Si sustituímos estos valores de x', y' y x'' en la ecuación (4), obtenemos

$$\frac{2y}{\frac{15-4y}{3}} = \frac{6}{\frac{6x+4y-9}{3}}$$

la cual, después de simplificarla, nos da la ecuación buscada

$$6xy + 4y^2 + 3y - 45 = 0,$$

que representa una hipérbola. El estudiante debe trazar la gráfica correspondiente de este lugar geométrico.

Un tipo interesante de curvas, cuya ecuación se obtiene más fácilmente mediante el método paramétrico, son las llamadas *podarias* o *curvas pedales*, definidas de la siguiente manera: si desde un punto fijo Q se trazan perpendiculares a las tangentes a una curva C, el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares es otra curva llamada *podaria de la curva* C *con respecto al punto* Q.

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la podaria de una parábola con respecto al vértice.

Solución. El problema no pierde generalidad si tomamos la forma canónica de la ecuación de la parábola, $y^2 = 4px$. Sea $P(x, y)$ (fig. 134) un punto cualquiera del lugar geométrico. Por el teorema 5 del Artículo 57, la ecuación de la tangente de pendiente m a la parábola $y^2 = 4px$ es

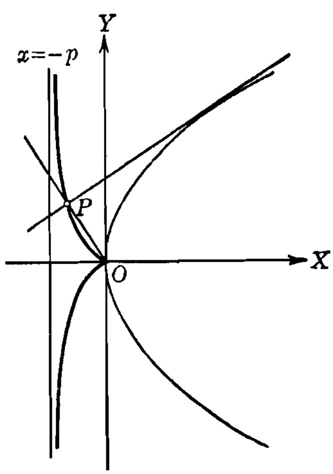


Fig. 134

$$y = mx + \frac{p}{m}, \quad m \neq 0. \tag{5}$$

Por ser OP perpendicular a la tangente (5), su ecuación es

$$y = -\frac{1}{m}x. \tag{6}$$

La ecuación rectangular de la podaria se obtiene eliminando el parámetro m entre las ecuaciones (5) y (6). Para ello, de la ecuación (6) se obtiene $m = -\frac{x}{y}$, valor que sustituído en la ecuación (5) nos da:

$$y = -\frac{x^2}{y} - \frac{py}{x}.$$

Despejando y^2 obtenemos la ecuación rectangular buscada

$$y^2 = -\frac{x^3}{x+p},$$

que representa una cisoide con asíntota $x = -p$. (Véase el ejemplo 1 del Artículo 19 y el ejercicio 6 del grupo 41, Art. 88.)

EJERCICIOS. Grupo 44

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar la ecuación del lugar geométrico formado por los puntos de intersección de dos tangentes perpendiculares cualesquiera a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

2. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de intersección de dos tangentes perpendiculares cualesquiera a la parábola $y^2 = 4px$.

3. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de intersección de dos tangentes perpendiculares cualesquiera a la hipérbola

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2, \quad a > b.$$

4. Por el punto fijo $A(-a, 0)$ de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ se traza una cuerda cualquiera AB. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de AB.

5. Por el punto fijo $A(-a, 0)$ de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, se traza una cuerda cualquiera AB. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de AB.

6. Una recta l pasa por el origen y corta a las rectas

$$x + 1 = 0 \quad \text{y} \quad x - y + 1 = 0$$

en los puntos A y B, respectivamente. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto medio del segmento AB a medida que la recta l gira en torno del origen.

7. Un segmento AB de longitud constante l se mueve de tal manera que su extremo A permanece siempre sobre el eje X y su extremo B siempre sobre el eje Y. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por un punto fijo P sobre AB tal que la razón $\overline{AP} : \overline{BP}$ es igual a k.

8. Hallar la ecuación de la podaria de la parábola $y^2 = 4px$ con respecto al foco.

9. Hallar la ecuación de la podaria de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ con respecto a su centro.

10. Demostrar, analíticamente, que una circunferencia es su propia curva podaria con respecto al centro.

11. Hallar la ecuación de la podaria de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ con respecto a su centro.

12. Demostrar que si en el ejercicio 11 la hipérbola es equilátera, la podaria es una lemniscata. (Véase el ejemplo 2 del Art. 82.)

13. Desde uno de los focos de una elipse, se traza una recta l_1 perpendicular a cualquiera de sus tangentes, y por el centro se traza una recta l_2 que pase por el punto de contacto. Demostrar, analíticamente, que el lugar geométrico de la intersección de l_1 y l_2 es la directriz correspondiente.

14. Establecer y demostrar el teorema correspondiente al del ejercicio 13 para la hipérbola.

15. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de intersección de dos tangentes cualesquiera a la parábola $y^2 = 4px$, tales que el producto de sus pendientes sea igual a una constante k.

16. Resolver el ejercicio 15 para la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

17. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de intersección de dos tangentes cualesquiera a la parábola $y^2 = 4px$ tales que formen un ángulo de 45 grados.

18. Hallar la ecuación de la podaria de la elipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ con respecto a un foco.

19. Hallar la ecuación de la podaria de la hipérbola $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ con respecto a un foco.

20. Demostrar que la podaria de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x = 0$ con respecto al origen es una cardioide. (Véase el ejemplo 1 del Art. 82.)

CAPITULO XII

CURVAS PLANAS DE GRADO SUPERIOR

96. Clasificación de funciones. Si en el curso de un discusión particular empleamos un símbolo, digamos x, al que se le pueden asignar valores diferentes, decimos que este símbolo es una *variable*, y a la totalidad de los valores que puede tomar le llamamos *intervalo de variación de la variable*. Así, la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (1)$$

contiene las dos variables x y y, a cada una de las cuales se le pueden asignar todos los valores reales desde -1 hasta $+1$ inclusive. El intervalo de variación de la variable x, por ejemplo, se expresa entonces por la relación

$$-1 \leq x \leq 1.$$

Según vimos, una ecuación en dos variables representa una correspondencia definida de valores entre esas dos variables (Arts. 14, 23). Nos referimos a tal correspondencia como a una *relación funcional*. Para mayor precisión, establezcamos la siguiente

DEFINICIÓN. Si dos variables, x y y, están relacionadas de tal manera que para cada valor asignado a la x dentro de su intervalo, quedan determinados uno o más valores correspondientes de y, se dice que y es una *función de* x.

Las funciones se clasifican de muchas maneras de acuerdo con sus diversas propiedades y características. Para nuestros fines inmediatos, sin embargo, será suficiente dividir todas las funciones en dos clases generales: funciones algebraicas y trascendentes. Para comprender esta clasificación necesitamos agregar algunas definiciones.

Una *función racional entera de* x es una función de la forma

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

en donde n es un entero positivo, o cero, y a_0, a_1, ..., a_n son constantes cualesquiera. Ordinariamente nos referimos a una función de tal naturaleza como un *polinomio* en x. En particular, si $a_0 \neq 0$, se dice que la función o polinomio es de *grado* n.

Una *función racional de* x es el cociente de una función racional entera de x por otra que sea diferente de cero. Así, si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son ambas funciones racionales enteras, si $f_2(x)$ es diferente de cero, y

$$R(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)},$$

entonces $R(x)$ es una función racional de x.

Consideremos ahora la ecuación

$$y^m + R_1(x)y^{m-1} + R_2(x)y^{m-2} + \ldots + R_{m-1}(x)y + R_m(x) = 0, \quad (2)$$

en donde m es un entero positivo y $R_1(x)$, $R_2(x)$, ..., $R_m(x)$ son funciones racionales de x. Si la relación entre dos variables x y y es de la forma dada por la ecuación (2), o puede hacerse que tome tal forma, entonces se dice que y es una *función algebraica* de x. Así, cada una de las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y^2 = \frac{x^3}{2-x}, \quad (x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2) \text{ y } x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1,$$

definen a y como una función algebraica de x.

Todas las funciones que no son algebraicas se llaman *funciones trascendentes*. Las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales son ejemplos de tales funciones. Así, cada una de las ecuaciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \log x$ y $ye^{x^2} = 1$ definen a y como una función trascendente de x.

97. Clasificación de las curvas planas. Cuando una curva plana está representada analíticamente por una ecuación con dos variables, esa ecuación, como acabamos de ver, expresa una relación funcional entre las dos variables. Decimos que una curva plana es *algebraica* o *trascendente* según que la relación funcional expresada por su ecuación sea algebraica o trascendente.

Se acostumbra hacer una posterior clasificación de las curvas planas. La ecuación de una recta,

$$Ax + By + C = 0, \quad (1)$$

es de primer grado en x y y, y la ecuación de una cónica,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (2)$$

es de segundo grado en x y y. Si la ecuación de un lugar geométrico no puede escribirse en ninguna de las formas (1) y (2), la curva correspondiente se dice que es una *curva plana de grado superior*.

Se sigue, de esto, que las curvas planas de grado superior incluyen todas las curvas trascendentes y todas las curvas algebraicas de grado superior a dos. No incluiremos, sin embargo, entre las curvas planas superiores, a aquellas cuyas ecuaciones, escritas en la forma de un polinomio igualado a cero, son tales que el primer miembro se pueda descomponer en dos o más factores entre las variables, de las formas dadas por las ecuaciones (1) y (2) anteriores (véase el Art. 20). Así, la ecuación

$$y^4 + x^2y^2 - 4x^3 - 4xy^2 - y^2 + 4x = 0$$

es de cuarto grado en las variables x y y, pero la curva que representa no será considerada como una curva plana superior porque la ecuación puede escribirse en la forma equivalente

$$(x^2 + y^2 - 1)(y^2 - 4x) = 0.$$

Como el número de curvas planas superiores es ilimitado, se hace necesario hacer una selección de las que van a estudiarse. Hay varias razones para hacer un estudio particular de una curva plana superior. Las principales entre estas razones se refieren a la importancia que tenga en Matemáticas superiores, a su carácter histórico y a sus aplicaciones prácticas. Tales consideraciones fueron las que sirvieron para hacer la selección de las curvas planas superiores estudiadas en este capítulo.

98. **Algunas curvas planas superiores algebraicas.** En este artículo, vamos a estudiar varios tipos de curvas planas algebraicas de grado superior.

a) *Curvas polinomias.* Si en la ecuación

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \tag{1}$$

el segundo miembro $f(x)$ es una función racional entera de x con coeficientes reales, el lugar geométrico que representa se llama una *curva polinomia*. Para $n = 1$, el lugar geométrico es una recta; para $n = 2$, el lugar geométrico es una parábola. Aquí consideraremos solamente curvas polinomias aquellas para las cuales $n \geq 3$; los lugares geométricos correspondientes son entonces curvas planas superiores.

Las curvas polinomias se trazan convenientemente determinando primero aquellos valores de x para los cuales y es igual a cero. Cada valor de x de esta clase se llama un *cero* del polinomio $f(x)$ representado por el segundo miembro de la ecuación (1); también se le conoce con el nombre de *raíz* de la ecuación $f(x) = 0$. Gráficamente, cada *raíz real* diferente, digamos a, representa la abscisa de un punto de intersección de la curva con el eje X. Se demuestra en Análisis matemático que la función polinomia $f(x)$ es continua; gráficamente, esto significa que el lugar geométrico es una curva continua.

Ejemplo. Trazar la curva polinomia cuya ecuación es

$$y = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8. \tag{2}$$

Solución. Por los métodos de la teoría de ecuaciones del Algebra, se halla que los ceros del segundo miembro de la ecuación (2) son -2, 1, 1, 4. Por tanto, podemos escribir la ecuación (2) en la forma

$$y = (x + 2)\ (x - 1)^2\ (x - 4). \tag{3}$$

Las intersecciones de la curva con el eje X son los puntos de abscisas -2, 1 y 4. Como un ejemplo del método a seguir para obtener el signo de y para valores de x comprendidos entre las intersecciones, lo determinaremos para valores de x comprendidos entre -2 y 1. Sea $x = -1$, un valor comprendido entre -2 y 1. Para este valor de x, los signos de los factores del segundo miembro de la ecuación (3) son $+$, $+$ y $-$, respectivamente; por tanto, su producto y es negativo, lo que indica que la curva está abajo del eje X para valores de x comprendidos entre -2 y 1. Análogamente, podemos demostrar que entre las intersecciones 1 y 4 la curva también está abajo del eje X. El mismo procedimiento se sigue para valores no comprendidos entre los intervalos pero incluídos por las intersecciones. Así, para $x < -2$, y para $x > 4$, la ecuación (3) muestra que y es positiva; luego, en estas regiones, la curva está sobre el eje X.

x	y
-3	112
-1	-20
0	-8
2	-8
3	-20
5	112

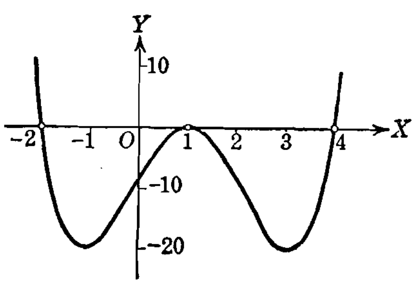


Fig. 135

Después de hacer esta investigación preliminar, conviene, generalmente, obtener las coordenadas de algunos puntos de la curva, con el fin de obtener una gráfica adecuada. Esto puede hacerse convenientemente utilizando los métodos estudiados en Algebra para hallar el valor numérico de un polinomio. La gráfica de la ecuación (2) aparece en la figura 135.

