TEMA 5 – VECTORES EN EL ESPACIO

5.1 – LOS VECTORES Y SUS OPERACIONES

DEFINICIÓN

Un vector es un segmento orientado. Un vector $\vec{AB}$ queda determinado por dos puntos, **origen** A y **extremo** B.

Elementos de un vector:

- **Módulo** de un vector es la distancia entre A y B y se designa por el vector entre barras : $|\vec{AB}|$
- **Dirección** del vector es la dirección de la recta en la que se encuentra el vector y la de todas las rectas paralelas a ella.
- **Sentido** si va de A a B o de B a A.

Igualdad de vectores: Dos vectores son iguales si tienen el mismo módulo, dirección y sentido (no necesariamente el mismo origen y el mismo extremo). Todos ellos se llaman representantes de un único vector. Llamaremos representante canónico a aquel vector que tiene por origen el punto O.

Notación: Los vectores se representan con una flechita encima de una letra: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$,.... o bien mediante uno de sus representantes, escribiendo su origen y su extremo con una flecha encima $\vec{AB}$, $\vec{MN}$, …

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN NÚMERO

El producto de un número $k \neq 0$ por un vector $\vec{v}$ es otro vector $k\vec{v}$ que tiene:

- Módulo: igual al producto del módulo de $\vec{v}$ por el valor absoluto de k : $|k\vec{v}| = |k|.|\vec{v}|$
- Dirección: la misma que la de $\vec{v}$
- Sentido:
  - El de $\vec{v}$ si $k > 0$
  - El del opuesto de $\vec{v}$ si $k < 0$

El producto $0.\vec{v}$ es igual al **vector cero**: $\vec{0}$. Es un vector cuyo origen y extremo coinciden y, por tanto, su módulo es cero y carece de dirección y de sentido.

El vector $-1.\vec{v}$ se designa por $-\vec{v}$ y se llama **opuesto** de $\vec{v}$

VECTORES UNITARIOS

Los vectores de módulo 1 se llaman **vectores unitarios.**

El vector $\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ es un vector unitario de la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{v}$**.**

El vector $\frac{-1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ es un vector unitario de la misma dirección que $\vec{v}$, pero con sentido opuesto.

SUMA DE DOS VECTORES

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para sumarlos gráficamente hay dos posibilidades:

- Se sitúa el origen del segundo vector sobre el extremo del primero y el vector suma es el vector que une el origen del primero con el extremo del segundo.
- Se sitúan los dos vectores con origen común. Se forma el paralelogramo que tiene por lados los dos vectores y la diagonal que parte del origen de los dos vectores es el vector suma.

RESTA DE DOS VECTORES

Restar dos vectores es lo mismo que sumar al primer vector el opuesto del segundo:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES

- **Suma de vectores:**
  - Asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
  - Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
  - Vector nulo: $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
  - Vector opuesto: $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

- **Producto de números por vectores**
  - Asociativa: $a.(b.\vec{v}) = (a.b).\vec{v}$
  - Distributiva I: $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$
  - Distributiva II: $a.(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
  - Producto por 1: $1.\vec{v} = \vec{v}$

Todas estas propiedades le confieren al conjunto de los vectores la estructura de **espacio vectorial.**

5.2 – EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UN VECTOR

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Dados varios vectores, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, ..., $\vec{w}$, y varios números a, b,c,...m, el vector $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} + ... + m\vec{w}$ se llama **combinación lineal** de los vectores.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Varios vectores se llaman **linealmente dependientes** si alguno de ellos se puede poner como combinación lineal de los demás. Cuándo no es así, se llaman **linealmente independientes.**

Ejemplos:

- Dos vectores alineados son linealmente dependientes
- Dos vectores no alineados son linealmente independientes
- Tres vectores coplanarios (están en el mismo plano) son linealmente dependientes.
- Tres vectores no coplanarios son linealmente independientes.

BASE

Tres vectores no coplanarios $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ son linealmente independientes y, además cualquier otro vector del espacio se puede poner como combinación lineal de ellos de ellos de forma única. Por eso decimos que forman una **base**: B = { $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ }

Tres vectores no coplanarios cualesquiera forman una base del espacio vectorial tridimensional.

Si los tres vectores son perpendiculares entre sí, se dice que forman una **base ortogonal.** Si además de ser perpendiculares tienen módulo uno, se dice que la **base** es **ortonormal**.

COORDENADAS DE UN VECTOR RESPECTO DE UNA BASE

Dada una base B($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$), cualquier vector, $\vec{v}$, se puede poner de forma única como una combinación lineal de sus elementos: $\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$

A los números a, b, c se les llama **coordenadas de $\vec{v}$ respecto de B**.

