Artículo 31, que $\overline{AB}$ es positiva si P_1 está arriba de l y negativa si está abajo.

Estos resultados se expresan en conjunto en el

TEOREMA 10. *La distancia dirigida* d *de la recta dada*

$$Ax + By + C = 0$$

al punto dado $P_1(x_1, y_1)$ *se obtiene por la fórmula*

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

en donde el signo del radical se elige de acuerdo con el teorema 8, Artículo 32.

Si la recta dada no pasa por el origen, d *es positiva o negativa según que el punto* P_1 *y el origen estén en lados opuestos o del mismo lado de la recta.*

Si la recta dada pasa por el origen, d *es positiva o negativa según que el punto* P_1 *esté arriba o abajo de la recta.*

Ejemplo 1. Hallar la distancia de la recta $3x - 4y + 12 = 0$ al punto $(4, -1)$. Interpretar el signo de la distancia como segmento dirigido.

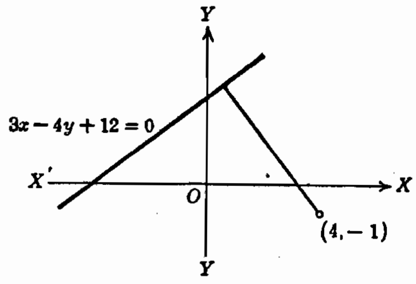

Fig. 45

Solución. La recta y el punto aparecen en la figura 45. Por el teorema 10, la distancia dirigida de la recta dada al punto es

$$d = \frac{3(4) - 4(-1) + 12}{-\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{-28}{5}.$$

Por tanto, la distancia buscada es $^{28}\!/\!_5$. El signo negativo indica que el punto y el origen están del mismo lado de la recta.

b) *Determinación de las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por dos rectas dadas que se cortan.* Supongamos que las ecuaciones de las dos rectas dadas son

$$l: \quad Ax + By + C = 0, \tag{13}$$

$$l': \quad A'x + B'y + C' = 0, \tag{14}$$

y designemos por l_1 y l_2 a las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por ellas, como se representan en la figura 46.

Por Geometría elemental, la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del ángulo. Por tanto, para cualquier punto $P(x, y)$ de la bisectriz, las distancias d_1 y d_2 de los lados l y l' a P son iguales, es decir,

$$|d_1| = |d_2|. \tag{15}$$

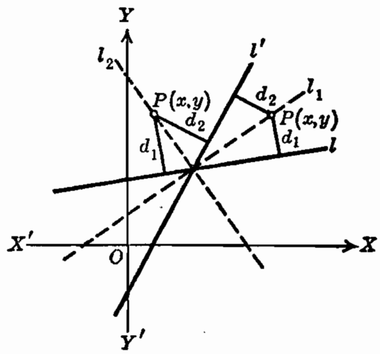

Fig. 46

Ahora bien, la condición geométrica expresada por (15) nos dice simplemente que las distancias d_1 y d_2 son *numéricamente* iguales, y la interpretación analítica conduciría entonces precisamente a la misma ecuación para ambas bisectrices. Según esto, se hace necesario considerar d_1 y d_2 como distancias *dirigidas* con el fin de hacer una distinción entre las bisectrices l_1 y l_2.

Para el punto $P(x, y)$ sobre l_1, P y el origen están en lados opuestos de l, de donde, por el teorema 10, d_1 es positiva. Análogamente, d_2 es positiva, de manera que, para la recta l_1,

$$d_1 = d_2. \tag{16}$$

Para el punto $P(x, y)$ sobre l_2, P y O están en lados opuestos de l, pero están a un mismo lado de l' Por tanto, en este caso tenemos

$$d_1 = -d_2. \tag{17}$$

Aplicando el teorema 10 a las ecuaciones (13) y (14), expresamos la condición (16) analíticamente por

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}}, \tag{18}$$

en donde los signos del radical se escogen de acuerdo con el teorema 8, Artículo 32. Por tanto, (18) es la ecuación de la bisectriz l_1.

Análogamente, de (17) tenemos como ecuación de la bisectriz l_2,

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

Este resultado conduce al siguiente

Teorema 11. *Las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por dos rectas que se cortan,* $Ax + By + C = 0$ *y* $A'x + B'y + C' = 0$, *son*

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}},$$

y

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}},$$

en donde los signos de los radicales se escogen de acuerdo con el teorema 8, Artículo 32.

Ejemplo 2. Los vértices de un triángulo son $A(-2, 3)$, $B(5, 5)$ y $C(4, -1)$. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo interior ACB.

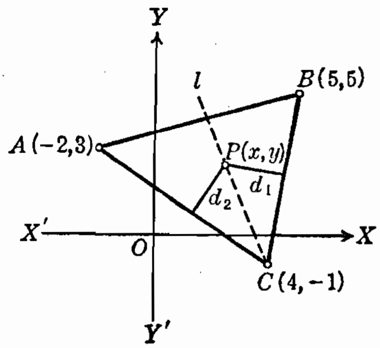

Fig. 47

Solución. Sea l (fig. 47) la bisectriz buscada. Por el teorema 3, Artículo 27, las ecuaciones de los lados BC y AC son

$$6x - y - 25 = 0 \quad y \quad 2x + 3y - 5 = 0.$$

respectivamente.

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera sobre l, y representemos por d_1 y d_2 las distancias dirigidas de los lados BC y AC, respectivamente, al punto P. Entonces, como P y el origen están del mismo lado de BC y de lados opuestos de AC, del teorema 10 se deduce que $d_1 = -d_2$. Por tanto, por el teorema 11, la ecuación de la bisectriz l es

$$\frac{6x - y - 25}{\sqrt{6^2 + 1}} = -\frac{2x + 3y - 5}{\sqrt{2^2 + 3^2}},$$

la cual, simplificada, toma la forma

$$(6\sqrt{13} + 2\sqrt{37})\,x - (\sqrt{13} - 3\sqrt{37})\,y - 25\sqrt{13} - 5\sqrt{37} = 0.$$

EJERCICIOS. Grupo 12

Dibújese una figura para cada ejercicio.

1. Hallar la distancia de la recta $4x - 5y + 10 = 0$ al punto $P(2, -3)$.
2. Hallar la distancia dirigida de la recta $x + 2y + 7 = 0$ al punto $P(1, 4)$.
3. Los vértices de un triángulo son $A(-4, 1)$, $B(-3, 3)$ y $C(3, -3)$. Hallar la longitud de la altura del vértice A sobre el lado BC y el área del triángulo.
4. Hallar la distancia comprendida entre las rectas paralelas $3x - 4y + 8 = 0$ y $6x - 8y + 9 = 0$.
5. Hallar la distancia entre las rectas paralelas $x + 2y - 10 = 0$ y $x + 2y + 6 = 0$.
6. Hallar la ecuación de la paralela a la recta $5x + 12y - 12 = 0$ y distante 4 unidades de ella. (Dos soluciones.)
7. La distancia dirigida de la recta $2x + 5y - 10 = 0$ al punto P es -3. Si la abscisa de P es 2, hállese su ordenada.
8. La distancia de la recta $4x - 3y + 1 = 0$ al punto P es 4. Si la ordenada de P es 3, hállese su abscisa. (Dos soluciones.)
9. Hallar la ecuación de la recta cuyos puntos equidistan todos de las dos rectas paralelas $12x - 5y + 3 = 0$ y $12x - 5y - 6 = 0$.
10. En la ecuación $kx + 3y + 5 = 0$, hallar el valor del coeficiente k de manera que la distancia dirigida de la recta que representa al punto $(2, -2)$ sea igual a -1.
11. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 1)$ y tal que la distancia de esta recta al punto $(-1, 1)$ sea igual a $2\sqrt{2}$. (Dos soluciones.)
12. Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $x + y - 1 = 0$ y $2x - y + 1 = 0$, y demostrar que son perpendiculares entre sí.
13. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas $x - 2y - 4 = 0$ y $4x - y - 4 = 0$.
14. En el triángulo del ejercicio 3, hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos interiores, y demostrar que concurren en un punto.
15. Demostrar, analíticamente, que en un triángulo cualquiera las bisectrices de los ángulos interiores se cortan en un punto que equidista de los tres lados. Este punto se llama *incentro*.
16. Demostrar, analíticamente, que en un triángulo cualquiera la bisectriz de un ángulo interior y las bisectrices de los ángulos exteriores en los otros dos vértices son concurrentes.

17. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $4x - 3y + 12 = 0$ es siempre igual al doble de su distancia del eje X.

18. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $4x - 3y + 12 = 0$ es siempre igual a la mitad de su distancia del eje Y.

19. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias de las dos rectas $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$ es una constante. Demostrar que su lugar geométrico es una recta.

20. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x + 2 = 0$ es siempre igual a su distancia del punto $(2, 0)$. Trácese el lugar geométrico.

21. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $y + 2 = 0$ es siempre igual a su distancia del punto $(0, 2)$. Trácese el lugar geométrico.

22. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x - 2 = 0$ es siempre 3 unidades mayor que su distancia del punto $(-1, -3)$. Trazar el lugar geométrico.

23. Un punto se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x + y + 1 = 0$ es siempre igual a su distancia del punto $(-2, -1)$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

24. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x + 3 = 0$ es siempre igual al triple de su distancia del punto $(2, -4)$. Trazar el lugar geométrico.

25. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(-2, 1)$ es siempre igual al triple de su distancia de la recta $y + 4 = 0$. Trazar su lugar geométrico.

26. Un punto se mueve de tal manera que su distancia del punto $(1, -1)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $3x - 2y + 6 = 0$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

27. El ángulo de inclinación de cada una de dos rectas paralelas es α. Si una de ellas pasa por el punto (a, b) y la otra por el (h, k), demostrar que la distancia que hay entre ellas es $|(h - a) \operatorname{sen} \alpha - (k - b) \cos \alpha|$.

28. Hallar el área del trapecio formado por las rectas $3x - y - 5 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$, $x + 3y - 20 = 0$ y $x - 2y = 0$.

29. Desde un punto cualquiera de la base de un triángulo isósceles se trazan perpendiculares a los lados iguales. Demostrar, analíticamente, que la suma de las longitudes de estas perpendiculares es constante e igual a la longitud de la altura de uno de los vértices de la base sobre el lado opuesto.

30. Demostrar, analíticamente, que la bisectriz de cualquier ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados contiguos a los respectivos segmentos.

34. Area de un triángulo. Se han anotado previamente varios métodos para determinar el área de un triángulo dado. Obtendremos ahora una fórmula que permite calcular el área de un triángulo en función de las coordenadas de sus vértices.

Sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ los vértices de un triángulo cualquiera dado (fig. 48). Designemos por h la longitud de la altura de B sobre el lado AC, y por b la longitud del lado AC. El área del triángulo está dada por la fórmula

$$K = \tfrac{1}{2} bh. \qquad (1)$$

Por la fórmula de la distancia entre dos puntos (teorema 2, Artículo 6),

$$b = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}. \qquad (2)$$

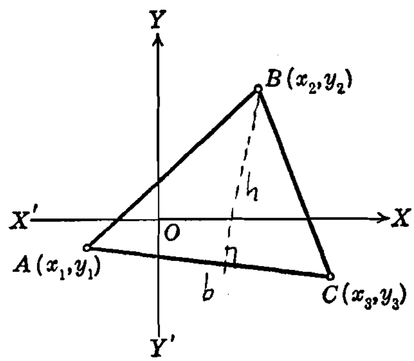

Fig. 48

Según el teorema 3, Artículo 27, la ecuación de AC es

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}(x - x_1),$$

que puede escribirse en la forma

$$(y_1 - y_3)x - (x_1 - x_3)y + x_1 y_3 - x_3 y_1 = 0.$$

Usando esta última ecuación junto con el punto $B(x_2, y_2)$, hallamos, por el teorema 9 del Artículo 33, que

$$h = \frac{|(y_1 - y_3)x_2 - (x_1 - x_3)y_2 + x_1 y_3 - x_3 y_1|}{\sqrt{(y_1 - y_3)^2 + (x_1 - x_3)^2}}. \qquad (3)$$

Por tanto, de las ecuaciones (1), (2) y (3), tenemos, para área del triángulo,

$$K = \tfrac{1}{2}|(y_1 - y_3)x_2 - (x_1 - x_3)y_2 + x_1 y_3 - x_3 y_1|. \qquad (4)$$

La expresión que está dentro de barras en el segundo miembro de (4) es el valor absoluto del desarrollo del determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(Véase nota 2 del teorema 3, Art. 27.) En consecuencia, tenemos:

TEOREMA 12. *El área del triángulo que tiene por vértices los puntos* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *y* (x_3, y_3) *es*

$$K = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

debiendo tomarse el valor absoluto del determinante.

Si tres puntos diferentes son colineales, pueden ser considerados como los vértices de un triángulo cuya área es cero. Por tanto, por el teorema 12, si los tres puntos diferentes (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) son colineales, entonces $K = 0$ y

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Recíprocamente, si (5) es verdadera, $K = 0$ en el teorema 12, y los tres puntos son colineales.

En consecuencia, tenemos:

COROLARIO. *Una condición necesaria y suficiente para que tres puntos diferentes de coordenadas* (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) *sean colineales es que*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

35. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos, en forma de determinante. En la nota 2 del teorema 3, Artículo 27, obtuvimos la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados, en forma de determinante. Ahora deduciremos esta forma por otro método que es importante porque puede usarse para obtener en forma de determinante las ecuaciones de otras figuras geométricas.

