9. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en el punto de contacto $P_1(x_1, y_1)$.

10. Por tres métodos diferentes, hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ en el punto $(5, 7)$.

11. Suponiendo que k es una constante diferente de cero, demostrar que el triángulo formado por los ejes coordenados y cualquier tangente a la hipérbola equilátera $xy = k$ tiene un área constante. (Ver el ejercicio 20 del grupo 33, Artículo 70.)

12. Si a es una constante diferente de cero, demostrar que la suma algebraica de los segmentos que una tangente cualquiera a la cónica

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

determina sobre los ejes coordenados es igual a a.

13. La ecuación de una familia de cónicas es

$$x^2 + xy - y^2 + ax + by + 5 = 0.$$

Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los dos puntos $(1, 2)$ y $\left(-\frac{7}{5}, -\frac{26}{5}\right)$.

14. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por los cinco puntos $(-1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 1)$ y $(-5, 4)$.

15. Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los cuatro puntos $(1, 0)$, $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right)$, $\left(\frac{4}{9}, -\frac{10}{9}\right)$ y $(-4, 10)$.

16. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por los cinco puntos $(1, 1)$, $(2, 0)$, $\left(-\frac{1}{7}, \frac{5}{7}\right)$, $(0, 0)$ y $(2, -1)$.

17. Sobre el mismo sistema de ejes coordenados, trácense cinco elementos de la familia de cónicas representada por la ecuación (2) del Artículo 77, asignando al parámetro k los valores -1, 0, 1, 2, 3.

18. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por el punto $(-2, 3)$ y por las intersecciones de las cónicas

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 3y + 1 = 0 \text{ y } 3xy + 2x - y - 2 = 0.$$

19. Hallar la ecuación de la cónica que pasa por el punto $(4, -2)$ y por las intersecciones de las cónicas

$$x^2 + xy + y^2 + x - 3y - 1 = 0 \text{ y } 2x^2 - xy - 2x + y = 0.$$

20. Escribir la ecuación de la familia de curvas que pasan por las intersecciones de la circunferencia $2x^2 + 2y^2 = 5$ y la elipse $x^2 + 3y^2 = 5$. Demostrar que, cuando el parámetro es igual a -1, el elemento de esta familia consiste en dos rectas que se cortan.

21. Hallar las ecuaciones de las parábolas que pasan por las intersecciones de las cónicas $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ y $xy + 3x + 5y + 3 = 0$. *Sugestión.* Calcúlese el valor del parámetro usando la relación $B^2 - 4AC = 0$.

22. Hallar las ecuaciones de las parábolas que pasan por las intersecciones de las cónicas $2xy + 2y^2 + 3x - y - 1 = 0$ y $x^2 - xy + 2y^2 + x + y - 3 = 0$.

23. Demostrar que las raíces de la ecuación (8), Artículo 77, son reales y desiguales demostrando que su discriminante puede escribirse en la forma de la cantidad positiva

$$(a^2 - b^2 - x_1^2 + y_1^2)^2 + 4x_1^2 y_1^2.$$

24. Demostrar que una raíz de la ecuación (8), Artículo 77, está comprendida entre $-a^2$ y $-b^2$ demostrando que el primer miembro de la ecuación es igual a la cantidad positiva $(a^2 - b^2)x_1^2$, $a > b$, $x_1 \neq 0$, para $k = -a^2$, y que es igual a la cantidad negativa $(b^2 - a^2)y_1^2$, $a > b$, $y_1 \neq 0$, para k igual a $-b^2$.

25. Demostrar que si se toma suficientemente grande la cantidad positiva λ, entonces, para $k = -b^2 + \lambda$, el primer miembro de la ecuación (8), Artículo 77, tiene un valor positivo y, por tanto, que en vista del ejercicio 24, la ecuación (8) tiene una raíz comprendida entre $-b^2$ y $-b^2 + \lambda$.

26. Discutir el sistema de cónicas representado por la ecuación

$$\frac{x^2}{9+k} + \frac{y^2}{5+k} = 1.$$

Utilizando los mismos ejes coordenados, dibujar los seis elementos de este sistema correspondientes a los valores de $k = 0, 7, 16, -8, -7, -6$.

27. Hallar las ecuaciones de las dos cónicas del sistema del ejercicio 26 que pasan por el punto $(2, 3)$.

28. Discutir el sistema representado por la ecuación (9) del Artículo 77. Sobre unos mismos ejes coordenados, dibujar los seis elementos de este sistema correspondientes a los valores de $k = 1, 2, 3, -1, -2, -3$.

29. Demostrar que por cualquier punto no contenido en el eje X, pasan precisamente dos parábolas del sistema (9) del Artículo 77, abriéndose una de ellas hacia la derecha y la otra hacia la izquierda.

30. Demostrar que la familia de parábolas homofocales y coaxiales del sistema (9) del Artículo 77 es auto-ortogonal. *Sugestión.* Usese el teorema 7, Artículo 59.

78. Secciones planas de un cono circular recto. El nombre de secciones cónicas con que se designa a la parábola, elipse e hipérbola tienen su origen en el hecho de que estas curvas se obtuvieron por primera vez como secciones planas de un cono circular recto.

Consideremos un cono circular recto de vértice V, cortado por un plano π que no pase por V, tal como se indica en la figura 107. Sean S y S' dos esferas inscritas en el cono y tangentes a π en los puntos F y F', respectivamente. Sean π_1 y π_2 los planos respectivos de los círculos de contacto de las esferas S y S' y el cono; estos planos son perpendiculares al eje del cono. Sean l y l', respectivamente, las intersecciones de π con π_1 y π_2. Vamos a demostrar que C, curva de intersección de π y el cono, es una sección cónica que tiene a F y F' por focos y a l y l', respectivamente, como directrices correspondientes.

Sea P un punto *cualquiera* de C. Tracemos PA, perpendicular a l, y la generatriz VP del cono que toca a los círculos de contacto de S y S' en los puntos B y B', respectivamente. Como PF y PB son tangentes a S, tenemos

$$|\overline{PB}| = |\overline{PF}|. \qquad (1)$$

Sea α el ángulo formado por π y π_1. Este es también el ángulo que forma el plano π_1 y la recta PA y el *mismo ángulo* formado por π_1 y la recta trazada desde *cualquier punto* de C perpendicular

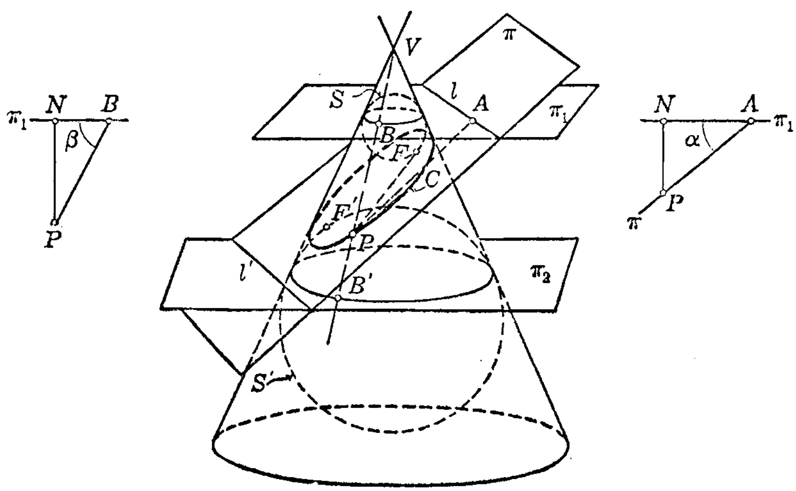


Fig. 107

a l. Por P tracemos una perpendicular PN a π_1. Tracemos también el segmento AN en π_1. Esto nos da el triángulo rectángulo PAN indicado en la sección vertical de la derecha en la figura 107. Por tanto,

$$|\overline{PN}| = |\overline{PA}| \operatorname{sen} \alpha. \qquad (2)$$

Sea β el ángulo formado por π_1 y *cualquier* generatriz del cono. Este ángulo es *constante* para un cono circular recto dado. Tracemos el segmento BN en π_1. Esto nos da el triángulo rectángulo PNB indicado en la sección vertical de la izquierda de la figura 107. Por tanto,

$$|\overline{PN}| = |\overline{PB}| \operatorname{sen} \beta. \qquad (3)$$

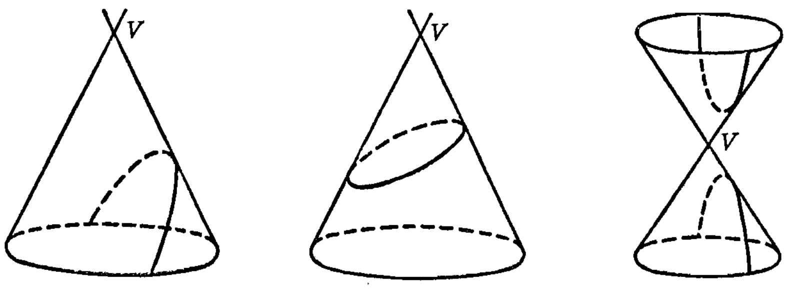
De (1), (2) y (3), tenemos

$$\frac{|\overline{PF}|}{|\overline{PA}|} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}. \tag{4}$$

Para cada plano secante π, el ángulo α es constante; también el ángulo β, como acabamos de ver, es constante. Por tanto, el segundo miembro de (4) es una constante positiva que puede designarse por e, de manera que

$$\frac{|\overline{PF}|}{|\overline{PA}|} = e.$$

Pero esta relación es, precisamente, la condición geométrica (1) del Artículo 75 de la definición general de cónica. Por tanto, C es una



(*a*) Parábola (*b*) Elipse (*c*) Hipérbola

Fig. 108

cónica que tiene el foco F y la directriz correspondiente l. Análogamente, podemos demostrar que F' y l' son, respectivamente, un foco y una directriz correspondientes de C.

El ángulo β es una constante para un cono dado, pero el ángulo α varía a medida que el plano secante π toma diferentes posiciones. Si $\alpha = \beta$, la ecuación (4) muestra que $e = 1$, y la sección es una parábola; en este caso, el plano π es paralelo a una generatriz del cono y, por tanto, corta solamente una hoja de la superficie cónica, como se indica en la figura 108 (*a*). Si $\alpha < \beta$, la ecuación (4) indica que $e < 1$, y la sección es una elipse; en este caso, el plano π corta todas las generatrices de la superficie del cono, como se ve en la figura 108 (*b*). En particular, si $\alpha = 0$, el plano π es perpendicular al eje del cono, y la sección es una circunferencia. Finalmente, si $\alpha > \beta$, la ecuación (4) indica que $e > 1$, y la sección es una hipérbola; en este caso, el plano π corta a las dos hojas o ramas de la superficie cónica, como se ve en la figura 108 (c).

Podemos anotar aquí también algunos de los casos límite de las secciones cónicas. Así, consideremos el caso en que el plano secante π pasa por el vértice V del cono. Si $\alpha < \beta$, el plano π no corta a ninguna generatriz del cono, y tenemos un solo punto, el vértice V. Si $\alpha = \beta$, el plano π es tangente a la superficie a lo largo de una generatriz del cono, y tenemos una sola recta. Si $\alpha > \beta$, el plano pasa por dos generatrices distintas del cono, y tenemos como sección un par de rectas que se cortan en el vértice.

CAPITULO X

COORDENADAS POLARES

79. Introducción. Hasta este punto, en nuestro estudio de propiedades geométricas por métodos analíticos, hemos utilizado un solo sistema de coordenadas. Ahora vamos a introducir y emplear otro sistema conocido como *sistema de coordenadas polares*. En vista de la utilidad demostrada del sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, el lector puede pensar que no hay necesidad de considerar otro sistema. Pero veremos, sin embargo, que para ciertas curvas y tipos de lugares geométricos el uso de coordenadas polares presenta algunas ventajas sobre las coordenadas rectangulares.

80. Sistema de coordenadas polares. Por medio de un sistema de coordenadas en un plano, es posible localizar cualquier punto del plano. En el sistema rectangular esto se efectúa refiriendo el punto a dos rectas fijas perpendiculares llamadas ejes de coordenadas (Art. 4). En el sistema polar, un punto se localiza especificando su posición relativa con respecto a una recta fija y a un punto fijo de esa recta. La recta fija se llama *eje polar;* el punto fijo se llama *polo*. Sea (figura 109) la recta horizontal OA el eje polar y el punto O el polo. Sea P un punto cualquiera en el plano coordenado. Tracemos el segmento OP y designemos su longitud por r. Llamemos θ al ángulo AOP. Evidentemente, la posición del punto P con relación al eje polar y al polo es determinada cuando se conocen r y θ. Estas dos cantidades se llaman las *coordenadas polares* del punto P; en particular, r se llama *radio vector* y θ *ángulo polar*,

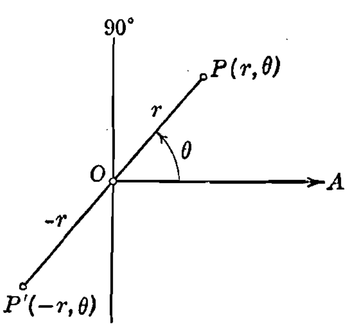


Fig. 109

ángulo vectorial o *argumento* de P. Las coordenadas polares de un punto se indican dentro de un paréntesis, escribiéndose primero el radio vector. Así, las coordenadas de P se escriben (r, θ). La línea recta que pasa por el polo y es perpendicular al eje polar se llama el *eje a 90°*.

El ángulo polar θ se mide como en Trigonometría considerando el eje polar como lado inicial y el radio vector como lado final del ángulo (Apéndice IC, 1), es decir, *partiendo del* eje polar hacia el radio vector; se considera positivo o negativo según que el sentido seguido sea opuesto al de las manecillas de un reloj o el mismo. Algunos autores, siguiendo los convenios hechos en Trigonometría, consideran que el radio vector nunca debe ser considerado como negativo; otros autores, en cambio, admiten que el radio vector puede tomar todos los valores reales. Nosotros seguiremos este último convenio. Según esto, si un punto tiene un radio vector negativo, se mide primero el ángulo polar de la manera ordinaria, y después se toma el radio vector en la prolongación del lado final. Así, un punto P', de coordenadas $(-r, \theta)$, se localiza como se indica en la figura 109.

Es evidente que un par de coordenadas polares (r, θ) determina uno y solamente un punto en el plano coordenado. El recíproco, en cambio, no es verdadero, porque un punto P determinado por las coordenadas (r, θ) está también determinada por cualquiera de los pares de coordenadas representadas por $(r, \theta + 2\pi n)$, en donde π está dado en radianes y n es un entero cualquiera. El punto P puede determinarse también por cualquiera de los pares de coordenadas representados por $(-r, \theta + \pi n)$, en donde n es un entero impar cualquiera. Mientras el sistema rectangular establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del plano y un par de números reales, esta correspondencia no es única en el sistema polar, porque un punto puede estar representado por uno cualquiera de un número infinito de pares de coordenadas polares. Es esta carencia de reciprocidad única en el sistema polar la que nos conduce, en algunos casos, a resultados que difieren de los obtenidos en el sistema rectangular.