Y se expresa así: $\vec{v} = (a,b,c)$ ó $\vec{v}\ (a,b,c)$

OPERACIONES CON COORDENADAS

Sea $\vec{u}\,(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}\,(v_1,v_2,v_3)$

- **Suma de dos vectores:** Las coordenadas del vector $\vec{u} + \vec{v}$ se obtienen sumando las coordenadas de $\vec{u}$ con las de $\vec{v}$:

  $$\vec{u} + \vec{v} = (u_1,u_2,u_3) + (v_1,v_2,v_3) = (u_1 + v_1,u_2 + v_2,u_3 + v_3)$$

- **Resta de dos vectores:** Las coordenadas del vector $\vec{u} - \vec{v}$ se obtienen restando a las coordenadas de $\vec{u}$ las de $\vec{v}$:

  $$\vec{u} - \vec{v} = (u_1,u_2,u_3) - (v_1,v_2,v_3) = (u_1 - v_1,u_2 - v_2,u_3 - v_3)$$

- **Producto de un vector por un número:** Las coordenadas del vector $k\vec{u}$ se obtienen multiplicando por k las coordenadas de $\vec{u}$:

  $$k\vec{u} = k.(u_1,u_2,u_3) = (ku_1,ku_2,ku_3)$$

- **Combinación lineal de vectores:**

  $$a\vec{u} + b\vec{v} = a(u_1,u_2,u_3) + b(v_1,v_2,u_3) = (au_1 + bv_1,au_2 + bv_2,au_3 + bv_3)$$

EJERCICIOS

<u>EJERCICIO 1</u>: Dados los vectores $\vec{u}(3,3,2), \vec{v}(5,-2,1), \vec{w}(1,-1,0)$

a) Halla el vector $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$

$\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$ (3,3,2) – 2(5,-2,1) + 3(1,-1,0) = (3-10+3, 3+4-3, 2-2+0) = (-4,4,0)

b) Calcula "a" y "b" tales que $\vec{u} = a.\vec{v} + b\vec{w}$

$$(3,3,2) = a\,(5,-2,1) + b(1,-1,0) \Rightarrow \begin{cases} 3 = 5a + b \\ 3 = -2a - b \\ 2 = a \end{cases} \Rightarrow a = 2\ ,\ b = -7$$

> Nota: Como solo hay dos incógnitas (a y b) con dos ecuaciones nos valdría pero hay que comprobar que se cumplen las tres. Si al comprobar la tercera no lo cumple, no tiene solución.

<u>EJERCICIO 2</u> : Comprueba que no es posible expresar el vector $\vec{x}(3,-1,0)$ como combinación lineal de $\vec{u}(1,2,-1)$ y $\vec{v}(2,-3,5)$. ¿Son linealmente independientes $\vec{x}, \vec{u}$ y $\vec{v}$?

<u>Intentamos poner $\vec{x}$ como combinación lineal de</u> $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, hallar a y b tales que $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v}$
(3,-1,0) = a(1,2,-1) + b(2,-3,5) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 3 = a + 2b \\ -1 = 2a - 3b \\ 0 = -a + 5b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Sumando la primera y la tercera ecuación} \\ \text{obtenemos que } b = 3/7.\ \text{Sustituyendo en la } 3^{o}\ a = 15/7 \\ \text{Pero esto comprobando en la } 2^{a} \text{ ecuación } -1 = 2.\dfrac{15}{7} - 3\dfrac{3}{7} \text{ vemos que no la cumple} \end{cases}$$

Por tanto no se puede poner $\vec{x}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

<u>¿Son linealmente independientes $\vec{x}, \vec{u}$ y $\vec{v}$?</u> Como $\vec{x}$ no se puede poner como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, son linealmente independientes.

<u>EJERCICIO 3</u> : ¿Cuáles de los siguientes vectores tienen la misma dirección?
$\vec{a}(1,-3,2), \vec{b}(2,0,1), \vec{c}(-2,6,-4), \vec{d}(5,-15,10), \vec{e}(10,-30,5)$

> Nota: Para que dos vectores tengan la misma dirección, deben ser paralelos, es decir, sus coordenadas proporcionales.

$\vec{a}(1,-3,2) \parallel \vec{c}(-2,6,-4) \parallel \vec{d}(5,-15,10)$

$\vec{b}(2,0,1)$

$\vec{e}(10,-30,5)$

EJERCICIO 5 : Halla, en cada caso, todos los valores de m, n y p tales que $m\vec{u}+n\vec{v}+p\vec{w}=\vec{0}$
Ver si son linealmente independientes

a) $\vec{u}(3,0,1),\vec{v}(1,-1,0),\vec{w}(1,0,1)$

$$m(3,0,1) + n(1,-1,0) + p(1,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} 3m+n+p=0 \\ -n=0 \\ m+p=0 \end{cases} \Rightarrow n=p=m=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Son linealmente} \\ \text{independientes} \end{cases}$$

b) $\vec{u}(1,-1,0),\vec{v}(1,1,1),\vec{w}(2,0,1)$

$$m(1,-1,0) + n(1,1,1) + p(2,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} m+n+2p=0 \\ -m+n=0 \\ n+p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+2p=0 \\ n+p=0 \end{cases} \text{ Son la misma ecuación,}$$

por tanto, en realidad hay 2 ecuaciones con 3 incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, existen infinitas soluciones: $\begin{cases} p=\alpha \\ n=-\alpha \\ m=-\alpha \end{cases} \quad \forall\alpha\in R \Rightarrow$ No son linealmente independientes.