Tomemos para ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ la

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Como los puntos P_1 y P_2 están sobre la recta, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (1), y tenemos las dos ecuaciones

$$Ax_1 + By_1 + C = 0, \tag{2}$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0. \tag{3}$$

Como la ecuación buscada es de la forma (1), debemos considerar los coeficientes A, B y C como incógnitas. Sus valores, además, deben ser los mismos en las ecuaciones (2) y (3) si la recta pasa por P_1 y P_2. Podemos entonces considerar las ecuaciones (1), (2) y (3) como un sistema de tres ecuaciones lineales homogéneas con tres incógnitas, A, B, C. En la ecuación (1), C puede ser cero, pero A y B no pueden ser ambas cero. Ahora bien, por Algebra, sabemos que para que el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3) tenga una solución distinta de cero, es necesario y suficiente que el determinante del sistema se anule (Apéndice IB, 6; teorema), es decir,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Vamos a demostrar que (4) es la ecuación buscada. En efecto, como x_1, y_1, x_2 y y_2 son constantes conocidas, el desarrollo del determinante, por elementos de la primera fila, da una ecuación de la forma (1). Por tanto, (4) es la ecuación de una recta. Además, la ecuación (4) se satisface por las coordenadas de P_1 y P_2. Porque, si sustituímos x y y por x_1 y y_1, respectivamente, las filas primera y segunda son idénticas, y el determinante se anula (Apéndice IB, 5; propiedad 4). Análogamente, si se sustituyen en (4) las coordenadas variables x y y por las coordenadas de P_2, las filas primera y tercera quedan idénticas, y el determinante se anula.

Este resultado nos dice

TEOREMA 13. *La ecuación de la recta que pasa por los puntos* $P_1(x_1, y_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2)$, *puesta en forma de determinante, es*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ejemplo. Escribir, en forma de determinante, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 4)$ y $(3, 1)$. A partir de ella obténgase la ecuación en su forma general.

Solución. Por el teorema 13 anterior, la ecuación es

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si desarrollamos por los elementos de la primera fila, obtenemos

$$x\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde la ecuación de la recta, en su forma general, es

$$3x + 4y - 13 = 0.$$

36. Familias de líneas rectas. En el Artículo 29 vimos que una recta y su ecuación quedan determinadas perfectamente por dos condiciones independientes. Por tanto, una recta que satisface solamente una condición no es una recta única; hay infinidad de rectas que la cumplen, cada una de las cuales tiene la propiedad común asociada con esa única condición. De acuerdo con esto podemos formular la siguiente

DEFINICIÓN. La totalidad de las rectas que satisfacen una única condición geométrica se llama *familia* o *haz de rectas*.

Para mejor comprender este nuevo concepto, consideremos primero todas las rectas que tienen de pendiente 5. La totalidad de estas rectas forma una familia de rectas paralelas, teniendo todas la propiedad común de que su pendiente es igual a 5. Analíticamente, esta familia de rectas puede representarse por la ecuación

$$y = 5x + k, \tag{1}$$

en donde k es una constante arbitraria que puede tomar todos los valores reales. Así, podemos obtener la ecuación de cualquier recta de la familia asignando simplemente un valor particular a k en la ecuación (1). Recordando la ecuación de la recta en función de la pendiente y la ordenada en el origen (teorema 2, Art. 27), este valor de k representa el segmento que la recta determina sobre el eje Y. Las rectas de la familia (1) para $k = 2$, $k = 0$ y $k = -1$ están representadas en la figura 49.

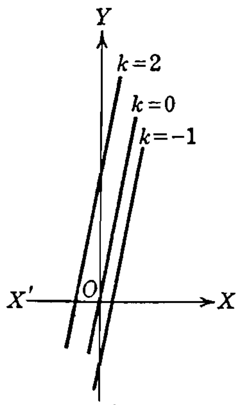

Fig. 49

Como otro ejemplo, consideremos todas las rectas que pasan por el punto (2, 3). Según la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada (teorema 1, Art. 26) esta familia de rectas puede representarse, analíticamente, por la ecuación

$$y - 3 = k(x - 2), \tag{2}$$

en donde k, la pendiente, es una constante arbitraria a la que puede asignarse cualquier valor real. En la figura 50 se han construído tres rectas de la familia (2) correspondientes a $k = 0$, $k = 1$ y $k = -1$. Como k no está definida para una recta paralela al eje Y, la ecuación (2) no incluye a la recta $x = 2$ que también pasa por el punto (2, 3). La familia de rectas (2) se llama *haz de rectas de vértice* (2, 3).

Vemos, considerando ambas familias (1) y (2), que una recta de una familia puede obtenerse asignando un valor particular a la constante arbitraria k. Teniendo en cuenta su importancia, se le da a k un nombre especial; se le llama *parámetro* de la familia.

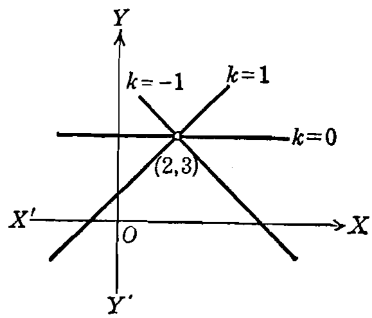

Fig. 50

El concepto de familia de rectas es útil en la determinación de la ecuación de una recta particular. El procedimiento consiste, esencialmente, en dos pasos: *a*) se escribe la ecuación de la familia de rectas de tal manera que satisfaga una condición dada, y *b*) se determina el valor del parámetro de la familia aplicando la otra condición dada.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 6) y tal que la suma algebraica de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados (intercepciones) es igual a 2.

Solución. De la forma simétrica de la ecuación de la recta (teorema 4, Artículo 27), la familia de rectas, para cada una de las cuales la suma de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es igual a 2, tiene por ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{2 - a} = 1, \quad a \neq 2. \tag{3}$$

De todas las rectas de la familia (3), queremos la recta que pasa por el punto (1, 6). Para ello, determinaremos el valor del parámetro a de tal manera que las coordenadas del punto (1, 6) satisfagan (3). Por tanto, haciendo $x = 1$ y $y = 6$ en (3), obtenemos

$$\frac{1}{a} + \frac{6}{2 - a} = 1,$$

de donde,

$$2 - a + 6a = 2a - a^2,$$

o sea,

$$a^2 + 3a + 2 = 0.$$

Las raíces de esta última ecuación son $a = -1, -2$, de manera que, en realidad, hay dos rectas que cumplen con las condiciones especificadas del problema.

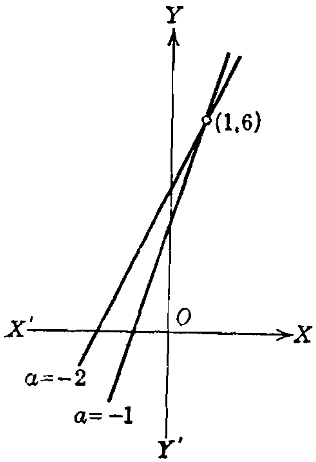

Fig. 51

Las ecuaciones de estas dos rectas se obtienen ahora fácilmente de (3) sustituyendo

$$a = -1 \text{ y } a = -2$$

sucesivamente. Así, para $a = -1$, tenemos

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{3} = 1,$$

o sea,

$$3x - y + 3 = 0;$$

y para $a = -2$, tenemos

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1,$$

o sea,

$$2x - y + 4 = 0.$$

En la figura 51 se han representado las dos rectas.

Tiene especial interés la familia de rectas que pasan por la intersección de dos rectas dadas. Supongamos que las ecuaciones de dos rectas que se cortan son

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad (4)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0, \qquad (5)$$

y sea $P_1(x_1, y_1)$ su punto de intersección. Consideremos la ecuación

$$k_1(A_1x + B_1y + C_1) + k_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \qquad (6)$$

en donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias que pueden tomar todos los valores reales, exceptuando el caso en que ambas sean cero simultáneamente. Vamos a demostrar que (6) es la ecuación de la familia de rectas que pasan por P_1.

Como k_1 y k_2 son constantes, la ecuación (6) es lineal en las variables x y y, y, por tanto, representa una línea recta. Además, como $P_1(x_1, y_1)$ está sobre ambas rectas (4) y (5), sus coordenadas satisfacen sus ecuaciones, de manera que

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0, \qquad (7)$$

$$A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 = 0. \qquad (8)$$

Si ahora hacemos en (6) $x = x_1$ y $y = y_1$, hallamos, en vista de (7) y (8), que

$$k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 = 0,$$

que es verdadera para todos los valores de k_1 y k_2. Por tanto, la ecuación (6) representa todas las rectas que pasan por $P_1(x_1, y_1)$, punto de intersección de las rectas (4) y (5). En particular, para $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$, obtenemos la recta (4) de (6), y de $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, obtenemos la recta (5).

En general, sin embargo, no nos interesa obtener las rectas (4) y (5) a partir de (6). Podemos, por ejemplo, eliminar la recta (5) de la familia (6) especificando que k_1 puede tomar todos los valores reales excepto cero. Bajo esta hipótesis podemos dividir la ecuación (6) por k_1, y si reemplazamos la constante $\frac{k_2}{k_1}$ por k, (6) toma la forma más simple

$$A_1x + B_1y + C_1 + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{9}$$

en donde el parámetro k puede tomar todos los valores reales. La ecuación (9) representa entonces la familia de todas las rectas que pasan por la intersección de las rectas (4) y (5), con la única excepción de la recta (5).

La importancia de la forma (9) está en que nos permite obtener la ecuación de una recta que pasa por la intersección de dos rectas dadas sin tener que buscar las coordenadas del punto de intersección.

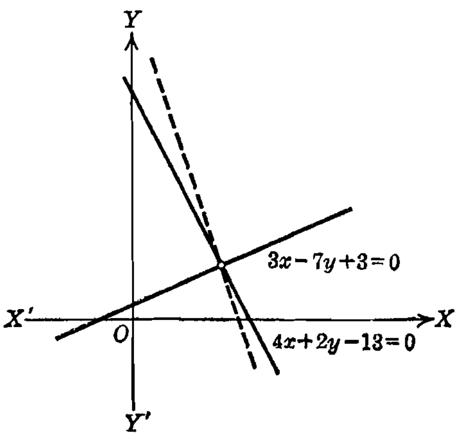

Fig. 52

Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la recta de pendiente -3 y que pasa por la intersección de las rectas $4x + 2y - 13 = 0$ y $3x - 7y + 3 = 0$.

Solución. La familia de rectas que pasan por el punto de intersección de las rectas dadas está representada por la ecuación

$$4x + 2y - 13 + k(3x - 7y + 3) = 0,$$

que puede escribirse en la forma general

$$(4 + 3k)x + (2 - 7k)y - 13 + 3k = 0, \qquad (10)$$

cuya pendiente es $-\dfrac{4 + 3k}{2 - 7k}$. Como la pendiente de la recta buscada es igual a -3, tendremos: $-\dfrac{4 + 3k}{2 - 7k} = -3$, de donde $4 + 3k = 6 - 21k$ y $k = \frac{1}{12}$. Sustituyendo este valor de k en (10), tenemos, para ecuación de la recta buscada,

$$\frac{17}{4}x + \frac{17}{12}y - \frac{51}{4} = 0, \quad \text{o sea,} \quad 3x + y - 9 = 0.$$

Esta recta es la que aparece de trazos en la figura 52.

NOTA. Este método de parámetros lo usaremos también más adelante en conexión con otras curvas, en donde sus ventajas y su simplicidad relativa serán aún más marcadas.

EJERCICIOS. Grupo 13

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Escribir la ecuación de la familia de rectas que son paralelas a la recta $2x - 7y + 2 = 0$. Dibújense tres elementos de la familia, especificando en cada caso el valor del parámetro.

2. Escribir la ecuación de la familia de rectas que son perpendiculares a la recta $3x + 2y - 7 = 0$. Dibújense tres elementos de la familia, especificando en cada caso el valor del parámetro.

3. Escribir la ecuación de la familia de rectas tangentes a un círculo cuyo centro está en el origen y cuyo radio es igual a 4. Dibújense tres elementos de la familia, especificando en cada caso el valor del parámetro.

4. Establecer una propiedad común para todas las rectas de cada una de las siguientes familias:

a) $5x + 4y - k = 0$. *b*) $y - 3 = k(x + 4)$.

c) $y = kx + 7$. *d*) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{k} = 1, \quad k \neq 0$.

5. Determinar el valor del parámetro k de manera que la recta de la familia $kx - y + 8 = 0$ que le corresponda pase por el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la recta.

6. Determinar el valor del parámetro k de manera que la recta de la familia $3x - ky - 7 = 0$ que le corresponda sea perpendicular a la recta $7x + 4y - 11 = 0$. Hallado el parámetro, escríbase la ecuación de la recta.

7. Determinar el valor del parámetro c para que la recta de la familia $cx + 3y - 9 = 0$ que le corresponda, determine sobre el eje X un segmento igual a -4. Hallar la ecuación de la recta.

8. Determinar el valor del parámetro k correspondiente a la recta de la familia $5x - 12y + k = 0$ cuya distancia del origen es igual a 5. Teniendo el parámetro, hállese la ecuación de la recta. (Dos soluciones.)

9. La ecuación de una familia de rectas es $2x + 3y + k = 0$. El producto de los segmentos que una recta de la familia determina sobre los ejes coordenados es 24. Hállese la ecuación de la recta. (Dos soluciones.)

10. Usando el método del parámetro, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es paralela a la recta $5x - y + 11 = 0$.

11. Por el método del parámetro hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -1)$ y es perpendicular a la recta $7x - 9y + 8 = 0$.

12. La suma de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es igual a 3. Por el método del parámetro hallar la ecuación de la recta sabiendo que contiene al punto $(2, 10)$. (Dos soluciones.)