Para la mayor parte de nuestros propósitos, un par de coordenadas polares es suficiente para cualquier punto en el plano. Como nuestra capacidad de selección en este respecto es ilimitada, convendremos, a menos que se especifique lo contrario, en tomar el radio vector r de un punto particular como positivo y su ángulo polar θ comprendido entre cero y el ángulo positivo más pequeño menor que 360°, de manera que la variación de los valores de θ está dada por

$$0° \leq \theta < 360°.$$

A tal par lo llamaremos *par principal* de coordenadas polares del punto.

El ángulo polar puede expresarse en grados o radianes, pero el lector debe observar que los ángulos expresados en radianes vienen dados por números abstractos (Apéndice IC; 4). Así, un ángulo polar de $\frac{\pi}{2}$ significa $\frac{\pi}{2}$ radianes, o sea, 90°; el ángulo polar 2 significa 2 radianes, que equivalen a $114^\circ\ 35{,}5'$ (aproximadamente).

El trazo de puntos en el sistema polar se facilita considerablemente usando papel coordenado polar, que consiste en una serie de circunfe-

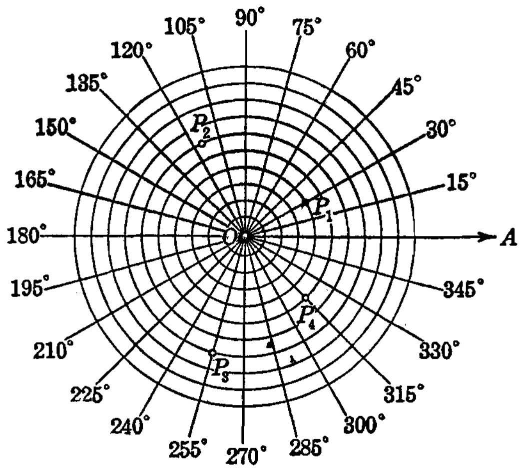


Fig. 110

rencias concéntricas y rectas concurrentes. Las circunferencias tienen su centro común en el polo, y sus radios son múltiplos enteros del radio más pequeño tomado como unidad de medida. Todas las rectas pasan por el polo, y los ángulos formados por cada par de rectas consecutivas son iguales. Un ejemplo de este papel está representado en la figura 110 en donde se han trazado los puntos

$$P_1\left(4,\ \frac{\pi}{6}\right),\quad P_2(6,\ 2),\quad P_3(-7,75^\circ)\ \text{y}\ P_4\left(5,\ \frac{7\pi}{4}\right).$$

Las coordenadas del polo O pueden representarse por $(0,\ \theta)$, en donde θ es un ángulo cualquiera.

81. Paso de coordenadas polares a rectangulares y viceversa. Las coordenadas rectangulares $(x,\ y)$ de cualquier punto de un plano implican solamente dos variables, x y y. Por tanto, la ecuación de cualquier lugar geométrico en un sistema de coordenadas rectangulares en un plano, contiene una o ambas de estas variables, pero no otras. Por esto es apropiado llamar a una ecuación de esta clase la *ecuación rectangular* del lugar geométrico.

Las coordenadas polares (r, θ) de cualquier punto de un plano implican solamente dos variables, r y θ, de manera que la ecuación de cualquier lugar geométrico en el plano coordenado polar contiene una o ambas variables, pero no otras. Tal ecuación se llama, de acuerdo con esto, la *ecuación polar* del lugar geométrico. Así, la ecuación $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $r = 4 \cos \theta$ son las ecuaciones polares de dos lugares geométricos planos.

Para un lugar geométrico determinado, conviene, frecuentemente, saber transformar la ecuación polar en la ecuación rectangular, y recíprocamente. Para efectuar tal transformación debemos conocer las relaciones que existen entre las coordenadas rectangulares y las coordenadas polares de cualquier punto del lugar geométrico. Se obtienen relaciones particularmente simples cuando el polo y el eje polar del sistema polar se hacen coincidir, respectivamente, con el origen y la parte positiva del eje X del sistema rectangular, tal como se indica en la figura 111. Sea P un punto cualquiera que tenga por coordenadas rectangulares (x, y) y por coordenadas polares (r, θ), Entonces, de la figura 111, se deducen inmediatamente las relaciones

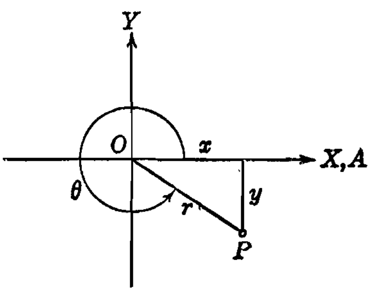


Fig. 111

$$x = r \cos \theta, \tag{1}$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta, \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{3}$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \tag{4}$$

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{5}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{6}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{7}$$

Consideremos primero el paso de una ecuación rectangular a su forma polar. La ecuación dada contiene como máximo las dos variables x y y. Por tanto, si sustituímos la x y la y por sus valores dados por las ecuaciones (1) y (2), respectivamente, obtenemos la ecuación polar directamente, aunque no siempre en su forma más simple. La ecuación (3) puede usarse algunas veces ventajosamente en esta transformación.

Veamos ahora la transformación de una ecuación polar a su forma rectangular. La ecuación dada contiene como máximo las dos variables r y θ. Podemos usar, además de las fórmulas (1), (2) y (3), las relaciones (4) y (5) que expresan a θ y a r, respectivamente, en función de x y y. También, si la ecuación polar contiene algunas funciones trigonométricas de θ, podemos expresar primero tales funciones en función de sen θ y cos θ, y entonces usar la fórmulas (6) y (7).

Un resumen de los resultados anteriores viene dado en el teorema siguiente:

TEOREMA 1. *Si el polo y el eje polar del sistema de coordenadas polares coinciden, respectivamente, con el origen y la parte positiva del eje* X *de un sistema de coordenadas rectangulares, el paso de uno a otro de estos dos sistemas puede efectuarse por medio de las siguientes fórmulas de transformación:*

$$x = r\cos\theta\,,\quad y = r\,\text{sen}\,\theta\,,\quad x^2 + y^2 = r^2\,,\quad \theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}\,,$$

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\,,\quad \text{sen}\,\theta = \pm\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,,\quad \cos\theta = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

Ejemplo 1. Hallar las coordenadas rectangulares del punto P cuyas coordenadas polares son $(4,\ 120°)$.

Solución. En este caso, $r = 4$ y $\theta = 120°$. Por tanto, por el teorema 1,

$$x = r\cos\theta = 4\cos 120° = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

y

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 4\,\text{sen}\,120° = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

de manera que las coordenadas rectangulares de P son $(-2,\ 2\sqrt{3})$.

Ejemplo 2. Hallar un par de coordenadas polares del punto P cuyas coordenadas rectangulares son $(3,\ -5)$.

Solución. En este caso, $x = 3$ y $y = -5$. Por tanto, por el teorema 1,

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} = \pm\sqrt{9 + 25} = \pm\sqrt{34}$$

y

$$\theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} = \text{arc tg}\left(-\frac{5}{3}\right).$$

Ahora tenemos un número ilimitado de valores para θ de donde tenemos que escoger uno. De acuerdo con lo dicho en el Artículo 80 para el par principal de coordenadas polares, tomaremos r como positivo y para θ el ángulo positivo más pequeño, menor que 360°. Evidentemente, como se ve en la figura 112,

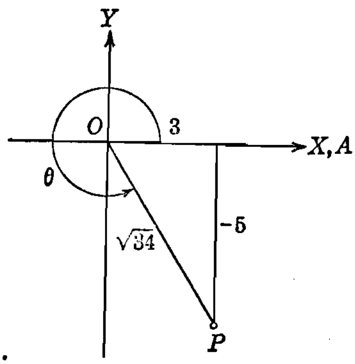


Fig. 112

θ está en el cuarto cuadrante; su valor es 300° 58′. Por tanto, el par principal de coordenadas polares de P es

$$(\sqrt{34},\ 300^\circ\, 58').$$

Ejemplo 3. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico cuya ecuación rectangular es

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

Solución. Por el teorema 1 podemos reemplazar $x^2 + y^2$ por r^2, x por $r \cos \theta$, y y por r sen θ. Por tanto, la ecuación polar buscada es

$$r^2 - 4r \cos \theta - 2r \operatorname{sen} \theta + 1 = 0.$$

Ejemplo 4. Hallar la ecuación rectangular del lugar geométrico cuya ecuación polar es

$$r = \frac{2}{1 - \cos \theta}.$$

Solución. Antes de sustituir en la ecuación dada, será conveniente quitar denominadores. Entonces tenemos

$$r - r \cos \theta = 2.$$

Sustituyendo r y $r \cos \theta$ por sus valores en función de x y y dados por el teorema 1, obtenemos

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} - x = 2.$$

Si trasponemos $-x$, elevamos al cuadrado y simplificamos, obtenemos la ecuación rectangular de la parábola

$$y^2 = 4x + 4.$$

EJERCICIOS. Grupo 37

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. En un sistema polar trazar los siguientes puntos:

$$P_1(1,\ 135^\circ),\quad P_2\left(-2,\ \frac{\pi}{3}\right),\quad P_3(3,\ 75^\circ),\quad P_4\left(-4,\ \frac{2\pi}{3}\right).$$

2. Trazar los siguientes puntos en coordenadas polares:

$$P_1\left(5,\ \frac{5\pi}{4}\right),\quad P_2(-2, 210^\circ),\quad P_3\left(-3,\ \frac{5\pi}{6}\right),\quad P_4(3\sqrt{2},\ 135^\circ).$$

3. Construir el triángulo cuyos vértices son

$$P_1(5, 60^\circ),\quad P_2\left(-2,\ \frac{7\pi}{4}\right)\ \text{y}\ P_3(-4,\ 150^\circ).$$

4. Para cada uno de los puntos P_1 y P_2 del ejercicio 1, hallar tres pares de coordenadas polares.

5. Un cuadrado de lado $2a$ tiene su centro en el polo y dos de sus lados son paralelos al eje polar. Hallar el par principal de coordenadas polares de cada uno de sus cuatro vértices.

6. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son $(0, 73^\circ)$ y $(1,\ \pi)$. Hallar el par principal de coordenadas polares del tercer vértice. (Dos casos.)

7. Un hexágono regular tiene su centro en el polo y dos lados paralelos al eje polar. Si la longitud de un lado es igual a dos unidades, hallar el par principal de coordenadas polares de cada uno de sus seis vértices.

8. Un punto P se mueve de tal manera que para todos los valores de su ángulo polar, su radio vector permanece constante e igual a 2. Identificar y trazar el lugar geométrico de P.

9. Un punto P se mueve de tal manera que para todos los valores de sus radios vectores, su ángulo polar permanece constante e igual a $\frac{\pi}{4}$. Identificar y trazar el lugar geométrico de P.

10. Hallar las coordenadas rectangulares de los cuatro puntos del ejercicio 2.

11. Hallar el par principal de coordenadas polares de cada uno de los puntos cuyas coordenadas rectangulares son $(-2,\ 3)$ y $(3,\ -2)$.

En cada uno de los ejercicios 12-20, pasar la ecuación rectangular dada a su forma polar.

12. $x^2 + y^2 = 4.$
13. $5x - 4y + 3 = 0.$
14. $2x^2 + 2y^2 + 2x - 6y + 3 = 0.$
15. $2x - y = 0.$
16. $x^2 - y^2 = 4.$
17. $x^2 + y^2 - 2y = 0.$
18. $xy = 2.$
19. $x^2 - 4y - 4 = 0.$
20. $x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0.$

En cada uno de los ejercicios 21-30, pasar la ecuación polar dada a su forma rectangular.

21. $r \cos \theta - 2 = 0.$
22. $r = 4 \operatorname{sen} \theta.$
23. $r = 9 \cos \theta.$
24. $r - r \cos \theta = 4.$

25. $r = \dfrac{2}{2 - \cos\theta}$. 27. $\operatorname{sen}^2 \theta - 4r \cos^3 \theta = 0$. 29. $r = 2(1 - \cos\theta)$.

26. $r = \dfrac{4}{1 + 2\cos\theta}$. 28. $r = 2 \sec^2 \dfrac{\theta}{2}$. 30. $r^2 = 4 \cos 2\theta$.

82. Trazado de curvas en coordenadas polares. Consideremos ahora el trazado de curvas dadas en ecuaciones polares, de la misma manera que lo hicimos para la construcción de gráficas de ecuaciones rectangulares (Art. 19). Para nuestros fines, la construcción de curvas en coordenadas polares constará de los seis pasos siguientes:

1. Determinación de las intersecciones con el eje polar y con el eje a 90°.
2. Determinación de la simetría de la curva con respecto al eje polar, al eje a 90° y al polo.
3. Determinación de la extensión del lugar geométrico.
4. Cálculo de las coordenadas de un número suficiente de puntos para obtener una gráfica adecuada.
5. Trazado de la gráfica.
6. Transformación de la ecuación polar a rectangular.

El lector debe observar, en particular, que la construcción de curvas en coordenadas polares requiere ciertas precauciones que no se necesitan para las coordenadas rectangulares. Por ejemplo, un punto, en un sistema de coordenadas rectangulares, tiene un único par de coordenadas, pero un punto, en coordenadas polares, tiene, como vimos (Art. 80), un número infinito de pares de coordenadas. Puede ocurrir, entonces, que mientras un par de coordenadas polares de un punto P de un lugar geométrico puede satisfacer su ecuación, otro par de coordenadas no la verifica. Esto tiene lugar, por ejemplo, en la ecuación $r = a\theta$, $a \neq 0$, que representa una curva llamada espiral de Arquímedes. Además, un lugar geométrico puede estar representado, algunas veces, por más de una ecuación polar. Así, la circunferencia cuyo centro está en el polo y cuyo radio es igual a a, puede representarse por una de las dos ecuaciones $r = a$ o $r = -a$. Las ecuaciones que representan el mismo lugar geométrico se llaman *ecuaciones equivalentes*.

1. *Intersecciones*. Las intersecciones con el eje polar, cuando existen, pueden obtenerse resolviendo la ecuación polar dada para r, cuando a θ se le asignan sucesivamente los valores 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, y, en general, el valor $n\pi$, en donde n es un entero cualquiera. Análogamente, si existen algunas intersecciones con el eje a 90°, pueden obtenerse asignando a θ los valores $\dfrac{n}{2}\pi$, en donde n es un número impar cualquiera. Si existe un valor de θ para el cual sea $r = 0$, la gráfica pasa por el polo.

2. *Simetría*. Si la curva es simétrica con respecto al eje polar, entonces (Art. 16) para cada punto P existe un punto P', también de la curva, tal que el segmento PP' es bisecado perpendicularmente por el eje polar, como se ve en la figura 113. Si M es el punto medio del segmento PP', de los triángulos rectángulos OPM y $OP'M$ se deduce que las coordenadas de P' son $(r, -\theta)$ y $(-r, \pi - \theta)$. Tenemos, pues, dos pruebas para simetría con respecto al eje polar, a saber, que la ecuación polar dada no varíe al reemplazar θ por $-\theta$, o al reemplazar θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$. Debemos, sin embargo, hacer una importante adición a este enunciado. Así, una circunferencia con centro en el polo y radio igual a a tiene por ecuación polar $r = a$. Esta ecuación no satisface la segunda prueba aunque su lugar geométrico es, evidentemente, simétrico con respecto al eje polar. Pero la segunda prueba cambia a la ecuación dada en $r = -a$, que, como hemos anotado antes, es una ecuación equivalente. Por tanto, diremos que la simetría con respecto al eje polar existe también si las sustituciones indicadas cambian a la ecuación dada en una ecuación equivalente.