EJERCICIO 6 : Estudia la dependencia e independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores

Modo 1: $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$ $\begin{cases} \text{Si } a=b=c=0 \Rightarrow \text{Linealmente independientes} \\ \text{Si alguno es distinto de cero} \Rightarrow \text{Linealmente dependientes} \end{cases}$

Modo 2: Ponerlos como filas de una matriz y hacer Gauss

$\begin{cases} \text{Si alguna fila se hace cero, es porque es combinación lineal de las demás y son linealmente dependientes} \\ \text{Si ninguna fila se hace cer, es porque ninguna es c.l. de las demás y son linealmente independientes} \end{cases}$

a) $\vec{u}(1,2,1),\vec{v}(-1,0,3),\vec{w}(1,2,-1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Linealmente independientes}$$

b) $\vec{a}(1,2,3),\vec{b}(1,4,11),\vec{c}(1,1,-1),\vec{d}(0,1,4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 11 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3=2F_3*F_2 \\ F_4=2F_4-F_2}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Linealmente dependientes.}$$

<u>EJERCICIO 7</u> : Determina "k" para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes

a) $\vec{u}(k,-3,2), \vec{v}(2,3,k), \vec{w}(4,6,-4)$

Método: Como hay "k" y el número de filas es igual al número de columnas, hallar el determinante, igualarlo a cero, resolver la ecuación y hacer "Casos".

$$\begin{vmatrix} k & -3 & 2 \\ 2 & 3 & k \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-12k-12k+24) - (24+6k^2+24) = 0 \Rightarrow k^2+4k+4=0 \Rightarrow k=-2$$

Caso I: Si $k = -2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow$ Linealmente dependientes

Caso II : Si $k \neq -2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ Linealmente independientes

<u>EJERCICIO 8</u> : ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base?

Una base de R^3: Tres vectores no nulos y linealmente independientes.

A = {(1,2,1),(1,0,1),(2,2,2)}

Como tenemos 3 vectores no nulos, hacemos Gauss para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3=4F_3-F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{L. Dependientes} \Rightarrow \text{No Base}$$

B = {(1,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(0,0,1)} Como tenemos 4 vectores no es una base de R^3.

C = {(-3,2,1),(1,2,-1),(1,0,1)}

Como tenemos 3 vectores no nulos, hacemos Gauss para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2=3F_2+F_1 \\ F_3=3F_3+F_1}}{\approx} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{F_3=4F_3-F_2}{\approx} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{L. Independientes} \Rightarrow \text{Base}$$

<u>EJERCICIO 9</u> : ¿Para qué valores de "a" el conjunto de vectores S = {(1,1,1),(a,1,1),(1,a,0)} es una base?

Como tenemos 3 vectores no nulos, hacemos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (0+1+a^2) - (1+a+0) = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Caso I : $a \in R - \{0,1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ Linealmente independientes $\Rightarrow$ Base

Caso II: $a = 0 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow$ Linealmente dependientes $\Rightarrow$ No base

Caso III: $a = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow$ Linealmente dependientes $\Rightarrow$ No base

5.3 – PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

DEFINICIÓN

El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un **número** que resulta de multiplicar el módulo de cada uno de los vectores por el coseno del ángulo que forman y se designa por $\vec{u}\cdot\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$$

$|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ son números positivos. Por tanto, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ es un número positivo o negativo según el ángulo que forman $\vec{u}$ con $\vec{v}$ **:**

- Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ es agudo, $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) > 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}$ es positivo.
- Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ es obtuso, $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) < 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}$ es negativo.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

El producto escalar de dos vectores no nulos es cero si y sólo si son perpendiculares:

Es decir: si $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$; $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

APLICACIONES

Módulo de un vector $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ (pues $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|.|\vec{u}|.\cos(\vec{u},\vec{u}) = |\vec{u}|^2.\cos(0^o) = |\vec{u}|^2$)

Ángulo de dos vectores $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$ (despejando el coseno de la expresión del producto escalar)

Vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$: $\vec{u}\,' = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$

$\vec{u}\,' = |\vec{u}|.\cos(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{u}|\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$ es la longitud del segmento proyección, con signo + o – según que el ángulo sea agudo u obtuso. Si este número lo multiplicamos por el vector unitario $\dfrac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$, se obtiene el vector proyección.

OPERACIONES. PROPIEDADES

- Propiedad conmutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- Propiedad asociativa: $a.(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (a\vec{u}).\vec{v}$
- Propiedad distributiva: $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

EXPRESIÓN ANALÍTICA

- Si $B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ es una base ortogonal: $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{x}\cdot\vec{z} = \vec{y}\cdot\vec{z} = 0$
- Si $B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ es una base ortonormal : $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{x}\cdot\vec{z} = \vec{y}\cdot\vec{z} = 0$, $\vec{x}\cdot\vec{x} = \vec{y}\cdot\vec{y} = \vec{z}\cdot\vec{z} = 1$

Si las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respecto a una base ortonormal son $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$, entonces el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ adopta la siguiente expresión:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$$

Dem : $\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1\vec{x} + u_2\vec{y} + u_3\vec{z}).(v_1\vec{x} + v_2\vec{y} + v_3\vec{z}) = u_1.v_1.\ \vec{x}\cdot\vec{x} + u_1.v_2.\ \vec{x}\cdot\vec{y} + u_1v_3.\ \vec{x}\cdot\vec{z} + u_2.v_1.\ \vec{y}\cdot\vec{x} + u_2.v_2.\ \vec{y}\cdot\vec{y} + u_2v_3.\ \vec{y}\cdot\vec{z} + u_3.v_1.\ \vec{z}\cdot\vec{x} + u_3.v_2.\ \vec{z}\cdot\vec{y} + u_3.v_3.\ \vec{z}\cdot\vec{z} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$