NOTA. Como los coeficientes de la ecuación (1) son reales, cualesquiera raíces complejas de $f(x) = 0$ deben ocurrir en pares conjugados; entonces no hay intersecciones correspondientes con el eje X. Pero para cada raíz real diferente, y para cada grupo de un número *impar* de raíces reales repetidas, el lugar geométrico corta al eje X. También para cada grupo de un número *par* de raíces reales iguales, cada una igual a, digamos a, la curva no corta al eje X, pero es tangente a él en el punto $(a, 0)$; esto está ilustrado en la curva de la figura 135.

b) *Curvas potenciales*. La ecuación

$$y = ax^n, \quad a \neq 0, \tag{4}$$

en donde n es una constante arbitraria o parámetro, representa una familia de curvas llamadas *curvas potenciales*. En particular, si n es positivo, se dice que las curvas de la familia (4) son del *tipo parabó-*

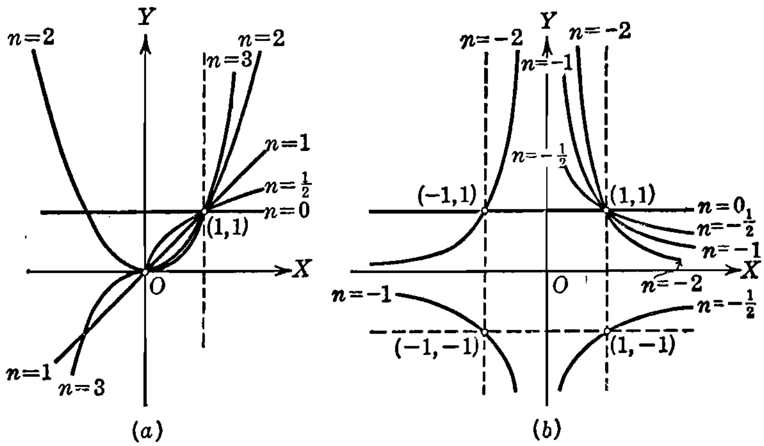


Fig. 136

lico; y si n es negativo, se dice que son del *tipo hiperbólico*. Así, si $n = 2$, la ecuación (4) representa una parábola, y si $n = -1$, representa una hipérbola equilátera.

Hemos considerado ya algunos casos especiales de la familia (4). Así, para $n = 0$ y 1, tenemos líneas rectas; para $n = 2$, una parábola; para $n = \frac{1}{2}$, una rama de una parábola; para $n = 3$, la parábola cúbica; para $n = \frac{2}{3}$, una parábola semicúbica, y para $n = \frac{3}{2}$, una rama de una parábola semicúbica. Algunas de estas curvas del tipo parabólico se han trazado en la figura 136 (a), en donde a se toma igual a la unidad. Otras, del tipo hiperbólico, aparecen en la figura 136 (b), en donde a se toma también igual a la unidad.

Las curvas potenciales tienen origen diverso. Por ejemplo, en la teoría de los gases, tenemos las curvas representadas por la ecuación

$$pv^n = k,$$

en donde p es la presión y v es el volumen de un gas, y n y k son constantes. En particular, si $n = 1$, tenemos la relación conocida como *ley de Boyle*.

c) *Curva de Agnesi*. Entre las curvas algebraicas de interés histórico está la *curva de Agnesi* o *la bruja*. Esta curva es el lugar geométrico de un punto P obtenido como sigue. Sea OA (fig. 137) un diámetro de un círculo y t su tangente en A. Desde O tracemos una recta cualquiera l y sean B y C sus puntos de intersección con la circunferencia y la recta t. Por B tracemos una recta perpendicular a OA y por C tracemos otra recta paralela a OA; sea P el punto de

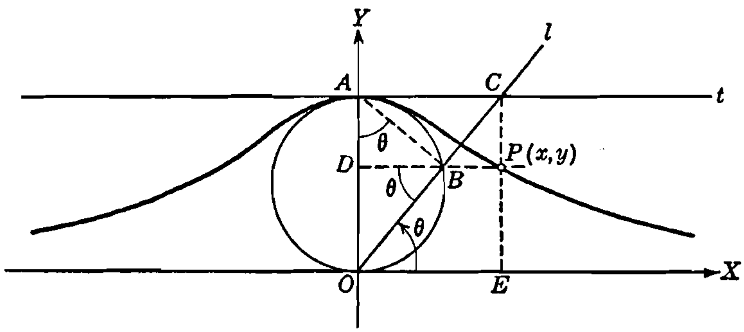


Fig. 137

intersección de estas dos rectas. La curva de Agnesi es el lugar geométrico que describe el punto P a medida que l gira en torno de O.

Para obtener la ecuación de la curva de Agnesi, tomemos el punto O como origen y el diámetro OA a lo largo del eje Y. La construcción del punto $P(x, y)$ es como aparece en la figura 137. Sean D y E los pies de las perpendiculares trazadas de B a OA y de C al eje X, respectivamente. Sea θ el ángulo que l forma con la parte positiva del eje X. Como θ varía a medida que l gira alrededor de O, lo emplearemos como parámetro. Tracemos la recta AB. Se verifica: ángulo $DBO =$ ángulo $DAB = \theta$. Sea a el radio del círculo. Las coordenadas del punto $P(x, y)$, serán:

$$x = \overline{OE} = \overline{AC} = \overline{OA} \operatorname{ctg} \theta = 2a \operatorname{ctg} \theta,$$

$$y = \overline{EP} = \overline{OD} = \overline{OB} \operatorname{sen} \theta = \overline{OA} \operatorname{sen}^2 \theta = 2a \operatorname{sen}^2 \theta.$$

El estudiante debe demostrar que la ecuación rectangular de la curva de Agnesi, obtenida a partir de estas ecuaciones paramétricas, es

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}. \tag{5}$$

La ecuación (5) nos dice que la curva es simétrica con respecto al eje Y y asintótica al eje X. El estudio completo de la curva se deja como ejercicio al estudiante.

99. Tres famosos problemas de la antigüedad. Tres problemas geométricos se hicieron famosos por los vanos esfuerzos que hicieron los antiguos matemáticos griegos para resolverlos utilizando solamente la regla y el compás. Estos problemas son

a) La duplicación del cubo.

b) La trisección de un ángulo arbitrario.

c) La cuadratura del círculo.

Modernamente se ha demostrado que la solución de cualquiera de estos problemas es imposible por medio de la regla y el compás solamente. Dedicaremos este artículo a un breve estudio de cada uno de estos célebres problemas, ligados a curvas también famosas.

a) *Duplicación del cubo*. Este problema significa la obtención de la arista de un cubo cuyo volumen sea igual al doble del volumen de un cubo dado. Demostraremos en seguida que este problema puede resolverse por medio de la curva llamada cisoide de Diocles. (pag 261)

Sea C el centro y $\overline{OA} = 2a$ (figura 138) el diámetro fijo del círculo generador de la cisoide. Con estos datos y los ejes indicados en la figura la ecuación rectangular de la curva es

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}. \qquad (1)$$

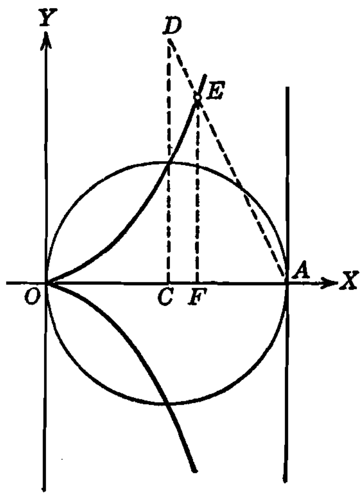


Fig. 138

Tracemos $\overline{CD} = 2a$ perpendicular al eje X, y sea E el punto de intersección de DA con la cisoide. Tracemos FE, la ordenada de E. De los triángulos semejantes DCA y EFA, tenemos

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} = \frac{a}{2a},$$

o sea,

$$\overline{FA} = \tfrac{1}{2}\,\overline{FE}. \qquad (2)$$

Por ser el punto E de la cisoide, tenemos, según la ecuación (1),

$$\overline{FE}^2 = \frac{\overline{OF}^3}{\overline{FA}},$$

y sustituyendo el valor de FA dado en la ecuación (2), resulta

$$\overline{FE}^2 = \frac{2\overline{OF}^3}{\overline{FE}},$$

de donde,

$$\overline{FE}^3 = 2\overline{OF}^3. \qquad (3)$$

Sea b la arista de un cubo dado cualquiera. Construyamos un segmento de longitud c tal que

$$\frac{c}{b} = \frac{\overline{FE}}{\overline{OF}}.$$

Entonces, de la ecuación (3) tenemos

$$\frac{c^3}{b^3} = \frac{\overline{FE}^3}{\overline{OF}^3} = 2,$$

de donde,

$$c^3 = 2b^3.$$

Es decir, c es la arista de un cubo cuyo volumen es el doble del volumen del cubo dado de arista b.

b) *Trisección de un ángulo arbitrario.* Si bien es posible, por medio de la regla y el compás solamente, trisecar unos cuantos ángulos particulares, por ejemplo, un ángulo recto, no es posible hacerlo si se trata de un ángulo cualquiera. La trisección de cualquier ángulo puede efectuarse, sin embargo, por medio de la concoide de Nicomedes, como demostraremos ahora.

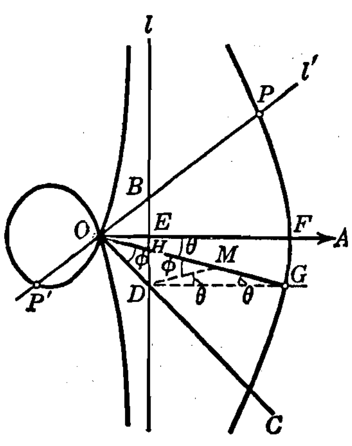


Fig. 139

Sea AOC (fig. 139) el ángulo que va a trisecarse. Por D, un punto cualquiera sobre el lado OC, tracemos la recta l perpendicular al lado OA y sea E su punto de intersección. Sobre OA tomemos el punto F tal que $\overline{EF} = 2\overline{OD}$.

Sea O el punto fijo y l la recta fija de una concoide construída como sigue (véase el ejercicio 22 del grupo 41, Art. 88). Por O

tracemos una recta cualquiera l' y sea B el punto en que corta a l. Sean P y P' dos puntos sobre l' a derecha e izquierda de B, respectivamente, y tales que $|\overline{BP}| = |\overline{BP'}| = b$, una constante, para cualquier posición de l'. Se llama concoide el lugar geométrico descrito por P y P'. Por este método, construyamos la concoide para la cual $b = |\overline{EF}|$. Por D tracemos una recta paralela a OA y sea G su punto de intersección con la concoide. Tracemos OG y sea H su intersección con l. Entonces

$$\text{Angulo } AOG = \tfrac{1}{3} \text{ ángulo } AOC.$$

La demostración de esta construcción es la siguiente: Tracemos DM siendo M el punto medio de HG. De la construcción de la concoide,

$$\overline{HG} = \overline{EF} = 2\overline{OD}.$$

Como M es el punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo GHD es equidistante de los tres vértices, y

$$\overline{DM} = \overline{MG} = \tfrac{1}{2}\overline{HG} = \overline{OD}.$$

Por tanto, tenemos dos triángulos isósceles, ODM y DMG, tales que

$$\text{ángulo } MOD = \text{ángulo } OMD,$$

y

$$\text{ángulo } MDG = \text{ángulo } MGD.$$

Llamemos ϕ y θ, respectivamente, a estos ángulos. El ángulo ϕ es un ángulo exterior del triángulo DMG; por tanto,

$$\phi = 2\theta.$$

Como DG es paralela a OA, tenemos

$$\text{ángulo } AOG = \text{ángulo } MGD = \theta.$$

Por tanto, finalmente,

$$\text{ángulo } AOC = \theta + \phi = 3\theta = 3 \text{ ángulo } AOG,$$

y la construcción está demostrada.

c) *Cuadratura del círculo*. Este problema consiste en la construcción de un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado. Se le conoce también como el problema de "cuadrar el círculo". El lector comprenderá que la solución de este problema requiere la determinación de π, la razón de la circunferencia a su diámetro. En Matemáticas superiores se demuestra que no solamente es imposible resolver este problema por medio de la regla y el compás, sino que la solución no puede efectuarse por medio de ninguna curva algebraica cuya ecuación tenga coeficientes racionales.

EJERCICIOS. Grupo 45

En cada uno de los ejercicios 1-3 construir la curva correspondiente a la ecuación que se da.

1. $y = x^3 - 2x^2 - x + 2.$
2. $y = 2x^4 - 11x^3 + 20x^2 - 12x.$
3. $y = x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 38x^2 - 43x + 15.$

4. Si la función polinomia general $f(x)$, igualada a cero, tiene por raíces los números complejos conjugados $a + bi$ y $a - bi$, en que a y b son reales, $b \neq 0$, y $i = \sqrt{-1}$, demuéstrese que $f(x)$ tiene un factor cuadrático positivo para todos los valores reales de x y, por tanto, que no hay ningún punto de intersección de la curva $y = f(x)$ con el eje X.

5. Si la función polinomia general $f(x)$, igualada a cero, tiene raíces reales de orden impar, iguales cada una a a, demuéstrese que la curva $y = f(x)$ corta al eje X en el punto $(a, 0)$.

6. Si la función polinomia general $f(x)$, igualada a cero, tiene raíces reales de orden par, iguales cada una a a, demuéstrese que la curva $y = f(x)$ es tangente al eje X en el punto $(a, 0)$.

7. Para las curvas potenciales $y = x^n$, demuéstrese: *a*) que todas las curvas del tipo parabólico pasan por el punto $(1, 1)$ y el origen; *b*) que todas las curvas del tipo hiperbólico son asintóticas a los ejes coordenados.

8. Dibújese la figura 136(*a*) del Artículo 98 a una escala más grande y agréguense las curvas correspondientes para $n = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5$. Compárense los lugares geométricos obtenidos haciendo variar el valor de n.

9. Dibújese la figura 136(*b*) del Artículo 98 a una escala más grande y agréguense las curvas correspondientes para $n = -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -3, -4$. Compárense los lugares geométricos obtenidos haciendo variar el valor de n.

10. Dibújense varias de las curvas potenciales representadas por la ecuación $x = ay^n$, y compárense con las curvas correspondientes de la familia $y = ax^n$.

En cada uno de los ejercicios 11-17, construir las curvas potenciales cuyas ecuaciones se dan.

11. $y = (x - 1)^3$. *Sugestión.* Trasládese el eje Y.
12. $y = (x + 1)^5.$
13. $y = x^4 + 1.$
14. $y - 2 = (x - 3)^4.$
15. $y + 1 = (x - 1)^{3/2}.$
16. $y - 1 = (x + 1)^{2/3}.$
17. $y - 3 = (x + 2)^{-4}.$

18. A partir de sus ecuaciones paramétricas, obténgase la ecuación rectangular de la curva de Agnesi dada por la ecuación (5) del Artículo 98. Efectuar una discusión completa de la curva.