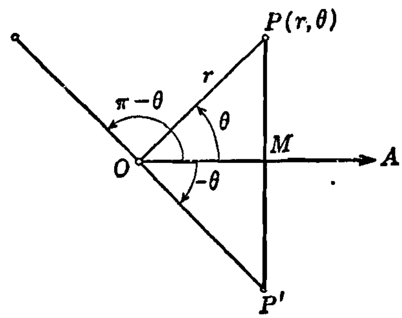


Fig. 113

Se deja al estudiante, como ejercicio, el obtener las pruebas para simetría con respecto al eje a 90° y respecto el polo, que establece el siguiente

TEOREMA 2. *Las pruebas para averiguar la simetría del lugar geométrico de una ecuación polar están dadas en la siguiente tabla.*

Simetría con respecto al	La ecuación polar no se altera, o se transforma en una ecuación equivalente cuando
Eje polar	*a*) se sustituye θ por $-\theta$, o *b*) se sustituye θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$.
Eje a 90°	*a*) se sustituye θ por $\pi - \theta$, o *b*) se sustituye θ por $-\theta$ y r por $-r$.
Polo	*a*) se sustituye θ por $\pi + \theta$, o *b*) se sustituye r por $-r$.

3. *Extensión del lugar geométrico.* Para determinar la extensión de la gráfica de un lugar geométrico dado en coordenadas polares, primero se despeja r en función de θ, de modo que tenemos

$$r = f(\theta). \qquad (1)$$

Si r es finito para todos los valores de θ, se trata de una curva cerrada. Si, en cambio, r se vuelve infinita para ciertos valores de θ la gráfica no puede ser una curva cerrada. Para valores de θ que hacen a r compleja no hay curva; tales valores de θ constituyen intervalos excluídos del lugar geométrico. Si la gráfica es una curva cerrada, es útil, frecuentemente, determinar los valores máximo y mínimo de r.

4. *Cálculo de las coordenadas de algunos puntos.* Asignando un valor particular a θ, podemos obtener el valor o valores reales correspondientes de r, cuando existen, de la ecuación (1) anterior. Para la mayoría de nuestros fines, será suficiente tomar valores de θ a intervalos de 30°.

5. *Construcción de la gráfica.* Los puntos del lugar geométrico pueden trazarse directamente a partir de los valores de las coordenadas obtenidas en el paso 4. Una curva continua que pase por los puntos localizados será, por lo general, la gráfica buscada. Es importante ver si la gráfica concuerda con los resultados obtenidos en los pasos 1, 2 y 3.

6. *Transformación de la ecuación polar a su forma rectangular.* Esta transformación puede efectuarse como se discutió en el Artículo 81. La forma rectangular se puede usar para comprobar la gráfica.

Ejemplo 1. Trazar la curva cuya ecuación es

$$r = 2(1 - \cos\theta). \qquad (2)$$

Solución. 1. *Intersecciones.* De la ecuación (2) se deduce que para $\theta = 0°$, es $r = 0$, y para $\theta = \pi$ es $r = 4$. Ningunos valores nuevos de r se obtienen para $\theta = -\pi$, $\pm 2\pi$, etc. Por tanto, el polo está sobre la curva, y la otra intersección con el eje polar está dada por el punto $(4, \pi)$.

Para $\theta = \frac{\pi}{2}$ es $r = 2$; para $\theta = -\frac{\pi}{2}$ es $r = 2$. Ningunos valores nuevos de r se obtienen para $\theta = \pm\frac{3}{2}\pi$, $\pm\frac{5}{2}\pi$, etc. Por tanto, las intersecciones con el eje a 90° son los puntos $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$.

2. *Simetría.* Si se sustituye θ por $-\theta$, la ecuación (2) no se altera, ya que $\cos(-\theta) = \cos\theta$. Por tanto, la curva dada por la ecuación (2) es simétrica con respecto al eje polar.

Aplicando las otras pruebas del teorema 2, el estudiante debe demostrar que el lugar geométrico no es simétrico ni con respecto al eje a 90° ni con respecto al polo.

3. *Extensión.* Como el valor absoluto de $\cos\theta$ no es nunca mayor que 1 para cualquier valor de θ, la ecuación (2) muestra que r es finito para todos los valores de θ y, por tanto, se trata de una cuva cerrada. El valor máximo de r se obtiene cuando $1 - \cos\theta$ es un máximo, y esto ocurre cuando $\theta = \pi$. Por tanto, el valor máximo de r es 4. Análogamente, se halla el valor mínimo de r, que resulta ser 0 para $\theta = 0°$.

4. *Cálculo de las coordenadas de algunos puntos.* Las coordenadas polares de algunos puntos de la curva pueden obtenerse, a partir de la ecuación (2), asignando valores a θ. Como la curva es simétrica con respecto al eje polar, no es necesario tomar valores de θ mayores de 180°. En la tabla que damos a continuación figuran algunos valores correspondientes de r y θ. La tabla del Apéndice IC, 5, es muy útil para estos cálculos.

θ	$\cos\theta$	$1-\cos\theta$	r
0°	1	0	0
30°	0,866	0,134	0,268
60°	0,5	0,5	1
90°	0	1	2
120°	− 0,5	1,5	3
150°	− 0,866	1,866	3,732
180°	− 1	2	4

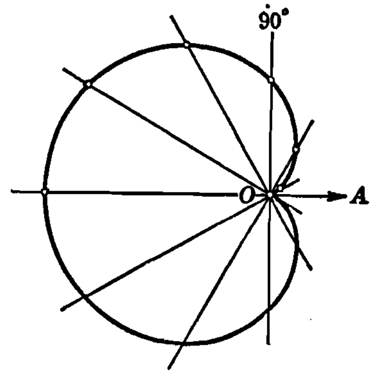


Fig. 114

5. *Trazado de la curva.* La curva que se busca es la representada en la figura 114, y se la conoce con el nombre de *cardioide*.

6. *Ecuación rectangular.* Si multiplicamos la ecuación (2) por r, obtenemos

$$r^2 = 2r - 2r\cos\theta,$$

la cual, por el teorema 1, Artículo 81, se convierte en

$$x^2 + y^2 = 2r - 2x.$$

Trasponiendo $-2x$ al primer miembro, y elevando al cuadrado, tenemos

$$(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4r^2,$$

de donde

$$(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2),$$

que es la ecuación rectangular buscada.

El lector puede observar las ventajas que a veces tienen las coordenadas polares, comparando el trabajo que requiere el trazado de la cardioide a partir de su ecuación polar y de su ecuación rectangular.

Ejemplo 2. Trazar la curva cuya ecuación es

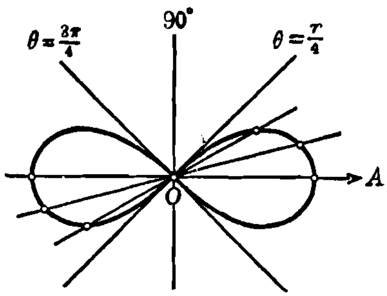
$$r^2 = 4\cos 2\theta. \qquad (3)$$

Solución. 1. *Intersecciones.* Las intersecciones con el eje polar son los dos puntos $(\pm 2,\ 0)$ y $(\pm 2,\ \pi)$. Para $\theta = \frac{n}{2}\pi$, en donde n es un número impar cualquiera, r es complejo, y, aparentemente, no hay intersecciones con el eje a 90°. Pero, para $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = 0$, de manera que el polo está sobre la curva.

2. *Simetría.* La ecuación (3) satisface todas las pruebas de simetría del teorema 2. Por tanto, la curva es simétrica con respecto al eje polar, al eje a 90° y el polo.

3. *Extensión.* El valor máximo de $\cos 2\theta$ es 1. Por tanto, de la ecuación (3), el valor máximo de r es 2, lo que nos dice que se trata de una curva cerrada. Cuando el ángulo 2θ está comprendido entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$, $\cos 2\theta$ es negativo y los valores de r son complejos. Luego, no hay curva entre las rectas $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$.

4. *Cálculo de coordenadas.* Las coordenadas de varios puntos pueden obtenerse, directamente, de la ecuación (3). Teniendo en cuenta la simetría del lugar geométrico y el intervalo de variación de los valores excluídos de θ, basta asignar a θ solamente valores de 0° a 45°. Las coordenadas de algunos puntos figuran en la tabla siguiente.



θ	$\cos 2\theta$	$r = \pm 2\sqrt{\cos 2\theta}$
0°	1	± 2
15°	0,866	$\pm 1,86$
30°	0,5	$\pm 1,41$
45°	0	0

Fig. 115

5. *Construcción de la curva.* La curva buscada, trazada en la figura 115, es conocida con el nombre de *lemniscata de Bernoulli*. El lector debe notar que, aunque en la ecuación (3), aparece el ángulo 2θ, se trazan siempre los valores del *ángulo sencillo* θ y los valores correspondientes de r.

6. *Ecuación rectangular.* Como las ecuaciones de transformación del teorema 1, Artículo 81, contienen funciones de un ángulo sencillo, escribimos la ecuación (3) en la forma (Apéndice IC, 7)

$$r^2 = 4(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta).$$

Multiplicando ambos miembros por r^2, obtenemos

$$r^4 = 4(r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta),$$

de donde, por medio de las ecuaciones de transformación, obtenemos la ecuación rectangular buscada

$$(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2).$$

EJERCICIOS. Grupo 38

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar las pruebas (*a*) y (*b*) del teorema 2, Art. 82, para la simetría con respecto al eje a 90°.

2. Demostrar las pruebas (*a*) y (*b*) del teorema 2, Art. 82, para establecer la simetría de la curva con respecto al polo.

En cada uno de los ejercicios 3-30, trazar la curva cuya ecuación se da. Las cantidades a y b son constantes diferentes de cero a las que pueden asignárseles valores numéricos para la operación del trazado de la gráfica. Usese papel coordenado polar.

3. $r = 2 \sec \theta$.
4. $r = a \cos \theta$.
5. $4r \cos \theta - 3r \operatorname{sen} \theta = 12$.
6. $r = a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta$.
7. $r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 2$.
8. $r = \dfrac{2}{1 - \cos \theta}$.
9. $r = \dfrac{4}{2 - \cos \theta}$.
10. $r = a \sec^2 \dfrac{\theta}{2}$.
11. $r = a \csc^2 \dfrac{\theta}{2}$.
12. $r \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta = 4a$.
13. $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 4$.
14. $r^2(4 + 5 \operatorname{sen}^2 \theta) = 36$.
15. $r = a(1 + \operatorname{sen} \theta)$ (cardioide).
16. $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ (lemniscata).
17. $r = a \cos^2 \dfrac{\theta}{2}$.
18. $r^2 \cos^3 \theta = a^2 \operatorname{sen} \theta$.
19. $\operatorname{sen}^3 \theta - 4r \cos^3 \theta = 0$.
20. $r = a \operatorname{sen} 2\theta$ (rosa de 4 hojas).
21. $r = a \cos 5\theta$.
22. $r = a \operatorname{sen} 4\theta$.
23. $r = 2a \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \theta$ (cisoide).
24. $r\theta = a$ (espiral hiperbólica o recíproca).
25. $r^2 = a^2 \theta$ (espiral parabólica).
26. $\log r = a\theta$ (espiral logarítmica o equiangular).
27. $r^2\theta = a^2$ (lituus).
28. $r = a \csc \theta \pm b$ (concoide).
29. $r = a - b \cos \theta$ (caracol).
30. $r = a \operatorname{sen}^3 \dfrac{\theta}{3}$.

83. Intersecciones de curvas dadas en coordenadas polares. El método para obtener los puntos de intersección de dos curvas en coordenadas polares es semejante al empleado en coordenadas rectangulares (Art. 21). Las soluciones del sistema formado por las ecuaciones de los lugares geométricos, representan las coordenadas r y θ de los puntos de intersección. Debemos hacer notar, sin embargo, que en coordenadas polares este problema puede presentar dificultades que no se presentan en coordenadas rectangulares, debido a que las coordenadas polares de un punto no son únicas. Por esta razón puede ocurrir que, para un punto particular P de intersección de dos curvas, las coordenadas polares de P que satisfacen la ecuación de una de las curvas no satisfagan la ecuación de la otra, pero satisfagan a una de sus ecuaciones equivalentes. Por esto, con el fin de evitar tales dificultades, es mejor, generalmente, dibujar ambos lugares geométricos con referencia al mismo polo y eje polar y considerar entonces cada punto de intersección individualmente, tal como indique la figura.

Ejemplo. Hallar, analítica y gráficamente, los puntos de intersección de las curvas cuyas ecuaciones son

$$r = a\theta, \quad a \neq 0, \tag{1}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}. \tag{2}$$

Solución. La ecuación (1) representa la *espiral de Arquímedes*, y la ecuación (2) una recta que pasa por el polo, como se ha representado en la figura 116. La porción punteada de la espiral corresponde a los valores negativos de θ en la ecuación (1). Ambas líneas son ilimitadas y, evidentemente, tienen un número infinito de puntos de intersección. Ahora, si sustituímos el valor de θ dado por la ecuación (2), en la ecuación (1) hallamos $r = \frac{\pi a}{4}$, es decir, obtenemos las coordenadas $\left(\frac{\pi a}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ de solamente un punto de intersección, el punto P_1. Pero la recta (2) puede estar representada también por su ecuación equivalente, $\theta = \frac{9\pi}{4}$, de la cual, junta con la ecuación (1), obtenemos las coordenadas $\left(\frac{9\pi a}{4}, \frac{9\pi}{4}\right)$ del punto de intersección P_2. De manera semejante, otra ecuación equivalente de la recta (2) es $\theta = -\frac{7\pi}{4}$, que da $P_3\left(-\frac{7\pi a}{4}, -\frac{7\pi}{4}\right)$. Evidentemente, hay un número infinitamente grande de ecuaciones equivalentes de la recta (2) por medio de las cuales podemos obtener las coordenadas de cualquier número de puntos de intersección. El lector debe hallar las coordenadas del polo y de los puntos P_4 y P_5 de la figura 116, todos los cuales son puntos de intersección.

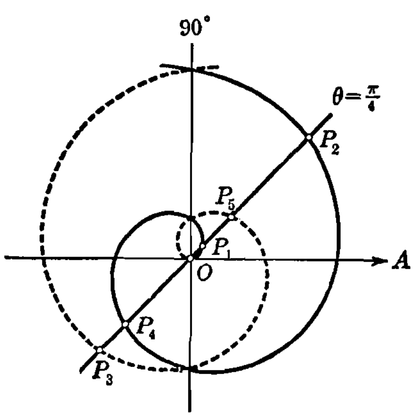


Fig. 116

84. Fórmula de la distancia entre dos puntos en coordenadas polares. Sean $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ (fig. 117) dos puntos dados cualesquiera. Se trata de hallar la distancia d entre P_1 y P_2, en donde $d = |\overline{P_1P_2}|$. Para ello emplearemos el par principal de coordenadas de P_1 y de P_2.