5.4 – APLICACIONES DEL PRODUCTO ESCALAR

PRODUCTO ESCALAR

Expresión vectorial: $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

Expresión analítica: $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$

MÓDULO DE UN VECTOR

Expresión vectorial : $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

Expresión analítica : $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^3}$

COSENO DEL ÁNGULO DE DOS VECTORES

Expresión vectorial : $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

Expresión analítica : $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^3}.\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^3}}$

PROYECCIÓN DE UN VECTOR u SOBRE OTRO v

Expresión vectorial: $\vec{u}\,' = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$

Expresión analítica: $\vec{u}\,' = \dfrac{u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^3}(v_1, v_2, v_3)$

CRITERIO DE PERPENDICULARIDAD : u ⊥ v

Expresión vectorial: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
Expresión analítica: $u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 = 0$

EJERCICIOS

<u>EJERCICIO 10</u> : En una base ortonormal tenemos $\vec{a}(1,2,2)$, $\vec{b}(-4,5,-3)$, $\vec{c}(-4,5,-3)$. Calcula:

a) $\vec{a}.\vec{b}$ = (1,2,2).(-4,5,-3) = -4 + 10 – 6 = 0

b) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

c) $|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

d) ang($\vec{a},\vec{b}$) : $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{0}{3.5\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow$ ang($\vec{a},\vec{b}$) = arc cos (0) = 90º

e) La proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$:

Vector proyección: $\vec{b}' = \dfrac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \dfrac{0}{9}\vec{a} = \vec{0}$ La proyección: $|\vec{b}'| = 0$

<u>EJERCICIO 11</u> : Dados los vectores $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$ $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + m\vec{k}$ halla m para que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean:

$\vec{a} = (1, m, 1)$ y $\vec{b} = (-2, 4, m)$

a) Paralelos (Componentes proporcionales) $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{m}{4} = \dfrac{1}{m} \Rightarrow m = -2$

Nota: hay que comprobar que se cumplan las dos igualdades

b) Ortogonales ($\vec{a}.\vec{b} = 0$) : (1,m,1).(-2,4,m)=-2+4m+m= 0 $\Rightarrow$ m = 2/5

<u>EJERCICIO 12</u> : Halla la proyección del vector $\vec{u}(3,1,2)$ sobre el vector $\vec{v}(1,-1,2)$

Vector proyección: $\vec{u}' = \dfrac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \dfrac{3-1+4}{\left(\sqrt{1+1+4}\right)^2}(1,-1,2) = \dfrac{6}{\sqrt{6}}(1,-1,2) = \left(\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 2\sqrt{6}\right)$

La proyección: $|\vec{u}'| = \sqrt{6+6+24} = \sqrt{36} = 6$

<u>EJERCICIO 13</u> : ¿Son $\vec{a}(1,2,3)$ y $\vec{b}(2,-2,1)$ ortogonales? Si no lo son, halla el ángulo que forman?

Para que sean ortogonales su producto escalar debe ser cero.

$\vec{a}.\vec{b}$ = (1,2,3).(2,-2,1)=2-4+3=1≠0$\Rightarrow$ No son ortogonales

$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4+9}.\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{1}{3\sqrt{14}} \Rightarrow$ ang($\vec{a},\vec{b}$) = arc cos ($\dfrac{1}{3\sqrt{14}}$) = 84º53´20,08´´

<u>EJERCICIO 14</u> : Comprueba que el vector $\vec{u}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$ no es unitario y da las coordenadas de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{u}$.

Para que un vector sea unitario su módulo tiene que ser uno. $|\vec{u}| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+0} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 1 \Rightarrow$ No es unitario.

Convertir un vector en unitario: Dividir cada coordenada del vector por su módulo:

$$\pm\left(\frac{1/2}{1/\sqrt{2}}, \frac{1/2}{1/\sqrt{2}}, \frac{0}{1/\sqrt{2}}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

5.5 – PRODUCTO VECTORIAL

DEFINICIÓN

El **producto vectorial** de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es un nuevo vector $\vec{u} \times \vec{v}$, que se define del siguiente modo:

- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector con las siguientes características:
  - Módulo: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\text{sen}(\vec{u}, \vec{v})$
  - Dirección: perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$
  - Sentido Si $(\vec{u}, \vec{v}) < 180º$, hacia arriba

    Si $(\vec{u}, \vec{v}) > 180º$, hacia abajo

    Tomando el ángulo en sentido positiva, es decir, contrario al movimiento de las agujas del reloj.
- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes, es decir, si alguno de ellos es 0 o si tienen la misma dirección, entonces: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

PROPIEDADES

- No es conmutativo: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
- En una base ortonormal $B(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$
- $(a\vec{u}) \times \vec{v} = a(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (a\vec{v})$
- No es asociativo : $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

EXPRESIÓN ANALÍTICA

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}.\vec{i} + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v1 & v_3 \end{vmatrix}.\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.\vec{k} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}. \right)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

El módulo del producto vectorial $|\vec{u} \times \vec{v}|$ es igual al área del paralelogramo definido por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. $A = |\vec{u} \times \vec{v}|\, u^2$

El área de un triángulo de lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$: $A = \dfrac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2} u^2$

APLICACIÓN:

Para obtener un vector perpendicular a otros dos, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, no alineados, hallaremos $\vec{u} \times \vec{v}$

EJERCICIOS

<u>EJERCICIO 16</u> : Dados $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ comprueba que los vectores $\vec{u}x\vec{v}$ y $\vec{v}x\vec{u}$ son opuestos y halla su módulo.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2-3)\vec{i} - (4+1)\vec{j} + (6-1)\vec{k} = (-5,-5,5) \\ \vec{v}x\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3+2)\vec{i} - (-1-4)\vec{j} + (1-6)\vec{k} = (5,5,-5) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Son opuestos}$$