19. Trazar la curva de Agnesi cuya ecuación es $y^2 = \frac{4a^2 x}{2a - x}$.

20. Empleando la construcción para la duplicación del cubo dada en el Artículo 99, demuéstrese que si en la figura 138 tomamos $\overline{CD} = na$, podemos obtener la arista de un cubo cuyo volumen sea n veces el del cubo dado.

21. Las parábolas $y^2 = 2ax$ y $x^2 = ay$ se cortan en el origen y en otro punto P. Considerando la abscisa del punto P, demostrar cómo el problema de la duplicación del cubo puede resolverse para un cubo dado de arista a.

22. Trácese la curva cuya ecuación es $x^3 + xy^2 - 3ax^2 + ay^2 = 0$. Esta curva se llama *trisectriz de Maclaurin*. Como su nombre lo indica puede usarse para trisecar un ángulo cualquiera.

23. Trazar la curva cuya ecuación es $x^4 + y^4 = a^4$. Esta curva se conoce con el nombre de *curva de cuarto grado de Lamé*.

24. En el mismo sistema de ejes coordenados dibujar las porciones de curvas de la familia de curvas $x^n + y^n = 1$, correspondientes al primer cuadrante cuando a n se le asignan sucesivamente los valores $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 1, 2 y 4. Identificar cada lugar geométrico, y observar el efecto obtenido haciendo variar el valor de n.

25. Trazar el lugar geométrico de $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Esta curva se llama *hoja de Descartes*.

26. Trazar el lugar geométrico de $(x^2 + y^2)^2 - ax^2 y = 0$. Esta curva se llama *bifoliada*.

27. Trazar la cuva cuya ecuación es $x^3 + xy^2 + ax^2 - ay^2 = 0$. Su lugar geométrico es la *estrofoide*.

28. Trazar el lugar geométrico de $y^4 - 2ay^3 + a^2 x^2 = 0$.

29. Trazar el lugar geométrico de $x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)$. Esta curva se llama *cruciforme*. El lector debe notar que aunque el origen pertenece al lugar geométrico, ningún otro punto de la vecindad del origen está sobre la curva. Un punto, tal como el origen, se llama entonces un *punto aislado*.

30. Trazar el lugar geométrico de $x^2 y - a^2 x + b^2y = 0$. Esta curva se llama *serpentina*.

100. La sinusoide. El lector ya está familiarizado con la función sen x desde su estudio de Trigonometría. Las propiedades de esta función pueden estudiarse convenientemente por medio de la ecuación

$$y = \operatorname{sen} x. \tag{1}$$

El lugar geométrico de la ecuación (1) se llama *sinusoide*.

Las intersecciones de la curva (1) con el eje X son 0, $\pm \pi$, $\pm 2\pi$, y, en general, $n\pi$, en que n es un entero cualquiera. El único punto de intersección con el eje Y es el origen. Como

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x = -y,$$

la curva es simétrica con respecto al origen. A la variable x pueden asignársele todos los valores reales; la variable y puede tomar valores reales cualesquiera en el intervalo $-1 \leq y \leq 1$. Por tanto, el lugar geométrico se extiende indefinidamente hacia la derecha y hacia la izquierda del eje Y entre las rectas $y = \pm 1$. La curva no tiene asíntotas. Las coordenadas de un número suficiente de puntos pueden obtenerse de la tabla del Apéndice IC, 5, junta con las fórmulas de reducción dadas en el Apéndice IC, 3. Una parte del lugar geométrico aparece en la figura 140. El estudiante debe notar que las abscisas son números que representan la medida en *radianes* del ángulo.

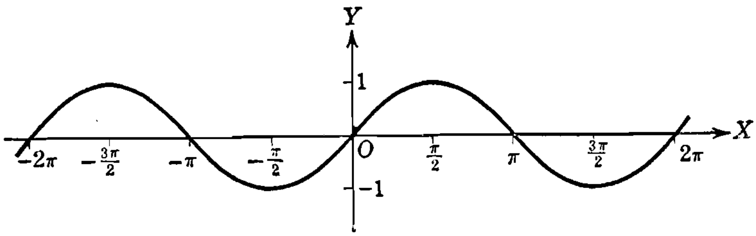


Fig. 140

Observamos que el lugar geométrico se repite idéntico para cada cambio de 2π radianes en el valor de x; se dice que tal curva es *periódica*. Más generalmente, si una función $f(x)$ tiene la propiedad de que

$$f(x) = f(x + p), \tag{2}$$

en que p es una constante diferente de cero, entonces se dice que $f(x)$ es una *función periódica*, y al valor mínimo positivo de p tal que la relación (2) se verifique aún, se le llama *período* de $f(x)$. Evidentemente, como sen x = sen $(x + 2\pi)$, la sinusoide (1) es periódica con período 2π. Cualquier porción de la curva que corresponde a un cambio en x igual al período se llama *ciclo* de la curva. Así, en la figura 140, un ciclo es aquella porción de la curva comprendida entre el origen y el punto $(2\pi, 0)$. También, la porción incluída entre dos intersecciones cualesquiera con el eje X se lama *arco*. El máximo de los valores absolutos de las ordenadas de una sinusoide se llama su *amplitud;* para la curva (1), la amplitud es la unidad.

Veamos ahora cómo se obtiene el período y la amplitud de una sinusoide partiendo de la ecuación general

$$y = a \operatorname{sen} (kx + \alpha), \tag{3}$$

en donde a, k y α son constantes. La amplitud de la curva (3) es igual a $|a|$; por esto, la cantidad a se llama *factor de amplitud*. Un ciclo completo del lugar geométrico de la ecuación (3) se obtiene cuando el ángulo $kx + \alpha$ varía en 2π radianes. Como k y α son constantes, esta variación puede efectuarse solamente alterando el valor de x. Evidentemente, lo que tiene que variar x, digamos p, es el período de la curva (3). Para calcular el valor de p escribimos

$$k(x + p) + \alpha - (kx + \alpha) = 2\pi,$$

de donde,

$$kp = 2\pi,$$

y

$$p = \frac{2\pi}{k}.$$

Vemos, por lo tanto, comparando los períodos de las curvas (1) y (3), que, mientras la curva (1) tiene un ciclo en el intervalo de 0 a 2π, la curva (3) tiene k ciclos en el mismo intervalo. Por esto, a la constante k se le llama *factor de periodicidad*.

El ángulo α en la ecuación (3) no afecta ni la amplitud ni el período de la sinusoide, pero afecta la posición de la curva con relación a los ejes coordenados. Esto puede verse escribiendo la ecuación (3) en la forma

$$y = a \operatorname{sen} k\left(x + \frac{\alpha}{k}\right) \tag{4}$$

y comparando su gráfica con la ecuación

$$y = a \operatorname{sen} kx. \tag{5}$$

Los lugares geométricos de las ecuaciones (4) y (5) son idénticos en forma, pero si se trazan en el mismo sistema de ejes coordenados aparecen como curvas separadas para las cuales los puntos correspondientes tienen las mismas ordenadas pero sus abscisas difieren en una cantidad igual a $\frac{\alpha}{k}$. Se dice entonces que la dos curvas están *fuera de fase* o *defasadas*, y al ángulo $\frac{\alpha}{k}$ se le da por esto el nombre de *ángulo de fase*.

Ejemplo. Trazar la sinusoide cuya ecuación es

$$y = 2 \operatorname{sen} (\tfrac{1}{2} x + 1), \tag{6}$$

y determinar su amplitud, período y ángulo de fase.

Solución. La amplitud es igual, evidentemente, a 2. Como el factor de periodicidad es $\frac{1}{2}$, el período es igual a $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, y el ángulo de fase es igual a $\frac{1}{\frac{1}{2}}$, o sea, 2 radianes. El estudiante debe notar, en especial, que el número 1 que aparece en el ángulo de la ecuación (6) representa un radián y *no* un grado.

Para trazar el lugar geométrico de la ecuación (6), es conveniente trasladar primero el eje Y. Para ello escribiremos la ecuación (6) en la forma

$$y = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x + 2),$$

y haremos

$$x + 2 = x'.$$

De esta manera la ecuación transformada es

$$y = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} x'. \tag{7}$$

Como $x = x' - 2$, el nuevo origen O' es el punto $(-2, 0)$. La gráfica de la ecuación (7) puede trazarse entonces con relación a los ejes X y Y' como

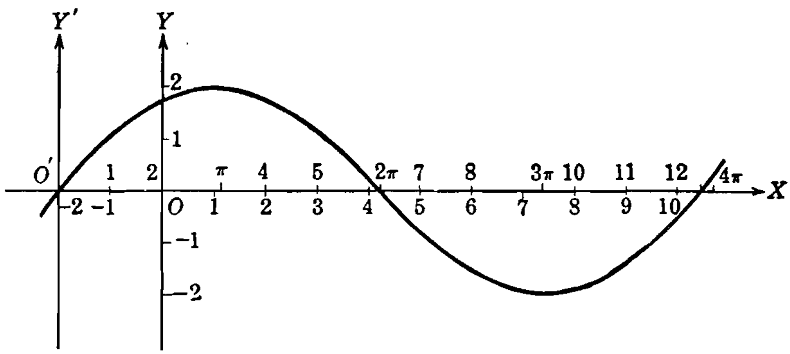


Fig. 141

se explicó para la gráfica (fig. 140) de la ecuación (1). Una parte de la curva resultante se ha representado en la figura 141; por supuesto, que esta gráfica es también el lugar geométrico de la ecuación (6) con relación a los ejes X y Y. La escala señalada encima del eje X es con relación al eje Y' y se emplea al trazar la gráfica de la ecuación (7); la escala inferior es con relación al eje Y y se emplea para leer las coordenadas de los puntos que están sobre la gráfica de la ecuación (6). Se puede obtener una comprobación parcial de la exactitud de la gráfica de la ecuación (6) determinando sus intersecciones con los ejes coordenados.

101. Otras curvas trigonométricas. Las cinco restantes funciones trigonométricas pueden estudiarse por medio de sus gráficas, cada una de las cuales recibe un nombre en relación con la función trigonométrica correspondiente. Así, la función trigonométrica cos x se estudia por medio de la ecuación

$$y = \cos x, \tag{1}$$

cuya gráfica se llama la *cosinusoide*. Como $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, la cosinusoide puede trazarse por medio de la sinusoide

$$y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

La curva de la figura 142, difiere de la correspondiente a $y = \operatorname{sen} x$

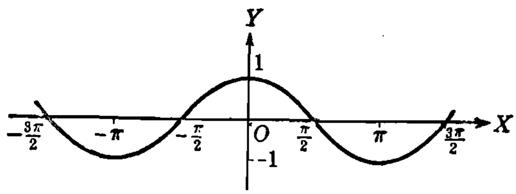


Fig. 142

de la figura 140 solamente por tener al eje Y desplazado $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la derecha. Como $\cos(-x) = \cos x$, la curva es simétrica con respecto al eje Y. La amplitud es la unidad, y como $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ el período es igual a 2π. El resto de la discusión de la curva se deja como ejercicio al estudiante.

La gráfica de la ecuación

$$y = \operatorname{tg} x \tag{2}$$

se llama *tangentoide*. Como $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$, la curva es periódica y su período es igual a π. La gráfica [fig. 143 (a)] se compone de un número infinito de ramas diferentes que tienen por asíntotas las

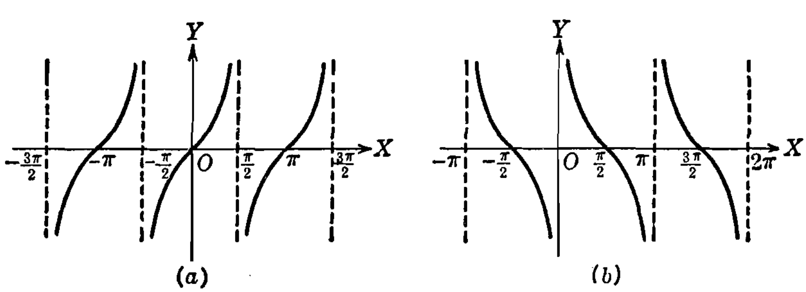


Fig. 143

rectas $x = \frac{n}{2}\pi$, en donde n es un entero impar. El resto de la discusión de la tangentoide se deja como ejercicio al estudiante. También debe desarrollar una discusión completa de la *cotangentoide*,

$$y = \operatorname{ctg} x, \qquad (3)$$

cuya gráfica está construída en la figura 143 (b).

La gráfica de la *secantoide*,

$$y = \sec x, \qquad (4)$$

está trazada en la figura 144 (a). La gráfica de la *cosecantoide*,

$$y = \csc x, \qquad (5)$$

se ha construído en la figura 144 (b). Ambas curvas, la secantoide y

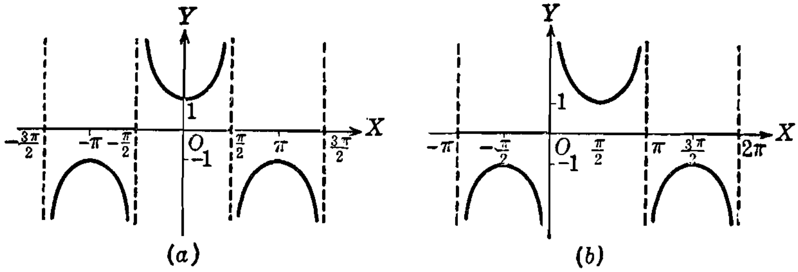


Fig. 144

la cosecantoide son periódicas, siendo el período de cada una igual a 2π. La discusión de estas curvas se deja como ejercicio al estudiante.

102. Gráficas de las funciones trigonométricas inversas. La función arc sen x puede estudiarse por medio de la ecuación

$$y = \operatorname{arc\,sen} x, \qquad (1)$$

la cual significa que y es el arco cuyo seno es x. La ecuación (1) se escribe frecuentemente en la forma

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x,$$

pero nosotros emplearemos la notación de la ecuación (1). La relación expresada por la ecuación (1) puede obtenerse a partir de la ecuación

$$x = \operatorname{sen} y \qquad (2)$$

despejando y en función de x. Por tanto, la relación (1) es inversa de la relación (2); consecuentemente, la función arc sen x se llama *función inversa* del seno, y la gráfica de la ecuación (1) se llama *curva seno inversa*.

