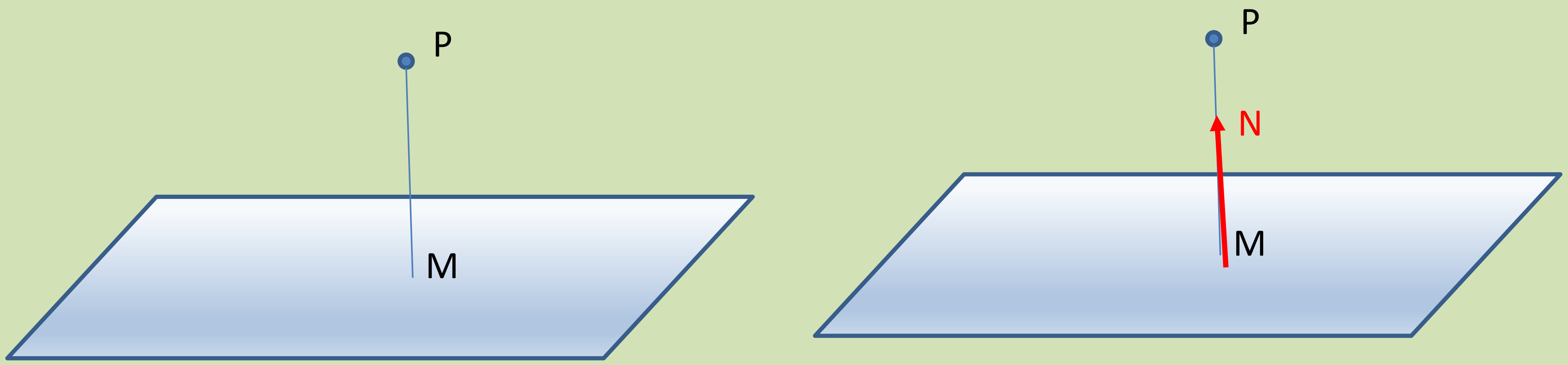
$$d = \sqrt{|P_oP|^{2} - (Pr.escalar_{\,v_2}^{\,\overrightarrow{P_0P}})^{2}}$$

Distancia entre un punto y un plano

Distancia entre un punto y un plano



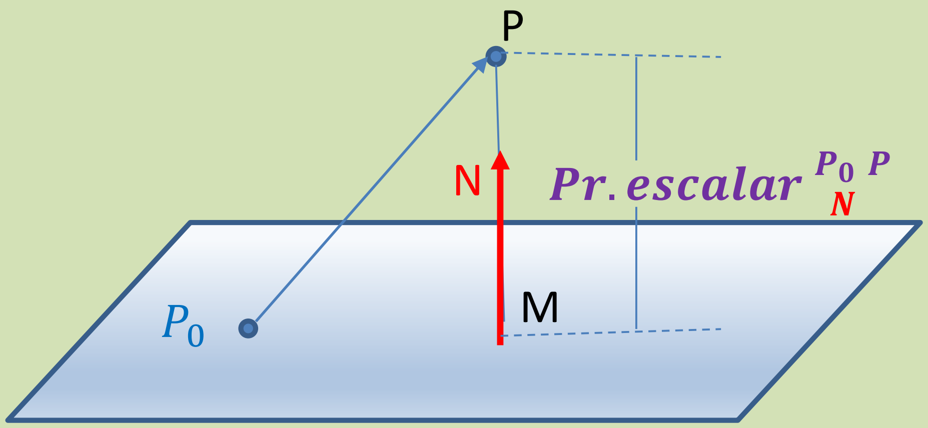
Consideremos un plano π en el espacio y un punto P exterior al plano como muestra la figura.



Se procede en forma parecida para calcular la distancia entre un punto y una recta.

Se traza una perpendicular PM desde del punto hasta el plano.

Trazamos el vector normal N,   en la dirección MP. Este vector es conocido.



Encontramos un punto P_0 cualquiera del plano.
Con el punto P_0 y el punto P hallamos el vector P_0P. P_0P
lo proyectamos escalarmente sobre el vector N que es conocido.

La distancia es justamente la magnitud del vector MP= proyección escalar de QP sobre N.