13. La diferencia de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es igual a 1. Por el método del parámetro hallar la ecuación de la recta si debe pasar por el punto $(6, -4)$. (Dos soluciones.)

14. El producto de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es igual a -6. Por el método del parámetro hallar la ecuación de la recta si su pendiente es igual a 3.

15. Una recta pasa por el punto $A(-6, 7)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área igual a $10\frac{1}{2}$. Hallar su ecuación.

16. Una recta pasa por el punto $A(2, \frac{4}{3})$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de perímetro igual a 12. Hallar su ecuación. Compruébese el resultado por otro método.

17. La distancia de una recta al origen es 3. La recta pasa por el punto $(3\sqrt{5}, -3)$. Hallar su ecuación.

18. La suma de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es igual a 10. Hallar la ecuación de la recta si forma con los ejes coordenados un triángulo de área 12.

19. Una recta pasa por el origen y por la intersección de las rectas $3x + 2y - 14 = 0$ y $x - 3y - 1 = 0$. Hallar su ecuación, sin determinar el punto de intersección.

20. Una recta pasa por el punto $A(-2, 3)$ y por la intersección de las rectas $x + 5y + 2 = 0$ y $3x + 4y - 5 = 0$. Hallar su ecuación sin determinar su punto de intersección.

21. Una recta pasa por la intersección de las rectas de ecuaciones $3x + 2y + 8 = 0$ y $2x - 9y - 5 = 0$. Hallar su ecuación sabiendo que es paralela a la recta $6x - 2y + 11 = 0$.

22. Una recta pasa por la intersección de las rectas de ecuaciones $7x - 2y = 0$ y $4x - y - 1 = 0$ y es perpendicular a la recta $3x + 8y - 19 = 0$. Hallar su ecuación.

23. Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las dos rectas $3x + y - 9 = 0$, $4x - 3y + 1 = 0$ y cuya distancia del origen es 2.

24. Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las dos rectas $3x - 4y = 0$, $2x - 5y + 7 = 0$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área 8.

25. Una recta pasa por el punto de intersección de las rectas $2x - 3y - 5 = 0$ y $x + 2y - 13 = 0$ y el segmento que determina sobre el eje X es igual al doble de su pendiente. Hallar la ecuación de dicha recta.

37. Resumen de resultados. En el Artículo 12 se dió un resumen, en forma tabular, de los principales resultados obtenidos en el primer capítulo. Se recomienda al estudiante que haga una tabla semejante en que aparezcan las características y propiedades de la recta tal como se han presentado en este capítulo.

El lector habrá notado que muchos problemas pueden resolverse por dos o más métodos diferentes. Es una buena práctica comprobar una solución usando un método diferente. Los ejercicios del grupo 14 son problemas generales sobre la recta y se recomienda resolverlos por más de un método en los casos en que esto sea posible.

EJERCICIOS. Grupo 14

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar, por tres métodos diferentes, el área del triángulo cuyos vértices son $A(-1, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(5, -1)$.

2. Hallar el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo del ejercicio 1.

3. Hallar la ecuación de la recta de Euler para el triángulo del ejercicio 1. (Véase el ejercicio 26 del grupo 10, Art. 30.)

4. Demostrar que las medianas del triángulo del ejercicio 1 lo dividen en seis triángulos de igual área.

5. Una recta pasa por el punto de intersección de las dos rectas $2x + 3y + 1 = 0$ y $3x - 5y + 11 = 0$ y también por la intersección de las rectas $x - 3y + 7 = 0$, $4x + y - 11 = 0$. Hállese la ecuación de la recta sin determinar los puntos de intersección. Compruébese el resultado hallando los puntos de intersección.

6. Demostrar, analíticamente, que las bisectrices de los dos ángulos suplementarios formados por dos rectas cualesquiera que se cortan, son perpendiculares entre sí.

7. La ecuación (2) del Artículo 36 para la familia de rectas que pasan por el punto (2, 3) no incluye a la recta $x = 2$. Obténgase otra forma de la ecuación de la misma familia, que sí incluya a la recta $x = 2$.

8. La base de un triángulo tiene una posición fija, y su longitud es constante e igual a a. La diferencia de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados es constante e igual a b^2. Demuéstrese que el lugar geométrico del vértice es una línea recta.

9. Las ecuaciones de tres rectas son

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \text{y} \quad A_3x + B_3y + C_3 = 0.$$

Si existen tres constantes, diferentes de cero, k_1, k_2 y k_3, tales que la ecuación

$$k_1(A_1x + B_1y + C_1) + k_2(A_2x + B_2y + C_2) + k_3(A_3x + B_3y + C_3) = 0,$$

se verifica para todos los valores de x y y, demuéstrese que las tres rectas son concurrentes.

10. Sin hallar su punto de intersección, demostrar que las tres rectas $3x + 4y + 14 = 0$, $2x - y - 9 = 0$ y $7x + 3y + 1 = 0$ son concurrentes. (Véase ejercicio 20 del grupo 10, Art. 30.)

11. Demostrar, por dos métodos diferentes, que los puntos $A(1, 2)$ y $B(4, -3)$ están de lados opuestos de la recta $2x + 5y - 10 = 0$.

12. Determinar el valor de la constante b para que las tres rectas

$$8x + 3y - 1 = 0, \quad 3x + by - 3 = 0 \quad \text{y} \quad x - 5y + 16 = 0$$

sean concurrentes.

13. Demostrar, analíticamente, que las bisectrices de dos ángulos exteriores de cualquier triángulo forman un ángulo igual a la mitad del tercer ángulo exterior.

14. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son

$$y = ax - \frac{bc}{2}, \quad y = bx - \frac{ac}{2} \quad \text{y} \quad y = cx - \frac{ab}{2}.$$

Demostrar que el área del triángulo está dada por $\frac{1}{8}|(a - b)(b - c)(c - a)|$.

15. Demostrar que la recta $4x + 3y - 40 = 0$ es tangente al círculo cuyo radio es 5 y cuyo centro es el punto $C(3, 1)$. Hallar las coordenadas del punto de tangencia.

16. Un círculo tiene su centro en el punto $C(-2, -4)$. Sabiendo que es tangente a la recta $x + y + 12 = 0$, calcular el área del círculo.

17. Deducir una fórmula para la distancia entre dos rectas paralelas

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{y} \quad Ax + By + C' = 0, \quad C \neq C'.$$

18. Determinar los valores de k_1 y k_2 para que las dos ecuaciones

$$k_1 x - 7y + 18 = 0 \quad \text{y} \quad 8x - k_2 y + 9k_1 = 0$$

representen la misma recta.

19. Consideremos el ángulo comprendido entre dos rectas, definido como en la definición 1 del Artículo 8, de manera que α sea el ángulo formado por la recta dirigida l y la parte positiva del eje X y β el ángulo que forma l con la parte positiva del eje Y. Entonces α y β se llaman *ángulos directores* de l, y $\cos\alpha$ y $\cos\beta$ se llaman *cosenos directores*. Demostrar que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

20. Sean α_1, β_1 y α_2, β_2, respectivamente, los ángulos directores de las rectas dirigidas l_1 y l_2. Entonces, si θ es el ángulo formado por l_1 y l_2, demuéstrese que $\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2$.

21. Sea l una recta no paralela a ninguno de los ejes coordenados, y sean α y β sus ángulos directores. Si l contiene al punto (x_1, y_1), demuéstrese que su ecuación puede escribirse en la forma

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta}.$$

22. Si (x_1, y_1) son las coordenadas de un punto que está arriba de la recta $Ax + By + C = 0$, $B \neq 0$, demuéstrese que

$$Ax_1 + By_1 + C > 0, \quad \text{si } B > 0,$$

y

$$Ax_1 + By_1 + C < 0, \quad \text{si } B < 0.$$

23. Si (x_1, y_1) son las coordenadas de un punto que está abajo de la recta $Ax + By + C = 0$, $B \neq 0$, demuéstrese que las desigualdades del ejercicio 22 se invierten.

24. Demostrar que el área del triángulo formado por el eje Y y las rectas $y = m_1 x + b_1$ y $y = m_2 x + b_2$ está dada por

$$\frac{1}{2}\,\frac{(b_2 - b_1)^2}{|m_2 - m_1|}, \quad m_1 \neq m_2.$$

25. Si m_1, m_2 y m_3 son diferentes, demostrar que una condición necesaria y suficiente para que las tres rectas $y = m_1 x + b_1$, $y = m_2 x + b_2$ y $y = m_3 x + b_3$ sean concurrentes es

$$m_1 b_2 - m_2 b_1 - m_3 b_2 + m_3 b_1 - m_1 b_3 + m_2 b_3 = 0.$$

CAPITULO IV

ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA

38. Introducción. Después de la recta, la línea más familiar al estudiante es la circunferencia, pues la conoce desde sus primeros estudios de Geometría elemental. En el Artículo 22 hemos considerado la circunferencia como un ejemplo específico de lugar geométrico. En este capítulo haremos un estudio detallado de la ecuación de la circunferencia y deduciremos algunas de sus propiedades especiales.

39. Ecuación de la circunferencia; forma ordinaria. La ecuación de la circunferencia se obtendrá a partir de la siguiente

DEFINICIÓN. *Circunferencia* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano.

El punto fijo se llama *centro* de la circunferencia, y la distancia constante se llama *radio*.

TEOREMA 1. *La circunferencia cuyo centro es el punto* (h, k) *y cuyo radio es la constante* r, *tiene por ecuación*

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $P(x, y)$ (fig. 53) un punto cualquiera de la circunferencia de centro $C(h, k)$ y radio r. Entonces, por definición de circunferencia, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$|\overline{CP}| = r, \qquad (1)$$

la cual, por el teorema 2 del Artículo 6, está expresada, analíticamente, por la ecuación

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r,$$

de donde,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \qquad (2)$$

Recíprocamente, sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2), de manera que se verifica la igualdad

$$(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = r^2.$$

De aquí se deduce, extrayendo la raíz cuadrada,

$$\sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2} = r,$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (1) aplicada al punto P_1. Por tanto, demostrados los teoremas directo y recíproco, resulta que (2) es la ecuación buscada.

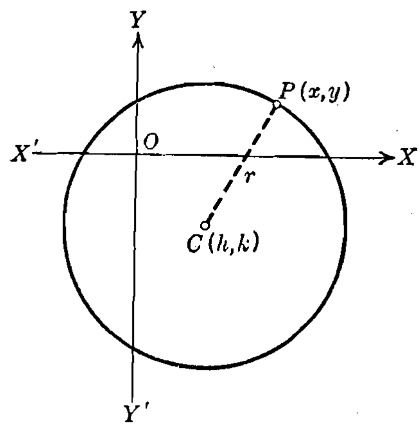

Fig. 53

Para el caso particular en que el centro C está en el origen, $h = k = 0$, y tenemos:

COROLARIO. *La circunferencia de centro en el origen y radio* r *tiene por ecuación*

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (3)$$

NOTAS. 1. La ecuación (2) se conoce como la *ecuación ordinaria* o *forma ordinaria* de la ecuación de una circunferencia. En general, designaremos como forma ordinaria aquella ecuación de una curva que nos permita obtener más rápida y fácilmente sus características importantes. Así, por ejemplo, en el caso de la ecuación (2) podemos obtener, inmediatamente, las coordenadas del centro y el radio.

2. El tipo más simple de la ecuación ordinaria de una curva se denomina frecuentemente *forma canónica*. Por tanto, la ecuación (3) es la forma canónica de la ecuación de una circunferencia.

Por el teorema 1 observamos que, si se conocen las coordenadas del centro y la longitud del radio, la ecuación puede escribirse inmediatamente. Este sugiere un método para obtener la ecuación de una circunferencia en cualquier problema dado; todo lo que se necesita es obtener las coordenadas del centro y la longitud del radio a partir de las condiciones dadas. La construcción de una circunferencia, en Geometría elemental, implica la determinación del centro y el radio; el método allí empleado, aunque no siempre es el más corto, puede usarse para obtener en Geometría analítica la ecuación de una circunferencia.

Ejemplo. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices son $P_1(-1, 1)$, $P_2(3, 5)$ y $P_3(5, -3)$.

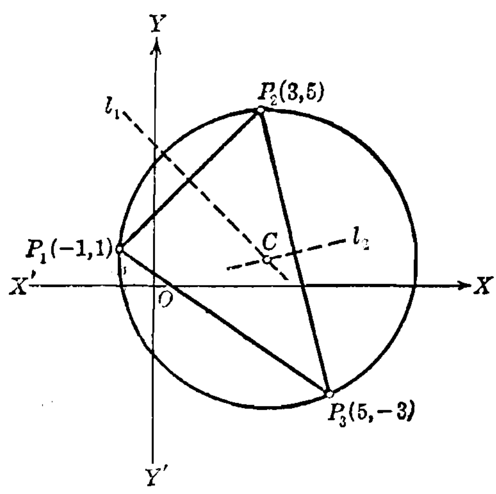

Fig. 54

Solución. La construcción de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados es un problema conocido de la Geometría elemental. El método consiste en construir las mediatrices l_1 y l_2, respectivamente, de dos cualesquiera de los lados, digamos P_1P_2 y P_2P_3 (fig. 54). La intersección C de l_1 y l_2 es el centro y la distancia de C a uno cualquiera de los puntos P_1, P_2, P_3 es el radio. Ahora determinaremos la ecuación de la circunferencia siguiendo este mismo método analíticamente.