Como la ecuación (1) se deduce de la ecuación (2), la gráfica de la ecuación (1) puede obtenerse partiendo de la ecuación (2) por el método estudiado en el Artículo 100. Parte de la gráfica se ha trazado en la figura 145(a). La discusión completa de la curva se deja como ejercicio al estudiante, pero llamaremos la atención sobre un hecho

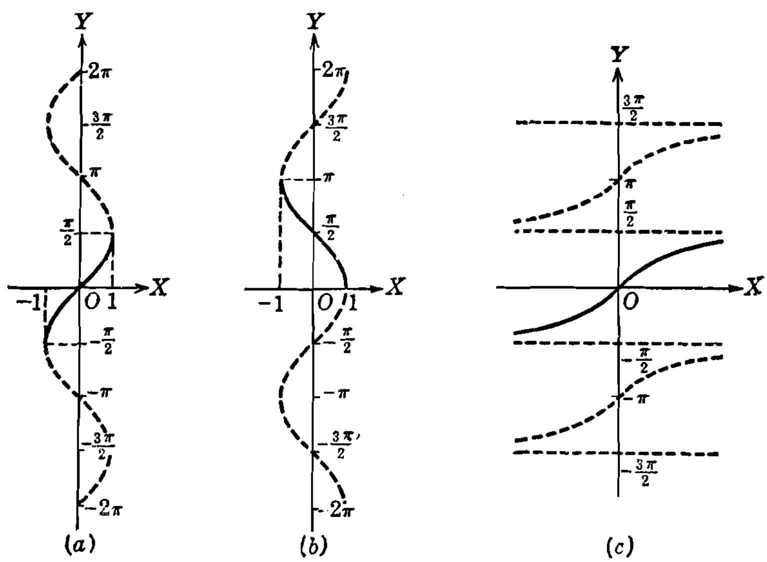


Fig. 145

importante: En el caso de la sinusoide, $y = \text{sen}\, x$, para cada valor asignado a x, se obtiene uno y solamente un valor de y. Decimos entonces que y es una *función uniforme de* x. En cambio, en el caso de la curva seno inversa (1), para cada valor que se le asigna a x, se obtiene un número infinito de valores para y. Así, si se le asigna a x el valor $\frac{1}{2}$, y puede tener uno cualquiera de los valores

$$\frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{ó} \quad \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,$$

siendo n un número entero cualquiera. De acuerdo con esto, se dice entonces que y es una *función multiforme de* x. Para ciertos estudios se hace necesario restringir los valores de y a un cierto intervalo con el fin de convertir a esta función en uniforme. Para la función arc sen x, este intervalo es

$$-\frac{\pi}{2} \leq \text{arc sen } x \leq \frac{\pi}{2}, \qquad (3)$$

y estos valores se llaman los *valores principales* del arc sen x. El estudiante debe observar que, dentro del intervalo (3), la variable x puede tomar todos los valores desde -1 a $+1$, inclusive. Aquella porción de la curva seno inversa (1) incluída en el intervalo (3) se llama *rama principal* de la curva; esta curva es la trazada con una línea más gruesa en la figura 145(a).

Para la *curva coseno inversa* cuya ecuación es

$$y = \text{arc cos } x, \qquad (4)$$

la variación de los valores principales está dada por el intervalo

$$0 \leq \text{arc cos } x \leq \pi. \qquad (5)$$

La rama principal de esta curva es la trazada en línea gruesa en la figura 145(b).

Para la *curva tangente inversa* cuya ecuación es

$$y = \text{arc tg } x,$$

la variación de los valores principales es

$$-\frac{\pi}{2} < \text{arc tg } x < \frac{\pi}{2}.$$

La rama principal de esta curva aparece en línea gruesa en la figura 145(c).

Para la *curva cotangente inversa*, $y = \text{arc ctg } x$, la *curva secante inversa*, $y = \text{arc sec } x$, y la *curva cosecante inversa*, $y = \text{arc csc } x$, los valores principales están dados por los intervalos

$$0 < \text{arc ctg } x < \pi,$$

$$-\pi \leq \text{arc sec } x < -\frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq \text{arc sec } x < \frac{\pi}{2},$$

$$-\pi < \text{arc csc } x \leq -\frac{\pi}{2},$$

$$0 < \text{arc csc } x \leq \frac{\pi}{2}.$$

EJERCICIOS. Grupo 46

1. Mostrar gráficamente la amplitud de una sinusoide trazando en el mismo sistema de ejes coordenados, las curvas

$$y = \text{sen } x, \quad y = 3 \text{ sen } x \quad \text{y} \quad y = \tfrac{1}{2} \text{ sen } x.$$

2. Mostrar el efecto del período en una sinusoide trazando, en el mismo sistema de ejes coordenados, las curvas

$$y = \text{sen } x, \quad y = \text{sen } 2x \quad \text{y} \quad y = \text{sen } \frac{x}{3}.$$

3. Mostrar el efecto del ángulo de fase en la sinusoide trazando, en el mismo sistema de ejes coordenados, las curvas

$$y = \text{sen } 2x, \quad y = \text{sen}(2x + 60°) \quad \text{y} \quad y = \text{sen}(2x - 60°).$$

En cada uno de los ejercicios 4-15, trácese la curva cuya ecuación se da. Determínense también su amplitud, período y ángulo de fase.

4. $y = 2 \text{ sen } 3x.$
5. $y = \text{sen } \dfrac{\pi x}{2}.$
6. $y = 4 \text{ sen } 2\pi x.$
7. $y = \tfrac{1}{2} \text{ sen } (x + 2).$
8. $y = 4 \text{ sen} \left(\dfrac{x}{3} + 1 \right).$
9. $y = -2 \text{ sen}(2x + \pi).$
10. $y + 1 = \text{sen}(x - 1).$
11. $y - 3 = \tfrac{1}{2} \text{ sen } (x + 2).$
12. $x = \text{sen } 2y.$
13. $x = -2 \text{ sen } \dfrac{y}{2}.$
14. $x = \text{sen} \left(\dfrac{y}{2} - \dfrac{\pi}{4} \right).$
15. $x + 3 = 3 \text{ sen } (2y + 4).$

16. Dar una discusión completa de la curva $y = \cos x$.
17. Dar una discusión completa de las curvas $y = \text{tg } x$ y $y = \text{ctg } x$.
18. Dar una discusión completa de las curvas $y = \sec x$ y $y = \csc x$.
19. Dar una discusión completa de la curva $y = a \cos(kx + \alpha)$, en que a, k y α son constantes.
20. Construir la gráfica de la ecuación $y = \text{ctg } x$ a partir de la gráfica de $y = \text{tg} \left(\dfrac{\pi}{2} - x \right)$.

En cada uno de los ejercicios 21-28, trácese la curva cuya ecuación se da.

21. $y = \cos \dfrac{x}{3}.$
22. $y = \text{tg } 2x.$
23. $y = \text{ctg } \dfrac{x}{2}.$
24. $y = \sec 3x.$
25. $y = \csc \dfrac{x}{4}.$
26. $x = 2 \cos 3y.$
27. $x = 2 \text{ tg } \dfrac{\pi y}{2}.$
28. $y - 1 = 3 \cos(x - 2).$

29. Dar una discusión completa de la curva seno inversa $y = \text{arc sen } x$ y de la curva coseno inversa $y = \text{arc cos } x$.
30. Dar una discusión completa de la curva tangente inversa $y = \text{arc tg } x$ y de la curva cotangente inversa $y = \text{arc ctg } x$.

31. Dar una discusión completa de la curva secante inversa $y = \text{arc sec } x$ y de la curva coszcante inversa $y = \text{arc csc } x$.

En cada uno de los ejercicios 32-35, trácese la cuva cuya ecuación se da.

32. $y = \text{arc sen}(x - 1)$.

33. $y = 2 \text{ arc cos } 2x$.

34. $y = 3 \text{ arc tg } \frac{x}{3}$.

35. $x = 2 \text{ arc cos}(2 - y)$.

103. Curva logarítmica. La función logarítmica puede estudiarse por medio de la ecuación

$$y = \log_a x, \qquad a > 0, \quad a \neq 1, \tag{1}$$

cuya gráfica se llama *curva logarítmica*. El número positivo a es una constante llamada *base* y cuyos valores se discutirán más tarde. Por la definición de logaritmo (Apéndice IB, 4), la ecuación (1) puede escribirse en la forma equivalente,

$$x = a^y. \tag{2}$$

La expresión a^y, llamada *función exponencial*, es, evidentemente, la *inversa* de la función logarítmica. La función exponencial y su gráfica, la curva exponencial, se estudiarán en el artículo siguiente.

Trazaremos primero la curva logarítmica (1). Para $x = 1$, $y = 0$; para $x = 0$, $\log_a x$, o sea y, no está definido. Por tanto, la única intersección con los ejes coordenados está dada por el punto $(1, 0)$. Evidentemente no hay simetría con respecto a ninguno de los ejes coordenados o al origen. Como los logaritmos de los números negativos son complejos, no se le pueden asignar a la variable x valores negativos; según esto, no hay curva a la izquierda del eje Y. Si la base a es mayor que la unidad, de la ecuación (2) se sigue que y aumenta de valor a medida que x lo hace; también, para $x > 1$, y es positiva, de manera que la curva se extiende indefinidamente hacia la derecha y hacia arriba del eje X. Para valores de x comprendidos en el intervalo $0 < x < 1$, y es negativa. A medida que x tiende a cero, y aumenta numéricamente sin límite en la dirección negativa; por tanto, la parte negativa del eje Y es una asíntota de la curva.

La discusión precedente da la localización general de la curva en el plano coordenado, para $a > 1$. La determinación de las coordenadas de los puntos de la curva depende, sin embargo, del valor asignado a la base a. Hay dos bases de uso corriente, la ***base común*** 10, para los cálculos numéricos ordinarios, y la ***base neperiana*** e, igual a 2,71828, aproximadamente, empleada casi exclusivamente en Matemáticas avanzadas. Para la base 10, las coordenadas de los puntos de la curva (1) pueden obtenerse en una tabla de logaritmos comunes, tal como la Tabla A del Apéndice II; la gráfica correspondiente es la trazada en la figura 146. Las tablas de logaritmos de base e, llamados *logaritmos naturales* o *neperianos*, también pueden usarse. La relación entre los logaritmos comunes y los logaritmos naturales puede obtenerse por medio de la fórmula dada en el Apéndice IB, 4, según la cual

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = \frac{\log_{10} x}{0{,}43429} = 2{,}3026 \log_{10} x.$$

Por tanto, la gráfica de la ecuación (1) cuando $a = e$ puede obtenerse a partir de la gráfica para $a = 10$ multiplicando todas las ordenadas de la curva de la figura 146 por 2,3026.

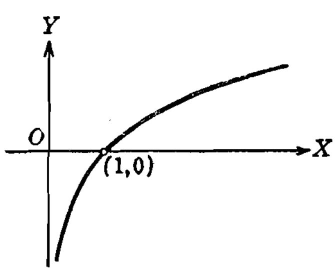


Fig. 146

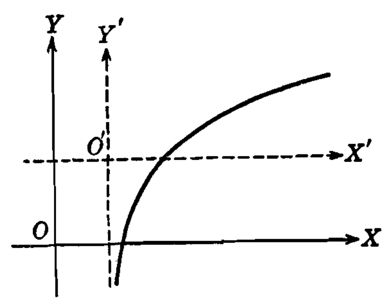


Fig. 147

Ejemplo. Trazar la curva logarítmica cuya ecuación es

$$y = 2 \log_{10} 2\sqrt{x-1}. \qquad (3)$$

Solución. Por supuesto que se puede trazar la gráfica directamente partiendo de la ecuación (3). Pero podemos simplificar el procedimiento usando los teoremas sobre logaritmos dados en el Apéndice IB, 4, y escribiendo entonces la ecuación en la forma

$$y = \log_{10} 4 + \log_{10}(x-1).$$

Si pasamos $\log_{10} 4$ al primer miembro, y hacemos

$$x' = x - 1, \quad y' = y - \log_{10} 4,$$

la ecuación toma la forma

$$y' = \log_{10} x'. \qquad (4)$$

La gráfica de la ecuación (4) puede trazarse ahora tal como se trazó la de la ecuación (1) anterior. La curva (fig. 147) se traza partiendo de la ecuación (4) con referencia a los nuevos ejes X' y Y' obtenidos trasladando los ejes originales al nuevo origen $O'(1, \log_{10} 4)$.

104. Curva exponencial. La función exponencial puede estudiarse por medio de la ecuación

$$y = a^x, \qquad a > 0, \quad a \neq 1, \tag{1}$$

cuya gráfica se llama *curva exponencial*. Se hizo notar en el artículo precedente que las funciones exponencial y logarítmica son inversas entre sí, ya que la ecuación (1) puede escribirse en la forma equivalente

$$x = \log_a y. \tag{2}$$

Es evidente, por la ecuación (2), que la curva exponencial (1) puede trazarse tal como se trazó la curva logarítmica

$$y = \log_a x, \qquad a > 0, \quad a \neq 1. \tag{3}$$

En suma, para el mismo valor de a, las dos curvas (1) y (3) son idénticas en su forma; difieren solamente en sus posiciones con relación a los ejes coordenados. En la figura 148 se han trazado varias curvas exponenciales para diversos valores de a, incluyendo el caso importante en que $a = e$, la base de los logaritmos neperianos. Todas estas curvas pasan por el punto (0, 1) y son asintóticas al eje X.