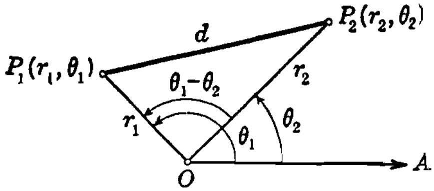


Fig. 117

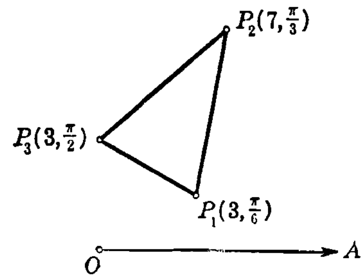


Fig. 118

Tracemos los radios vectores de P_1 y P_2, formando así el triángulo OP_1P_2 en donde $|\overline{OP_1}| = r_1$, $|\overline{OP_2}| = r_2$, y el ángulo P_1OP_2 es igual a $\theta_1 - \theta_2$. Entonces, por la ley de los cosenos (Apéndice IC, 11). tenemos

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2),$$

de donde

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Este resultado nos dice:

TEOREMA 3. *La distancia* d *entre dos puntos cualesquiera* $P_1(r_1, \theta_1)$ *y* $P_2(r_2, \theta_2)$ *en coordenadas polares está dada por la fórmula*

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

NOTA. Esta fórmula para d puede obtenerse también por transformación en coordenadas polares de la fórmula de la distancia entre dos puntos dada en el teorema 2, Artículo 6, para coordenadas rectangulares.

Ejemplo. Demostrar que los puntos $P_1\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$, $P_2\left(7, \frac{\pi}{3}\right)$ y $P_3\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

Solución. El triángulo es el representado en la figura 118. Por el teorema 3, tenemos

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{58 - 21\sqrt{3}}$$

y

$$|\overline{P_3P_2}| = \sqrt{3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{58 - 21\sqrt{3}}.$$

Por tanto, como $|\overline{P_1P_2}| = |\overline{P_3P_2}|$, el triángulo es isósceles.

EJERCICIOS. Grupo 39

En cada uno de los ejercicios 1-12, calcular, analítica y gráficamente, los puntos de intersección de las curvas dadas.

1. $r = 2 \operatorname{sen} \theta,$
 $r = 1.$

2. $r = 4 \cos \theta,$
 $r = 2.$

3. $\theta = \dfrac{\pi}{4},$
 $r = 3.$

4. $r \cos \theta = 4,$
 $r \operatorname{sen} \theta = 4.$

5. $r \cos \theta = 2,$
 $r = 3 \cos \theta.$

6. $r = \operatorname{sen} \theta,$
 $r = \cos \theta.$

7. $r^2 = 9 \cos 2\theta,$
 $r = 3\sqrt{2} \operatorname{sen} \theta.$

8. $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta,$
 $r = 2\sqrt{2} \cos \theta.$

9. $r = 1 + \cos \theta,$
 $r = \sqrt{3} \operatorname{sen} \theta.$

10. $r = \dfrac{3}{2 - \cos \theta},$
 $r \cos \theta = 1.$

11. $r = \csc^2 \dfrac{\theta}{2},$
 $3r = 8(1 + \cos \theta).$

12. $r - 2r \cos \theta = 1,$
 $r = \operatorname{sen} \theta.$

13. Hallar la distancia entre los puntos $P_1\left(3, \dfrac{\pi}{3}\right)$ y $P_2\left(5, \dfrac{7\pi}{4}\right)$.

14. Hallar la distancia entre los puntos $P_1\left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$ y $P_2\left(4, \dfrac{5\pi}{4}\right)$.

15. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son $(0, 19°)$, $\left(1, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ y $(3, 0°)$.

16. Demostrar que los puntos $P_1\left(1, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $P_2\left(\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{6}\right)$ y $P_3(1, 0°)$ son los vértices de un triángulo equilátero.

17. Demostrar que $P\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ es el punto medio del segmento cuyos extremos son $\left(3, \dfrac{\pi}{6}\right)$ y $\left(3, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

18. Empleando las fórmulas de transformación de coordenadas rectangulares a polares (teorema 1, Art. 81), demuéstrese que la fórmula de la distancia polar del teorema 3 (Art. 84) puede obtenerse directamente a partir de la fórmula de la distancia en coordenadas rectangulares dadas en el teorema 2, Artículo 6.

19. Discutir la fórmula de la distancia dada en el teorema 3 (Art. 84) cuando los puntos P_1 y P_2 son colineales con el polo. Considerar los casos en que los puntos están del mismo lado y de lados opuestos del eje polar.

20. Discutir la fórmula de la distancia dada en el teorema 3 (Art. 84) cuando los puntos P_1 y P_2 están ambos sobre el eje polar. Considerar los casos en que los puntos están del mismo lado y de lados opuestos al polo.

21. Demostrar que la fórmula de la distancia dada en el teorema 3 (Art. 84) es verdadera cualesquiera que sean las posiciones de los puntos P_1 y P_2 en el plano coordenado polar.

[illegible]. Demostrar que el área K de un triángulo cuyos vértices son el polo y los puntos $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ está dada por la fórmula

$$K = \tfrac{1}{2} \left| r_1 r_2 \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2) \right|.$$

23. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el polo y los puntos $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ y $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$.

24. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos

$$P_1\left(2, \frac{2\pi}{3}\right), \quad P_2\left(3, \frac{\pi}{3}\right) \text{ y } P_3\left(1, \frac{\pi}{6}\right).$$

25. Hallar el área de un triángulo de vértices dados, cuando el polo está dentro del triángulo.

85. Ecuación de la recta en coordenadas polares. Si una recta pasa por el polo, su ecuación polar es, evidentemente, de la forma

$$\theta = k, \tag{1}$$

en donde k es una constante que representa el ángulo polar de cualquier punto de la recta. Para una recta particular, k puede tener un número infinito de valores. Por esto, convenimos en restringir k a valores no negativos menores de $180°$.

Consideremos ahora el caso en que la recta no pasa por el polo. Sea l (fig. 119) la recta. Desde el polo tracemos la normal ON a l, y sea (p, ω) el par principal de coordenadas polares de N, de manera que p sea positivo y que los valores de ω estén dados por

$$0° \leq \omega < 360° \tag{2}$$

Siguiendo el procedimiento usual de los problemas de lugares geométricos, sea $P(r, \theta)$ un punto cualquiera de la recta l. Entonces, del triángulo rectángulo OPN, tenemos

$$r \cos (\theta - \omega) = p, \tag{3}$$

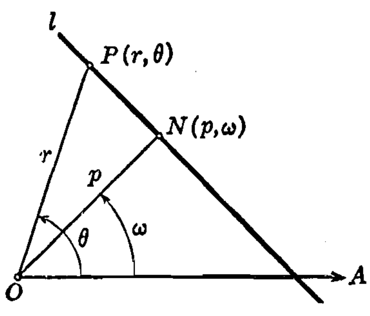


Fig. 119

que es la ecuación polar de la recta l. Evidentemente, por el significado de las cantidades p y ω y el intervalo de variación (2) para ω, la ecuación (3) es la ecuación polar equivalente a la ecuación normal de la recta en coordenadas rectangulares,

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0, \tag{4}$$

dada en el teorema 7 del Artículo 31. El lector debe verificar esto transformando la ecuación (4) en la ecuación (3). (Véase el ejercicio 20 del grupo 37, Art. 81.)

La consideración de los casos en que la recta l pasa por el polo, es perpendicular al eje polar, o es paralela a dicho eje, conduce a formas especiales de la ecuación (3) que son frecuentemente útiles. Estos resultados, combinados con los anteriores, están expresados en el siguiente

TEOREMA 4. *Si* (p, ω) *es el par principal de coordenadas polares del pie de la perpendicular trazada desde el polo a cualquier recta en el plano coordenado polar, la ecuación polar de la recta es*

$$r \cos (\theta - \omega) = p.$$

Si la recta pasa por el polo, su ecuación es de la forma

$$\theta = k,$$

siendo k *una constante que puede restringirse a valores no negativos menores de* 180°

Si la recta es perpendicular al eje polar y está a p *unidades del polo, su ecuación es de la forma*

$$r \cos \theta = \pm p, \quad p > 0,$$

debiendo tomar el signo positivo o negativo según que la recta esté a la derecha o a la izquierda del polo.

Si la recta es paralela al eje polar y está a p *unidades de él, su ecuación es de la forma*

$$r \operatorname{sen} \theta = \pm p, \quad p > 0,$$

debiéndose tomar el signo positivo o el negativo según que la recta esté arriba o abajo del eje polar.

86. Ecuación de una circunferencia en coordenadas polares. Sea $C(c, \alpha)$ el centro de una circunferencia cualquiera de radio a (figura 120). Sea $P(r, \theta)$ un punto cualquiera de la circunferencia. Tracemos el radio PC y los radios vectores de P y C, formando así el triángulo OPC. De este triángulo, por la ley de los cosenos (Apéndice IC, 11), resulta:

$$a^2 = r^2 + c^2 - 2cr \cos (\theta - \alpha)$$

o sea,

$$r^2 - 2cr \cos (\theta - \alpha) + c^2 = a^2 \qquad (1)$$

que es la ecuación polar de la circunferencia.

Los casos especiales de la ecuación (1) son a veces útiles y están comprendidos en el teorema siguiente :

TEOREMA 5. *La ecuación polar de una circunferencia de centro el punto* (c, α), *y radio igual a* a *es*

$$r^2 - 2cr\ cos\ (\theta - \alpha) + c^2 = a^2.$$

Si su centro está en el polo, la ecuación polar es

$$r = a.$$

Si la circunferencia pasa por el polo y su centro está sobre el eje polar, su ecuación es de la forma

$$r = \pm\ 2a\ cos\ \theta,$$

debiéndose tomar el signo positivo o el negativo según que el centro esté a la derecha o la izquierda del polo.

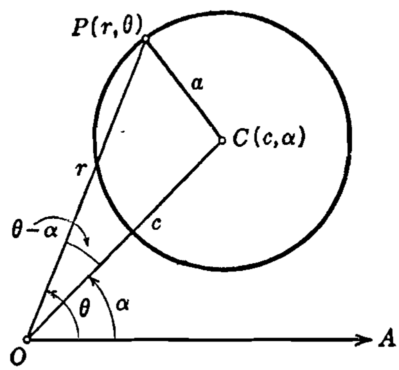


Fig. 120

Si la circunferencia pasa por el polo y su centro está sobre el eje a 90°, *su ecuación es de la forma*

$$r = \pm\ 2a\ sen\ \theta,$$

debiéndose tomar el signo positivo o negativo según que el centro esté arriba o abajo del polo.

Ejemplo. Empleando solamente coordenadas polares, hallar el centro y el radio de la circunferencia

$$r = 3\ \text{sen}\ \theta - 3\sqrt{3}\ \cos\theta. \tag{2}$$

Solución. Pongamos la ecuación (2) en la forma general de la ecuación de una circunferencia de centro (c, α) y radio a,

$$r^2 - 2cr\ \cos\ (\theta - \alpha) + c^2 = a^2. \tag{1}$$

Para ello, multipliquemos ambos miembros de la ecuación (2) por r y traspongamos términos. Se obtiene:

$$r^2 - r(-3\sqrt{3}\cos\theta + 3\,\text{sen}\,\theta) = 0,$$

que, teniendo en cuenta la ecuación (1), podemos escribir en la forma

$$r^2 - 2cr\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2c}\cos\theta + \frac{3}{2c}\,\text{sen}\,\theta\right) = 0. \qquad (3)$$

Hagamos ahora

$$-\frac{3\sqrt{3}}{2c} = \cos\alpha \quad \text{y} \quad \frac{3}{2c} = \text{sen}\,\alpha. \qquad (4)$$

La expresión dentro del paréntesis de la ecuación (3) se convierte en

$$\cos\theta\cos\alpha + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha = \cos(\theta - \alpha),$$

y la ecuación en

$$r^2 - 2cr\cos(\theta - \alpha) = 0,$$

que es de la forma (1). Evidentemente la circunferencia pasa por el polo, ya que $c^2 = a^2$. Si elevamos al cuadrado ambos miembros de cada una de las ecuaciones (4), y sumamos, obtenemos

$$\frac{27}{4c^2} + \frac{9}{4c^2} = 1.$$

de donde $c = \pm 3$. Para el par principal de coordenadas polares del centro, tomamos $c = 3$, valor para el cual las ecuaciones (4) dan $\alpha = \frac{5\pi}{6}$. Por tanto, las coordenadas del centro de la circunferencia (2) son $\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$. También, como $c = a$, el radio es 3.

El estudiante debe dibujar la figura correspondiente a este ejemplo y comprobar los resultados usando coordenadas rectangulares.

87. Ecuación general de las cónicas en coordenadas polares. La ecuación polar de una cónica toma una forma particularmente sencilla y útil cuando uno de los focos (fig. 121) está en el polo y el eje focal coincide con el eje polar. Sea la recta l la directriz correspondiente del foco O; esta recta es perpendicular al eje polar, y sea D el punto de intersección. Designemos la distancia $|\overline{OD}|$, entre el foco y la directriz, por la cantidad positiva p. Sea $P(r, \theta)$ un punto cualquiera de la cónica Desde P tracemos

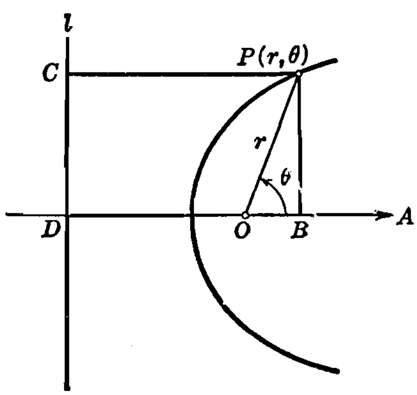


Fig. 121

las perpendiculares PB y PC al eje polar y a la directriz, respectivamente.

Para deducir la ecuación polar de la cónica, emplearemos la definición general dada en el Artículo 75. Según ella el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$\frac{|\overline{PO}|}{|\overline{PC}|} = e, \tag{1}$$

en donde e es la excentricidad. Ahora bien,

$$|\overline{PO}| = r$$

y

$$|\overline{PC}| = |\overline{DB}| = |\overline{DO}| + |\overline{OB}| = p + r \cos\theta .$$

Sustituyendo estos valores en (1), obtenemos

$$\frac{r}{p + r\cos\theta} = e,$$

de donde,

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta} \tag{2}$$

Podemos demostrar, recíprocamente, que cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2) satisface la condición geométrica (1) y, por tanto, está sobre el lugar geométrico. Según esto, la ecuación (2) es la ecuación buscada de la cónica.

La ecuación (2) se ha deducido en el supuesto de que la directriz está a la izquierda del polo. Si la directriz está a la derecha del polo y a p unidades de él, podemos demostrar, análogamente, que la ecuación de la cónica es

$$r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}. \tag{3}$$

De manera semejante, si el eje focal coincide con el eje a 90° de manera que la directriz sea paralela al eje polar y a p unidades de él, podemos demostrar que la ecuación de la cónica es de la forma

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\,\mathrm{sen}\,\theta},$$

debiéndose tomar el signo positivo o el negativo según que la directriz esté arriba o abajo del eje polar.