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}x\vec{v}| = \sqrt{25+25+25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \\ |\vec{v}x\vec{u}| = \sqrt{25+25+25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Tienen el mismo módulo}$$

<u>EJERCICIO 17</u> : Halla el área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{a}(7,-1,2)$ y $\vec{b}(1,4,-2)$

El área del paralelogramo es el módulo de su producto vectorial

$$\vec{a}x\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (2-8)\vec{i} - (-14-2)\vec{j} + (28+1)\vec{k} = (-6,16,29)$$

$$A = |\vec{a}x\vec{b}| = \sqrt{36+356+2841} = \sqrt{1133} = 33{,}66\ u^2$$

<u>EJERCICIO 18</u> : Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2,3,1)$ y a $\vec{v}(-1,3,0)$ y que sea unitario.

Un vector perpendicular a dos vectores es su producto vectorial y luego convertir en unitario (dividiendo cada componente del vector por el módulo del vector)

$$\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0-3)\vec{i} - (0+1)\vec{j} + (6+3)\vec{k} = (-3,-1,9) \qquad |\vec{u}x\vec{v}| = \sqrt{9+1+81} = \sqrt{91}$$

Solución: $\pm\left(\dfrac{-3}{\sqrt{91}}, \dfrac{-1}{\sqrt{91}}, \dfrac{9}{\sqrt{91}}\right)$

<u>EJERCICIO 19</u> : Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(1,-1,0)$ y a $\vec{v}(2,0,1)$ y cuyo módulo sea $\sqrt{24}$

Un vector perpendicular a dos vectores es su producto vectorial y luego hacemos uno paralelo a él (multiplicando por α) y calculamos α para que el módulo sea $\sqrt{24}$

$$\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1-0)\vec{i} - (1-0)\vec{j} + (0+2)\vec{k} = (-1,-1,2)$$

Hallamos uno paralelo a él: $(-\alpha,-\alpha,2\alpha)$

Calculamos α para que el módulo sea $\sqrt{24}$: $\sqrt{\alpha^2+\alpha^2+4\alpha^2} = \sqrt{24} \Rightarrow 6\alpha^2 = 24 \Rightarrow \alpha = \pm 2$

Solución: $\pm(-2,-2,4)$

5.7 – PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES

DEFINICIÓN

Se llama **producto mixto** de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y se designa por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})$
(El resultado es un número)

EXPRESIÓN ANALÍTICA

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

El módulo del producto mixto es el volumen del paralelepípedo de lados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|\ u^3$$

El volumen de un tetraedro de lados $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ es: $V = \dfrac{|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|}{6} u^3$

EJERCICIOS

<u>EJERCICIO 20</u> : Halla $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ siendo $\vec{u}(1,-3,2), \vec{v}(1,0,-1), \vec{w}(2,3,0)$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0+6+6)-(0-3+0) = 15$$

<u>EJERCICIO 22</u> : Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por $\bar{a}(3,-1,1)$, $\vec{b}(1,7,2), \vec{c}(2,1,-4)$

El volumen del paralelepípedo es el Valor Absoluto del producto mixto de los tres vectores

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-84-4+1)-(14+6+4) = -111$$

$$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |-111| = 111\ u^3.$$

<u>EJERCICIO 23</u> : Calcula el valor de m para que $\vec{u}(2,-3,1), \vec{v}(1,m,3)$ y $\vec{w}(-4,5,-1)$ sean coplanarios.

Tres vectores son coplanarios si su producto mixto es cero.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (-2m+36+5)-(-4m+30+3) = 2m+8$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Rightarrow 2m + 8 = 0 \Rightarrow m = -4$$

EJERCICIOS REPASO

<u>EJERCICIO 25</u> : Dados $\vec{a}(1,2,-1),\vec{b}(1,3,0)$, comprueba que el vector $\vec{a}x\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a}+\vec{b}$ y a $\vec{a}-\vec{b}$

$$\vec{a}x\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=(0+3)\vec{i}-(0+1)\vec{j}+(3-2)\vec{k}=(3,-1,1)$$

$\vec{a}+\vec{b}=(1,2,-1)+(1,3,0)=(2,5,-1)$ $\vec{a}-\vec{b}=(1,2,-1)-(1,3,0)=(0,-1,-1)$

<u>Ver que</u> $\vec{a}x\vec{b}$ <u>es perpendicular a</u> $\vec{a}+\vec{b}$ (Producto escalar nulo)

$(\vec{a}x\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})$ = (3,-1,1).(2,5,-1) = 6-5-1 = 0 $\Rightarrow$ Probado.

<u>Ver que</u> $\vec{a}x\vec{b}$ <u>es perpendicular a</u> $\vec{a}-\vec{b}$ (Producto escalar nulo)

$(\vec{a}x\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})$ = (3,-1,1).(0,-1,-1) = 0+1-1 = 0 $\Rightarrow$ Probado.

<u>EJERCICIO 26</u> : Comprueba que el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}(3,-2,1),\vec{v}(4,3,-6)$ es rectángulo.

Hay que ver que los vectores son perpendiculares, es decir, que su producto escalar es nulo

$\vec{u}.\vec{v}$ = (3,-2,1).(4,3,-6) = 12 – 6 – 6 = 0 $\Rightarrow$ Probado.