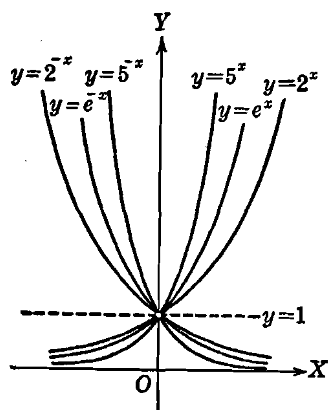


Fig. 148

La función exponencial es de una gran importancia en las Matemáticas avanzadas y sus aplicaciones. Se presenta en las expresiones matemáticas de una gran variedad de fenómenos físicos. Aparece frecuentemente en la forma

$$y = ce^{kx}, \tag{4}$$

en que c y k son constantes diferentes de cero y e es la base neperiana. Para tener una idea de lo mucho que se presenta la función exponencial en la práctica, basta considerar que aparece en la representación analítica de tan variados fenómenos como son el crecimiento de las bacterias, la descomposición del radio y la ley de Newton del enfriamiento. Se presenta también en la fórmula empleada para la determinación del interés continuo, y por esta razón se le menciona a veces como la *ley del interés compuesto*. En los ejercicios 22–28 del grupo 47 aparecen varias aplicaciones de la función exponencial; además se dan algunas ilustraciones más en el siguiente artículo.

La función exponencial aparece también en la ecuación

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}, \tag{5}$$

en donde h es una constante arbitraria. La gráfica de esta ecuación se llama *curva de probabilidad* o *curva de error*. Es de importancia fundamental en la teoría de la probabilidad y sus aplicaciones. En el ejemplo siguiente se considera un tipo sencillo de curva de probabilidad; sirve para que se vea la forma general de tales curvas.

Como la función exponencial e^x ocurre tan frecuentemente en las aplicaciones, se han construído tablas de valores de e^x y e^{-x} para facilitar los cálculos numéricos. Una pequeña tabla de tales valores es la Tabla C en el Apéndice II.

Ejemplo. Trazar la curva de probabilidad cuya ecuación es

$$y = e^{-x^2}. \tag{6}$$

Solución. Como y es diferente de cero para todos los valores de x, no hay intersección alguna con el eje X. Para $x = 0$, $y = 1$; por tanto, la intersección con el eje Y está dada por el punto $(0, 1)$. La curva es pues, evidentemente,

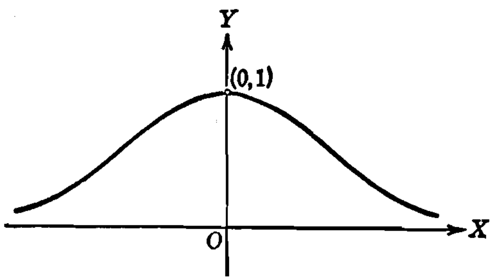


Fig. 149

simétrica con respecto al eje Y. Como x puede tomar todos los valores reales, la curva se extiende indefinidamente hacia la derecha e izquierda del eje Y. También, como y es positiva para todos los valores de x, la curva está en su totalidad arriba del eje X. Si escribimos la ecuación (6) en la forma

$$y = \frac{1}{e^{x^2}}, \tag{7}$$

vemos, por ser $e > 1$, que, a medida que x aumenta de valor sin límite en la dirección positiva o en la negativa, y tiende a cero. Por tanto, el eje X es una asíntota. La ecuación (7) nos dice también que y alcanza su valor máximo cuando el valor de e^{x^2} es mínimo, y esto ocurre cuando $x = 0$. Por tanto, el valor máximo de y es 1, y $(0, 1)$ es un punto máximo de la curva. Las coordenadas de algunos puntos del lugar geométrico pueden obtenerse por medio de la Tabla C del Apéndice II. La gráfica es la representada en la figura 149.

EJERCICIOS. Grupo 47

En cada uno de los ejercicios 1-12, construir la curva logarítmica cuya ecuación se da.

1. $y = \log_e x$.
2. $y = \log_{10}(x - 2)$.
3. $y = -\log_{10} x$.
4. $y = \log_{10}(-x)$.
5. $y = 3\log_2(x + 1)$.
6. $y = \log_{10} x^2$.
7. $y = \log_{10}\sqrt{x}$.
8. $y = \log_e \sqrt{x + 1}$.
9. $x = \log_2(y + 4)$.
10. $y - 2 = 2\log_e \sqrt{x - 1}$.
11. $y = \log_e \operatorname{sen} x$.
12. $y = \log_e \cos x$.

13. Discutir la curva logarítmica $y = \log_a x$ cuando la base a está restringida a tomar valores comprendidos dentro del intervalo $0 < a < 1$.

14. En el mismo sistema de ejes coordenados, trazar las curvas $y = \log_a x$ cuando se le asignan a la base a los valores $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 2, 3 y 4. Compárense las curvas obtenidas haciendo variar el valor de a.

15. Explicar por qué en las ecuaciones de las curvas exponencial y logarítmica la constante a está restringida a tomar valores positivos diferentes de la unidad.

En cada uno de los ejercicios 16-21, trazar la curva exponencial cuya ecuación se da.

16. $y = 2(\frac{1}{2})^x$.
17. $y = 4e^{x-1}$.
18. $x = 3^y$.
19. $y = 3e^{-2x^2}$.
20. $y + 1 = 2^{x+1}$.
21. $y - 2 = 3e^{x-2}$.

22. Al final de n años, el monto C producido por un capital c al r por ciento de interés compuesto anual está dada por la fórmula

$$C = c(1 + r)^n.$$

Trazar la gráfica de esta ecuación cuando $c = 100$ y $r = 0{,}04$, siendo C y n las variables.

23. La presión P de la atmósfera a una altura h está dada, aproximadamente, por la fórmula

$$P = P_0 e^{-kh},$$

en la que P_0 es la presión al nivel del mar y k es una constante. Trazar la gráfica de esta ecuación cuando $P_0 = 76$ y $k = 0{,}13$, siendo P y h las variables.

24. Si T_0 es el exceso inicial de la temperatura de un cuerpo sobre la temperatura de los cuerpos que le rodean, entonces el exceso de temperatura T después de un lapso de tiempo t está dado, aproximadamente, para valores pequeños de T, por la fórmula conocida como ley de Newton del enfriamiento:

$$T = T_0 e^{-kt},$$

en la que k es una constante. Trazar la gráfica de esta ecuación cuando $T_0 = 100$ y $k = 0{,}4$ siendo T y t las variables.

25. Si A_0 es la cantidad original de radio que contiene una muestra, la cantidad A no descompuesta después de un lapso de tiempo t está dada por la fórmula

$$A = A_0 e^{-kt},$$

siendo k una constante. Trazar la gráfica de esta ecuación cuando $A_0 = 1$ y $k = 0{,}0004$, siendo A y t las variables.

26. Si I_0 es la intensidad inicial de una corriente telefónica, entonces su intensidad I después de un lapso de tiempo t está dada, bajo ciertas condiciones, por la fórmula

$$I = I_0 e^{-kt},$$

en que k es una constante. Trazar la gráfica de esta ecuación cuando $I_0 = 0{,}2$ y $k = 0{,}01$, siendo I y t las variables.

27. Si T y T_0 representan las fuerzas de tensión que actúan sobre los lados útil y libre, respectivamente, de una banda transmisora de energía, entonces

$$T = T_0 e^{k\theta},$$

en donde k es una constante. Trazar la gráfica de esta ecuación cuando $T_0 = 100$ y $k = 0{,}5$ siendo T y θ las variables.

28. Si la carga inicial de un condensador es Q_0, la carga Q después de un lapso de tiempo t está dada, bajo ciertas condiciones, por la fórmula

$$Q = Q_0 e^{-kt},$$

en donde k es una constante. Trazar la gráfica de esta ecuación cuando $Q_0 = 10$ y $k = 0{,}01$ siendo Q y t las variables.

En cada uno de los ejercicios 29 y 30, trácense las gráficas de las curvas dadas por sus ecuaciones paramétricas.

29. $x = \operatorname{sen} t,\quad y = e^t.$ **30.** $x = 2 + t,\quad y = \log_{10} t.$

105. Curvas compuestas. Si la ecuación de una curva es tal que puede considerarse como una combinación de las ecuaciones de dos o más curvas simples, diremos que su gráfica es una *curva compuesta*. Por ejemplo, la gráfica de la ecuación

$$y = x - \cos x$$

es una curva compuesta, ya que puede obtenerse como una combinación de la recta $y = x$ y de la cosinusoide $y = \cos x$. Ilustraremos el procedimiento a seguir para la construcción de la curva en el siguiente ejemplo. El método se conoce con el nombre de *adición de ordenadas*.

Ejemplo 1. Trazar la curva compuesta cuya ecuación es

$$y = x - \cos x. \qquad (1)$$

Solución. Podemos, por supuesto, trazar la curva calculando directamente las coordenadas de varios puntos a partir de la ecuación (1). Pero podemos también considerar la recta

$$y = x \tag{2}$$

y la curva

$$y = -\cos x. \tag{3}$$

Por métodos estudiados anteriormente, las gráficas de las ecuaciones (2) y (3) pueden trazarse rápida y fácilmente. Son las líneas punteadas de la figura 150. Para un valor particular de x, digamos x_1, sean y_1 y y_2, respectivamente, las ordenadas correspondientes sobre las curvas (2) y (3). Entonces la ordenada

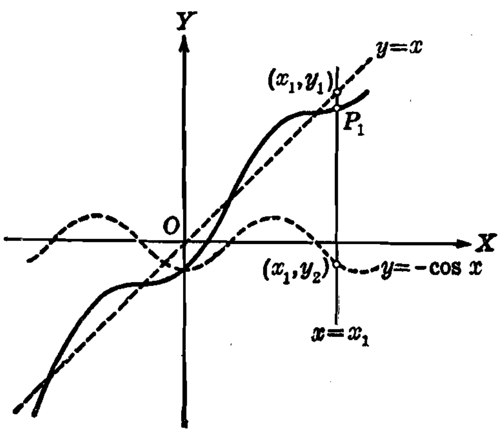


Fig. 150

de la curva (1) correspondiente a este valor $x = x_1$ puede obtenerse tomando la suma *algebraica* de las ordenadas y_1 y y_2. Por este método, se pueden determinar gráficamente puntos del lugar geométrico de la ecuación (1) a partir de las gráficas de las ecuaciones (2) y (3) como se hizo para el punto P_1. La curva resultante, correspondiente a la ecuación (1), aparece en la figura 150 en línea gruesa.

Las gráficas de las *funciones hiperbólicas* son ejemplos de curvas compuestas. El seno hiperbólico de x, que se escribe senh x, se define por la fórmula

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

y el coseno hiperbólico de x por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Las restantes funciones hiperbólicas, tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas de x, se definen de la misma manera que las funciones trigonométricas correspondientes. Esto nos da

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{ctgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

En el siguiente ejemplo se ilustra una aplicación importante del $\cosh x$.

Ejemplo 2. Trazar la curva cuya ecuación es

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad a > 0. \tag{4}$$

Solución. La curva corta al eje Y solamente en el punto $(0, a)$. La curva es simétrica con respecto al eje Y. Como e^x es positiva para todos los valores de x, y es positiva para todos los valores de x. A medida que x tiende a infinito tomando valores positivos o negativos, y tiende a infinito positivamente. El valor mínimo de y es a. La curva se extiende indefinidamente a la derecha e izquierda del eje Y y hacia arriba de la recta $y = a$. No tiene asíntotas verticales ni horizontales. Para trazar la gráfica podemos tomar a igual a la unidad y usar entonces los valores de e^x y e^{-x} dados en la tabla C del Apéndice II. La gráfica puede también obtenerse partiendo de las curvas exponenciales $y = \frac{a}{2}e^{\frac{x}{a}}$ y $y = \frac{a}{2}e^{-\frac{x}{a}}$ por el método de adición de ordenadas. La gráfica aparece en línea gruesa en la figura 151; las curvas exponenciales están indicadas por líneas punteadas.

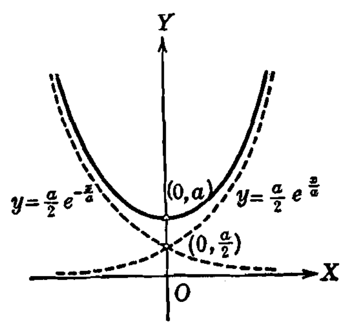


Fig. 151

Por la definición de $\cosh x$ dada arriba, la ecuación (4) puede escribirse en la forma

$$y = a \cosh \frac{x}{a}.$$

La curva se llama *catenaria*. Es la forma que toma un cable uniforme y flexible suspendido de dos puntos y colgando bajo su propio peso.

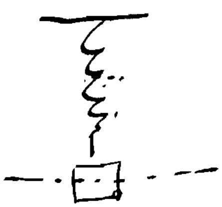
Consideremos ahora una curva de importancia fundamental en la teoría de las vibraciones. Se llama curva de las *vibraciones decrecientes*, y su ecuación general es de la forma

$$y = ae^{-c^2x} \operatorname{sen}(kx + \alpha), \tag{5}$$

siendo a, c, k y α constantes. Esta ecuación describe el movimiento, bajo condiciones apropiadas, de un cuerpo vibratorio que está sujeto a una fuerza resistente. La variable y mide el desplazamiento del cuerpo desde su posición de equilibrio a cualquier tiempo medido por la variable x. Si no estuviera el factor e^{-c^2x} la ecuación (5) tomaría la forma

$$y = a \operatorname{sen}(kx + \alpha), \tag{6}$$

que es la sinusoide estudiada en el Artículo 100, ecuación (3). La amplitud de la curva (6) es constante e igual a $|a|$. En la ecuación (5), en cambio, el factor e^{-c^2x} tiene el efecto de disminuir la



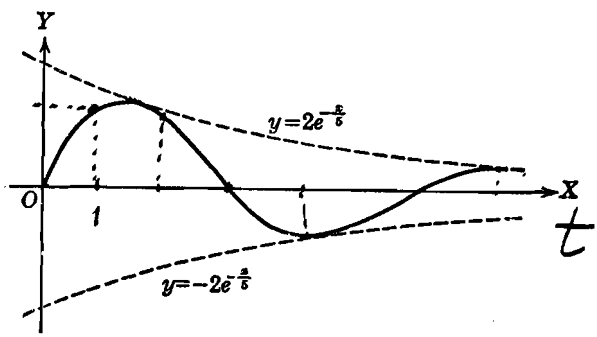


Fig. 152

amplitud o el desplazamiento del cuerpo desde su posición de equilibrio, a medida que x crece. Por esto e^{-c^2x} se llama *factor de crecimiento*. La forma general de la gráfica de la ecuación (5) se ilustra para un caso sencillo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Trazar la curva cuya ecuación es

$$y = 2e^{-\frac{x}{5}} \operatorname{sen} x. \tag{7}$$

Solución. El trazado de esta curva es relativamente sencillo, pues el valor absoluto de sen x nunca excede a la unidad. Por tanto, el valor de y no puede exceder nunca a $2e^{-\frac{x}{5}}$ ni ser menor que $-2e^{-\frac{x}{5}}$; en consecuencia, la curva (7) está en su totalidad dentro de las curvas

$$y = 2e^{-\frac{x}{5}} \quad \text{y} \quad y = -2e^{-\frac{x}{5}}, \tag{8}$$

que por esto han sido llamadas *curvas circundantes* de la curva representada por la ecuación (7). Empezaremos, por tanto, trazando primero las curvas circundantes (8) que son las líneas de trazos de la figura 152. La gráfica de la ecuación (7), trazada con línea gruesa en la figura 152, puede obtenerse ahora fácilmente considerando las variaciones de los valores de sen x. Para valores de $x = 0, \pi, 2\pi, \ldots$, la curva (7) corta al eje X; para valores de

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \frac{9\pi}{2}, \quad \ldots,$$

corta a la curva circundante $2e^{-\frac{x}{5}}$, y para valores de

$$x = \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{7\pi}{2}, \quad \frac{11\pi}{2}, \quad \ldots,$$

corta a la otra curva circundante $y = -2e^{-\frac{x}{5}}$.