Los resultados precedentes se resumen en el siguiente

TEOREMA 6. *Sea* e *la excentricidad de una cónica cuyo foco está en el polo y a* p *unidades de la directriz correspondiente.*

Si el eje focal coincide con el eje polar, la ecuación de la cónica es de la forma

$$r = \frac{ep}{1 \pm e \cos \theta},$$

en donde se debe tomar el signo positivo o el negativo según que la directriz esté a la derecha o a la izquierda del polo.

Si el eje focal coincide con el eje a 90°, *la ecuación de la cónica es de la forma*

$$r = \frac{ep}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta},$$

en donde se debe tomar el signo positivo o el negativo según que la directriz esté arriba o abajo del eje polar.

NOTA. Nos referiremos en adelante a las ecuaciones del teorema 6 como las *ecuaciones polares ordinarias de las cónicas.* El estudiante debe notar, sin embargo, que en cada caso en el polo está un foco y no el vértice de una parábola o el centro de una cónica central. Por esto, las ecuaciones rectangulares correspondientes no estarán en la forma canónica.

Ejemplo. Identificar la cónica cuya ecuación polar es

$$r = \frac{4}{2 + \cos \theta} \qquad (4)$$

Hallar las coordenadas polares del centro y vértices y las longitudes de los ejes y del lado recto.

Solución. La ecuación ordinaria de una cónica tiene la unidad como primer término del denominador. Por tanto, si dividimos numerador y denominador del segundo miembro de la ecuación (4) por 2, obtenemos la forma ordinaria

$$r = \frac{2}{1 + \frac{1}{2} \cos \theta}. \qquad (5)$$

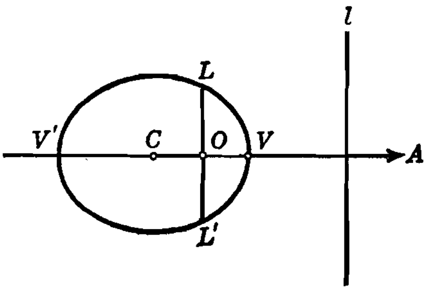


Fig. 122

Si comparamos la ecuación (5) con la ecuación ordinaria (3), vemos que la excentricidad es $e = \frac{1}{2}$. Por tanto, el lugar geométrico de la ecuación (4) es una elipse cuya posición en el plano coordenado polar está representada en la figura 122, en donde la recta l es la directriz correspondiente al foco que está en el polo O.

De la ecuación (5) tenemos que para $\theta = 0$ es $r = \frac{4}{3}$, y para $\theta = \pi$ es $r = 4$. Por tanto, las coordenadas de los vértices son $V(\frac{4}{3}, 0)$ y $V'(4, \pi)$. Como el centro C está sobre el eje polar y en el punto medio de la recta que une los vértices, sus coordenadas son $(4/3, \pi)$. La longitud del eje mayor es la distancia entre los vértices, o sea, $2a = 16/3$

De la ecuación (5), tenemos que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ es $r = 2$. Por tanto, la longitud $|\overline{OL}|$ del semilado recto es 2, y la longitud total de cada lado recto es 4. Como la longitud total de cada lado recto es también igual a $\frac{2b^2}{a}$, tenemos que $\frac{2b^2}{a} = \frac{2b^2}{8/3} = 4$, de manera que $b = 4/3 \sqrt{3}$ y la longitud del eje menor es

$$2b = \frac{8}{3}\sqrt{3}.$$

EJERCICIOS. Grupo 40

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. De la ecuación (3), Artículo 85, deducir las ecuaciones polares

$$r \cos \theta = \pm p \quad \text{y} \quad r \operatorname{sen} \theta = \pm p$$

de una línea recta, dadas en el teorema 4.

2. Obtener los resultados del ejercicio 1 transformando las ecuaciones rectangulares de las rectas paralelas a los ejes coordenados y a p unidades de ellos.

3. Demostrar que las ecuaciones polares de las rectas que son perpendiculares y paralelas al eje polar pueden escribirse en las formas

$$r = \pm p \sec \theta \quad \text{y} \quad r = \pm p \csc \theta,$$

respectivamente, en donde p es la distancia del polo a la recta.

4. Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $P\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ y es perpendicular al radio vector de P.

En cada uno de los ejercicios 5-8, transformar la ecuación rectangular dada a la forma polar normal de la ecuación (3), Artículo 85.

5. $3x - 4y + 5 = 0$. **7.** $4x + 3y - 10 = 0$.

6. $5x + 12y + 26 = 0$. **8.** $2x + y = 0$.

9. Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $\left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$ y es perpendicular al eje polar.

10. Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $\left(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ y es paralela al eje polar.

11. Considerando las áreas de ciertos triángulos, demostrar que la ecuación polar de la recta que pasa por los dos puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) puede escribirse en la forma $r_1 r \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta) + r_2 r \operatorname{sen} (\theta - \theta_2) = r_1 r_2 \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2)$.

12. Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por los puntos

$$\left(4, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ y } \left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right).$$

13. Demostrar que la ecuación polar general de la circunferencia, ecuación (1) del Artículo 86, puede obtenerse por medio de la fórmula de la distancia entre dos puntos, dada en el teorema 3, Artículo 81.

14. Hallar la ecuación polar de la circunferencia de centro el punto $\left(6, \frac{3\pi}{4}\right)$ y radio igual a 4.

15. Hallar la ecuación polar de la circunferencia de centro el punto $\left(3, \frac{7\pi}{6}\right)$ y que pasa por el punto $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$.

16. Demostrar los casos especiales de la ecuación (1), Artículo 86, dados en el teorema 5.

17. Si el centro de una circunferencia que pasa por el polo es el punto (a, α) demuéstrese que su ecuación es $r = 2a \cos (\theta - \alpha)$.

18. Del resultado del ejercicio 17, demuéstrese que la ecuación polar de cualquier circunferencia que pasa por el polo puede escribirse en la forma

$$r = k_1 \cos \theta + k_2 \operatorname{sen} \theta,$$

en donde k_1 y k_2 son constantes.

19. Transformando la ecuación polar del ejercicio 18 a su forma rectangular, determinar el significado de las constantes k_1 y k_2. Demostrar, también, que si a es el radio de la circunferencia se verifica que $k_1^2 + k_2^2 = 4a^2$.

En cada uno de los ejercicios 20-23, hallar el radio y las coordenadas polares del centro de la circunferencia a partir de su ecuación polar dada. Comprobar los resultados empleando coordenadas rectangulares.

20. $r = 4 \cos \theta$.

21. $r = 2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \theta$.

22. $r^2 - 2\sqrt{2}\, r \cos \theta - 2\sqrt{2}\, r \operatorname{sen} \theta - 5 = 0$.

23. $r^2 + r \cos \theta - \sqrt{3}\, r \operatorname{sen} \theta - 3 = 0$.

En cada uno de los ejercicios 24 y 25, transformar la ecuación rectangular dada de la circunferencia a la forma polar general representada por la ecuación (1) del Artículo 86, o uno de sus casos especiales. En cada caso, hallar el radio y las coordenadas polares del centro.

24. $x^2 + y^2 + 2x = 0$. 25. $x^2 + y^2 - x - y = 0$.

26. Deducir la ecuación $r = \dfrac{ep}{1 + e \cos \theta}$ del teorema 6, Artículo 87.

27. Deducir las ecuaciones $r = \dfrac{ep}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta}$ del teorema 6, Artículo 87.

28. Demostrar que las ecuaciones (2) y (3) del Artículo 87 pueden reducirse a las formas $r = \dfrac{p}{2} \csc^2 \dfrac{\theta}{2}$ y $r = \dfrac{p}{2} \sec^2 \dfrac{\theta}{2}$, respectivamente, en el caso de una parábola.

29. Demostrar que en cada una de las cónicas del teorema 6, Artículo 87, la longitud de un lado recto es igual a $2ep$.

En cada uno de los ejercicios 30-32, identificar la cónica cuya ecuación polar se da. Para una parábola, hállense las coordenadas polares del vértice y la longitud del lado recto. Para una cónica central, hállense las coordenadas polares del centro y los vértices, y las longitudes de los ejes y cada lado recto. Hallar también la ecuación rectangular de cada cónica.

30. $r = \dfrac{5}{2 - 2\cos\theta}$. 31. $r = \dfrac{6}{3 + \operatorname{sen}\theta}$. 32. $r = \dfrac{3}{2 + 4\cos\theta}$.

33. Si la cónica $r = \dfrac{ep}{1 - e\cos\theta}$ representa una parábola, hállense las coordenadas polares de su vértice y la ecuación polar de su directriz.

34. Si la cónica $r = \dfrac{ep}{1 + e\cos\theta}$ representa una elipse, demuéstrese que la longitud de su eje menor es $\dfrac{2ep}{\sqrt{1 - e^2}}$.

35. Si la cónica $r = \dfrac{ep}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$ representa una hipérbola, demuéstrese que la longitud de su eje transverso es $\dfrac{2ep}{e^2 - 1}$.

88. Problemas relativos a lugares geométricos en coordenadas polares. En coordenadas rectangulares vimos que la solución de un problema de lugar geométrico se facilitaba a veces colocando la figura en una posición apropiada con respecto a los ejes coordenados. Análogamente, en coordenadas polares, la solución puede efectuarse muchas veces con mayor simplicidad si se eligen apropiadamente el polo y el eje polar. Ilustraremos el procedimiento con varios ejemplos.

Ejemplo 1. Sean O y B los extremos de un diámetro fijo de una circunferencia dada de radio a. Sea t la tangente en B. Desde O tracemos una secante cualquiera s que corte a la circunferencia y a t en los puntos C y D, respectivamente. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico de un punto P sobre s tal que $|\overline{OP}| = |\overline{CD}|$ para cada posición de s a medida que gira en torno de O.

Solución. Sin que el razonamiento pierda generalidad, podemos tomar el punto O como polo y hacer que el diámetro fijo esté sobre el eje polar, tal como aparece en la figura 123. Como P es un punto cualquiera del lugar geométrico, le asignaremos las coordenadas generales (r, θ), de manera que $|\overline{OP}| = r$ y el ángulo $POB = \theta$. Entonces, para toda posición de s, debemos tener

$$r = |\overline{OP}| = |\overline{CD}| = |\overline{OD}| - |\overline{OC}|. \quad (1)$$

Del triángulo rectángulo ODB, tenemos

$$|\overline{OD}| = |\overline{OB}| \sec\theta = 2a\sec\theta.$$

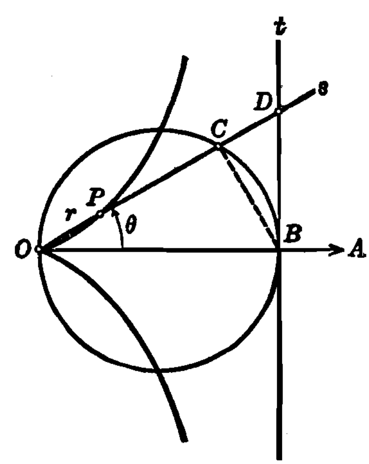


Fig. 123

Tracemos el segmento CB. El ángulo OCB es un ángulo recto ya que está inscrito en un semicírculo. Por tanto,

$$|\overline{OC}| = |\overline{OB}|\cos\theta = 2a\cos\theta.$$

Sustituyendo en (1) estos valores de $|\overline{OD}|$ y $|\overline{OC}|$, obtenemos

$$r = 2a(\sec\theta - \cos\theta),$$

la cual se reduce a

$$r = 2a \operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}\theta,$$

que es la ecuación polar buscada. La curva se llama *cisoide*.

Ejemplo 2. Desde un punto fijo O de una circunferencia dada, de radio a, se traza una cuerda cualquiera OB. Se prolonga la cuerda hasta el punto P de tal manera que la distancia $|\overline{BP}|$ sea siempre una constante igual a k. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico descrito por P a medida que la cuerda prolongada gira en torno de O.

Solución. Sin perder generalidad, podemos tomar el punto fijo O como polo y el diámetro OC prolongado como eje polar (fig. 124). Como P es un

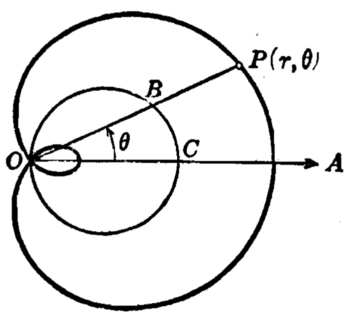


Fig. 124

punto cualquiera del lugar geométrico le asignaremos las coordenadas generales (r, θ), de manera que $|\overline{OP}| = r$ y el ángulo $POC = \theta$. Según el problema, para toda posición del segmento OP debemos tener

$$r = |\overline{OP}| = |\overline{OB}| + |\overline{BP}| = |\overline{OB}| + k. \tag{2}$$

La ecuación de la circunferencia dada de radio a es $r = 2a\cos\theta$, según el teorema 5 del Artículo 86. Por tanto, para toda posición de OP, se verifica

$$|\overline{OB}| = 2a\cos\theta.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (2), tenemos

$$r = 2a\cos\theta + k, \tag{3}$$

que es la ecuación polar buscada. La curva se llama *caracol de Pascal*.

Hay tres casos por considerar, según que

$$k < 2a,$$
$$k = 2a,$$

y

$$k > 2a.$$

El caso $k < 2a$ está representado en la figura 124.

EJERCICIOS. Grupo 41

En los siguientes ejercicios, después de obtener la ecuación polar del lugar geométrico, trácese la curva por los métodos explicados en el Artículo 82.

1. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su radio vector es siempre proporcional a su ángulo polar.

2. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su radio vector es siempre inversamente proporcional a su ángulo polar.

3. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el cuadrado de su radio vector es siempre proporcional a su ángulo polar.

4. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el logaritmo de su radio vector, es siempre proporcional a su ángulo polar.

5. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el cuadrado de su radio vector es siempre inversamente proporcional a su ángulo polar.

6. Empleando solamente coordenadas rectangulares, deducir la ecuación rectangular de la cisoide definida en el ejemplo 1 del Artículo 88. Tómese como origen el punto O y el diámetro fijo a lo largo de la parte positiva del eje X.

Los ejercicios 7-12 se refieren a la figura 123 del ejemplo 1 del Artículo 88.

7. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P de la recta s si $|\overline{OP}| = |\overline{PC}|$ para toda posición de s.

8. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P de la recta s si $|\overline{OP}| = 2|\overline{PC}|$ para toda posición de s.

9. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P de la recta s si $|\overline{OP}| = \frac{1}{2}|\overline{PC}|$ para toda posición de s.

10. Sea E el pie de la perpendicular trazada del punto C al eje polar. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P de s si $|\overline{OP}| = |\overline{CE}|$ para toda posición de s.

11. Con referencia a la figura del ejercicio 10, hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P de la recta s si $|\overline{OP}| = |\overline{OE}|$ para toda posición de s.

12. Con referencia a la figura del ejercicio 10, hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P de la recta s si $|\overline{OP}| = |\overline{EB}|$ para todas las posiciones de s.

