DEFINICIÓN 1. El conjunto de los puntos, y *solamente* de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfagan una ecuación (1), se llama *gráfica de la ecuación* o, bien, su *lugar geométrico*.

Otro concepto importante está dado por la

DEFINICIÓN 2. Cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (1) *pertenece a la gráfica de la ecuación*.

No debe insistirse mucho en aquello de que *solamente* aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación pertenecen a su lugar geométrico. Lo importante es que si las coordenadas de un punto satisfacen una ecuación, ese punto pertenece a la gráfica de esa ecuación y, recíprocamente, si un punto está sobre la gráfica de una ecuación, sus coordenadas satisfacen la ecuación. Esto es, evidentemente, el enunciado de una condición necesaria y suficiente (Art. 9). Como las coordenadas de los puntos de un lugar geométrico están restringidas por su ecuación tales puntos estarán localizados, en general, en posiciones tales que, tomadas en conjunto, formen un trazo definido llamado curva, gráfica, o lugar geométrico.

Como ejemplo de las notas precedentes consideremos la ecuación

$$y = x^3 - 8x^2 + 15x. \tag{2}$$

Dando diversos valores a x y calculando los valores correspondientes de y, obtenemos los pares de valores que figuran en la tabla. Cada par de valores correspondientes, tomado como las coordenadas de un punto, nos permite trazar varios puntos, tal como se muestra en la figura 20.

En Algebra se estudia el trazado de gráficas del tipo (2). El procedimiento consiste en trazar un cierto número de puntos y dibujar una línea continua que pasa por todos ellos. tal como está indicado en la figura 20. Pero, al hacer esto, se supone que la gráfica entre dos puntos sucesivos cualesquiera tiene la forma de la curva continua que se dibuja uniendo los puntos. Aunque esto es verdadero para la gráfica particular que estamos considerando, no es verdadero para las gráficas de todas las ecuaciones. Por tanto, bajo este supuesto, podemos introducir muchos errores en el trazado de la gráfica *entre* dos de sus puntos. Para evitar errores de este tipo, debemos hacer una investigación preliminar de la ecuación para ciertas características *antes* de proceder al trazado de la curva. Esto se llama *discutir la ecuación* y se describirá en los artículos que siguen inmediatamente al presente.

El lector no debe creer que toda ecuación del tipo (1) tiene, necesariamente, una gráfica. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 + 4 = 0 \tag{3}$$

se satisface para un número infinito de pares de valores de x y y, pero en ningún caso son *ambos* valores números *reales*. Por esto no se puede trazar ningún punto cuyas coordenadas satisfagan esta ecuación, ya que estamos restringidos a puntos cuyas coordenadas sean *ambas números reales*. Decimos entonces que (3) *no tiene gráfica* en el sistema coordenado rectangular *real* que estamos empleando.

x	y
0	0
1	8
2	6
3	0
4	−4
5	0
6	18
−1	−24

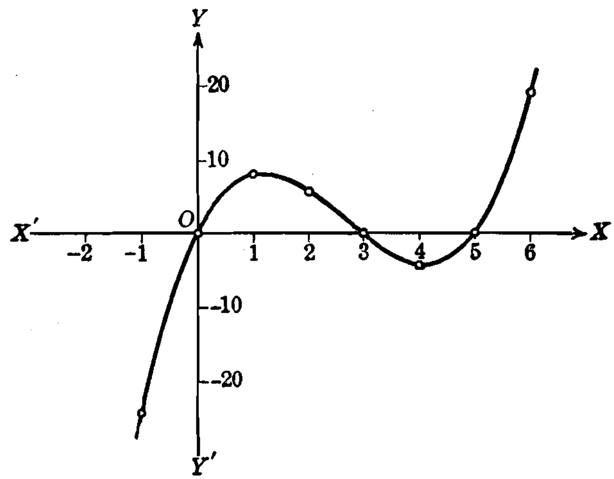

Fig. 20

Otro ejemplo es la ecuación

$$x^2 + y^2 = 0, \tag{4}$$

en donde, $x = 0$, $y = 0$ es el único par de valores reales que la satisfacen. En este caso, en nuestro sistema coordenado rectangular real, la gráfica de la ecuación (4) es un solo punto, el origen.