Se pueden usar ventajosamente curvas circundantes para trazar gráficas cuyas ecuaciones sean de la forma

$$y = f(x) \cdot g(x),$$

en que una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ sea una función seno o coseno. Unos ejemplos de tales ecuaciones son $y = x$ sen x y $y = x^2 \cos x$.

EJERCICIOS. Grupo 48

En cada uno de los ejercicios 1-10 construir la curva cuya ecuación se da.

1. $y = 2x - \operatorname{sen} x$.
2. $y = 3x + \cos 2x$.
3. $y - 1 = x - \operatorname{sen} 2x$.
4. $x = y + \cos 2y$.
5. $x + 1 = 2y - 2 \operatorname{sen} \frac{x}{3}$.
6. $y = x^2 + \operatorname{sen} x$.
7. $y = 3x + \log_{10} 2x$.
8. $y = x^2 + \log_{10} x$.
9. $y = \log_e x - \operatorname{sen} x$.
10. $y = \operatorname{sen} x + e^x$.

En cada uno de los ejercicios 11-14, construir la curva, a partir de su ecuación dada, por el método de adición de ordenadas. Compruébense los resultados por medio de las relaciones trigonométricas dadas en el Apéndice IC, 9.

11. $y = 3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x$.
12. $y = \operatorname{sen} 2x + \cos 2x$.
13. $y = 4 \operatorname{sen} 3x - 3 \cos 3x$.
14. $y = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{2}$.

En cada uno de los ejercicios 15-18, construir la curva cuya ecuación se da, y determinar su período.

15. $y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$.
16. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$.
17. $y = \operatorname{sen} 2x + \cos 3x$.
18. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x$.

19. Trazar la curva seno hiperbólico $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

20. Trazar la curva tangente hiperbólica $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

21. En el mismo sistema de ejes coordenados, trácense las gráficas de la curva de Agnesi, $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, la curva de probabilidad, $y = e^{-x^2}$, y la curva secante hiperbólica, $y = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$. Obsérvese la gran semejanza que tienen estas curvas entre sí.

22. Trazar la gráfica de la ecuación $y = \cosh x + \operatorname{senh} x$. Hallar la ecuación de la curva exponencial representada por esta ecuación.

23. Trazar la curva seno hiperbólico inverso $y = \operatorname{senh}^{-1} x$.

En cada uno de los ejercicios 24-35, construir la curva cuya ecuación se da,

24. $y = x \operatorname{sen} x$.

25. $y = x^2 \cos x$.

26. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

27. $y = 2e^{-x} \operatorname{sen} 2x$.

28. $y = 2e^{-x} \cos \frac{x}{2}$.

29. $y - 1 = 2e^{-x} \operatorname{sen} (2x + 4)$.

30. $y = \operatorname{sen}^2 x$.

31. $y = x \operatorname{sen}^2 x$.

32. $y = \log_{10} \frac{x + 1}{x}$.

33. $y = xe^x$.

34. $y = e^x \log_e x$.

35. $x = e^{-y} \operatorname{sen} 2y$.

GEOMETRIA ANALITICA DEL ESPACIO

CAPITULO XIII

EL PUNTO EN EL ESPACIO

106. Introducción. En la Geometría analítica plana solamente se consideran los puntos situados en un solo plano, el plano coordenado. Esta limitación no permite la investigación de las figuras generales en el espacio. Por esto, y con el fin de extender el método analítico al estudio de las figuras de tres dimensiones, quitamos la restricción impuesta y consideramos que el punto puede ocupar cualquier posición en el espacio.

Cuando un punto P está en un plano coordenado, su posición se fija con respecto a los elementos de referencia del plano. Si consideramos ahora que el punto P puede ser un punto cualquiera del espacio, su posición puede determinarse por su distancia perpendicular, llamémosla z, al plano coordenado. Vemos, entonces, que para localizar la posición de un punto en el espacio se requiere otra dimensión z además de las dos dimensiones del sistema coordenado plano. En consecuencia, desde este punto de vista, un sistema coordenado en el espacio es un sistema tridimensional obtenido como una extensión del sistema bidimensional. También vemos que, cuando a z se le asigna el valor particular cero, el sistema tridimensional se reduce al bidimensional, por tanto, un sistema de coordenadas en el plano puede considerarse como un caso especial de un sistema de coordenadas en el espacio. Desde este último punto de vista, es importante notar que una relación en el espacio se reduce a la relación correspondiente en el plano cuando se da a la tercera dimensión el valor cero. En adelante tendremos ocasión muy frecuentemente de observar esta analogía entre los sistemas bi y tridimensional.

En Geometría analítica plana las relaciones y las propiedades geométricas se expresan por medio de ecuaciones que contienen, en general, dos variables. En Geometría analítica del espacio, en cambio, tales ecuaciones contienen, en general, tres variables, y, es evidente, que la presencia de esta variable adicional traerá una mayor complicación analítica que las relaciones con el plano. Además, el estudiante comprenderá perfectamente que la tercera dimensión de la Geometría analítica del espacio exigirá más trabajo de su poder de visualización de figuras en el espacio que el que requirió para figuras en el plano.

107. Sistema de coordenadas rectangulares en el espacio. En Geometría analítica del espacio se emplean varios sistemas de coordenadas. El más usado es el rectangular que describiremos y discutiremos en este artículo.

Consideremos tres planos mutuamente perpendiculares que se cortan en el punto común O, tal como se indica en la figura 153. Como el

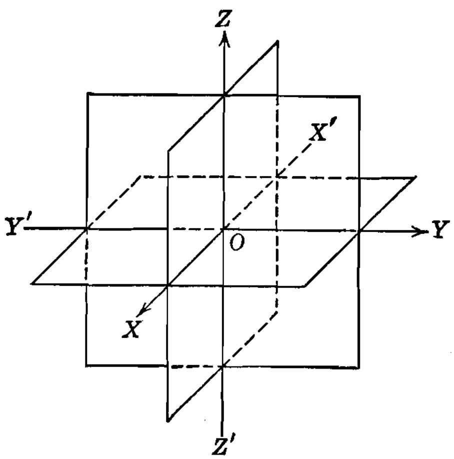


Fig. 153

punto en el espacio va a localizarse con referencia a estos elementos, los planos se llaman *planos coordenados*, las rectas de intersección de estos planos *ejes coordenados* y el punto O *origen* del *sistema de coordenadas rectangulares*. Teniendo lo anterior estamos en libertad de designar los ejes coordenados como queramos. Un convenio es el indicado en la figura 153; se dice entonces que el sistema de coordenadas es un sistema de *mano derecha*. Otro convenio, también muy usado, es el mismo que aparece en la figura 153 con excepción de que los ejes XX' y YY' están intercambiados; en este caso se dice que el sistema coordenado es un sistema de *mano izquierda*. En este libro emplearemos, en general, el primer sistema.

Los ejes coordenados XX', YY', ZZ' se llaman, respectivamente, *el eje* X, el Y y el Z. Estos ejes son rectas dirigidas, cuya dirección positiva está indicada en cada uno por una flecha. Cada plano coordenado se designa por los dos ejes coordenados que contiene. Así, el plano coordenado que contiene al eje X y al eje Y se llama plano XY; análogamente, tenemos los planos XZ y YZ. Los tres planos coordenados dividen el espacio en ocho regiones llamadas *octantes*. El octante determinado por las partes positivas de los ejes coordenados se llama *primer octante;* no se acostumbra asignar ningún número a los siete octantes restantes. El estudiante puede concebir fácilmente el primer octante considerando una de las esquinas de una habitación rectangular en donde dos paredes adyacentes y el piso representan a los planos coordenados.

En seguida veremos cómo puede localizarse un punto en el espacio por medio del sistema de coordenadas rectangulares. En la práctica, no es necesario representar el sistema de coordenadas trazando los planos coordenados como aparecen en la figura 153; será suficiente para nuestros fines trazar solamente los ejes coordenados como se indica en la figura 154. Sea P un punto cualquiera del espacio. Su posición puede determinarse haciendo pasar por P planos paralelos a los tres planos coordenados y considerando los puntos A, B y C en que cortan a los ejes X, Y y Z, respectivamente. Estos planos, juntos con los coordenados forman un paralelepípedo recto rectangular. Evidentemente, la posición de P con relación al sistema de coordenadas está determinada por sus distancias a los planos coordenados. Estas distancias están dadas por las longitudes de los segmentos dirigidos OA, OB y OC, llamados x, y, z, respectivamente. Entonces los tres números reales x, y y z constituyen la *coordenada* x, la *coordenada* y y la *coordenada* z de P. Cada coordenada se mide *a partir* del origen O sobre el eje coordenado correspondiente, y es positiva o negativa según que su dirección sea la misma o la opuesta a la de la dirección positiva del eje. Para el punto P (fig. 154) todas las coordenadas son positivas, y el punto está en el primer octante. Las coordenadas x, y, z de cualquier punto P se escriben en ese *orden*, se encierran en un paréntesis y el punto se representa por $P(x, y, z)$.

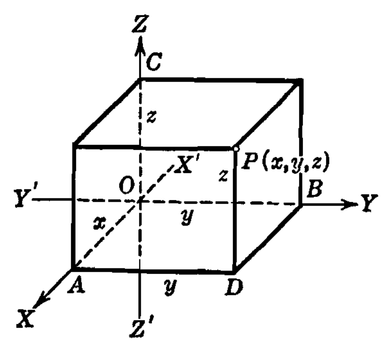


Fig. 154

Un punto P en el espacio tiene una y solamente una terna de coordenadas (x, y, z) relativa a un sistema coordenado rectangular especificado. Recíprocamente, una terna de coordenadas (x, y, z)

determina uno y solamente un punto P en el espacio con respecto a un sistema coordenado fijo.

Es importante escribir las coordenadas (x, y, z) de un punto P del espacio en su propio orden, ya que la posición de una coordenada en el conjunto indica a lo largo de qué eje se mide la coordenada particular. Por esto, las coordenadas de un punto en el espacio forman una *terna ordenada* de números reales. Por tanto, en vista de nuestra discusión previa, podemos decir que *un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del espacio y una terna ordenada de números reales.*

Como en Geometría analítica plana, la construcción de figuras apropiadas constituye una parte importante del trabajo desarrollado en la Geometría analítica del espacio. En este libro haremos uso de un método muy común llamado de *proyecciones paralelas*. Como se ve en la figura 154, los ejes X y Z se trazan en este sistema de proyección, perpendiculares entre sí, pero el eje X se traza de tal manera que el ángulo XOY sea mayor de $90°$ y, usualmente, se toma igual a $135°$. Entonces las distancias medidas a lo largo de, o paralelas a, los ejes Y y Z se trazan a escala completa, y las distancias medidas a lo largo de, o paralelas a, el eje X se acortan una cierta cantidad, generalmente hasta alrededor de siete décimos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ de la escala completa. En la figura 155, los puntos $P_1(3, 4, -2)$ y $P_2(-3, -5, 3)$ están trazados de acuerdo con estos convenios.

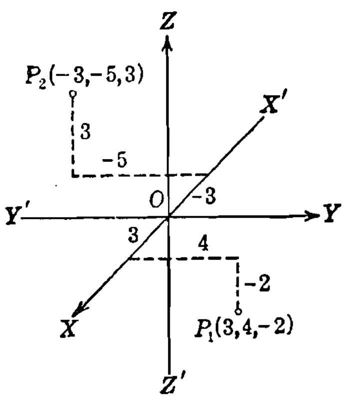


Fig. 155

EJERCICIOS. Grupo 49

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Trazar los puntos cuyas coordenadas son $(2, 0, -1)$, $(4, -3, 7)$, $(-5, -9, 2)$ y $(3, -2, 4)$.
2. Escribir las coordenadas de los puntos O, A, B, C y D de la figura 154 del Artículo 107.
3. Escribir los signos de las coordenadas de los puntos situados en cada uno de los ocho octantes.

4. Construir el triángulo cuyos vértices son $(2, -1, 3)$, $(-1, 1, 2)$ y $(1, 5, -2)$.

5. Desde el punto $P(x, y, z)$ se trazan perpendiculares a los tres ejes coordenados. Hallar las coordenadas de los pies de estas perpendiculares.

6. Construir el tetraedro cuyos vértices son $(0, 0, 0,)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 2)$.

7. El punto $P(2, 3, 3)$ es un vértice del paralelepípedo recto rectangular formado por los planos coordenados y los planos que pasando por P son paralelos a ellos. Hallar las coordenadas de los otros siete vértices.