Por los métodos del Capítulo III, se puede demostrar rápidamente que las ecuaciones de las mediatrices l_1 y l_2 son $x + y = 4$ y $x - 4y = 0$, respectivamente. La solución común de estas dos ecuaciones es $x = \frac{16}{5}$, $y = \frac{4}{5}$, de manera que las coordenadas del centro C son $\left(\frac{16}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Por el teorema 2 del Artículo 6, el radio está dado por

$$r = |\overline{CP_1}| = \sqrt{\left(\frac{16}{5} + 1\right)^2 + \left(\frac{4}{5} - 1\right)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{442}.$$

Por tanto, por el teorema 1 anterior, la ecuación buscada es

$$\left(x - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{442}{25}.$$

Se recomienda al estudiante que verifique el hecho de que las coordenadas de los puntos P_1, P_2 y P_3 satisfacen la ecuación hallada de la circunferencia.

EJERCICIOS. Grupo 15

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Escribir la ecuación de la circunferencia de centro $C(-3, -5)$ y radio 7.
2. Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $A(2, 3)$ y $B(-4, 5)$. Hallar la ecuación de la curva.
3. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(7, -6)$ y que pasa por el punto $A(2, 2)$.
4. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C(2, -4)$ y que es tangente al eje Y.
5. Una circunferencia tiene su centro en el punto $C(0, -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$. Hallar su ecuación.
6. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $(-4, -1)$ y que es tangente a la recta $3x + 2y - 12 = 0$.
7. La ecuación de una circunferencia es $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$. Demostrar que el punto $A(2, -5)$ es interior a la circunferencia y que el punto $B(-4, 1)$ es exterior.
8. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 5 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - 2y - 24 = 0$, $2x + 7y + 9 = 0$.
9. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7, -5)$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $7x - 9y - 10 = 0$ y $2x - 5y + 2 = 0$.
10. Una cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ está sobre la recta cuya ecuación es $x - 7y + 25 = 0$. Hállese la longitud de la cuerda.
11. Hallar la ecuación de la mediatriz de la cuerda del ejercicio 10, y demostrar que pasa por el centro de la circunferencia.

Los ejercicios 12-16 se refieren al triángulo cuyos vértices son $A(-1, 0)$, $B(2, 9/4)$ y $C(5, 0)$.

12. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el vértice A y que es tangente al lado BC.
13. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo.
14. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo.
15. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo.

16. Demostrar que la circunferencia del ejercicio 15 pasa por los pies de las alturas del triángulo.

17. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre el eje X y que pasa por los dos puntos $A(1, 3)$ y $B(4, 6)$.

18. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre el eje Y y que pasa por los puntos $A(2, 2)$ y $B(6, -4)$.

19. Una circunferencia pasa por los puntos $A(-3, 3)$ y $B(1, 4)$ y su centro está sobre la recta $3x - 2y - 23 = 0$. Hállese su ecuación.

20. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $9x + 2y + 13 = 0$, $3x + 8y - 47 = 0$ y $x - y - 1 = 0$. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita.

21. La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = 50$ El punto medio de una cuerda de esta circunferencia es el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la cuerda.

22. La ecuación de una circunferencia es $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$. Hallar la ecuación de la tangente a este círculo en el punto $(6, 7)$.

23. La ecuación de una circunferencia es $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia que pasa por el punto $(3, 3)$. (Dos soluciones.)

24. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7, -5)$ y es tangente a la recta $x - y - 4 = 0$ en el punto $B(3, -1)$.

25. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $6x + 7y - 16 = 0$ y es tangente a cada una de las rectas $8x + 15y + 7 = 0$ y $3x - 4y - 18 = 0$. (Dos soluciones.)

40. Forma general de la ecuación de la circunferencia. Si desarrollamos la ecuación ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \tag{1}$$

obtenemos

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0,$$

lo cual puede escribirse en la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2}$$

en donde

$$D = -2h, \quad E = -2k \quad \text{y} \quad F = h^2 + k^2 - r^2.$$

Se deduce, por lo tanto, que la ecuación de una circunferencia cualquiera puede escribirse en la forma (2), llamada *forma general* de la ecuación de la circunferencia. El problema que se presenta ahora es averiguar si, recíprocamente, toda ecuación de la forma general (2) representa una circunferencia. Para contestar esta pregunta, pasaremos de la forma (2) a la forma (1) empleando el método de completar cuadrados. Ordenando los términos de (2), resulta

$$(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = -F;$$

y sumando $\dfrac{D^2}{4} + \dfrac{E^2}{4}$ a ambos miembros, obtenemos

$$\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4},$$

de donde,

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}. \qquad (3)$$

Comparando las ecuaciones (1) y (3), vemos que depende del valor del segundo miembro de (3) el que (3) represente o no una circunferencia. Hay tres casos posibles por considerar:

a) Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la ecuación (3) representa una circunferencia de centro en el punto $\left(-\dfrac{D}{2},\ -\dfrac{E}{2}\right)$ y radio igual a $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

b) Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, la ecuación (3) se dice, con frecuencia, que representa una circunferencia de radio cero; se dice también que es un círculo punto o círculo nulo. Desde nuestro punto de vista, sin embargo, la ecuación (3) representa un solo punto de coordenadas $\left(-\dfrac{D}{2},\ -\dfrac{E}{2}\right)$.

c) Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, la ecuación (3) se dice que representa un círculo imaginario. En nuestra Geometría real, sin embargo, la ecuación (3) *no representa*, en este caso, un *lugar geométrico*.

Aunque el caso (*b*) puede considerarse como un caso límite del caso (*a*), en adelante consideraremos que una ecuación representa una circunferencia solamente en el caso (*a*). Por tanto, tenemos el siguiente

TEOREMA 2. *La ecuación* $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ *representa una circunferencia de radio diferente de cero, solamente si*

$$D^2 + E^2 - 4F > 0.$$

Las coordenadas del centro son, entonces, $\left(-\dfrac{D}{2},\ -\dfrac{E}{2}\right)$ *y el radio es* $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

NOTA. Si se da la ecuación de una circunferencia en la forma general, se aconseja al estudiante que no proceda mecánicamente, usando las fórmulas dadas en el teorema 2, para obtener el centro y el radio. En vez de esto, es conveniente que reduzca la ecuación a la forma ordinaria por el método de completar cuadrados, tal como se hizo en la deducción del teorema mismo.

Ejemplo. Reducir las tres ecuaciones siguientes a la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia. Si la ecuación representa una circunferencia, hállense su centro y su radio.

a) $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0.$
b) $36x^2 + 36y^2 + 48x - 108y + 97 = 0.$
c) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 29 = 0.$

Solución. *a*) Primero dividimos la ecuación por 2, coeficiente de x^2, y pasamos el término independiente al segundo miembro. Esto nos da, después de volver a ordenar los términos,

$$(x^2 - 5x) + (y^2 + 3y) = \frac{15}{2}.$$

Para completar los cuadrados, sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x y el cuadrado de la mitad del coeficiente de y a ambos miembros. Esto nos da

$$\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) = \frac{15}{2} + \frac{25}{4} + \frac{9}{4},$$

que puede escribirse en la forma

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 16.$$

Por tanto, la ecuación dada representa una circunferencia cuyo centro es $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ y cuyo radio es 4.

b) Dividiendo la ecuación por 36, trasponiendo el término independiente, y volviendo a ordenar los términos, obtenemos

$$\left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) + (y^2 - 3y) = -\frac{97}{36}.$$

Completando los cuadrados, resulta

$$\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + \left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = -\frac{97}{36} + \frac{4}{9} + \frac{9}{4}.$$

de donde,

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 0.$$

Por tanto, el lugar geométrico de la ecuación (*b*) es el punto único $\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

c) Ordenando los términos y completando los cuadrados, obtenemos

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) = -29 + 16 + 9,$$

de donde,

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = -4.$$

Por tanto, la ecuación (*c*) no representa ningún lugar geométrico real.

41. Determinación de una circunferencia sujeta a tres condiciones dadas. En la ecuación ordinaria de la circunferencia (Art. 39),

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \tag{1}$$

hay tres constantes arbitrarias independientes, h, k y r. De manera semejante, en la ecuación general (Art. 40),

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2}$$

hay tres constantes arbitrarias independientes, D, E y F. Como la ecuación de toda circunferencia puede escribirse en cualquiera de las dos formas (1) o (2), la ecuación de cualquier circunferencia particular puede obtenerse determinando los valores de tres constantes. Esto requiere tres ecuaciones independientes, que pueden obtenerse a partir de tres condiciones independientes. Por tanto, *analíticamente, la ecuación de una circunferencia se determina completamente por tres condiciones independientes*. Geométricamente, una circunferencia queda, también, perfectamente determinada por tres condiciones independientes; así, por ejemplo, queda determinada por tres cualesquiera de sus puntos. El estudiante debe comparar estas observaciones con la discusión análoga que sobre la recta dimos en el Artículo 29. Vemos, por lo tanto, que además del método estudiado en el Artículo 39 tenemos ahora otro método para determinar la ecuación de una circunferencia.

Ejemplo 1. Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos $A(-1, 1)$, $B(3, 5)$ y $C(5, -3)$.

Solución. Este problema es idéntico al ejemplo dado en el Artículo 39. Supongamos que la ecuación buscada es, en la forma general,

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2}$$

en donde las constantes D, E y F deben ser determinadas.

Como los tres puntos dados están sobre la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (2). De acuerdo con esto, tenemos las tres ecuaciones siguientes correspondiendo a los puntos dados:

$$\begin{cases} (-1, 1), & 1 + 1 - D + E + F = 0, \\ (3, 5), & 9 + 25 + 3D + 5E + F = 0, \\ (5, -3), & 25 + 9 + 5D - 3E + F = 0, \end{cases}$$

que pueden escribirse más abreviadamente así:

$$\begin{cases} D - E - F = 2, \\ 3D + 5E + F = -34, \\ 5D - 3E + F = -34. \end{cases}$$

La solución de este sistema de tres ecuaciones nos da

$$D = -\frac{32}{5}, \quad E = -\frac{8}{5}, \quad F = -\frac{34}{5},$$

de manera que sustituyendo estos valores en (2), obtenemos

$$x^2 + y^2 - \frac{32}{5}x - \frac{8}{5}y - \frac{34}{5} = 0,$$

o sea,

$$5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$$

como ecuación de la circunferencia buscada.

El centro y el radio de obtienen reduciendo la última ecuación a la forma ordinaria

$$\left(x - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{442}{25},$$

de donde el centro es $\left(\frac{16}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y el radio es $\frac{1}{5}\sqrt{442}$.

Ejemplo 2. Hallar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos (6, 2), (8, 0) y cuyo centro está sobre la recta $3x + 7y + 2 = 0$.

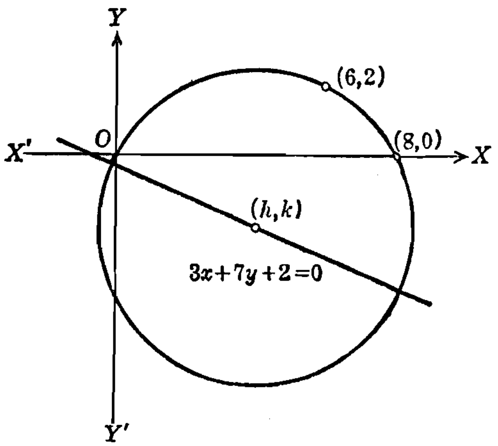

Fig. 55

Solución. Supongamos que la ecuación buscada, en la forma ordinaria, es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \qquad (1)$$

Como el centro (h, k) está sobre la recta $3x + 7y + 2 = 0$, sus coordenadas satisfacen la ecuación de la recta, y tenemos

$$3h + 7k + 2 = 0. \qquad (3)$$

También, como los puntos (6, 2) y (8, 0) están sobre la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (1). Por tanto, tenemos las dos ecuaciones

$$(6 - h)^2 + (2 - k)^2 = r^2, \tag{4}$$

$$(8 - h)^2 + k^2 = r^2. \tag{5}$$

La solución del sistema formado por las tres ecuaciones (3), (4) y (5) con las tres incógnitas h, k y r da

$$h = 4, \quad k = -2, \quad r = 2\sqrt{5}.$$

Por tanto, la ecuación buscada es

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 20.$$

El centro es el punto $(4, -2)$ y el radio es $2\sqrt{5}$. La gráfica aparece en la figura 55.

En el Artículo 35 obtuvimos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados diferentes en forma de determinante, Por un argumento semejante, podemos obtener la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos dados, no colineales, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, en forma de determinante. El resultado está dado por el

TEOREMA 3. *La ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos dados no colineales* $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ *y* $P_3(x_3, y_3)$ *viene dada por el determinante*

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

NOTA. Esta forma es útil para determinar si cuatro puntos dados están o no sobre una circunferencia. Se dice que tales puntos son *concíclicos*.

EJERCICIOS. Grupo 16

Dibujar una figura para cada ejercicio.

En cada uno de los ejercicios 1-3, reduciendo la ecuación dada a la forma ordinaria, determinar si representa o no una circunferencia. Si la respuesta es afirmativa, hallar su centro y su radio.

1. $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0.$
2. $4x^2 + 4y^2 + 28x - 8y + 53 = 0.$
3. $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0.$
4. Hallar el área del círculo cuya ecuación es

$$9x^2 + 9y^2 + 72x - 12y + 103 = 0.$$

5. Hallar la longitud de la circunferencia cuya ecuación es

$$25x^2 + 25y^2 + 30x - 20y - 62 = 0.$$

6. Demostrar que las circunferencias $4x^2 + 4y^2 - 16x + 12y + 13 = 0$ y $12x^2 + 12y^2 - 48x + 36y + 55 = 0$ son concéntricas.

7. Demostrar que las circunferencias $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0$ y $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$ son tangentes.