<u>EJERCICIO 27</u> : Dado el vector $\vec{v}(-2,2,-4)$ halla las coordenadas de los siguientes vectores:

a) Unitarios y de la misma dirección que $\vec{v}$.

b) Paralelo a $\vec{v}$ y de módulo 6.

a) Hay que convertir $\vec{v}$ en unitario (Dividiendo cada componente del vector por su módulo)

Hallamos el módulo de $\vec{v}$: $|\vec{v}|=\sqrt{4+4+16}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

Solución: $\pm\left(\frac{-2}{2\sqrt{6}},\frac{2}{2\sqrt{6}},\frac{-4}{2\sqrt{6}}\right)=\pm\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

b) Un vector paralelo a $\vec{v}$, es un vector proporcional a él: $(-2\alpha,2\alpha,-4\alpha)$

Y calculamos α para que el módulo sea 6: $\sqrt{4\alpha^2+4\alpha^2+16\alpha^2}=6\Rightarrow 24\alpha^2=36\Rightarrow \alpha=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

Solución $\pm\left(-2.\sqrt{\frac{3}{2}},2.\sqrt{\frac{3}{2}},-4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\pm\left(-\sqrt{6},\sqrt{6},-2\sqrt{6}\right)$

<u>EJERCICIO 28</u> : Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(2,3,-1)$ y a $\vec{v}(1,4,2)$ cuya tercera componente sea 1.

Para hallar un vector ortogonal a dos vectores calculamos su producto vectorial

$$\vec{u}x\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}=(6+4)\vec{i}-(4+1)\vec{j}+(8-3)\vec{k}=(10,-5,5)$$

La solución es un vector paralelo a (10,-5,5) de tercera componente 1 (x,y,1) : $\frac{10}{x}=\frac{-5}{y}=\frac{5}{1}\Rightarrow$

x = 2, y = -1 $\Rightarrow$ (2,-1,1)

<u>EJERCICIO 29</u> : Dados los vectores $\overrightarrow{u_1}(2,0,0), \overrightarrow{u_2}(0,1,-3), \overrightarrow{u_3} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}$, ¿Qué relación deben cumplir a y b para que $\overrightarrow{u_3}$ sea ortogonal al vector $\vec{v}(1,1,1)$?

Calculamos $\overrightarrow{u_3} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2} = a(2,0,0) + b(0,1,-3) = (2a, b, -3b)$

$\overrightarrow{u_3}$ debe ser ortogonal al vector $\vec{v}(1,1,1)$, por tanto, su producto escalar debe ser cero:

(2a,b,-3b).(1,1,1) = 0 $\Rightarrow$ 2ª + b – 3b = 0 $\Rightarrow$ a = b

<u>EJERCICIO 30</u> : Calcula las coordenadas de un vector $\vec{u}$ que sea ortogonal a $\vec{v}(1,2,3)$ y $\vec{w}(1,-1,1)$ y tal que $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = 19$

Hallamos un vector ortogonal a $\vec{v}$ y a $\overline{w}$: $\vec{v}x\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2+3)\vec{i} - (1-3)\vec{j} + (-1-2)\vec{k} = (5,2,-3)$

El vector pedido sea paralelo a (5,2,-3) $\Rightarrow$ (5α,2α,-3α) tal que cumpla que $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = 19 \Rightarrow$

$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \begin{vmatrix} 5\alpha & 2\alpha & -3\alpha \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ = (10α + 6α + 3α) – (-6α -15α + 2α) = 38α = 19 $\Rightarrow$ α = ½

Solución: $\left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)$

<u>EJERCICIO 32</u> :

a) Obten λ para que los siguientes vectores sean linealmente dependientes $\overrightarrow{u_1}(3,2,5), \overrightarrow{u_2}(2,4,7), \overrightarrow{u_3}(1,-3,\lambda)$

Ver |A| = 0 $\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = (12\lambda + 14 - 30) - (20 - 64 + 4\lambda) = 8\lambda + 27 = 0 \Rightarrow \lambda = -27/8$

b) Para $\lambda = 3$, expresa el vector $\vec{v}(7,3,15)$ como combinación lineal de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$

(7,3,15) = a (3,2,5) + b(2,4,7) + c(1,-3,3) $\Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 7 \\ 2a + 4b - 3c = 3 \\ 5a + 7b + 3c = 15 \end{cases} \Rightarrow$ Resolviendo el sistema por Gauss

a = 28/17, b = 10/17, c = 15/17 $\Rightarrow \vec{v} = \frac{28}{17}\overrightarrow{u_1} + \frac{10}{17}\overrightarrow{u_2} + \frac{15}{17}\overrightarrow{u_3}$

<u>EJERCICIO 34</u> :

a) Determina los valores de "a" para los que resultan linealmente dependientes los vectores (-2,a,a), (a,-2,a) y (a,a,-2)

|A| = 0 $\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{vmatrix} = (-8 + a^3 + a^3) - (-2a^2 - 2a^2 - 2a^2) = 2a^3 + 6a^2 - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ (doble)} \\ a = -2 \end{cases}$

b) Obten en esos casos una relación de dependencia entre los vectores.