15. Intercepciones con los ejes. El primer punto que estudiaremos en relación con la discusión de una ecuación es el de las *intercepciones* de la curva con los ejes coordenados.

DEFINICIONES. Llamaremos *intercepción* de una curva con el eje X a la abscisa del punto de intersección de la curva con el eje. Análogamente, la intercepción con el eje Y es la ordenada del punto de intersección de la curva con dicho eje. *

El método para obtener la intercepciones es evidente a partir de la definición. Como la intercepción con el eje X es la abscisa de un

* N. DEL T. Muchos autores llaman intersecciones a las intercepciones sobrentendiendo que al decir punto de intersección se quiere indicar abscisa u ordenada del punto.

punto que está sobre el eje de las X, la ordenada de ese punto es cero. Por tanto, haciendo $y = 0$ en la ecuación de la curva, las soluciones reales de la ecuación resultante en x nos darán las intercepciones con el eje de las X. Análogamente, haciendo en la ecuación $x = 0$, las soluciones reales de la ecuación resultante en y nos darán las intercepciones con el eje Y.

Como ejemplo del método, consideremos la ecuación (2) del Artículo 14:

$$y = x^3 - 8x^2 + 15x. \tag{1}$$

Para $y = 0$, esta ecuación se reduce a

$$x^3 - 8x^2 + 15x = 0,$$

de donde,

$$x(x-3)(x-5) = 0,$$

y las raíces son

$$x = 0,\ 3,\ 5.$$

Por tanto, las intercepciones de (1) con el eje X son 0, 3, 5. Para $x = 0$ en (1), $y = 0$, de manera que la intercepción con el eje Y es 0. Todas estas intercepciones están indicadas en la figura 20 del Artículo 14.

16. Simetría. El segundo punto que consideraremos, en relación con la discusión de una ecuación, es la *simetría* de la curva que representa, con respecto a los ejes coordenados y con respecto al origen.

DEFINICIÓN 1. Se dice que dos puntos son *simétricos con respecto a una recta* si la recta es perpendicular al segmento que los une en su punto medio.

La recta con respecto a la cual son simétricos los dos puntos se llama *eje de simetría*. Así, en la figura 21, los dos puntos A y B son simétricos con respecto al eje de simetría l si la recta l es perpendicular al segmento AB en su punto medio.

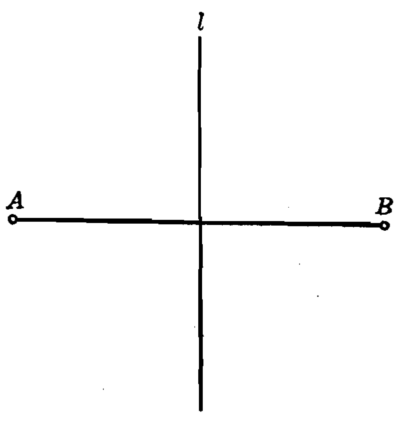

Fig. 21

DEFINICIÓN 2. Se dice que dos puntos son *simétricos con respecto a un punto* O si O es el punto medio del segmento que los une.

El punto O se llama *centro de simetría*. Así, en la figura 22, los dos puntos A y B son simétricos con respecto al centro de simetría O siempre que O sea el punto medio del segmento AB.

Ahora vamos a extender las definiciones 1 y 2 hasta incluir la simetría de una curva plana completa con respecto a una línea o un punto.

Definición 3. Se dice que una curva es ***simétrica con respecto a un eje de simetría*** cuando para *cada* punto de la curva hay un punto correspondiente, también de la curva, tal que estos dos puntos son simétricos con respecto al eje.

Definición 4. Se dice que una curva es ***simétrica con respecto a un centro de simetría*** O cuando para *cada* punto de la curva hay un punto correspondiente, también de la curva, tal que estos dos puntos son simétricos con respecto a O.