8. Demostrar, por dos métodos, que las circunferencias

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0 \text{ y } 4x^2 + 4y^2 - 40x + 8y + 79 = 0$$

no se cortan.

En cada uno de los ejercicios 9-11, determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados, usando el método del ejemplo 1, Artículo 41.

9. $(0, 0)$, $(3, 6)$, $(7, 0)$.

10. $(2, -2)$, $(-1, 4)$, $(4, 6)$.

11. $(4, -1)$, $(0, -7)$, $(-2, -3)$.

12. Resolver el ejercicio 9 por el método del ejemplo del Artículo 39.

13. Resolver el ejercicio 10 por el método del ejemplo 2, Artículo 41.

14. Resolver el ejercicio 11 usando el determinante del teorema 3, Artículo 41.

15. Por medio del teorema 3, Artículo 41, demostrar que los cuatro puntos $(-1, -1)$, $(2, 8)$, $(5, 7)$, $(7, 3)$ son concíclicos.

16. Resolver el ejercicio 15 hallando la ecuación de la circunferencia que pasa por tres cualesquiera de los puntos y demostrando después que las coordenadas del cuarto punto satisfacen esta ecuación.

17. Las ecuaciones de dos circunferencias diferentes son

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0.$$

Hallar las condiciones que deben satisfacer los coeficientes para que sean concéntricas.

18. La ecuación de una circunferencia es $4x^2 + 4y^2 - 16x + 20y + 25 = 0$. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica que es tangente a la recta $5x - 12y = 1$.

19. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 39 = 0$$

en el punto $(4, 5)$.

20. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(11, 4)$ y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. (Dos soluciones.)

21. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-1, -4)$, $(2, -1)$ y cuyo centro está sobre la recta $4x + 7y + 5 = 0$.

22. Una circunferencia de radio 5 es tangente a la recta $3x - 4y - 1 = 0$ en el punto $(3, 2)$. Hallar su ecuación. (Dos soluciones.)

23. Una circunferencia de radio $\sqrt{13}$ es tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 47 = 0$$

en el punto $(6, 5)$. Hallar su ecuación. (Dos soluciones.)

24. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(1, 4)$ y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ en el punto $(-2, 1)$.

25. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(5, 9)$ y es tangente a la recta $x + 2y - 3 = 0$ en el punto $(1, 1)$.

26. Una circunferencia de radio 5 pasa por los puntos $(0, 2)$, $(7, 3)$. Hállese su ecuación. (Dos soluciones.)

27. Demostrar, analíticamente, que cualquier recta que pasa por el punto $(-1, 5)$ no puede ser tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6 = 0$. Interpretar el resultado geométricamente.

28. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $7x - 2y - 1 = 0$ y que es tangente a cada una de las rectas $5x - 12y + 5 = 0$ y $4x + 3y - 3 = 0$. (Dos soluciones.)

29. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos lados son $4x - 3y = 0$, $4x + 3y - 8 = 0$, $y = 0$.

30. Una circunferencia que es tangente a un lado de un triángulo y a las prolongaciones de los otros dos lados se llama *exinscrita* al triángulo. Hallar las ecuaciones de las tres circunferencias exinscritas al triángulo del ejercicio 29. (Véase el ejercicio 16 del grupo 12.)

31. Determinar el valor de la constante k para que la recta $2x + 3y + k = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$.

32. Hallar las ecuaciones de las rectas que tienen de pendiente 5 y son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 9 = 0$.

33. Desde el punto $A(-2, -1)$ se traza una tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$. Si B es el punto de contacto, hallar la longitud del segmento AB.

34. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(6, 1)$ y es tangente a cada una de las rectas $4x - 3y + 6 = 0$, $12x + 5y - 2 = 0$. (Dos soluciones.)

35. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-3, -1)$ y $(5, 3)$ y es tangente a la recta $x + 2y - 13 = 0$. (Dos soluciones.)

42. Familias de circunferencias. Ahora consideraremos familias o haces de circunferencias de la misma manera que en el Artículo 36 consideramos familias de rectas. En el Artículo 41 demostramos que una circunferencia y su ecuación se determinan cada una por tres condiciones independientes. Una circunfererencia que satisface menos de tres condiciones independientes no es, por lo tanto, única. La ecuación de una circunferencia que satisface solamente a dos condiciones, contiene una constante arbitraria llamada *parámetro*. Se dice entonces que tal ecuación representa una *familia* de circunferencias *de un parámetro*. Por ejemplo, la familia de todas las circunferencias concéntricas cuyo centro común es el punto $(1, 2)$ tiene por ecuación

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = k^2,$$

en donde el parámetro k es cualquier número positivo

Consideremos ahora el caso importante de la familia de curvas que pasan por las intersecciones de dos circunferencias dadas. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias diferentes dadas cualesquiera, cuyas ecuaciones son

$$C_1: \quad x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0, \qquad (1)$$

$$C_2: \quad x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0. \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce la ecuación

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2) = 0, \qquad (3)$$

en donde el parámetro k puede tomar todos los valores reales. Supongamos que los círculos C_1 y C_2 se cortan en dos puntos distintos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Como las coordenadas (x_1, y_1) de P_1 satisfacen ambas ecuaciones (1) y (2), también satisfacen a la ecuación (3), y ésta se reduce entonces a la forma $0 + k \cdot 0 = 0$, que es verdadera para todos los valores de k. Análogamente, las coordenadas (x_2, y_2) de P_2 que satisfacen ambas ecuaciones (1) y (2) satisfacen también a la ecuación (3) para todos los valores de k. Por tanto, la ecuación (3) representa la familia de curvas que pasan por las dos intersecciones de las circunferencias C_1 y C_2. Para determinar la naturaleza de las curvas de esta familia, escribimos la ecuación (3) en la forma

$$(k+1)x^2 + (k+1)y^2 + (D_1 + kD_2)x + (E_1 + kE_2)y + F_1 + kF_2 = 0. \qquad (4)$$

Si $k = -1$, la ecuación (4) se reduce a una de primer grado y, por lo tanto, representa una línea recta. Pero, para cualquier otro valor de k, la ecuación (4) representa una circunferencia de acuerdo con el teorema 2 del Artículo 40. En particular, para $k = 0$, la ecuación (4) se reduce a la ecuación C_1.

La ecuación (3) es particularmente útil para obtener la ecuación de una curva que pasa por las intersecciones de las circunferencias dadas, ya que entonces no es necesario determinar las coordenadas de los puntos de intersección.

Ejemplo. Las ecuaciones de dos circunferencias son

$$C_1: \quad x^2 + y^2 + 7x - 10y + 31 = 0,$$

y

$$C_2: \quad x^2 + y^2 - x - 6y + 3 = 0.$$

Hallar la ecuación de la circunferencia C_3 que pasa por las intersecciones de C_1 y C_2 y tiene su centro sobre la recta l: $x - y - 2 = 0$.

Solución. La circunferencia buscada C_3 es un elemento de la familia

$$x^2 + y^2 + 7x - 10y + 31 + k(x^2 + y^2 - x - 6y + 3) = 0, \qquad (5)$$

en donde el parámetro k debe determinarse por la condición de que el centro de C_3 está sobre la recta l. El centro de cualquier circunferencia de la familia (5) se halla fácilmente y sus coordenadas son $\left(\frac{k-7}{2(k+1)}, \frac{3k+5}{k+1}\right)$. Como estas coordenadas deben satisfacer la ecuación de l, tenemos

$$\frac{k-7}{2(k+1)} - \frac{3k+5}{k+1} - 2 = 0,$$

de donde $k = -\frac{7}{3}$. Sustituyendo este valor de k en (5) y simplificando, obtenemos para ecuación de C_3:

$$x^2 + y^2 - 7x - 3y - 18 = 0.$$

En la figura 56 se han trazado las tres circunferencias C_1, C_2, C_3, y la recta l. Se deja al estudiante, como ejercicio, la demostración de que los centros de C_1, C_2 y C_3 son colineales.

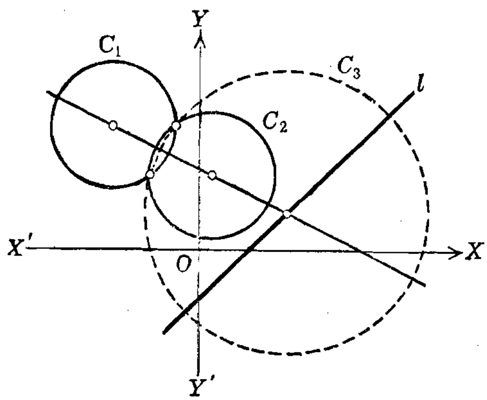

Fig. 56

Consideremos ahora el caso de dos circunferencias C_1 y C_2 tangentes entre sí, en el punto $P_3(x_3, y_3)$. Por un razonamiento análogo al anterior, en el caso de intersección en dos puntos diferentes, podemos demostrar que, para cada valor de k diferente de -1, la ecuación (3) representa una circunferencia tangente a C_1 y C_2 en P_3.

Finalmente, consideremos el caso de que C_1 y C_2 no tengan ningún punto común. Entonces, las coordenadas de un punto que satisfacen la ecuación (2) no pueden satisfacer la ecuación (1) y, por lo tanto, no pueden satisfacer la ecuación (3) para ningún valor de k. Análogamente, las coordenadas de un punto que satisfacen (1) no pueden satisfacer (2), y, por lo tanto, tampoco (3), para ningún valor de k excepto $k = 0$, en cuyo caso, (3) se reduce a (1).

En resumen, ninguna circunferencia de la familia (3), excepto C_1, tiene un punto en común con C_1 o C_2. Aun más, sea P_4 un punto cualquiera que esté sobre cualquier elemento de la familia (3), excepto sobre C_1. Acabamos de demostrar que P_4 no puede estar sobre C_2. Por tanto, si se sustituyen las coordenadas de P_4 en las ecuaciones (1) y (2), los primeros miembros no se reducirán a cero sino que tendrán valores diferentes a cero, digamos k_1 y k_2, respectivamente. Por lo tanto, si se sustituyen en (3) las coordenadas de P_4, la ecuación toma la forma

$$k_1 + kk_2 = 0,$$

de donde k tiene el único valor $-\frac{k_1}{k_2}$. Esto significa que hay solamente una circunferencia de la familia (3) que pasa por el punto P_4. Como P_4 se eligió como *cualquier* punto sobre *cualquier* elemento de (3), excepto C_1, se deduce que ningún par de circunferencias de la familia (3) tienen un punto en común.

En los dos primeros casos considerados anteriormente, es decir, cuando C_1 y C_2 tienen uno o dos puntos comunes, la ecuación (3) representa una circunferencia real para todo valor de k, ya que por lo menos existe un punto del lugar geométrico. Pero esto no ocurre cuando C_1 y C_2 no tienen ningún punto común. Entonces no se puede asegurar que la ecuación (3) represente una circunferencia real para todo valor de k. Si C_1 y C_2 no tienen ningún punto común es fácil encontrar ejemplos, en los que, para valores específicos de k, la ecuación (3) no representa ninguna circunferencia real. (Ver el ejercicio 18 del grupo 17.)

La recta que pasa por los centros de dos circunferencias no concéntricas se llama *recta de los centros*. Es muy sencillo demostrar que todas las circunferencias de la familia (3) tienen su centro en la recta de los centros de C_1 y C_2. En efecto, los centros de C_1 y C_2 son $\left(-\frac{D_1}{2},\ -\frac{E_1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{D_2}{2},\ -\frac{E_2}{2}\right)$, respectivamente, y la ecuación de la recta que contiene a estos dos puntos es

$$2(E_1 - E_2)x - 2(D_1 - D_2)y + D_2E_1 - D_1E_2 = 0,$$

la cual se satisface por las coordenadas $\left(-\frac{D_1 + kD_2}{2(k+1)},\ -\frac{E_1 + kE_2}{2(k+1)}\right)$ del centro de cualquier circunferencia definida por (3).

Todos los resultados precedentes se resumen en el siguiente

TEOREMA 4. *Si las ecuaciones de dos circunferencias dadas cualesquiera* C_1 *y* C_2 *son*

$$C_1:\quad x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0,$$

$$C_2:\quad x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0,$$

la ecuación

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

representa una familia de circunferencias todas las cuales tienen sus centros en la recta de los centros de C_1 *y* C_2.

Si C_1 *y* C_2 *se cortan en dos puntos diferentes, la ecuación representa, para todos los valores de* k *diferentes de* -1, *todas las circunferencias que pasan por los dos puntos de intersección* C_1 *y* C_2, *con la única excepción de* C_2 *misma.*

Si C_1 *y* C_2 *son tangentes entre sí, la ecuación representa, para todos los valores de* k *diferentes de* -1, *todas las circunferencias que son tangentes a* C_1 *y* C_2 *en su punto común, con la única excepción de* C_2 *misma.*

Si C_1 *y* C_2 *no tienen ningún punto común la ecuación representa una circunferencia para cada valor de* k *diferente de* -1, *siempre que la ecuación resultante tenga coeficientes que satisfagan las condiciones especificadas en el teorema 2 del Artículo 40. Ningún par de circunferencias de la familia tiene un punto común con ninguna de las dos circunferencias* C_1 *y* C_2.

43. Eje radical. En el artículo precedente hemos considerado dos circunferencias diferentes, C_1 y C_2, de ecuaciones

$$C_1: \quad x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0, \tag{1}$$

$$C_2: \quad x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0. \tag{2}$$

A partir de estas ecuaciones formamos la ecuación

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2) = 0, \tag{3}$$

y la discutimos como ecuación de una familia de circunferencias para todos los valores de k, excepto -1. Si $k = -1$, la ecuación (3) toma la forma

$$(D_1 - D_2)\,x + (E_1 - E_2)\,y + F_1 - F_2 = 0. \tag{4}$$

Si C_1 y C_2, no son concéntricas, se verificará $D_1 \neq D_2$ o $E_1 \neq E_2$, o ambas, de manera que por lo menos uno de los coeficientes de x y y en (4) será diferente de cero, y la ecuación (4) representa entonces una línea recta llamada *eje radical* de C_1 y C_2.