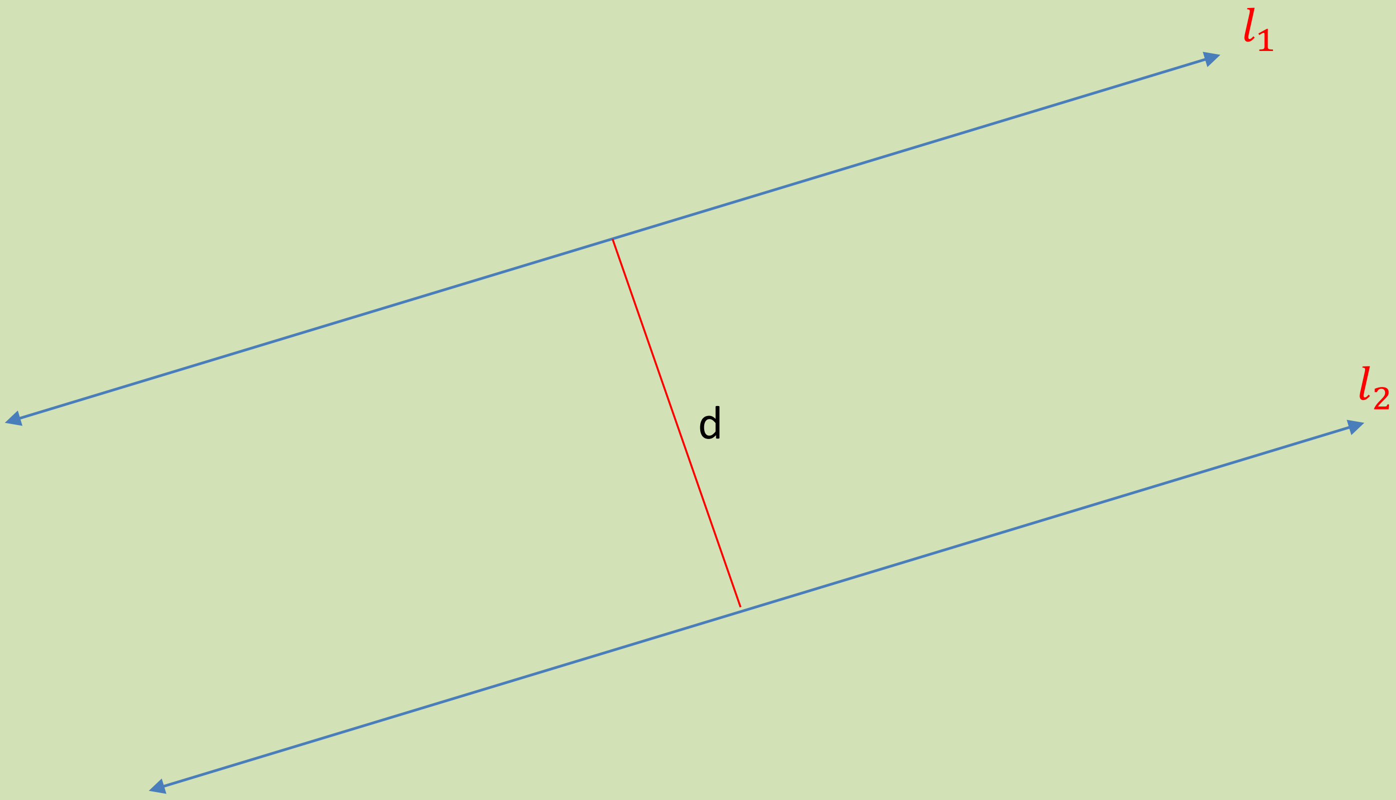
$$d = \boldsymbol{Pr.escalar}\ {}^{\boldsymbol{P_0P}}_{\boldsymbol{N}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P_0P}}.\overrightarrow{N}}{|N|}$$