13. Un punto P se mueve de tal manera que el producto de sus distancias a los dos puntos fijos $F(a, 0°)$ y $F'(a, \pi)$ es siempre igual a la constante b^2. Demostrar que la ecuación polar del lugar geométrico de P es

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \pm \sqrt{b^4 - a^4 \operatorname{sen}^2 2\theta}.$$

Los lugares geométricos se llaman *óvalos de Cassini*.

14. Trazar la gráfica de la ecuación de los óvalos de Cassini (ejercicio 13) cuando $b = a$. Demostrar que en este caso el lugar geométrico es una lemniscata. (Véase el ejemplo 2 del Artículo 82.)

15. Trazar la gráfica del caracol representado por la ecuación (3) del ejemplo 2 del Artículo 88, cuando $k = 2a$. Demostrar que en este caso el lugar geométrico es una cardioide. (Véase el ejemplo 1 del Art. 82.)

16. Trazar la gráfica del caracol representada por la ecuación (3) del ejemplo 2 del Artículo 88, cuando $k > 2a$.

17. Hallar la ecuación polar del caracol del ejemplo 2 del Artículo 88, cuando la circunferencia dada tiene su centro en el punto $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$, y construir la gráfica correspondiente.

Los ejercicios 18-20 se refieren a la figura 124 del ejemplo 2 del Artículo 88.

18. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P si $|\overline{BP}| = |\overline{BC}|$ para todas las posiciones de OP.

19. Sea D el pie de la perpendicular trazada desde el punto B al eje polar. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P si $|\overline{BP}| = |\overline{BD}|$ para todas las posiciones de OP.

20. Con referencia a la figura del ejercicio 19, hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P si $|\overline{BP}| = |\overline{OD}|$ para cualquier posición de OP.

21. Una circunferencia dada rueda, sin resbalar, sobre otra circunferencia del mismo radio pero de posición fija. Hallar e identificar la ecuación polar del lugar geométrico descrito por un punto de la primera circunferencia.

22. Sea a la distancia de un punto fijo O a una recta fija l. Se traza por O una recta cualquiera l' que corta a l en el punto B. Sobre l' se toman dos puntos P y P' a la derecha y a la izquierda de B, respectivamente, tales que $|\overline{BP}| = |\overline{P'B}| = b$, una constante, para cualquier posición de l'. Si se toma el punto O como polo y la recta l perpendicular al eje polar y a la derecha de O, demuéstrese que la ecuación polar del lugar geométrico descrito por P y P' a medida que l' gira en torno de O, es $r = a \sec \theta \pm b$. Dicho lugar geométrico se llama *concoide de Nicomedes*. Trácese la curva para el caso en que $b > a$.

23. Trazar la concoide del ejercicio 22 cuando $b = a$.

24. Trazar la concoide del ejercicio 22 cuando $b < a$.

25. En la construcción del ejercicio 22, supongamos que los puntos P y P' se toman sobre l' de tal manera que, para todas las posiciones de l', sea

$$|\overline{BP}| = |\overline{P'B}| = z,$$

siendo z la distancia de B al eje polar. Demostrar que la ecuación polar del lugar geométrico descrito por P y P' a medida que l' gira en torno de O es

$$r = a(\sec \theta \pm \operatorname{tg} \theta).$$

La curva así obtenida se llama *estrofoide*.

CAPITULO XI

ECUACIONES PARAMETRICAS

89. Introducción. En los capítulos anteriores hemos visto que si un lugar geométrico tiene una representación analítica, tal representación puede expresarse usualmente por una única ecuación conteniendo a lo más dos variables. En este capítulo consideraremos la representación analítica de una curva por medio de un par de ecuaciones en las cuales cada una de las dos variables está expresada en función de una tercera variable. Por ejemplo, la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad (1)$$

puede representarse también por las dos ecuaciones

$$x = \cos\theta, \quad y = \operatorname{sen}\theta, \qquad (2)$$

siendo θ una variable independiente que puede tomar cualquier valor real. Es decir, si a θ se le asigna un valor arbitrario, las ecuaciones (2) determinan un par de valores de x y y que satisfacen a la ecuación (1). En efecto, elevando al cuadrado cada una de las ecuaciones (2) y sumando, obtenemos

$$x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta,$$

la cual, para todos los valores de θ, es idéntica a la ecuación (1).

En general, si

$$F(x, y) = 0 \qquad (3)$$

es la ecuación rectangular de una curva plana C, y cada una de las variables x y y son función de una tercera variable t, de tal manera que podemos escribir

$$x = f(t), \quad y = g(t), \qquad (4)$$

entonces, si para cualquier valor permisible de la variable independiente t, las ecuaciones (4) determinan un par de valores reales de

x y y que satisfacen la ecuación (3), las ecuaciones (4) se llaman *ecuaciones paramétricas* de la curva C, y la variable independiente t se llama *parámetro*. También nos referiremos a las ecuaciones (4) como una *representación paramétrica* de la curva C. Así, las ecuaciones (2) son ecuaciones paramétricas o representación paramétrica de la circunferencia (1), siendo θ el parámetro.

Las ecuaciones paramétricas de un lugar geométrico específico no son únicas, ya que el lugar geométrico puede representarse por diferentes pares de ecuaciones. Por ejemplo, en el caso de la circunferencia (1), podemos tomar, arbitrariamente, $x = t$ como una ecuación paramétrica y sustituir este valor de x en la ecuación (1); la solución correspondiente para y es entonces la otra ecuación paramétrica $y = \pm \sqrt{1 - t^2}$. Debe notarse que, para este par de ecuaciones, el parámetro t sólo puede tomar valores reales comprendidos dentro del intervalo $-1 \leq t \leq 1$, mientras que para el par de ecuaciones (2) el parámetro θ puede tomar todos los valores reales. No hay un método general para seleccionar un parámetro particular para un lugar geométrico y deducir entonces las ecuaciones paramétricas correspondientes. Usualmente, se toma la representación paramétrica más sencilla o aquella que sea más útil y conveniente para nuestros propósitos.

Como en nuestro estudio de un lugar geométrico por medio de su ecuación rectangular, hemos considerado solamente una ecuación y como máximo dos variables, el lector puede suponer, lógicamente, que el estudio de una curva será mucho más largo y complicado si hay que tratar con dos ecuaciones y tres variables. Veremos, sin embargo, que ciertas curvas se estudian mucho más convenientemente por medio de sus ecuaciones paramétricas; de manera semejante, las soluciones de muchos problemas de lugares geométricos se obtienen con mayor facilidad mediante la introducción de un parámetro.

90. Obtención de la ecuación rectangular de una curva a partir de su representación paramétrica. La ecuación rectangular de una curva se obtiene a partir de su representación paramétrica eliminando el parámetro. No hay ningún método general para efectuar esta eliminación; el procedimiento a seguir depende en cada caso de la forma de las ecuaciones paramétricas. Si éstas contienen funciones trigonométricas, la ecuación rectangular puede obtenerse, a veces, por medio de una de las identidades trigonométricas fundamentales (Apéndice IC, 2); vimos un ejemplo de esto, para la circunferencia, en el Artículo 89. Si ambas ecuaciones paramétricas son algebraicas, su forma sugerirá algunas veces una operación algebraica por medio de la cual se elimine al parámetro. Otras veces, si una ecuación paramétrica es más complicada que la otra, la ecuación rectangular puede obtenerse, frecuentemente, despejando el parámetro de la ecuación más sencilla y sustituyendo su valor en la otra ecuación.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación rectangular de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = 2 + 3 \operatorname{tg} \theta, \quad y = 1 + 4 \sec \theta. \tag{1}$$

Solución. La presencia de $\operatorname{tg} \theta$ y $\sec \theta$ como términos aislados en las ecuaciones paramétricas (1) sugiere el empleo de la identidad trigonométrica fundamental

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta. \tag{2}$$

En efecto, si escribimos las ecuaciones (1) en la forma

$$\frac{x-2}{3} = \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{y-1}{4} = \sec \theta,$$

elevamos después al cuadrado cada una de estas ecuaciones y sustituímos los resultados en la ecuación (2), obtenemos

$$1 + \frac{(x-2)^2}{9} = \frac{(y-1)^2}{16},$$

o sea,

$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1,$$

que es la ecuación rectangular equivalente a las ecuaciones dadas y que representa una hipérbola.

Ejemplo 2. Hallar la ecuación rectangular de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = tv_0 \cos \alpha, \quad y = tv_0 \operatorname{sen} \alpha - \tfrac{1}{2} gt^2, \tag{3}$$

en donde t es el parámetro, y v_0, α y g son constantes.

Solución. Como la primera ecuación es la más sencilla, despejamos de ella el valor de t. Resulta:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}.$$

Si sustituímos este valor de t en la segunda ecuación, obtenemos la ecuación rectangular

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

que representa una parábola.

91. Gráfica de una curva a partir de su representación paramétrica. Para trazar una curva a partir de su ecuación rectangular, basta obtener las coordenadas de algunos puntos, asignando distintos valores a una de las variables y calculando luego los valores correspondientes de la otra variable. Podemos trazar también directamente una curva a partir de sus ecuaciones paramétricas sin necesidad de pasar a su ecuación rectangular. En efecto, si asignamos un valor particular al parámetro, las ecuaciones paramétricas determinan valores correspondientes de x y y que, si son reales, representan las coordenadas de un punto de la curva.

Ejemplo. Haciendo variar el parámetro, trazar la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = \theta - \operatorname{sen} \theta, \quad y = 1 - \cos \theta. \qquad (1)$$

Hallar también la ecuación rectangular de la curva.

Solución. El parámetro θ, que aparece como un término aislado en la primera ecuación, debe tomarse en radianes (Apéndice IC, 4). Así, si se le asigna a θ el valor $\frac{\pi}{4}$ tiene el valor 0,7854 y no 45°. Para calcular los valores de x y y, será conveniente, por lo tanto, asignar valores a θ en función de π, (ver la tabla del final de la página). Para valores de θ mayores de 2π radianes, y para valores negativos de θ, la curva repite su forma a derecha e izquierda, respectivamente, del eje Y. El lugar geométrico (fig. 125) se llama *cicloide*. La porción de curva comprendida entre dos cualesquiera de sus intersecciones sucesivas con el eje X se llama *arco* de la cicloide. Por la importancia que tiene esta curva, deduciremos sus ecuaciones paramétricas y posteriormente (Art. 93) la discutiremos.

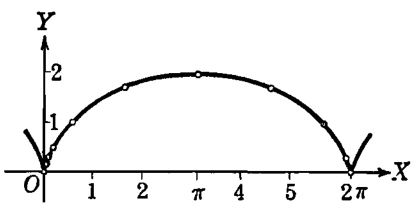


Fig. 125

Para obtener la ecuación rectangular de la cicloide, procedemos como sigue. A partir de la segunda, y más sencilla, de las ecuaciones paramétricas (1), tenemos

$$\cos \theta = 1 - y,$$

de donde,

$$\theta = \operatorname{arc} \cos (1 - y),$$

$$\operatorname{sen} \theta = \pm \sqrt{1 - (1 - y)^2} = \pm \sqrt{2y - y^2}.$$

Si sustituímos estos valores de θ y $\operatorname{sen} \theta$ en la primera de las ecuaciones (1), obtenemos la ecuación rectangular buscada,

$$x = \operatorname{arc} \cos (1 - y) \mp \sqrt{2y - y^2}, \qquad (2)$$

en donde se debe tomar el signo positivo o el negativo según que θ sea menor o mayor que π radianes en el arco comprendido entre

$$\theta = 0 \text{ y } \theta = 2\pi.$$

θ	sen θ	cos θ	x	y
0	0	1	0	0
$\pi/6$	0,5	0,87	0,02	0,13
$\pi/4$	0,71	0,71	0,08	0,29
$\pi/3$	0,87	0,5	0,18	0,5
$\pi/2$	1	0	0,57	1
$3\pi/4$	0,71	− 0,71	1,65	1,71
π	0	− 1	3,14	2
$5\pi/4$	− 0,71	− 0,71	4,63	1,71
$3\pi/2$	− 1	0	5,71	1
$7\pi/4$	− 0,71	0,71	6,20	0,29
2π	0	1	6,28	0

Si $\theta = \pi$, la segunda de las ecuaciones (1) muestra que $y = 2$, en cuyo caso el radical se anula.

El estudiante debe trazar la cicloide a partir de su ecuación rectangular (2) y comparar el trabajo con el de obtener la gráfica partiendo de las ecuaciones paramétricas (1). Verá entonces las ventajas que, para esta curva, tiene la representación paramétrica sobre la rectangular.

EJERCICIOS. Grupo 42

En cada uno de los siguientes ejercicios trazar la curva correspondiente partiendo de sus ecuaciones paramétricas dadas. Obténgase también la ecuación rectangular de la curva e identifíquese si es posible. Las letras a, b, c, d y p representan constantes diferentes de cero.

1. $x = at, \quad y = bt.$
2. $x = a \operatorname{sen} \theta, \quad y = a \cos \theta.$
3. $x = 5t, \quad y = 2t + 2.$
4. $x = pt^2, \quad y = 2pt.$
5. $x = a \cos \theta, \quad y = b \operatorname{sen} \theta.$
6. $x = 2t^2, \quad y = \dfrac{3}{t^2}.$
7. $x = a(1 - t), \quad y = bt.$
8. $x = a \sec \theta, \quad y = b \operatorname{tg} \theta.$
9. $x = 2 \operatorname{tg} \theta, \quad y = 3 \operatorname{ctg} \theta.$
10. $x = 2t + 2, \quad y = 2t^2 + 4t.$
11. $x = 2(1 + \cos \theta), \quad y = 2 \operatorname{sen} \theta.$
12. $x = 4 \operatorname{sen} \theta, \quad y = 2 \csc \theta.$
13. $x = pt^2 + b, \quad y = 2t + a.$
14. $x = 3 \cos \theta + 2, \quad y = 2 \operatorname{sen} \theta - 3.$
15. $x = 2 \sec \theta - 1, \quad y = \operatorname{tg} \theta + 2.$
16. $x = 2 \operatorname{sen} \theta - 3, \quad y = 4 \cos \theta - 4.$
17. $x = a \operatorname{sen}^4 \theta, \quad y = a \cos^4 \theta.$
18. $x = a \operatorname{tg}^3 \theta, \quad y = \operatorname{tg} \theta.$
19. $x = bt^2, \quad y = bt^3.$
20. $x = a \operatorname{sen}^3 \theta, \quad y = a \cos^3 \theta.$
21. $x = a \dfrac{2t}{1 + t^2}, \quad y = a \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}.$
22. $x = a \operatorname{tg} \theta, \quad y = b \sec^2 \theta.$
23. $x = b \csc^2 \theta, \quad y = a \operatorname{ctg} \theta.$
24. $x = \cos \theta, \quad y = \operatorname{sen} \theta - \cos \theta.$
25. $x = 2 \operatorname{sen} \theta - 3 \cos \theta, \quad y = 4 \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta.$
26. $x = a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta, \quad y = c \operatorname{sen} \theta + d \cos \theta; \quad ad \neq bc.$
27. $x = a \sec \theta + b \operatorname{tg} \theta, \quad y = c \sec \theta + d \operatorname{tg} \theta; \quad ad \neq bc.$
28. $x = \dfrac{3at}{1 + t^3}, \quad y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}.$
29. $x = a \operatorname{sen} \theta, \quad y = b \operatorname{tg} \theta.$
30. $x = \operatorname{sen} 2\theta, \quad y = \cos \theta.$
31. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} t.$
32. $x = a \cos t, \quad y = b \cos 2t.$
33. $x = \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2}, \quad y = \cos \theta.$
34. $x = 2 \cos \theta \quad y = \cos \dfrac{\theta}{2}.$
35. $x = \operatorname{tg} 2t, \quad y = \operatorname{tg} t.$
36. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{tg} 2t.$
37. $x = \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}, \quad y = \operatorname{sen} t.$
38. $x = \operatorname{sen} \theta, \quad y = \operatorname{sen} 3\theta.$
39. $x = \cos 3\theta, \quad y = 2 \cos \theta.$
40. $x = t + \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t.$

92. Representación paramétrica de las cónicas. Por simplicidad, supondremos que la posición de cada una de las cónicas con relación a los ejes coordenados sea tal que su ecuación rectangular esté en su forma canónica.