Si C_1 y C_2 se cortan en dos puntos diferentes, se sigue, de la discusión del Artículo 42, que el eje radical pasa por estos dos puntos y, por tanto, coincide con su cuerda común. Si C_1 y C_2 son tangentes entre sí, su eje radical es la tangente común a ambas circunferencias. Si C_1 y C_2 no tienen ningún punto común y no son concéntricas, su eje radical no tiene ningún punto común con ninguna de las dos circunferencias.

Ahora demostraremos que el eje radical de dos circunferencias cualesquiera es perpendicular a su recta de los centros. En efecto, en el Artículo 42 vimos que la ecuación de la recta de los centros de C_1 y C_2 es

$$2(E_1 - E_2)\,x - 2(D_1 - D_2)\,y + D_2 E_1 - D_1 E_2 = 0\,,$$

y la pendiente de esta recta es $\frac{E_1 - E_2}{D_1 - D_2}$, si $D_1 \neq D_2$. La pendiente del eje radical, deducida de la ecuación (4), es $-\frac{D_1 - D_2}{E_1 - E_2}$, si $E_1 \neq E_2$. Como estas pendientes son negativamente recíprocas, se sigue que el eje radical es perpendicular a la recta de los centros. Si $D_1 = D_2$, entonces, por la ecuación (4), resulta que el eje radical es paralelo al eje X, y por la ecuación anterior, la recta de los centros es paralela al eje Y; por tanto, en este caso, el eje radical y la línea de los centros también son perpendiculares entre sí. Análogamente, si $E_1 = E_2$, el eje radical es paralelo al eje Y y la recta de los centros es paralela al eje X; por lo tanto, son perpendiculares entre sí.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación del eje radical de las circunferencias

$$C_1:\quad 2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y + 9 = 0, \qquad (5)$$

$$C_2:\quad x^2 + y^2 - 8x - 12y + 43 = 0, \qquad (6)$$

y demostrar que es perpendicular a su recta de los centros.

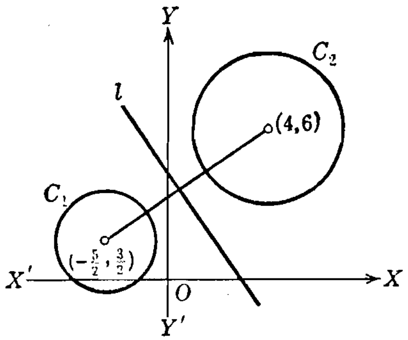

Fig. 57

Solución. Si multiplicamos la ecuación (6) por 2 y la restamos de la ecuación (5), obtenemos

$$l:\quad 26x + 18y - 77 = 0$$

como ecuación del eje radical. Su pendiente es $-\frac{13}{9}$.

Las coordenadas de los centros C_1 y C_2 se encuentran fácilmente y son $\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $(4, 6)$, respectivamente, de manera que la pendiente de la recta de los centros es $\frac{6-(3/2)}{4+(5/2)} = \frac{9}{13}$, que es negativamente recíproca de la pendiente del eje radical. Por tanto, el eje radical es perpendicular a la recta de los centros. Las circunferencias C_1 y C_2, su recta de los centros y su eje radical l, se han trazado en la figura 57.

Para deducir una propiedad importante del eje radical, estableceremos el siguiente teorema:

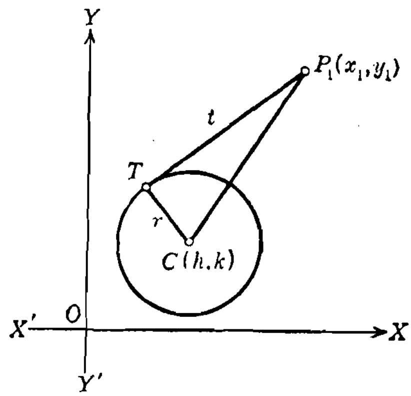

Fig. 58

TEOREMA 5. *Si* t *es la longitud de la tangente trazada del punto exterior* $P_1(x_1, y_1)$ *a la circunferencia* $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, *entonces*

$$t = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea T (fig. 58) el punto de tangencia, de manera que $t = \overline{P_1T}$. Como P_1T es tangente a la circunferencia, el radio CT es perpendicular a P_1T. Por tanto, en el triángulo rectángulo P_1TC, tendremos:

$$t^2 = \overline{CP_1}^2 - r^2. \qquad (7)$$

Por el teorema 2, Artículo 6,

$$\overline{CP_1}^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2,$$

valor que, sustituído en la ecuación (7), da

$$t^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2.$$

de donde,

$$t = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}.$$

NOTA. Evidentemente, se pueden trazar dos tangentes del punto P_1 al círculo, pero sus longitudes son iguales.

Ejemplo 2. Hallar la longitud de la tangente trazada del punto $(-3, 2)$ a la circunferencia $9x^2 + 9y^2 - 30x - 18y - 2 = 0$.

Solución. Para aplicar el teorema 5, es necesario hacer que los coeficientes de x^2 y y^2 sean iguales a la unidad. Para ello dividiendo por 9, resulta:

$$x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x - 2y - \frac{2}{9} = 0.$$

Sustituyendo x por -3 y y por 2 en el primer miembro de esta ecuación, obtenemos

$$t^2 = 9 + 4 + 10 - 4 - \frac{2}{9} = \frac{169}{9},$$

de donde se deduce que la longitud de la tangente es $t = \frac{13}{3}$. Debe observarse que, si se utilizara la ecuación de la circunferencia en la forma original, es decir, sin dividir por 9, el resultado sería el triple del valor correcto. Se recomienda al estudiante que dibuje la figura correspondiente a este ejercicio.

Por medio del teorema 5, podemos demostrar fácilmente que *el eje radical de dos circunferencias no concéntricas es el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que las longitudes de las tangentes trazadas desde él a las dos circunferencias son iguales*. En efecto, sean C_1 y C_2 las dos circunferencias no concéntricas dadas por las ecuaciones (1) y (2), respectivamente. Sea $P(x, y)$ el punto móvil y sean t_1 y t_2, respectivamente, las longitudes de las tangentes trazadas de P a C_1 y C_2. Entonces, por el teorema 5,

$$t_1^2 = x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1,$$

y

$$t_2^2 = x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2,$$

Como, por hipótesis, $t_1 = t_2$, de estas dos últimas ecuaciones se deduce que

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0,$$

que, según (4), es la ecuación del eje radical de C_1 y C_2. Podemos demostrar, recíprocamente, que, si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto que está sobre el eje radical, las longitudes de las tangentes trazadas de P_1 a C_1 y C_2 son iguales.

Los resultados precedentes se resumen en el siguiente

TEOREMA 6. *Si las ecuaciones de dos circunferencias no concéntricas* C_1 *y* C_2 *son*

$$C_1: \quad x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0,$$

$$C_2: \quad x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0,$$

la eliminación de x^2 *y* y^2 *entre estas dos ecuaciones da la ecuación lineal*

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0,$$

que es la ecuación del eje radical de C_1 *y* C_2.

Si C_1 *y* C_2 *se cortan en dos puntos diferentes, su eje radical coincide con su cuerda común; si* C_1 *y* C_2 *son tangentes entre sí, su eje radical es su tangente común, y si* C_1 *y* C_2 *no tienen ningún punto común, su eje radical no tiene ningún punto común con ninguno de ellos.*

El eje radical de C_1 *y* C_2 *es perpendicular a la recta de los centros; es también el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que las longitudes de las tangentes trazadas por él a* C_1 *y* C_2 *son iguales.*

Consideremos tres circunferencias, de las cuales no hay dos que sean concéntricas. Cada par tiene un eje radical, y las tres, tomadas a pares, tienen tres ejes radicales Si las tres circunferencias no tienen una recta de los centros común, sus tres ejes radicales se cortan en un punto llamado *centro radical*. La demostración de la existencia del centro radical de tres circunferencias dadas se deja como ejercicio al estudiante.

EJERCICIOS. Grupo 17

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Escribir la ecuación de la familia de circunferencias concéntricas cuyo centro común es el punto $(-3, 5)$. Dibujar tres elementos de la familia, especificando el valor del parámetro en cada caso.

2. Escribir la ecuación de la familia de circunferencias cuyos centros están sobre el eje Y. Desígnense los dos parámetros por k_1 y k_2. Dibújense tres elementos de la familia conservando a k_1 constante y asignando a k_2 tres valores diferentes. Dibújense otros tres miembros de la familia haciendo que k_2 permanezca constante y asignando a k_1 tres valores diferentes.

3. Escribir la ecuación de la familia de todas las circunferencias que pasan por el origen. Dibujar seis elementos de la familia asignando valores a los dos parámetros como en el ejercicio 2.

4. Determinar la ecuación de la familia de circunferencias, cada una de las cuales pasa por el origen y el punto $(1, 3)$. Dibujar tres elementos de la familia, especificando el valor del parámetro en cada caso.

5. Dibujar las dos circunferencias cuyas ecuaciones son

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 8y + 7 = 0 \quad \text{y} \quad C_2 \equiv x^2 + y^2 - 16x - 4y + 3 = 0.$$

También dibujar tres elementos de la familia $C_1 + kC_2 = 0$ para valores de k diferentes de 0 y -1, y demostrar que sus centros están sobre la recta de los centros de C_1 y C_2.

6. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(-8, 5)$ y por las intersecciones de las circunferencias $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$ y $x^2 + y^2 - 18x - 4y + 67 = 0$.

7. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre el eje X y pasa por las intersecciones de las dos circunferencias dadas en el ejercicio 6.

8. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el eje Y y pasa por las intersecciones de las dos circunferencias dadas en el ejercicio 6.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre la recta $2x + y - 14 = 0$ y que pasa por las intersecciones de las circunferencias

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0.$$

10. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ y que pasa por las intersecciones de las circunferencias $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 16 = 0$ y $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$. (Dos soluciones.)

11. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por las intersecciones de las circunferencias $x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2 = 0$, y que es tangente a la recta $x + 3y - 14 = 0$. (Dos soluciones.)

12. La ecuación de la familia de circunferencias dada en el teorema 4 del Artículo 42 no incluye a la ecuación de C_2. Usando dos parámetros k_1 y k_2, escríbase la ecuación de la familia de tal manera que incluya a C_2. (Véase la ecuación [6] del Artículo 36.) ¿A qué restricciones deben someterse los parámetros k_1 y k_2? ¿Qué relación debe existir entre k_1 y k_2 para obtener la ecuación de una línea recta?

13. Demostrar que las circunferencias C_1: $x^2 + y^2 - 3x - 6y + 10 = 0$ y C_2: $x^2 + y^2 - 5 = 0$, son tangentes. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 en su punto común y que pasa por el punto $A(7, 2)$. Demostrar que el centro de esta circunferencia está sobre la recta de los centros de C_1 y C_2.

14. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 del ejercicio 13 en su punto común y cuyo centro está sobre la recta $3x + y + 5 = 0$.

15. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 del ejercicio 13 en su punto común y cuyo radio es igual a $\frac{3}{2}\sqrt{5}$. (Dos soluciones.)

16. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 del ejercicio 13 en su punto común y que es tangente a la recta $x - 2y - 1 = 0$. (Dos soluciones.)

17. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(-10, -2)$ y por las intersecciones de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 32 = 0$ y la recta $x - y + 4 = 0$.

18. Demostrar que las circunferencias $C_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ y $C_2 \equiv x^2 + y^2 + 10x - 6y + 33 = 0$ no se cortan. Demostrar que para $k = -2$ el elemento correspondiente de la familia $C_1 + kC_2 = 0$ es una circun-

ferencia que no corta a ninguna de las dos circunferencias C_1 y C_2, y cuyo centro está sobre la recta de los centros de C_1 y C_2. Demuéstrese, también, que no existe ninguna circunferencia real si k toma uno cualquiera de los valores 1, 2, 3. Hállense otros valores de k para los cuales no exista circunferencia real.

19. Hallar la ecuación del eje radical de las circunferencias

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0, \quad 4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0,$$

y demostrar que es perpendicular a su recta de los centros.

20. Hallar la ecuación del eje radical de las circunferencias

$$9x^2 + 9y^2 - 54x - 48y + 64 = 0, \quad x^2 + y^2 + 8x - 10y + 37 = 0,$$

y demostrar que es perpendicular a su recta de los centros.

21. Hallar la ecuación y la longitud de la cuerda común de las circunferencias $x^2 + y^2 - 8y + 6 = 0$ y $x^2 + y^2 - 14x - 6y + 38 = 0$.

22. Demostrar analíticamente que si dos circunferencias diferentes son concéntricas, su eje radical no existe.

23. Hallar la longitud de la tangente trazada del punto $P(3, 4)$ a la circunferencia $3x^2 + 3y^2 + 12x + 4y - 35 = 0$.

24. Hallar la longitud de la tangente trazada del punto $P(-1, 3)$ a la circunferencia $3x^2 + 3y^2 - 14x - 15y + 23 = 0$.

25. Obtener las coordenadas de un punto que se encuentre sobre el eje radical del ejercicio 19, y demostrar que las longitudes de las tangentes trazadas de ese punto a las dos circunferencias son iguales.