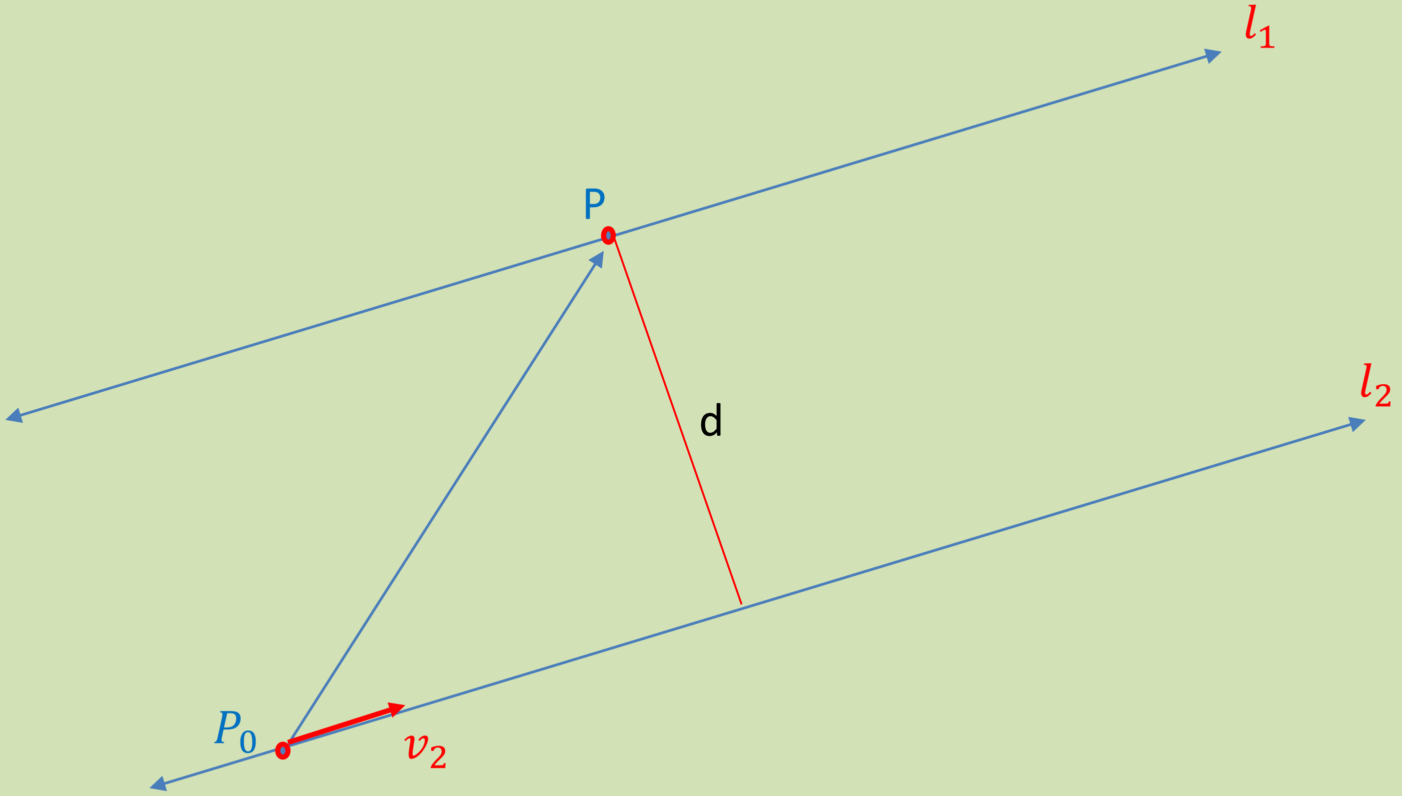
Si el vector N tiene componentes N$\langle a, b, c\rangle$ su magnitud será:

$$|N| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d = \frac{\boldsymbol{P_0P.N}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distancia entre 2 rectas paralelas





Se procede en forma similar al caso de la distancia entre un punto y una recta. Tomaremos dos puntos conocidos P_0 y P en l_2 y l_1, respectivamente y formaremos el vector $P_0\mathbf{P}$ como muestra la Figura. P_0P lo proyectamos escalarmente sobre el vector v_2 que es conocido. Luego aplicamos Pitágoras:

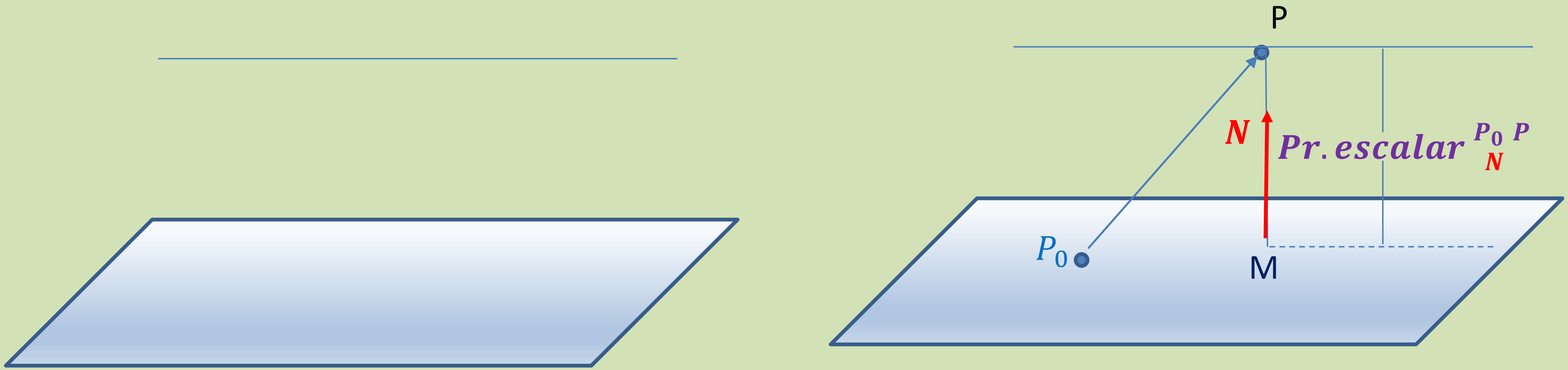
Dadas las rectas:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-1}{9}, \qquad \frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{3},$$

Hallar las distancia entre las dos rectas

Distancia entre una recta paralela a un plano y el plano.

Distancia entre una recta paralela a un plano y el plano.



Se procede en forma parecida para calcular la distancia entre un punto y un plano.

$$\boldsymbol{Pr.escalar}\,{}_{\boldsymbol{N}}^{\boldsymbol{P_0\ P}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P_0P}}.\ \vec{N}}{|N|}$$