Si a = 1: (-2,1,1) = m(1,-2,1) + n(1,1,-2) $\Rightarrow \begin{cases} -2 = m + n \\ 1 = -2m + n \\ 1 = m - 2n \end{cases} \Rightarrow$ m = -1 = n

(-2,1,1) = -(1,-2,1)-(1,1,-2)

Si a = -2: (-2,-2,-2) = m(-2,-2,-2) + n(-2,-2,-2) $\Rightarrow \begin{cases} -2 = -2m - 2n \\ -2 = -2m - 2n \\ -2 = -2m - 2n \end{cases} \Rightarrow$ m+n = 1 $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado $\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones: n = α, m = 1-α. Dándole a α cualquier valor, por ejemplo α = 0 $\Rightarrow$ n = 0, m = 1

(-2,-2,-2) = (-2,-2,-2)+0(-2,-2,-2)

<u>EJERCICIO 35</u> **: Dados los vectores $\vec{u}(1,-1,2), \vec{v}(3,1,-1)$ halla el conjunto de vectores que, siendo perpendiculares a $\vec{u}$, sean coplanrios con $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

Perpendicular a $\vec{u}$: Producto escalar nulo

Coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$: Producto mixto nulo

Llamamos $\vec{a} = (x, y, z)$ al ver que buscamos

$\vec{u}.\vec{a} = 0 \Rightarrow$ (1,-1,2).(x,y,z) = 0 $\Rightarrow$ x – y + 2z = 0

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z + x + 6y) - (2x - y - 3z) = -x + 7y + 4z = 0$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x + 7y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ (x,y,z) = (-3α,-α,α) $\forall \alpha \in$ R

<u>EJERCICIO 39</u> **: Halla un vector $\vec{u}$ de la misma dirección que $\vec{v}(1,-2,3)$ y tal que forme con $\vec{w}(-2,4,-1)$ un paralelogramo de área 25 u^2.**

Vector de la misma dirección que $\vec{v}$: $\vec{a}$(α,-2α,3α)

Que forme con $\vec{w}$ un paralelogramo de área 25: $\left|\vec{a} x \vec{w}\right| = 25$

$$\vec{a} x \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & -2\alpha & 3\alpha \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (2\alpha - 12\alpha)\vec{i} - (-\alpha + 6\alpha)\vec{j} + (4\alpha - 4\alpha)\vec{k} = (-10\alpha,-5\alpha,0)$$

$$\left|\vec{a} x \vec{w}\right| = \sqrt{100\alpha^2 + 25\alpha^2} = 25 \Rightarrow 125\alpha^2 = 625 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{5}$$

Solución: $\vec{a} = \pm\left(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5}\right)$

<u>EJERCICIO 40</u> **: Halla un vector $\vec{v}$ coplanario con $\vec{a}(2,-1,1)$ y $\vec{b}(1,0,3)$ y ortogonal a $\vec{c}(2,3,0)$**

$\vec{v}(x, y, z)$ coplanario con $\vec{a}$ y $\vec{b}$: Producto mixto nulo: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3x - 5y + z = 0$

$\vec{v}(x, y, z)$ ortogonal a $\vec{c}(2,30)$: Producto escalar nulo: 2x + 3y = 0

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} -3x-5y+z=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow$ (x,y,z) = (-3α,2α,α) ∀α∈ R

Como nos piden "uno" dando a α cualquier valor distinto de cero, por ejemplo α = 1 ⇒ (-3,2,1)

<u>EJERCICIO 41</u> : Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}|$ = 4, $|\vec{b}|$ = 2, con áng($\vec{a},\vec{b}$) = 60º. Calcula $|\vec{a}+\vec{b}|$ y $|\vec{a}-\vec{b}|$

Como no tenemos coordenadas, tenemos que aplicar la definición vectorial:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})} = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}.\vec{b}} = \sqrt{\left|\vec{a}.\right|^2+2\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left|\vec{b}\right|^2} =$$

$$= \sqrt{16+2.4.2.(1/2)+4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})} = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}.\vec{b}} = \sqrt{\left|\vec{a}.\right|^2-2\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left|\vec{b}\right|^2} =$$

$$= \sqrt{16-2.4.2.(1/2)+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

<u>EJERCICIO 42</u> : De dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que son ortogonales y que $|\vec{u}|$ = 6, $|\vec{v}|$ = 10. Calcula $|\vec{u}+\vec{v}|$ y $|\vec{u}-\vec{v}|$

Como son ortogonales su producto escalar es cero.

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right| = \sqrt{(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})} = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}+2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}.\vec{v}} = \sqrt{\left|\vec{u}.\right|^2+0+\left|\vec{v}\right|^2} = \sqrt{36+100} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$$

$$\left|\vec{u}-\vec{v}\right| = \sqrt{(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})} = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}-2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}.\vec{v}} = \sqrt{\left|\vec{u}.\right|^2-0+\left|\vec{v}\right|^2} = \sqrt{36+100} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$$

<u>EJERCICIO 43</u> : Calcula el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabiendo que $|\vec{a}|$ = 3, $|\vec{b}|$ = 5 , $|\vec{a}+\vec{b}|$ = 7

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})} = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}.\vec{b}} = \sqrt{\left|\vec{a}.\right|^2+2\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left|\vec{b}\right|^2} = 7 \Rightarrow$$

$$\left|\vec{a}.\right|^2+2\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left|\vec{b}\right|^2 = 49 \Rightarrow 9 + 2.3.5.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 25 = 49 \Rightarrow .\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = ½ \Rightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 60º$$