26. Las ecuaciones de dos circunferencias no concéntricas son $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$. Demuéstrese que el eje radical de cualquier par de circunferencias de la familia $C_1 + kC_2 = 0$ es el mismo que el eje radical de C_1 y C_2.

27. Las ecuaciones de tres circunferencias son

$$x^2 + y^2 + D_ix + E_iy + F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Suponiendo que entre ellas no hay dos que sean concéntricas, hállense las ecuaciones de sus ejes radicales. Si las tres circunferencias no tienen una recta de centros común, demuéstrese que sus ejes radicales se encuentran en un punto común (el centro radical).

28. Hallar las coordenadas del centro radical de las tres circunferencias $x^2+y^2+2x-4y-6=0$, $x^2+y^2-4x-2y=0$ y $x^2+y^2+2x+12y+36=0$.

29. Hallar las longitudes de las tangentes trazadas del centro radical a las tres circunferencias del ejercicio 28, y demostrar que son iguales.

30. Demostrar que las tres circunferencias $x^2 + y^2 + 10x + 2y + 17 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ y $x^2 + y^2 - 8x - 16y + 71 = 0$ no tienen centro radical. Explicar el resultado.

44. Tangente a una curva. En Geometría elemental solamente se estudia, en general, la tangente a una curva: la circunferencia. La tangente se define como una recta que tiene un solo punto común con la circunferencia. Esta definición, suficiente para la circunferencia, es inadecuada para las curvas planas en general, pues hay curvas planas en las cuales una tangente en un punto corta a la curva en uno o más puntos diferentes. Por esto, vamos a dar ahora una definición de tangente que se aplique a todas las curvas planas en general.

Sea la ecuación de una curva plana cualquiera C

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ (fig. 59) dos puntos diferentes cualesquiera de C tales que el arco de curva que los une sea continuo; es decir, P_2 puede moverse hacia P_1 permaneciendo siempre sobre la curva. La recta que pasa por P_1 y P_2 se llama *secante*. Consideraremos que P_1 es un punto fijo mientras que P_2 se mueve a lo largo

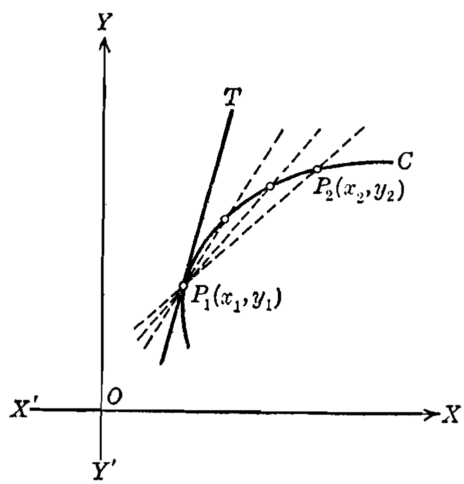

Fig. 59

de C hacia P_1. Entonces, a medida que P_2 se aproxima a P_1, la secante gira en el sentido contrario al de las manecillas de un reloj en torno a P_1 y, en general, tiende a una posición límite representada por la recta P_1T que se *define* como *la tangente a la curva* C *en el punto* P_1. El punto P_1 se llama *punto de tangencia* o *punto de contacto* de la tangente. *La pendiente de la curva* C *en el punto* P_1 *se define como la pendiente de la tangente a* C *en* P_1.

Para determinar la ecuación de la tangente a una curva dada en un punto particular de la curva, se conoce un punto, el punto de contacto; por lo tanto, queda por hallar la pendiente de la tangente. La pendiente de la secante P_1P_2 es

$$m_s = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2 \tag{2}$$

Si C es una curva cualquiera diferente de una línea recta, el valor de m_s varía a medida que P_2 se aproxima a P_1. Definiéndose la tangente P_1T como la posición límite de la secante P_1P_2 a medida que P_2 tiende a P_1, se sigue que la pendiente m de la tangente es el valor límite de la pendiente m_s de la secante dado por (2), y escribimos

$$m = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \tag{3}$$

siempre que, por supuesto, ese límite exista. La determinación, significado y propiedades de este límite son problemas fundamentales del *Cálculo infinitesimal* y no serán considerados en este libro. Usaremos, sin embargo, la idea de la coincidencia de dos puntos sobre una curva, como se indica en la siguiente discusión.

En nuestro estudio no será necesario obtener la pendiente de una tangente calculando el límite expresado por (3), ya que restringiremos nuestro trabajo a la determinación de las ecuaciones de tangentes a curvas planas representadas, analíticamente, por ecuaciones algebraicas de segundo grado. Tomamos, por lo tanto, (1) como tipo de tales ecuaciones y consideramos el sistema formado por esta ecuación y la ecuación de la recta,

$$y = mx + k. \tag{4}$$

Las soluciones comunes de (1) y (4) son dos y pueden obtenerse sustituyendo primero y por $mx + k$ en (1), y resolviendo la ecuación cuadrática en una variable que resulta, de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0. \tag{5}$$

Las raíces de (5) pueden ser reales y desiguales, reales e iguales o complejas (Apéndice IB, 3) correspondiendo, respectivamente, a la interpretación geométrica de que la recta (4) y la curva (1) se corten en dos puntos diferentes, tengan un punto común o no se corten. Para el caso de intersección en dos puntos diferentes, la recta (4) es una secante de la curva (1). Si, ahora, imaginamos que varían los coeficientes de la ecuación (4) de tal manera que una de las raíces reales de (5) se aproxima a la otra, esto equivale, geométricamente, a que la secante va variando hasta ocupar la posición límite de la tangente, como en la definición anterior. De este razonamiento se deduce, por lo tanto, que la *igualdad de las raíces de la ecuación* (5) *es una condición para la tangencia de la recta* (4) *a la curva* (1). Haremos uso de esta condición al determinar las ecuaciones de las tangentes a las curvas planas algebraicas de segundo grado.

Sea $P_1(x_1, y_1)$ (fig. 60) un punto cualquiera de la curva continua C. Sea l la tangente a C en P_1. Si m es la pendiente de l, por el teorema 1, Artículo 26, la ecuación de la tangente l es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Sea l' la recta trazada por P_1 perpendicular a la tangente l; la recta l' se llama *normal a la curva* C *en el punto* P_1. La ecuación de la normal l' es, evidentemente,

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1), \quad m \neq 0.$$

Supongamos que la tangente y la normal cortan a X en los puntos T y N, respectivamente. La longitud $\overline{P_1T}$ del segmento de la tan-

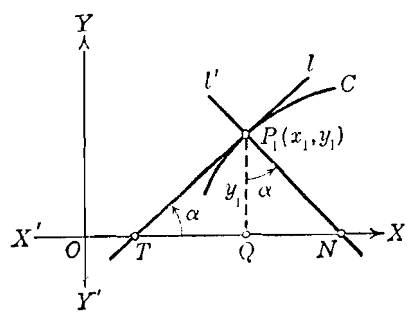

Fig. 60

gente l comprendido entre el punto de contacto y el eje X se llama *longitud de la tangente*. La longitud P_1N del segmento de la normal l' comprendido entre el punto de contacto y el eje X se llama *longitud de la normal*. Por P_1 tracemos la ordenada P_1Q. La proyección QT de la longitud de la tangente sobre el eje X se llama *subtangente*, y la proyección QN de la longitud de la normal sobre el eje X se llama *subnormal*. Sea α el ángulo de inclinación de l, de manera que $m = \operatorname{tg} \alpha$. Observando que el ángulo $QP_1N = \alpha$, el estudiante puede fácilmente demostrar que las longitudes de los últimos cuatro elementos definidos son las que se dan en el siguiente

TEOREMA 7. *Si* m *es la pendiente de una curva plana continua* C *en el punto* $P_1(x_1, y_1)$, *entonces para el punto* P_1 *tenemos las siguientes ecuaciones y fórmulas:*

Ecuación de la tangente a C: $y - y_1 = m(x - x_1)$, Ecuación de la normal a C: $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$, $m \neq 0$.

Longitud de la tangente $= \frac{y_1}{m}\sqrt{1 + m^2}$, $m \neq 0$,

Longitud de la normal $= y_1\sqrt{1 + m^2}$,

Longitud de la subtangente $= \frac{y_1}{m}$, $m \neq 0$,

Longitud de la subnormal $= my_1$.

Sean C y C' dos curvas planas que se cortan en el punto P (figura 61). Sean l y l' las tangentes a C y C', respectivamente, en P.

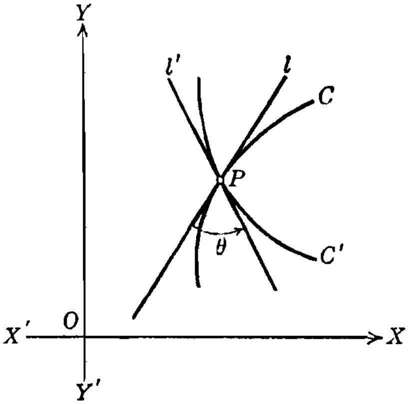

Fig. 61

Se llama *ángulo de dos curvas en uno de sus puntos de intersección, a cualquiera de los dos ángulos suplementarios formados por las dos tangentes a las curvas en dicho punto*. Para las curvas C y C' de la figura 61, si las pendientes de l y l' son m y m', respectivamente, el ángulo que forman las curvas en P es uno de los dos ángulos θ dados, según el teorema 5, Artículo 10, por la fórmula

$$\operatorname{tg} \theta = \pm \frac{m - m'}{1 + mm'}, \quad mm' \neq -1.$$

Si se verifica que $mm' = -1$, de tal manera que ambos ángulos sean rectos, se dice que las curvas son *ortogonales* entre sí. También, si cada elemento de una familia de curvas es ortogonal a cada uno de los elementos de una segunda familia, las curvas de cualquiera de las dos familias se llaman las *trayectorias ortogonales* de las curvas de la otra familia. El problema de la ortogonalidad es de considerable importancia en la Matemática superior y en Física.

45. **Tangente a una circunferencia.** La determinación de la ecuación de una tangente a una circunferencia se simplifica considerablemente por la propiedad de la circunferencia, que dice: la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado al punto de contacto. En este artículo determinaremos la ecuación de la tangente a una circunferencia sin usar esta propiedad particular; lo haremos por el método general discutido en el Artículo 44.

Es evidente, por el teorema 7 del Artículo 44, que la ecuación de la tangente a una circunferencia dada está perfectamente determinada cuando se conocen su pendiente y el punto de contacto (o algún otro de sus puntos). Si se tiene uno de estos datos, el otro debe determinarse a partir de las condiciones del problema; según esto, tenemos los elementos necesarios para la solución de cualquier problema particular. Vamos a considerar tres problemas, a saber:

1) Hallar la ecuación de la tangente a una circunferencia dada en un punto dado de contacto;
2) Hallar la ecuación de la tangente a una circunferencia dada y que tiene una pendiente dada;
3) Hallar la ecuación de la tangente a una circunferencia dada y que pasa por un punto exterior dado.

El procedimiento para resolver cada uno de estos problemas es esencialmente el mismo. En cada caso se da una condición; de acuerdo con esto escribiremos primero la ecuación de la familia de rectas que satisfacen esta condición (Art. 36). Esta ecuación contiene un parámetro que se determina aplicando la condición de tangencia dada en el Artículo 44.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$$

en el punto $(3, 5)$.

Solución. La ecuación de la familia de rectas que pasa por el punto $(3, 5)$ es

$$y - 5 = m(x - 3), \tag{1}$$

en donde el parámetro m es la pendiente de la tangente buscada. De la ecuación (1), $y = mx - 3m + 5$, y sustituyendo este valor en la ecuación de la circunferencia, resulta:

$$x^2 + (mx - 3m + 5)^2 - 8x - 6(mx - 3m + 5) + 20 = 0,$$

que se reduce a

$$(m^2 + 1)x^2 - (6m^2 - 4m + 8)x + (9m^2 - 12m + 15) = 0.$$

Según lo dicho en el Artículo 44, la recta (1) será tangente a la circunferencia dada siempre que las raíces de esta última ecuación sean iguales, es decir, siempre que el discriminante se anule. Deberá, pues, verificarse la condición:

$$(6m^2 - 4m + 8)^2 - 4(m^2 + 1)(9m^2 - 12m + 15) = 0.$$

La solución de esta ecuación es $m = \frac{1}{2}$, de manera que, de (1), la ecuación de la tangente buscada es

$$y - 5 = \tfrac{1}{2}(x - 3)$$

o sea,

$$x - 2y + 7 = 0.$$

Se recomienda al estudiante que dibuje la figura correspondiente a este ejemplo.

Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$$

y que tiene de pendiente 1.

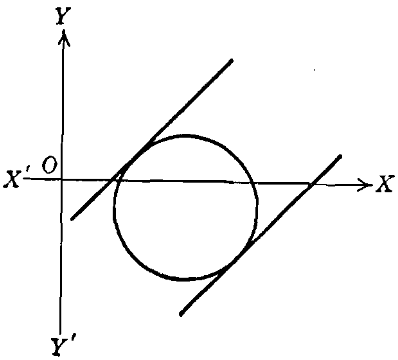

Fig. 62

Solución. La ecuación de la familia de rectas de pendiente 1 es

$$y = x + k, \tag{2}$$

siendo k un parámetro cuyo valor debe determinarse. Si el valor de y dado por (2) se sustituye en la ecuación de la circunferencia, se obtiene

$$x^2 + (x + k)^2 - 10x + 2(x + k) + 18 = 0$$

o sea,

$$2x^2 + (2k - 8)x + (k^2 + 2k + 18) = 0.$$

La condición de tangencia es

$$(2k - 8)^2 - 8(k^2 + 2k + 18) = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son $k = -2, -10$. Por tanto, de (2), las ecuaciones de las tangentes buscadas son

$$y = x - 2 \quad \text{y} \quad y = x - 10.$$

En la figura 62 se han trazado estas tangentes.