8. Hallar el volumen del paralelepípedo recto rectangular del ejercicio 7 y la longitud de su diagonal.

9. Empleando la figura 154 del Artículo 107, hallar la distancia del punto $P(x, y, z)$ a cada uno de los ejes coordenados.

10. Empleando la figura 154 del Artículo 107, hallar la distancia del origen al punto $P(x, y, z)$.

11. Se ha trazado una recta del origen al punto $(1, 2, 1)$. Hallar el ángulo que forma dicha recta con la parte positiva del eje Y.

12. Establecer una propiedad común de las coordenadas de todos los puntos que están: *a*) en el plano XY; *b*) en el plano XZ; *c*) en el plano YZ.

13. Establecer propiedades comunes de las coordenadas de todos los puntos que están: *a*) sobre el eje X; *b*) sobre el eje Y; *c*) sobre el eje Z.

14. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya coordenada z es igual a -5?

15. ¿Cuál es el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su coordenada x es siempre igual a 4?

16. ¿Cuál es el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su coordenada y es siempre igual a 2 y su coordenada z siempre igual a 3?

17. Demostrar que los puntos $P_1(x, y, z)$ y $P_2(x, -y, -z)$ son simétricos con respecto al eje X.

18. Establecer y demostrar teoremas análogos al del ejercicio 17 para la simetría de dos puntos con respecto al eje Y y al eje Z.

19. Se ha formado un paralelepípedo recto rectangular haciendo pasar planos paralelos a los planos coordenados por cada uno de los puntos $P_1(1, 2, 2)$ y $P_2(3, 6, 7)$. Hallar las coordenadas de los otros seis vértices y las longitudes de las aristas.

20. Hallar la longitud de la diagonal P_1P_2 del paralelepípedo recto rectangular del ejercicio 19.

108. Distancia entre dos puntos dados en el espacio. En éste y los artículos siguientes, tendremos ocasión de emplear el concepto de *proyección ortogonal* de un punto sobre un plano y sobre una recta en el espacio. La proyección ortogonal de un punto P sobre un plano es el pie de la perpendicular trazada de P al plano. La proyección ortogonal de un punto P sobre una recta l es el punto de intersección de l y el plano que pasando por P es perpendicular a l. La proyección de un segmento rectilíneo sobre un plano (o una recta) se deduce inmediatamente de estas definiciones. Así, si P'_1 y P'_2 son las proyecciones ortogonales respectivas sobre un plano (o una recta) de los extremos P_1 y P_2 de un segmento, entonces la proyección P_1P_2 sobre ese plano (o recta) es el segmento $P_1'P_2'$.

Consideremos (fig. 156) dos puntos dados cualesquiera en el espacio $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Vamos a determinar la distancia $d = |\overline{P_1P_2}|$. Por cada uno de los puntos P_1 y P_2 hagamos pasar planos paralelos a los tres planos coordenados. Estos planos forman un paralelepípedo recto rectangular que tiene a P_1P_2 por diagonal y a P_1V_1, P_1V_2 y P_1V_3 por aristas. Estos planos dan también las proyecciones ortogonales de P_1 y P_2 sobre los planos y ejes coordenados. Así, P'_1 y P'_2 son las proyecciones ortogonales respectivas

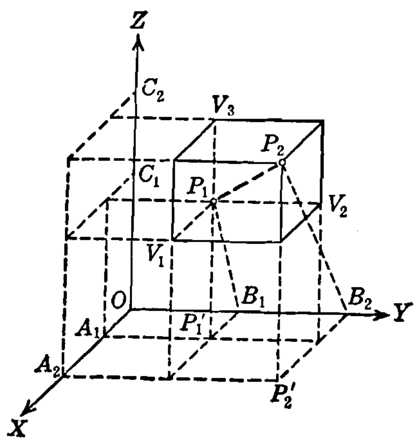


Fig. 156

de P_1 y P_2 sobre el plano XY, y $P'_1P'_2$ es la proyección P_1P_2 sobre el plano XY. También A_1, B_1 y C_1 son las proyecciones ortogonales respectivas de P_1 sobre los ejes X, Y y Z, y A_2, B_2, C_2 son las proyecciones respectivas de P_2 sobre los ejes X, Y y Z. Para simplificar la figura, algunas de las proyecciones y líneas proyectantes se han omitido.

Es muy sencillo demostrar, mediante una doble aplicación del teorema de Pitágoras, que el cuadrado de la longitud de la diagonal de un paralelepípedo recto rectangular es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus aristas. Por tanto, podemos escribir

$$d^2 = \overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1V_1}^2 + \overline{P_1V_2}^2 + \overline{P_1V_3}^2. \qquad (1)$$

Evidentemente, por la definición de las coordenadas de un punto en el espacio, las coordenadas de A_1 y A_2 son $(x_1, 0, 0)$ y

$(x_2, 0, 0)$, respectivamente. Por tanto, por el teorema 1 del Artículo 3, tenemos

$$\overline{P_1 V_1} = \overline{A_1 A_2} = x_2 - x_1.$$

Análogamente, tenemos

$$\overline{P_1 V_2} = \overline{B_1 B_2} = y_2 - y_1,$$

y

$$\overline{P_1 V_3} = \overline{C_1 C_2} = z_2 - z_1.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1), tenemos

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

de donde,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

De aquí el siguiente

TEOREMA 1. *La distancia* d *entre los dos puntos* $\mathrm{P_1(x_1, y_1, z_1)}$ *y* $\mathrm{P_2(x_2, y_2, z_2)}$ *está dada por la fórmula*

$$\mathrm{d} = \sqrt{(\mathrm{x_2 - x_1})^2 + (\mathrm{y_2 - y_1})^2 + (\mathrm{z_2 - z_1})^2}.$$

NOTAS. 1. Si los puntos P_1 y P_2 están sobre el plano XY, las coordenadas z_1 y z_2 son ambas cero, y la fórmula dada en el teorema 1 se reduce a la fórmula dada en Geometría analítica plana, en el teorema 2 del Artículo 6.

2. Por medio del teorema 1 y las definiciones de las coordenadas de un punto, podemos determinar fácilmente la distancia de cualquier punto del espacio a cada uno de los planos y ejes coordenados, y al origen. Así, (fig. 156) las coordenadas del punto B_1 son $(0, y_1, 0)$. Por tanto, para la distancia de P_1 al eje Y, tenemos

$$|\overline{P_1 B_1}| = \sqrt{(0 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2 + (0 - z_1)^2} = \sqrt{x_1^2 + z_1^2}.$$

Ejemplo. Demostrar que el punto $P_1(2, 2, 3)$ equidista de los puntos $P_2(1, 4, -2)$ y $P_3(3, 7, 5)$.

Solución. Según el teorema 1 anterior, tenemos

$$|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{(1-2)^2 + (4-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{30}$$

y

$$|\overline{P_1 P_3}| = \sqrt{(3-2)^2 + (7-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{30}.$$

Por tanto, $|\overline{P_1 P_2}| = |\overline{P_1 P_3}|$. El estudiante debe trazar la figura correspondiente al ejemplo.

109. División de un segmento en el espacio en una razón dada. Ahora consideraremos la división de un segmento dado en el espacio en una razón dada. Esto es, simplemente, una ampliación del problema análogo en el plano, que se ha estudiado en el teorema 3 del Artículo 7.

TEOREMA 2. *Si* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *son los extremos de un segmento dirigido* P_1P_2, *las coordenadas* (x, y, z) *de un punto* P *que divide a este segmento en la razón* $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ *son*

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, \quad z = \frac{z_1 + rz_2}{1 + r}, \quad (r \neq -1).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean P'_1, P' y P'_2 (fig. 157) las proyecciones respectivas de los puntos P_1, P y P_2 sobre el plano XY, y A_1, A y A_2 sobre el eje X. Las rectas proyectantes P_1P_1', PP' y $P_2P'_2$

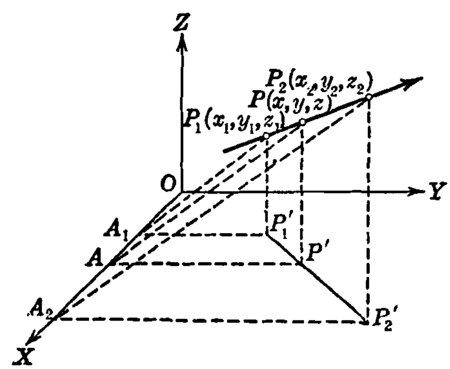


Fig. 157

son paralelas y están todas en el mismo plano; por tanto, por Geometría elemental, estas rectas interceptan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y $P'_1P'_2$, y tenemos

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{P'_1P'}}{\overline{P'P'_2}}. \tag{1}$$

Análogamente, considerando las rectas paralelas $A_1P'_1$, AP' y $A_2P'_2$, tenemos

$$\frac{\overline{P'_1P'}}{\overline{P'P'_2}} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}. \tag{2}$$

De las relaciones (1) y (2), resulta

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x},$$

de donde,

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}.$$

Por un procedimiento semejante obtenemos los valores de las coordenadas y y z.

NOTA. A este teorema se aplican las mismas observaciones hechas para el teorema análogo en el plano (teorema 3, Art. 7).

Para el caso particular en que P es el punto medio del segmento de recta dirigido P_1P_2, $r = 1$, y tenemos:

COROLARIO. *Las coordenadas del punto medio del segmento dirigido cuyos extremos son los puntos* (x_1, y_1, z_1) *y* (x_2, y_2, z_2) *son*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Ejemplo. Hallar las coordenadas de los puntos de trisección y el punto medio del segmento $P_1(1, -3, 5)$ y $P_2(-3, 3, -4)$.

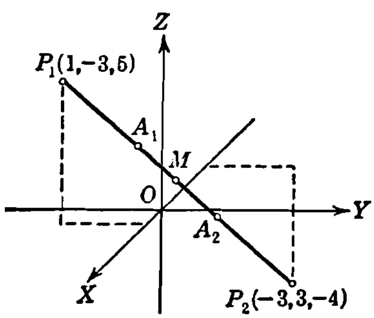


Fig. 158

Solución. Sean A_1 y A_2 (fig. 158) los puntos de trisección y M el punto medio de P_1P_2. Para A_1 tenemos $r = \frac{\overline{P_1A_1}}{\overline{A_1P_2}} = \frac{1}{2}$, y para A_2 tenemos $r = \frac{\overline{P_1A_2}}{\overline{A_2P_2}} = 2$. Por tanto, para el punto A_1, por el teorema 2 anterior,

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{1 + \frac{1}{2}(-3)}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}, \quad y = \frac{-3 + \frac{1}{2}(3)}{1 + \frac{1}{2}} = -1,$$

$$z = \frac{5 + \frac{1}{2}(-4)}{1 + \frac{1}{2}} = 2.$$

Análogamente, para el punto A_2, tenemos

$$x = \frac{1 + 2(-3)}{1+2} = -\frac{5}{3}, \quad y = \frac{-3+2(3)}{1+2} = 1, \quad z = \frac{5+2(-4)}{1+2} = -1.$$

Las coordenadas del punto medio M, son

$$x = \frac{1-3}{2} = -1, \quad y = \frac{-3+3}{2} = 0 \text{ y } z = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}.$$

EJERCICIOS. Grupo 50

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar la distancia entre los puntos $P_1(-1, -2, 2)$ y $P_2(2, 4, -1)$.

2. Demostrar que los puntos $P_1(-2, 4, -3)$, $P_2(4, -3, -2)$ y $P_3(-3, -2, 4)$ son los vértices de un triángulo equilátero.

3. Hallar el perímetro del triángulo cuyos vértices son $A(-2, -3, -2)$, $B(-3, 1, 4)$ y $C(2, 3, -1)$.

4. Calculando ciertas distancias, demostrar que los tres puntos $(2, 0, -1)$, $(3, 2, -2)$ y $(5, 6, -4)$ son colineales.

5. Determinar la forma que toma la fórmula de la distancia entre dos puntos (teorema 1, Art. 108) cuando P_1 y P_2 están en un plano paralelo al plano XY y a k unidades de él.

6. Determinar la distancia desde un punto cualquiera $P(x, y, z)$ a cada uno de los planos y ejes coordenados, y al origen (véase la nota 2 del teorema 1, Art. 108). Ordénense los resultados en una tabla y obsérvese la simetría en las letras x, y y z.

7. Hallar la distancia del punto $(-2, 6, 3)$ a cada uno de los planos coordenados y al origen.

8. Hallar la distancia del punto $(3, -4, 2)$ a cada uno de los ejes coordenados.

9. Demostrar que el cuadrado de la distancia de cualquier punto al origen es igual a la suma de los cuadrados de sus distancias a los planos coordenados.

10. Los puntos extremos de un segmento son $P_1(-4, 1, 3)$ y $P_2(5, -2, 1)$. Hallar las longitudes de sus proyecciones sobre los ejes coordenados.

11. Hallar las longitudes de las proyecciones del segmento del ejercicio 10 sobre los planos coordenados.

12. Las longitudes de las proyecciones de un segmento sobre los ejes coordenados son 2, 2 y -1, respectivamente. Hallar la longitud del segmento.

13. Los puntos extremos de un segmento son $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Demostrar que la longitud de su proyección sobre el plano XY es igual a $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. *Sugestión*. Usese la figura 156 del Artículo 108.

14. Uno de los extremos de un segmento de longitud 3 es el punto $(3, 2, 1)$. Si las coordenadas x y y del otro extremo son 5 y 3, respectivamente, hállese la coordenada z. (Dos soluciones.)

15. Hallar la ecuación algebraica que expresa el hecho de que la distancia del punto (x, y, z) al punto $(2, 1, 4)$ es igual a 5. ¿Qué representa esta ecuación?

16. Determinar la ecuación algebraica que expresa el hecho de que el punto (x, y, z) equidista de los dos puntos $(3, 0, -1)$ y $(-2, 2, 1)$ ¿Qué representa esta ecuación?

17. Deducir las fórmulas para calcular los valores de y y z, y dibujar las figuras correspondientes, relativas al teorema 2 del Artículo 109.

18. Los puntos extremos de un segmento son $P_1(-2, 1, 4)$ y $P_2(3, 2, -1)$. Hallar las coordenadas del punto P que divide a este segmento en la razón $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = 3$.