<u>EJERCICIO 44</u> : De los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que cumplen $\vec{u}+\vec{v}=\vec{a}$ y $2\vec{u}-3\vec{v}=\vec{b}$ siendo $\vec{a}(2,-1,0)$ y $\vec{b}(1,3,-1)$. Halla el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\begin{cases} \vec{u}+\vec{v}=\vec{a} \\ \overrightarrow{2u}-3\vec{v}=\vec{b} \end{cases} \Rightarrow -5\vec{v} = \vec{b}-2\vec{a} = (1,3,-1)-2(2,-1,0) = (-3,5,-1) \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{3}{5}.-1,\frac{1}{5}\right)$$

$$\vec{u} = \vec{a}-\vec{v} = (2,-1,0) - \left(\frac{3}{5}.-1,\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{7}{5},0,-\frac{1}{5}\right)$$

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{\frac{21}{25}-0-\frac{1}{25}}{\sqrt{\frac{49}{25}+0+\frac{1}{25}}.\sqrt{\frac{9}{25}+1+\frac{1}{25}}} = \frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{2}.\frac{\sqrt{35}}{5}} = \frac{4}{\sqrt{70}} \Rightarrow$$

$$\text{ang}(\vec{u},\vec{v}) = \text{arc cos}\left(\frac{4}{\sqrt{70}}\right) = 61º26´21{,}03´´$$

<u>AUTOEVALUACIÓN</u>

5.8 – APLICACIONES DE LOS VECTORES A PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

COORDENADAS DEL VECTOR QUE UNE DOS PUNTOS

Las coordenadas del vector $\vec{AB}$ se obtienen restándole a las coordenadas del extremo B las del origen A : $\vec{AB} = (x_2,y_2,z_2) - (x_1,y_1,z_1) = (x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

CONDICIÓN PARA QUE TRES PUNTOS ESTÉN ALINEADOS

Los puntos $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ están alineados siempre que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BC}$ tengan la misma dirección. Esto ocurre cuando sus coordenadas son proporcionales:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}$$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Las coordenadas del punto medio, M, de un segmento de extremos $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ son:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE OTRO

Para calcular el simétrico A’ del punto A respecto del punto B, solo hay que tener en cuenta que el punto B es el punto medio entre A y A’.

<u>EJEMPLO 1</u> : Dados los puntos A(1,2,-1), B(0,3,-2). Hallar el vector $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,3,-2) - (1,2,-1) = (-1,1,-1)$

<u>EJEMPLO 2</u> : Sea el vector $\overrightarrow{AB} = (2,-1,3)$ y el punto A(1,-1,4) calcular su extremo.

$\overrightarrow{AB} = B - A \Rightarrow B = A + \overrightarrow{AB} = (1,-1,4) + (2,-1,3) = (3,-2,7)$

<u>EJEMPLO 3</u> : Sea el segmento de extremos A(1,2,3) y B(-1,0,4). Hallar el punto medio

$$M = \left(\frac{1-1}{2},\frac{2+0}{2},\frac{3+4}{2}\right) = \left(0,1,\frac{7}{2}\right)$$

<u>EJERCICIO 2</u> : Comprueba si los puntos A(1,-2,1), B(2,3,0) y C(-1,0,-4) están alineados

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,3,0) - (1,-2,1) = (1,5,-1)$
$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1,0,-4) - (1,-2,1) = (-2,2,-5)$

Veamos si son proporcionales: $\frac{1}{-2} = \frac{5}{2} = \frac{-1}{-5} \Rightarrow$ Falso, no están alineados

<u>EJERCICIO 3</u> : Hallar dos puntos P y Q tales que $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$ siendo A(2,0,1) y B(5,3,-2)

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \Rightarrow Q - A = \frac{3}{5}(B - A) \Rightarrow$$

$$Q = (2,0,1) + \frac{3}{5}[(5,3,-2) - (2,0,1)] = (2,0,1) + \frac{3}{5}(3,3,-3) = \left(\frac{19}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ} \Rightarrow P - A = \frac{2}{3}(Q - A) \Rightarrow$$

$$P = (2,0,1) + \frac{2}{3}\left[\left(\frac{19}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{4}{5}\right) - (2,0,1)\right] = (2,0,1) + \frac{2}{3}\left(\frac{9}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{9}{5}\right) = \left(\frac{48}{15}, \frac{18}{15}, -\frac{3}{15}\right) = \left(\frac{16}{5}, \frac{6}{3}, -\frac{1}{5}\right)$$

<u>EJERCICIO 4</u> : Halla el simétrico del punto A(-2,3,0) respecto de M(1,-1,2)

$$M = (1,-1,2) = \left(\frac{-2+x}{2}, \frac{3+y}{2}, \frac{0+z}{2}\right) \Rightarrow A' = (4,-5,4)$$

<u>EJERCICIO 5</u> : Calcula a y b para que los puntos A(1,2,-1), B(3,0,-2) y C(4,a,b) estén alineados.

$\overrightarrow{AB}$ = B –A = (3,0,-2) – (1,2,-1) = (2,-2,-1)
$\overrightarrow{AC}$ = C – A = (4,a,b) – (1,2,-1) = (3,a-2,b+1)

Veamos si son proporcionales: $\frac{2}{3} = \frac{-2}{a-2} = \frac{-1}{b+1} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 4 = -6 \Rightarrow a = -1 \\ 2b + 2 = -3 \Rightarrow b = -5/2 \end{cases}$