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la tangente trazada del punto (8, 6) a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0$.

Ejemplo. La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto (8, 6) es

$$y - 6 = m(x - 8), \tag{3}$$

en donde el parámetro m es la pendiente de la tangente buscada. De la ecuación (3), $y = mx - 8m + 6$, valor que sustituído en la ecuación de la circunferencia, da

$$x^2 + (mx - 8m + 6)^2 + 2x + 2(mx - 8m + 6) - 24 = 0,$$

la cual se reduce a

$$(m^2 + 1)x^2 - (16m^2 - 14m - 2)x + (64m^2 - 112m + 24) = 0.$$

La condición para tangencia es

$$(16m^2 - 14m - 2)^2 - 4(m^2 + 1)(64m^2 - 112m + 24) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación se encuentra que sus soluciones son

$$m = \frac{1}{5}, \quad \frac{23}{11}.$$

Por tanto, de (3), las ecuaciones de las tangentes que cumplen las condiciones dadas, son

$$y - 6 = \frac{1}{5}(x - 8) \quad \text{y} \quad y - 6 = \frac{23}{11}(x - 8)$$

o sea,

$$x - 5y + 22 = 0 \quad \text{y} \quad 23x - 11y - 118 = 0.$$

EJERCICIOS. Grupo 18

Dibujar una figura para cada ejercicio.

Los ejercicios 1-7 deben resolverse usando la condición de tangencia estudiada en el Artículo 44.

1. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$$

en el punto $(-1, 6)$.

2. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia

$$4x^2 + 4y^2 + 8x + 4y - 47 = 0$$

que tengan de pendiente $-\frac{3}{2}$.

3. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(-2, 7)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$.

4. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 3 = 0$ en el punto (6, 3).

5. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 21 = 0$$

que son paralelas a la recta $5x - 5y + 31 = 0$.

6. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 6x - 8 = 0$$

que son perpendiculares a la recta $4x - y + 31 = 0$.

7. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(6, -4)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 35 = 0$.

8. Resolver el ejercicio 4 recordando que la tangente es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.

9. Resolver los ejemplos 1, 2 y 3 del Artículo 45 por el método indicado en el ejercicio 8.

10. Demostrar que la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto de contacto $P_1(x_1, y_1)$ es $x_1x + y_1y = r^2$. *Sugestión:* Usese el hecho de que $x_1^2 + y_1^2 = r^2$.

11. Por dos métodos diferentes, hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $9x^2 + 9y^2 + 18x - 12y - 32 = 0$, cuya pendiente sea $\frac{1}{2}$.

12. Por dos métodos diferentes, hállense las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(6, -4)$ a la circunferencia $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 15 = 0$.

13. Por el punto $(-5, 4)$ se trazan tangentes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 10x + 7 = 0.$$

Hallar el ángulo agudo que forman estas tangentes.

14. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $x - 2y + k = 0$:

a) cortan a la circunferencia en dos puntos diferentes;
b) son tangentes;
c) no tienen ningún punto común con la circunferencia.

15. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$, hallar los valores de m para los cuales las rectas de la familia $y = mx + 3$:

a) corta a la circunferencia en dos puntos diferentes;
b) son tangentes;
c) no tienen ningún punto común con la circunferencia.

16. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ son $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$.

17. Hallar la ecuación de la normal a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 21 = 0$$

en el punto $(6, -3)$, y demostrar que pasa por el centro de la circunferencia.

En cada uno de los ejercicios 18-20 hallar la ecuaciones de las tangente y normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para cada circunferencia y punto de contacto dados.

18. $x^2 + y^2 = 34$; $(3, 5)$.
19. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 15 = 0$; $(0, 3)$.
20. $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 39 = 0$; $(-2, 3)$.

21. Hallar el ángulo agudo que forman las circunferencias $x^2 + y^2 = 17$ y $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 11 = 0$ en su intersección.

22. Hallar el ángulo agudo que forman la recta $2x + 3y - 6 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ al cortarse.

23. Demostrar que las circunferencias

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$$

se cortan ortogonalmente.

24. Demostrar, analíticamente, que las trayectorias ortogonales de una familia de circunferencias concéntricas están dadas por la familia de rectas que pasan por su centro común.

25. Si de un punto exterior P se trazan tangentes a una circunferencia, el segmento que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto de* P. Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, demuéstrese que la ecuación de la cuerda de contacto de P_1 es $x_1x + y_1y = r^2$. (Ver ejercicio 10.)

46. Teoremas y problemas de lugares geométricos relativos a la circunferencia. La demostración analítica de cualquier teorema sobre la circunferencia se efectúa siguiendo el procedimiento general discutido en el Artículo 11. De acuerdo con esto, mientras el teorema no se particularice, debe colocarse la circunferencia con su centro en el origen, ya que en esta posición su ecuación tiene la forma más simple, la forma canónica,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ejemplo 1. Demostrar, analíticamente, que cualquier ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Demostración. Es evidente que la demostración no perderá generalidad si colocamos la semicircunferencia con su centro en el origen, tal como aparece en la figura 63. La ecuación de la semicircunferencia es entonces

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (1)$$

Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera de la semicircunferencia, y sean A y B los extremos de su diámetro. Como r es el radio, es evidente que las coordenadas de A y B son $(-r, 0)$ y $(r, 0)$, respectivamente. Tenemos que demostrar que el segmento P_1A es perpendicular al segmento P_1B.

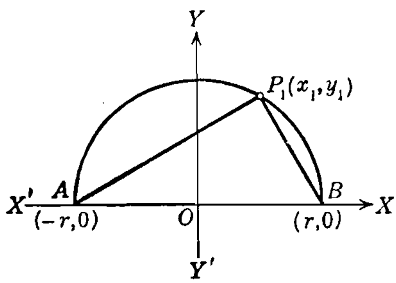

Fig. 63

Por tanto, si las pendientes de P_1A y P_1B son m_1 y m_2, respectivamente, vamos a demostrar que

$$m_1 m_2 = -1, \qquad (2)$$

de acuerdo con el corolario 2 del teorema 5, Artículo 10.

Por el teorema 4 del Art. 8, tenemos

$$m_1 = \frac{y_1}{x_1 + r} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{y_1}{x_1 - r},$$

de manera que

$$m_1 m_2 = \frac{y_1^2}{x_1^2 - r^2}. \tag{3}$$

Pero, como P_1 está sobre la semicircunferencia, sus coordenadas (x_1, y_1) deben satisfacer la ecuación (1), y tenemos

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2,$$

de donde,

$$x_1^2 - r^2 = -y_1^2.$$

De esta última relación y (3) obtenemos, inmediatamente, la relación buscada (2), como se quería demostrar.

En relación con la resolución de problemas sobre lugares geométricos relativos a circunferencias, seguiremos el procedimiento general bosquejado en el Artículo 23.

Ejemplo 2. Un punto se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos dados es constante. Hallar la ecuación de su lugar geométrico, y demuéstrese que es una circunferencia.

Solución. Por simplicidad, y sin ninguna restricción, podemos tomar uno de los puntos como origen O y el otro punto $A(a, 0)$, $a \neq 0$, sobre el eje X, como se indica en la figura 64. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Entonces P debe satisfacer la condición geométrica

$$\overline{PO}^2 + \overline{PA}^2 = k, \tag{4}$$

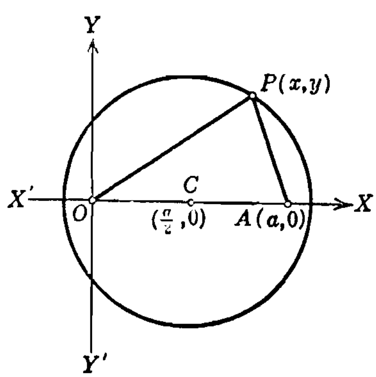

Fig. 64

en donde k es un número positivo.

Por el teorema 2 del Artículo 6,

$$\overline{PO}^2 = x^2 + y^2$$

y

$$\overline{PA}^2 = (x - a)^2 + y^2,$$

de manera que la condición geométrica (4) puede expresarse, analíticamente, por la ecuación

$$x^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 = k \tag{5}$$

que se reduce a

$$x^2 + y^2 - ax + \frac{a^2}{2} - \frac{k}{2} = 0. \tag{6}$$

Por el teorema 2 del Artículo 40, la ecuación (6) representa una circunferencia cuyo centro es el punto $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ y cuyo radio tiene una longitud $\overline{PC} = \frac{1}{2}\sqrt{2k - a^2}$, siempre que, sin embargo, la constante $k > \frac{a^2}{2}$. Si

$k = \frac{a^2}{2}$, el lugar geométrico se reduce al punto $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$; y si $k < \frac{a^2}{2}$, no existe ningún lugar geométrico.

EJERCICIOS. Grupo 19

Dibujar una figura para cada ejercicio.

Todos los teoremas enunciados en los siguientes ejercicios deben demostrarse *analíticamente*. De manera semejante, todos los problemas de lugares geométricos deben resolverse analíticamente.

1. Las longitudes de las dos tangentes trazadas a una circunferencia desde un punto exterior son iguales.
2. Si de un punto cualquiera de una circunferencia se traza una perpendicular a un diámetro, la longitud de la perpendicular es media proporcional entre las longitudes de los dos segmentos en los que divide al diámetro.
3. Todo diámetro perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales.
4. En dos circunferencias secantes la recta de los centros es perpendicular a su cuerda común en su punto medio.
5. Si por los extremos de un diámetro se trazan dos cuerdas paralelas, éstas son iguales.
6. Se tiene una circunferencia circunscrita a cualquier triángulo dado. Demostrar que el producto de las longitudes de dos lados cualesquiera del triángulo es igual al producto de la longitud del diámetro por la longitud de la altura trazada al tercer lado.
7. Un punto se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(2, 0)$ y $(-1, 0)$ es siempre igual a 5. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.
8. Un punto se mueve de tal manera que su distancia del punto $(4, 2)$ es siempre igual al doble de su distancia del punto $(-1, 3)$. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.
9. Un punto se mueve de tal manera que su distancia del punto $(2, -2)$ es siempre igual a un tercio de su distancia del punto $(4, 1)$. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.
10. Un punto se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia del punto $(1, 2)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $3x + 4y - 1 = 0$. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.
11. Un punto se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias de los tres puntos $(0, 3)$, $(3, 0)$ y $(-2, -2)$ es siempre igual a 30. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.
12. Un punto P se mueve de tal manera que su distancia de un punto fijo es siempre igual a k veces su distancia de otro punto fijo. Demostrar que el lugar geométrico de P es una circunferencia para valores apropiados de k.
13. Un punto P se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia de la base de un triángulo isósceles es siempre igual al producto de sus distancias de los otros dos lados. Demostrar que el lugar geométrico de P es una circunferencia.

14. Desde un punto P, se trazan tangentes a las circunferencias

$$C_1:\quad x^2 + y^2 - 9 = 0 \quad \text{y} \quad C_2:\quad x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0.$$

Si la longitud de la tangente trazada a C_1 es siempre igual al doble de la longitud de la tangente trazada a C_2, hallar y construir el lugar geométrico de P.

15. Un punto P se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a las dos rectas $3x - y + 4 = 0$, $x + 3y - 7 = 0$ es siempre igual a 2. Hallar, identificar y trazar el lugar geométrico de P.

16. Desde un punto fijo de una circunferencia dada se trazan cuerdas. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de estas cuerdas es una circunferencia.

17. Se han trazado dos tangentes a una circunferencia, paralelas entre sí, que cortan a una tercera tangente en los puntos A y B. Demostrar que las rectas que unen A y B con el centro son perpendiculares entre sí.

18. Desde un punto exterior P, se trazan una tangente y una secante a una circunferencia dada, siendo A y B los puntos de intersección de la secante con la circunferencia. Demostrar que la longitud de la tangente es media proporcional entre la longitud $\overline{PB}$ de la secante y la longitud $\overline{PA}$ de su segmento externo.

19. Por medio del teorema del ejercicio 18, resolver el ejercicio 35 del grupo 16.

Ver Pag 72

20. Demostrar que si desde cualquier punto P de la circunferencia circunscrita a un triángulo, se bajan perpendiculares a los lados del triángulo, los pies de estas perpendiculares son colineales. La recta que determinan se llama *recta de Simpson para el punto* P.

21. Demostrar que el punto $P(7, 3)$ está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices son $(-1, -1)$, $(2, 8)$, $(5, 7)$, y hallar la ecuación de la recta de Simpson para el punto P.

22. Demostrar el recíproco del teorema del ejercicio 20; es decir, demostrar que, si el punto P se mueve de tal manera que los pies de las perpendiculares bajadas desde él a los lados de un triángulo cualquiera son colineales, el lugar geométrico de P es la circunferencia circunscrita al triángulo.

23. Demostrar que en un triángulo cualquiera los pies de las alturas, los pies de las medianas, y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro (punto de intersección de las alturas) a los vértices son concíclicos. Esta circunferencia se llama con toda propiedad la *circunferencia de los nueve puntos* del triángulo.

24. Hallar la ecuación de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo cuyos vértices son $(3, 7)$, $(1, -1)$ y $(7, 3)$ obteniendo la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados, demostrando que los otros seis puntos están sobre la circunferencia.

25. Demostrar que en un triángulo cualquiera el centro de la circunferencia de los nueve puntos está sobre la recta de Euler (ver el ejercicio 26 del grupo 10).

Pag 72