Sea α el ángulo de inclinación de la tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en cualquier punto $P(x, y)$, excepto el vértice, de la curva. Entonces, por el teorema 4 del Artículo 57, tenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2p}{y}, \quad y \neq 0,$$

de donde,

$$y = 2p \operatorname{ctg} \alpha .$$

Como el valor de α depende de la posición del punto de contacto P, es una variable que podemos escoger como parámetro. Según esto, el valor de y obtenido puede tomarse como una de las ecuaciones paramétricas de la parábola. Si este valor de y es sustituído en la ecuación $y^2 = 4px$, hallamos $x = p \operatorname{ctg}^2 \alpha$. Por tanto, un par de ecuaciones paramétricas de la parábola es

$$x = p \operatorname{ctg}^2 \alpha , \quad y = 2p \operatorname{ctg} \alpha , \tag{1}$$

en donde el parámetro α representa el ángulo de inclinación de las tangentes a la parábola $y^2 = 4px$.

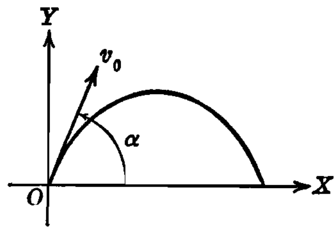


Fig. 126

En el ejemplo 2 del Artículo 90, se dió una representación paramétrica importante de la parábola, a saber,

$$x = tv_0 \cos \alpha , \quad y = tv_0 \operatorname{sen} \alpha - \tfrac{1}{2}gt^2 , \tag{2}$$

en donde t es el parámetro, y para la cual se encontró que la ecuación rectangular es

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 . \tag{3}$$

En Mecánica se demuestra que si la resistencia del aire es despreciada, las ecuaciones paramétricas (2) son las ecuaciones del movimiento de un proyectil lanzado desde el origen con una velocidad (constante) inicial v_0 a un ángulo constante α con el eje X, siendo g la aceleración constante debida a la gravedad (fig. 126). Este problema del movimiento de proyectiles es un ejemplo de las ventajas de la representación paramétrica sobre la rectangular en algunos problemas físicos. Se puede hacer un estudio completo del movimiento por medio de las ecuaciones paramétricas (2). Por ejemplo, por las ecuaciones (2), podemos determinar la posición del cuerpo en cualquier instante t; esta información, en cambio, no puede obtenerse de la ecuación rectangular (3) la cual simplemente da la trayectoria del proyectil.

Ahora obtendremos una representación paramétrica sencilla para una elipse. Tracemos dos circunferencias concéntricas (fig. 127) que tengan su centro común en el origen y de radios a y b, siendo $a > b$. A partir del origen O tracemos una recta cualquiera l que forme un ángulo θ con la parte positiva del eje X, y sean A y B los puntos de intersección con las circunferencias de radios a y b, respectivamente. Bajemos las perpendiculares AC y BD al eje X, y por B

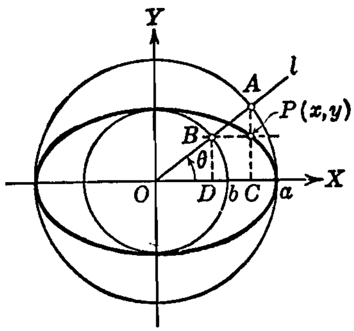


Fig. 127

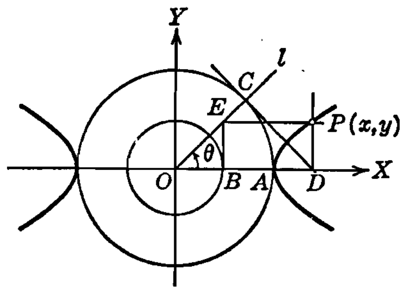


Fig. 128

tracemos una recta paralela al eje X y sea P su punto de intersección con AC. Vamos a obtener las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico de $P(x, y)$. Como P se mueve de acuerdo con la rotación de la recta l en torno de O, tomaremos como parámetro el ángulo θ. De los triángulos rectángulos OAC y OBD, tenemos

$$x = \overline{OC} = \overline{OA} \cos \theta = a \cos \theta$$

y

$$y = \overline{CP} = \overline{DB} = \overline{OB} \operatorname{sen} \theta = b \operatorname{sen} \theta$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico de P son

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \operatorname{sen} \theta. \tag{4}$$

Es muy fácil eliminar el parámetro θ de las ecuaciones (4) y obtener la ecuación rectangular

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Por tanto, las ecuaciones (4) son una representación paramétrica de la elipse (5). El parámetro θ se llama *ángulo excéntrico* del punto P, y las circunferencias concéntricas de radios a y b se llaman, respectivamente, *círculo principal* y *círculo menor* de la elipse.

Una representación paramétrica sencilla de la hipérbola puede obtenerse como sigue. Tracemos dos circunferencias concéntricas que tengan su centro común en el origen y que sus radios sean $OA = a$ y $OB = b$, en que $a > b$, como se ve en la figura 128. A partir de O tracemos una recta cualquiera l que forme un ángulo θ con la parte positiva del eje X, y sea C el punto de intersección con la circunferencia de radio a. En C tracemos la tangente a la circunferencia; designemos por D el punto en que esta tangente corta al eje X. En B tracemos una perpendicular al eje X y sea E su punto de intersección con l. Por D y E tracemos rectas paralelas a los ejes Y y X, respectivamente; designemos por P el punto de intersección de estas rectas. Ahora vamos a obtener las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico de $P(x, y)$, usando θ como parámetro. De los triángulos rectángulos OCD y OBE, tenemos

$$x = \overline{OD} = \overline{OC} \sec \theta = a \sec \theta$$

y

$$y = \overline{DP} = \overline{BE} = \overline{OB} \operatorname{tg} \theta = b \operatorname{tg} \theta .$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico de P son

$$x = a \sec \theta , \quad y = b \operatorname{tg} \theta , \tag{6}$$

y la ecuación rectangular puede hallarse fácilmente y es (véase el ejemplo 1 del Artículo 90)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 . \tag{7}$$

Por tanto, las ecuaciones (6) son una representación paramétrica de la hipérbola (7). El parámetro θ se llama *ángulo excéntrico* del punto P, y el círculo de radio a se llama *círculo auxiliar* de la hipérbola.

93. La cicloide. Sea P un punto cuya posición sea fija con relación a una curva C. Si la curva C rueda, sin resbalar, sobre una curva fija C', el lugar geométrico descrito por el punto P se llama *ruleta*.

Un caso importante de ruleta es la curva llamada *cicloide*. Una cicloide es el lugar geométrico descrito por cualquier punto fijo de una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre una recta fija. Deduciremos las ecuaciones paramétricas de la cicloide tomando la recta fija como eje X y una de las posiciones del punto móvil sobre el eje X como origen. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico, a el radio y C el centro de la circunferencia que rueda, como se indica en la figura 129. Tomaremos como parámetro el ángulo θ que gira la circunferencia al rodar partiendo de su posición inicial en el origen. Sean A y B, respectivamente, los pies de las perpendiculares bajadas de P y C al eje X. Tracemos PD perpendicular

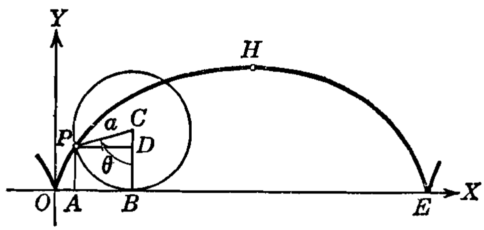


Fig. 129

a BC. Como la circunferencia rueda, sin resbalar, desde O hasta B, tenemos

$$\overline{OB} = \text{arco } \overline{PB}.$$

Si θ se mide en radianes, tenemos (Apéndice IC, 4)

$$\text{arco } \overline{PB} = a\theta.$$

Por tanto, de la figura 129,

$$x = \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = a\theta - \overline{PD} = a\theta - a \operatorname{sen} \theta,$$

$$y = \overline{AP} = \overline{BD} = \overline{BC} - \overline{DC} = a - a \cos \theta,$$

de manera que las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta). \qquad (1)$$

Por el método empleado en el ejemplo del Artículo 91, podemos demostrar que la ecuación rectangular de la cicloide (1) es

$$x = a \text{ arc cos } \frac{a - y}{a} \mp \sqrt{2ay - y^2}, \qquad (2)$$

en donde debe tomarse el signo positivo o el negativo según que θ sea menor o mayor que π radianes en el arco comprendido entre $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$.

El punto medio H de cualquier arco de la cicloide se llama *vértice* del arco. Aquella porción OE de la recta fija comprendida entre los puntos extremos de un arco se llama *base* del arco; su longitud es, evidentemente, igual a $2\pi a$, que es la longitud de la circunferencia generatriz. Cada extremo de un arco, tal como O y E, se llama *pico* o *cúspide*.

A la cicloide también se le da a veces el nombre de *braquistocrona* o curva del más rápido descenso, porque, si se invierte la curva de la figura 129, se puede demostrar que es el recorrido descrito por una partícula que cae desde un punto dado a otro en el intervalo de tiempo *mínimo*. Además, si se sueltan dos partículas simultáneamente desde dos puntos cualesquiera del arco invertido de una cicloide, llegarán ambas al punto más bajo (el vértice) al *mismo* tiempo.

La cicloide es un caso especial de la ruleta conocida con el nombre de *trocoide*, que es el lugar geométrico descrito por un punto de un radio fijo de una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre una recta. Si el punto generador $P(x, y)$ está a una distancia b del centro del círculo rodante de radio a, si una posición del radio fijo es a lo largo del eje Y, y si la recta fija se toma como el eje X, puede demostrarse que las ecuaciones paramétricas de la trocoide son

$$x = a\theta - b \operatorname{sen} \theta, \quad y = a - b \cos \theta. \qquad (3)$$

Se dice de la trocoide que es una *cicloide acortada* o *alargada* según que

$$b < a \text{ o } b > a.$$

Para $b = a$, las ecuaciones (3) se reducen a las ecuaciones paramétricas (1) de la cicloide.

94. Epicicloide e hipocicloide. Ahora consideremos dos tipos de ruletas que difieren de la cicloide en que la curva fija es una circunfe-

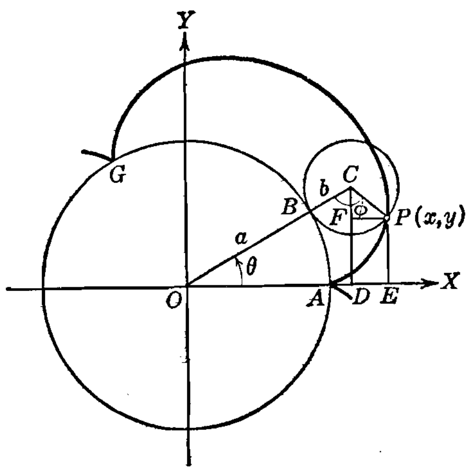


Fig. 130

rencia en vez de una recta. Estas curvas, llamadas epicicloide e hipocicloide, son importantes en el diseño de dientes de engranajes.

Una *epicicloide* es el lugar geométrico descrito por un punto fijo cualquiera de una circunferencia que rueda exteriormente, sin resbalar, sobre una circunferencia fija. Deduciremos las ecuaciones paramétricas de la epicicloide en el caso en que la circunferencia fija tenga su centro en el origen y una posición del punto que describe la curva está sobre la parte positiva del eje X y sobre la circunferencia fija. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico; sean a y b, respectivamente, los radios de las circunferencias fija y rodante, y sea C el centro de la circunferencia rodante o generatriz, como se ve en la figura 130. Tomaremos como parámetro el ángulo θ que forma la recta de los centros OC con la parte positiva del eje X. Sea A el punto sobre el eje X que representa la posición inicial del punto P que describe la curva, y sea B el punto de tangencia de las dos circunferencias. Desde C y P bajemos las perpendiculares CD y PE, respectivamente, al eje X, y tracemos PF perpendicular a CD. Llamemos ϕ al ángulo OCP y β al ángulo PCF. Consideraremos ambos ángulos ϕ y θ medidos en radianes.

Como la circunferencia generatriz rueda, sin resbalar, de A a B, tenemos

$$\text{arco } AB = \text{arco } PB,$$

o sea,

$$a\theta = b\phi.$$

Por tanto, $\phi = \frac{a}{b}\theta$ y $\theta + \phi = \theta + \frac{a}{b}\theta = \frac{a+b}{b}\theta$. Tenemos, también,

$$\beta = \phi - \text{ángulo } OCD = \phi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \theta + \phi - \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen}\left(\theta + \phi - \frac{\pi}{2}\right) &= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - [\theta + \phi]\right) \\ &= -\cos(\theta + \phi) = -\cos\frac{a+b}{b}\theta,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\cos \beta = \cos\left(\theta + \phi - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - [\theta + \phi]\right) \\ &= \operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\theta.\end{aligned}$$

Para las coordenadas (x, y) del punto P, tenemos:

$$x = \overline{OE} = \overline{OD} + \overline{DE} = \overline{OD} + \overline{FP} = \overline{OC} \cos\theta + \overline{CP} \operatorname{sen}\beta$$
$$= (a+b)\cos\theta - b\cos\frac{a+b}{b}\theta,$$
$$y = \overline{EP} = \overline{DF} = \overline{DC} - \overline{FC} = \overline{OC} \operatorname{sen}\theta - \overline{CP}\cos\beta$$
$$= (a+b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\theta,$$

de manera que las ecuaciones paramétricas de la epicicloide son

$$\left.\begin{aligned} x &= (a+b)\cos\theta - b\cos\frac{a+b}{b}\theta, \\ y &= (a+b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Cada punto de la epicicloide que está sobre la circunferencia fija, tales como A y G, es un *pico;* la porción de curva comprendida entre dos picos sucesivos se llama *arco*. El número de picos y arcos depende de las magnitudes relativas de los radios a y b. Sea r la razón de a a b, de manera que $a = rb$. Si r es un número entero, la epicicloide será, evidentemente, una curva cerrada que tiene exactamente r picos y r arcos; se dice entonces que la curva es una *epicicloide de* r *picos*. Si r no es un número entero pero es racional, el punto trazador P dará la vuelta en torno de la circunferencia fija dos o más veces antes de regresar al punto de partida A; en este caso, los arcos de la curva de diferentes circuitos se cortarán. Si r es irracional, el punto trazador no regresa exactamente al punto de partida.