19. Hallar las coordenadas de los puntos de trisección y el punto medio del segmento cuyos puntos extremos son $(5, -1, 7)$ y $(-3, 3, 1)$.

20. Los extremos de un segmento son $P_1(3, 2, 6)$ y $P_2(8, 3, 8)$. Hallar las coordenadas del punto P que divide a este segmento en la razón

$$\overline{P_2P} : \overline{PP_1} = -2.$$

21. Los extremos de un segmento son $P_1(5, 1, 2)$ y $P_2(1, 9, 6)$. Hallar la razón $\overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ en la cual el punto $P(2, 7, 5)$ divide a este segmento.

22. El punto P está sobre el segmento cuyos extremos son $(7, 2, 1)$ y $(10, 5, 7)$. Si la coordenada y de P es 4, hállense sus coordenadas x y z.

23. Los vértices de un triángulo son los puntos $(8, 0, 1)$, $(2, 3, 6)$ y $(-1, -3, 2)$. Hallar las coordenadas de su centro de gravedad. (Véase el ejercicio 19 del grupo 2, Art. 7.)

24. Los vértices de un triángulo son los puntos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) y (x_3, y_3, z_3). Demostrar que las coordenadas de su centro de gravedad son $(\frac{1}{3}[x_1 + x_2 + x_3], \frac{1}{3}[y_1 + y_2 + y_3], \frac{1}{3}[z_1 + z_2 + z_3])$. Usese este resultado para comprobar el ejercicio 23. (Véase el ejercicio 20 del grupo 2, Artículo 7.)

25. Demostrar que los tres segmentos que unen los puntos medios de las aristas opuestas de cualquier tetraedro pasan todos por un punto P que los biseca. El punto P se llama *centroide* o centro de gravedad del tetraedro.

110. Cosenos directores de una recta en el espacio. Vimos en Geometría analítica plana que la dirección de una recta en el plano se determina por medio de su ángulo de inclinación o de su pendiente (Art. 8). En este artículo veremos cómo se determina la dirección de una recta en el espacio.

Si dos rectas están en el mismo plano se dice que son *coplanarias*. Tales rectas pueden cortarse o no; si no se cortan, se dice que son *paralelas*. Por tanto, para que dos rectas cualesquiera en el espacio se corten o sean paralelas, es necesario que sean coplanarias. Consecuentemente, dos rectas cualesquiera en el espacio que no sean coplanarias no pueden ni cortarse ni ser paralelas; se llaman entonces *rectas que se cruzan*. Hasta aquí se ha definido el ángulo entre dos rectas dirigidas sobre el supuesto de que las dos rectas o se cortan o son paralelas (Art. 8). Es evidente, entonces, que debemos definir lo que entendemos por ángulo formado por dos rectas que se cruzan. Se llama *ángulo de dos rectas que se cruzan al formado por dos rectas cua-*

lesquiera que se cortan y son paralelas, respectivamente, a las rectas dadas y tienen el mismo sentido.

La dirección de una recta cualquiera en el espacio se determina por los ángulos que forma con los ejes coordenados. Sea l (fig. 159) cualquier recta dirigida en el espacio. Si l no pasa por el origen O, sea l' la recta que pasando por O es paralela a l y del mismo sentido. Entonces los ángulos α, β y γ formados por las partes positivas de los ejes X, Y y Z y la recta l' se llaman *ángulos directores* de la recta dirigida l. Un ángulo director puede tener cualquier valor desde 0° hasta 180° inclusive. Evidentemente, si la recta l es de sentido opuesto, sus ángulos directores son los ángulos suplementarios respectivos.

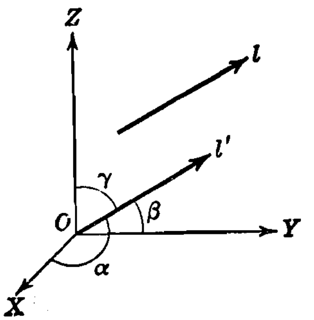


Fig. 159

En la resolución de nuestros problemas, veremos que generalmente es más conveniente usar los cosenos de los ángulos directores en lugar de los ángulos mismos. Estos cosenos, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, se llaman *cosenos directores* de la recta dirigida l. Como $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$, se sigue que si l es de sentido opuesto sus cosenos directores son $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$ y $-\cos\gamma$. Por tanto, cualquier recta del espacio, *no dirigida*, tiene *dos* sistemas de cosenos directores, iguales en valor absoluto, pero opuestos en signo.

Vamos a determinar los cosenos directores de una recta cuya posición en el espacio está dada por dos de sus puntos. Sea l [fig. 160 (a)] una recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Primero consideraremos el caso en que l tiene el sentido indicado en la figura. Por cada uno de los puntos P_1 y P_2, hagamos pasar planos paralelos a los coordenados, formando así un paralelepípedo recto rectangular cuya diagonal es P_1P_2, y cuyas aristas paralelas a los ejes X, Y y Z son, respectivamente, P_1V_1, P_1V_2 y P_1V_3. Si cada arista tiene el mismo sentido que el eje a que es paralela, los ángulos directores son

$$\alpha = \text{ángulo } P_2P_1V_1, \quad \beta = \text{ángulo } P_2P_1V_2,$$

$$\gamma = \text{ángulo } P_2P_1V_3.$$

Ahora consideremos [figs. 160 (b), (c) y (d)] los tres triángulos rectángulos formados por los dos puntos P_1, P_2 y cada uno de los vértices V_1, V_2 y V_3. Para cada uno de estos triángulos sea $d = |\overline{P_1 P_2}|$, en que d se determina como en el teorema 1 del Artículo 108. También, como se vió en el Artículo 108,

$$\overline{P_1 V_1} = x_2 - x_1, \quad \overline{P_1 V_2} = y_2 - y_1, \quad \overline{P_1 V_3} = z_2 - z_1.$$

Por tanto, de los tres triángulos, tenemos, para los cosenos directores,

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}. \tag{1}$$

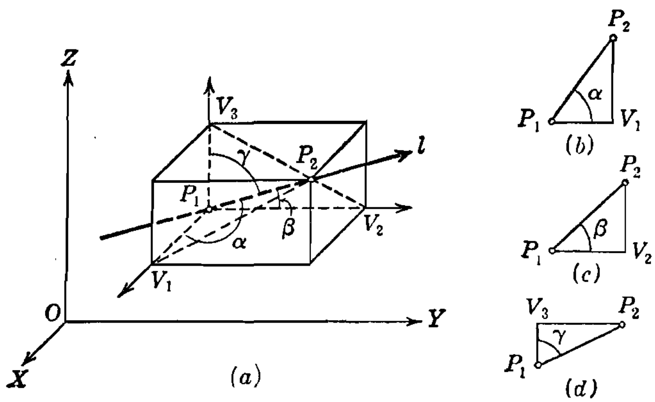


Fig. 160

Si la recta l se considera dirigida en el sentido de P_2 a P_1, entonces los tres cosenos directores son

$$\cos \alpha = \frac{x_1 - x_2}{d}, \quad \cos \beta = \frac{y_1 - y_2}{d}, \quad \cos \gamma = \frac{z_1 - z_2}{d}. \tag{2}$$

Los resultados precedentes conducen al siguiente

TEOREMA 3. *Los cosenos directores de la recta determinada por los dos puntos* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *y dirigida en el sentido de* P_1 *a* P_2*, son*

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d},$$

siendo d *la distancia entre* P_1 *y* P_2.

NOTA. El estudiante debe observar particularmente que d es un número positivo y que el signo de cada coseno director se determina por el signo del numerador que es la longitud de un segmento de recta *dirigido* (la proyección de P_1P_2 sobre el eje coordenado correspondiente). Este numerador se obtiene siempre restando la coordenada del origen de la coordenada correspondiente del extremo del segmento. (Véase el teorema 1, Art. 3.)

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de cada una de las ecuaciones (1) y (2), y sumamos, obtenemos

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{d^2}.$$

Pero, por el teorema 1, Artículo 108,

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Por tanto, tenemos el siguiente importante resultado,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad (3)$$

que dice:

TEOREMA 4. *La suma de los cuadrados de los cosenos directores de cualquier recta es igual a la unidad.*

NOTA. Por la ecuación (3) se ve que los ángulos directores de una recta no son todos independientes. En efecto, fijados dos de ellos, el tercero y su suplemento quedan determinados.

Por la ecuación (3) vemos también que no todos los cosenos directores de una recta pueden ser nulos. Como tendremos ocasión de referirnos a este hecho, lo anotaremos como un corolario al teorema 4.

COROLARIO. *De los cosenos directores de una recta uno, cuando menos, es diferente de cero.*

Ejemplo. Hallar los cosenos directores de la recta l (fig. 161) que pasa por los puntos $P_1(2, 1, -2)$ y $P_2(-2, 3, 3)$ y está dirigida de P_2 a P_1.

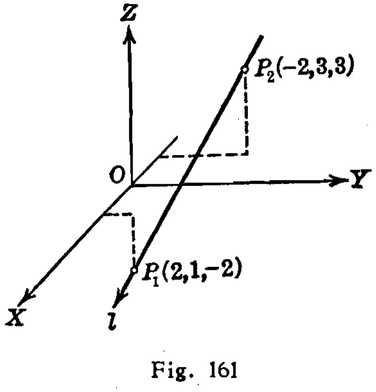


Fig. 161

Solución. La distancia entre P_1 y P_2 es

$$d = \sqrt{(2+2)^2 + (1-3)^2 + (-2-3)^2} = 3\sqrt{5}.$$

Entonces, como l está dirigida *de* P_2 *a* P_1, tenemos

$$\cos\alpha = \frac{2-(-2)}{d} = \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{4}{15}\sqrt{5},$$

$$\cos\beta = \frac{1-3}{3\sqrt{5}} = -\frac{2}{15}\sqrt{5},$$

$$\cos\gamma = \frac{-2-3}{3\sqrt{5}} = -\frac{1}{3}\sqrt{5}.$$

111. Números directores de una recta en el espacio. En lugar de los cosenos directores de una recta l conviene, a veces, emplear tres números reales, llamados *números directores* de l, que sean proporcionales a sus cosenos directores. Así, a, b y c son los números directores de una recta l, siempre que

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{c}{\cos\gamma}, \qquad (1)$$

en donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ son los cosenos directores de l. Evidentemente, si $r \neq 0$, cualquier grupo de tres números, ra, rb y rc, puede servir como sistema de números directores. Del número infinito de sistemas de números directores de cualquier recta, elegimos generalmente, por simplicidad, el compuesto por enteros de valor numérico mínimo.

Como tendremos que usar frecuentemente los números directores de una recta, es conveniente introducir una notación especial para ellos. Si tres números reales cualesquiera, a, b y c, representan los números directores de una recta, indicaremos esto encerrándolos entre paréntesis rectangulares, así: $[a, b, c]$. Los paréntesis rectangulares sirven para distinguir los números directores de una recta de las coordenadas de un punto que se encierran en paréntesis ordinarios.

Los cosenos directores de una recta pueden determinarse fácilmente a partir de sus números directores. En efecto, igualemos cada una de las razones de (1) a algún número k diferente de cero, de modo que

$$a = k\cos\alpha, \quad b = k\cos\beta, \quad c = k\cos\gamma. \qquad (2)$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de las ecuaciones (2), y sumamos, obtenemos

$$a^2 + b^2 + c^2 = k^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),$$

la cual, por el teorema 4, Art. 110, se reduce a

$$a^2 + b^2 + c^2 = k^2,$$

de manera que $$k = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Por tanto, de las ecuaciones (2), tenemos el

TEOREMA 5. *Si* [a, b, c] *son los números directores de una recta, sus cosenos directores son*

$$\cos\alpha = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

en donde se escoge el signo superior o el inferior según que la recta esté dirigida en un sentido o en el sentido opuesto.

Por el corolario al teorema 4, Artículo 110, y por las ecuaciones (2) anteriores, tenemos el siguiente

COROLARIO 1. *De los números directores de una recta uno, cuando menos, es diferente de cero.*

Por el teorema 3, Artículo 110, tenemos:

COROLARIO 2. *Un sistema de números directores para la recta que pasa por los puntos* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *está dado por*

$$[x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1].$$

Ejemplo. Los números directores de una recta l son $[2, -2, -1]$. Hallar los cosenos directores de l si la recta está dirigida de tal manera que el ángulo β es agudo.

Solución. Por el teorema 5 anterior, los cosenos directores de l, cuando la recta no está dirigida, son

$$\cos\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \pm\tfrac{2}{3}, \quad \cos\beta = \mp\tfrac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \mp\tfrac{1}{3}.$$

Como l está dirigida de tal manera que β es agudo, $\cos\beta$ es positivo. Por tanto, tomando los signos inferiores para los cosenos directores, tendremos

$$\cos\alpha = -\tfrac{2}{3}, \quad \cos\beta = \tfrac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \tfrac{1}{3}.$$

EJERCICIOS. Grupo 51

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar los cosenos directores de la recta que pasa por los puntos $P_1(2, 5, -1)$, $P_2(3, -2, 4)$ y que está dirigida de P_1 a P_2.
2. Hallar los cosenos directores de la recta que pasa por los puntos $P_1(-9, 2, 1)$, $P_2(-7, 0, 2)$ y que está dirigida de P_2 a P_1.
3. Dos de los cosenos directores de una recta son $\tfrac{2}{3}$ y $-\tfrac{1}{3}$. Hallar el tercer coseno director.
4. Hallar los cosenos directores de una recta si los ángulos directores α y β son 60° y 30°, respectivamente.
5. Hallar los cosenos directores de una recta si $\alpha = 45°$, $\gamma = 60°$ y β es agudo.
6. Hallar los cosenos directores de una recta si $\beta = 45°$ y $\alpha = \gamma$.
7. Hallar los cosenos directores de una recta que forma ángulos iguales con los ejes coordenados.
8. Hallar el valor común de los ángulos directores de la recta del ejercicio 7. (Dos soluciones.)
9. Por medio de los cosenos directores, demostrar que los tres puntos $(4, 3, 1)$, $(-1, 2, -3)$ y $(-11, 0, -11)$ son colineales.