Cuando $a = b$, de manera que $r = 1$, tenemos la epicicloide de un pico o *cardioide* (véase el ejemplo 1 del Artículo 82 y el ejercicio 21 del grupo 41, Artículo 88). De las ecuaciones (1) se deducen las siguientes ecuaciones paramétricas de la cardioide:

$$x = 2a\cos\theta - a\cos 2\theta, \quad y = 2a\operatorname{sen}\theta - a\operatorname{sen}2\theta. \qquad (2)$$

Una *hipocicloide* es el lugar geométrico de un punto fijo cualquiera de una circunferencia que rueda *interiormente*, sin resbalar, sobre otra circunferencia fija. Por un procedimiento semejante al empleado para la epicicloide, podemos demostrar que las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide son

$$\left.\begin{aligned} x &= (a-b)\cos\theta + b\cos\frac{a-b}{b}\theta, \\ y &= (a-b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\frac{a-b}{b}\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

en donde a y b son, respectivamente, los radios de las circunferencias fija y rodante, y el parámetro θ es el ángulo que la recta de los centros OC forma con la parte positiva del eje X, tal como puede verse en la figura 131. El lector debe observar que las ecuaciones paramétricas (3) de la hipocicloide pueden obtenerse reemplazando b por $-b$ en las ecuaciones paramétricas (1) de la epicicloide.

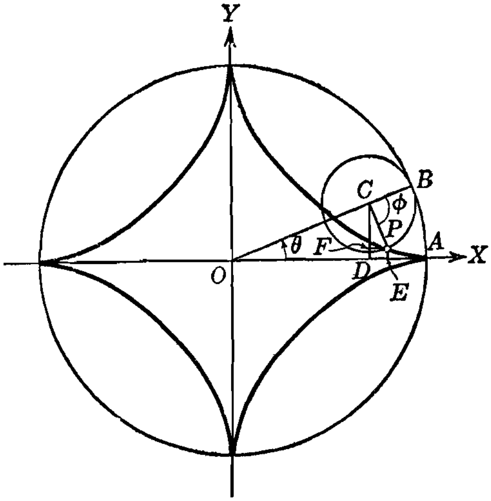


Fig. 131

Sea r la razón de a a b, de modo que $a = rb$. Si r es un número entero, tenemos una *hipocicloide de* r *picos*. La *hipocicloide de cuatro picos* está representada en la figura 131; esta curva se llama también *astroide*. Las ecuaciones paramétricas de la astroide pueden simplificarse de manera que tomen una forma muy simple. Así, para $b = \frac{a}{4}$, las ecuaciones paramétricas (3) se convierten en

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3a}{4}\cos\theta + \frac{a}{4}\cos 3\theta, \\ y &= \frac{3a}{4}\operatorname{sen}\theta - \frac{a}{4}\operatorname{sen} 3\theta. \end{aligned}\right\}$$

Si en estas ecuaciones sustituímos los valores de $\cos 3\theta$ y $\operatorname{sen} 3\theta$ dados por las identidades trigonométricas

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

$$\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta,$$

obtenemos la forma simplificada de las ecuaciones paramétricas de la astroide,

$$x = a \cos^3 \theta , \quad y = a \operatorname{sen}^3 \theta . \tag{4}$$

Si tomamos la potencia dos tercios de ambos miembros de cada una de las ecuaciones (4) y sumamos, obtenemos como ecuación rectangular de la hipocicloide de cuatro picos

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} . \tag{5}$$

EJERCICIOS. Grupo 43

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. De las ecuaciones paramétricas (2) del Artículo 92, demostrar que el tiempo en el cual alcanza el proyectil su altura máxima está dado por

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}.$$

2. Si se conocen los ejes mayor y menor de una elipse, hallar un método para construir cualquier punto P de la elipse conociendo su ángulo excéntrico.

3. Dados el centro y el eje mayor de una elipse, hallar un procedimiento para construir el ángulo excéntrico de cualquier punto dado P de la elipse.

4. Sean P_1 y P_2 puntos extremos de dos diámetros conjugados de una elipse (véase el ejercicio 25 del grupo 29, Art. 63). Demostrar que los ángulos excéntricos de P_1 y P_2 difieren en 90° ó 270°.

5. Obtener las ecuaciones paramétricas (6) del Artículo 92 para una hipérbola, empleando una construcción en que $b > a$.

6. Sea l una recta dirigida hacia arriba, y sean α y β, respectivamente, los ángulos formados por l y las partes positivas de los ejes X y Y (ver el ejercicio 19 del grupo 14, Art. 37). Si l no es paralela a ninguno de los ejes coordenados y contiene al punto fijo $P_1(x_1, y_1)$, puede demostrarse que (ver el ejercicio 21 del grupo 14, Art. 37) la ecuación de l puede escribirse en la forma

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta}.$$

De aquí, demostrar que una representación paramétrica de la recta l está dada por

$$x = x_1 + t \cos \alpha, \quad y = y_1 + t \cos \beta,$$

en donde el parámetro t representa la distancia variable del punto fijo $P_1(x_1, y_1)$ a cualquier punto $P(x, y)$ sobre l.

7. Discutir la recta cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = 3 + \frac{3}{5} t, \quad y = 4 + \frac{4}{5} t,$$

en donde el parámetro t tiene el significado establecido en el ejercicio 6.

8. Una recta cuya pendiente es $-\frac{5}{12}$ pasa por el punto $(2, -1)$. Hallar sus ecuaciones paramétricas en la forma dada en el ejercicio 6.

9. Demostrar la ecuación rectangular (2) de la cicloide dada en el Artículo 93.

10. Si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen sea el vértice H de la cicloide de la figura 129 del Artículo 93, demuéstrese que las ecuaciones paramétricas de la cicloide con respecto a los nuevos ejes están dadas por

$$x = a(\theta - \pi - \operatorname{sen} \theta), \quad y = -a(1 + \cos \theta).$$

11. Trazar la cicloide del ejercicio 10 cuando $a = 2$.

12. Deducir las ecuaciones paramétricas (3) de la trocoide dadas en el Artículo 93.

13. Obtener la ecuación rectangular de la trocoide a partir de las ecuaciones paramétricas (3) del Artículo 93.

14. Trazar la trocoide del ejercicio 12 cuando $a = 2$ y $b = 3$.

15. Trazar la epicicloide a partir de sus ecuaciones paramétricas (1) del Artículo 94 cuando $a = 3b$.

16. Deducir las ecuaciones paramétricas (2) de la cardioide, dadas en el Artículo 94, directamente a partir de una figura.

17. Deducir las ecuaciones paramétricas (3) de la hipocicloide, directamente de la figura 131.

18. Trazar la hipocicloide a partir de sus ecuaciones paramétricas (3) del Artículo 94 cuando $a = 3b$.

19. Demostrar, analíticamente, que cuando $a = 2b$ la hipocicloide (3) del Artículo 94 representa un diámetro de la circunferencia fija.

20. Si un hilo enrollado alrededor de una circunferencia fija se desenrolla manteniéndolo tirante en el plano de la circunferencia, cualquier punto fijo del hilo traza una curva llamada *evolvente de la circunferencia*. Hallar las ecuaciones paramétricas de la evolvente de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ bajo las siguientes condiciones: Si P es un punto cualquiera del lugar geométrico, sea el punto $A(a, 0)$ su posición inicial, y para cualquiera otra posición, sea T el punto de contacto de la tangente PT a la circunferencia. Tómese el ángulo $AOT = \theta$ como parámetro.

95. Resolución de problemas de lugares geométricos por el método paramétrico. Para ciertos lugares geométricos del tipo de curvas llamadas ruletas, hallamos que su representación paramétrica es preferible a su representación rectangular. Para muchas curvas, sin embargo, la ecuación rectangular es más deseable, pero esta ecuación puede determinarse a veces más convenientemente obteniendo primero las ecuaciones paramétricas a partir de las condiciones que el lugar geométrico debe satisfacer. Esto requiere la introducción de un parámetro, o posiblemente de dos o más parámetros, que deben eliminarse posteriormente. A este respecto, los parámetros son incidentales en la determinación de la ecuación rectangular y por esto se llaman a veces *variables auxiliares*. El lector debe notar que si se introducen n parámetros, es necesario tener $n+1$ ecuaciones para efectuar su eliminación y obtener la ecuación rectangular buscada. Si la ecuación rectangular de un lugar geométrico se obtiene mediante la introducción de uno o más parámetros, se suele decir que la resolución se ha efectuado por el *método paramétrico.*

Ejemplo 1. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto de intersección de dos rectas perpendiculares cualesquiera tangentes ambas a la elipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Solución. Supongamos que el punto $P(x, y)$ (fig. 132) representa un punto cualquiera del lugar geométrico. Como las rectas son perpendiculares

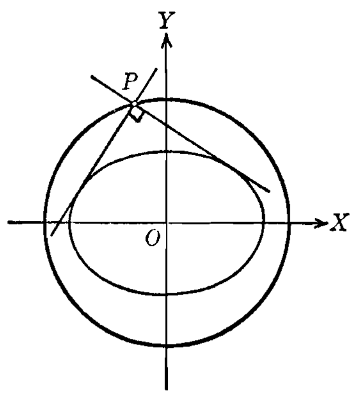


Fig. 132

entre sí, podemos representar sus pendientes por m y $-\frac{1}{m}$, siendo la variable m el parámetro. Por el teorema 5 del Artículo 63 las ecuaciones de las tangentes son

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

y

$$y = -\frac{1}{m}x \pm \sqrt{\frac{a^2}{m^2} + b^2}.$$

Para obtener la ecuación rectangular requerida del lugar geométrico de P, debemos eliminar el parámetro m entre estas dos ecuaciones. Para esto, las escribiremos en las formas

$$y - mx = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2},$$

$$my + x = \pm\sqrt{a^2 + b^2m^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de cada una de estas ecuaciones, y sumando, obtenemos

$$y^2 + m^2x^2 + m^2y^2 + x^2 = a^2m^2 + b^2 + a^2 + b^2m^2,$$

de donde

$$(m^2+1)(x^2+y^2) = (m^2+1)(a^2+b^2).$$

Como $m^2 + 1 \neq 0$, podemos dividir por este factor. Esto nos da la ecuación rectangular del lugar geométrico,

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2,$$

llamado *círculo director* de la elipse. (ERROR)

En este ejemplo se ha obtenido la solución introduciendo un solo parámetro. El ejemplo siguiente muestra un problema de lugar geométrico en el cual se introducen varios parámetros.

Ejemplo 2. Una recta l pasa por el punto fijo $P_1(-1, -3)$ y corta a la recta $l_1: 3x + 2y - 6 = 0$, en el punto A, y a la recta $l_2: y - 3 = 0$, en el punto B. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio del segmento de recta AB a medida que la recta l gira en torno del punto P_1.

Solución. Sea $P(x, y)$ (fig. 133) un punto cualquiera del lugar geométrico, y sean (x', y') y $(x'', 3)$ las coordenadas de los puntos A y B, respectivamente. Hemos introducido así tres parámetros, x', y' y x''; su eliminación requiere, por lo tanto, cuatro relaciones. Dos de estas relaciones pueden obtenerse partiendo del hecho de que P es el punto medio del segmento AB; estas son

$$x = \frac{x' + x''}{2}, \qquad (1)$$

$$y = \frac{y' + 3}{2}. \qquad (2)$$

Como el punto A está sobre la recta l_1, tenemos una tercera relación escribiendo que sus coordenadas verifican la ecuación de la recta:

$$3x' + 2y' - 6 = 0. \qquad (3)$$

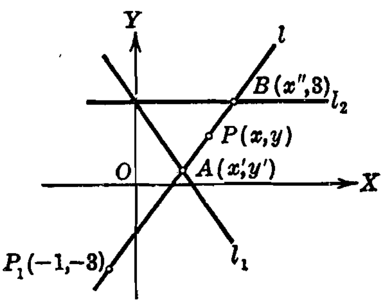


Fig. 133

Como los puntos A, B y P_1 son colineales, tenemos, escribiendo que las pendientes de AP_1 y BP_1 son iguales, la cuarta relación:

$$\frac{y' + 3}{x' + 1} = \frac{6}{x'' + 1}. \qquad (4)$$

De la ecuación (2),

$$y' = 2y - 3.$$

Sustituyendo este valor de y' en la ecuación (3), tenemos

$$x' = \frac{6 - 2y'}{3} = \frac{6 - 4y + 6}{3} = \frac{12 - 4y}{3}.$$

Sustituyendo este valor de x' en la ecuación (1), resulta

$$x'' = 2x - x' = 2x - \frac{12 - 4y}{3} = \frac{6x + 4y - 12}{3}.$$

Si sustituímos estos valores de x', y' y x'' en la ecuación (4), obtenemos

$$\frac{2y}{\frac{15 - 4y}{3}} = \frac{6}{\frac{6x + 4y - 9}{3}}$$

la cual, después de simplificarla, nos da la ecuación buscada

$$6xy + 4y^2 + 3y - 45 = 0,$$

que representa una hipérbola. El estudiante debe trazar la gráfica correspondiente de este lugar geométrico.

Un tipo interesante de curvas, cuya ecuación se obtiene más fácilmente mediante el método paramétrico, son las llamadas *podarias* o *curvas pedales*, definidas de la siguiente manera: si desde un punto fijo Q se trazan perpendiculares a las tangentes a una curva C, el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares es otra curva llamada *podaria de la curva* C *con respecto al punto* Q.

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la podaria de una parábola con respecto al vértice.

Solución. El problema no pierde generalidad si tomamos la forma canónica de la ecuación de la parábola, $y^2 = 4px$. Sea $P(x, y)$ (fig. 134) un punto cualquiera del lugar geométrico. Por el teorema 5 del Artículo 57, la ecuación de la tangente de pendiente m a la parábola $y^2 = 4px$ es

$$y = mx + \frac{p}{m}, \quad m \neq 0. \tag{5}$$

Por ser OP perpendicular a la tangente (5), su ecuación es

$$y = -\frac{1}{m}x. \tag{6}$$

La ecuación rectangular de la podaria se obtiene eliminando el parámetro m entre las ecuaciones (5) y (6). Para ello, de la ecuación (6) se obtiene $m = -\frac{x}{y}$, valor que sustituído en la ecuación (5) nos da:

$$y = -\frac{x^2}{y} - \frac{py}{x}.$$

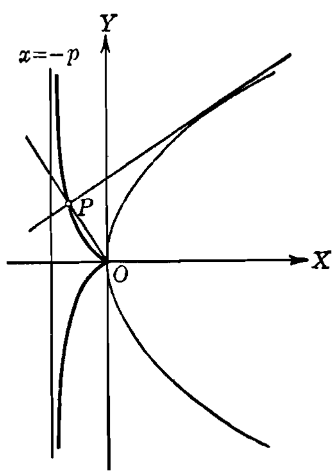


Fig. 134

Despejando y^2 obtenemos la ecuación rectangular buscada

$$y^2 = -\frac{x^3}{x + p},$$

que representa una cisoide con asíntota $x = -p$. (Véase el ejemplo 1 del Artículo 19 y el ejercicio 6 del grupo 41, Art. 88.)