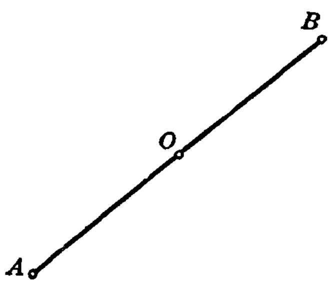

Fig. 22

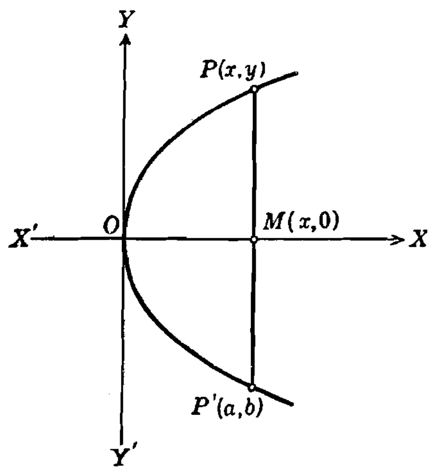

Fig. 23

Todas las definiciones anteriores son puramente geométricas. Ahora interpretaremos estas definiciones analíticamente, usando los ejes coordenados como ejes de simetría y el origen como centro de simetría.

a) *Simetría con respecto al eje* X. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de una curva (fig. 23). Si esta curva es simétrica con respecto al eje X, de la definición 3 se deduce que debe haber otro punto $P'(a, b)$ sobre la curva, tal que el segmento PP' queda bisecado perpendicularmente por el eje X. Sea M el punto medio de PP'; sus coordenadas son, evidentemente, $(x, 0)$. Entonces, por las fórmulas del punto medio dadas en el corolario del teorema 3, Art. 7, tenemos

$$x = \frac{a + x}{2}, \quad 0 = \frac{b + y}{2},$$

de donde $a = x$ y $b = -y$. Por tanto, las coordenadas de P' son $(x, -y)$. Pero, como P' está sobre la curva, de la definición 1, Artículo 14, se deduce que sus coordenadas deben de satisfacer la ecuación de la curva. Es decir, una ecuación $f(x, y) = 0$ que se satisface para las coordenadas (x, y) de P se satisface también para las coordenadas $(x, -y)$ de P' siempre que la curva sea simétrica respecto al eje X. Este resultado se enuncia como sigue:

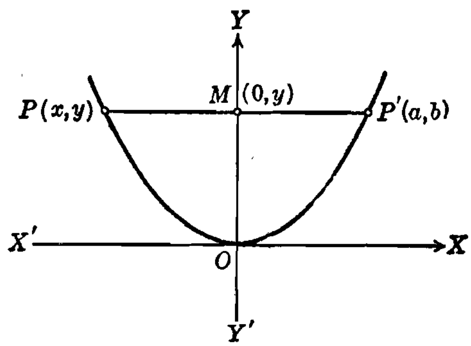

Fig. 24

TEOREMA 1. *Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable* y *es reemplazada por* $-$ y, *la curva es simétrica con respecto al eje* X.

NOTA. El recíproco del teorema 1 también es verdadero. La demostración se deja como ejercicio al estudiante.

Un ejemplo sencillo del teorema 1 es la curva cuya ecuación es $y^2 = x$. Se deja como ejercicio al estudiante la construcción de esta curva, que es una parábola.

b) *Simetría con respecto al eje* Y. Usando la figura 24, podemos establecer un teorema análogo al teorema 1 para la simetría de una curva con respecto al eje Y. La demostración se deja como ejercicio al estudiante.

TEOREMA 2. *Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable* x *es reemplazada por* $-$ x, *la curva es simétrica con respecto al eje* Y, *y recíprocamente.*

Un ejemplo sencillo del teorema 2 es la curva cuya ecuación es $y = 2x^2 + 1$. Se deja al estudiante el trazado de esta curva.

c) *Simetría con respecto al origen.* Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de una curva (fig. 25). Para que esta curva sea simétrica con respecto al origen O, de la definición 4 se deduce que debe haber otro punto $P'(a, b)$, sobre la curva, tal que O sea el punto medio del segmento PP'. Por las fórmulas del punto medio tenemos

$$0 = \frac{x+a}{2}, \quad 0 = \frac{y+b}{2},$$

de donde $a = -x$ y $b = -y$, de manera que las coordenadas de P' son $(-x, -y)$. Como P' está sobre la curva, sus coordenadas $(-x, -y)$ deben satisfacer la ecuación de la curva. Por tanto, para que haya simetría con respecto al origen, la ecuación del lugar

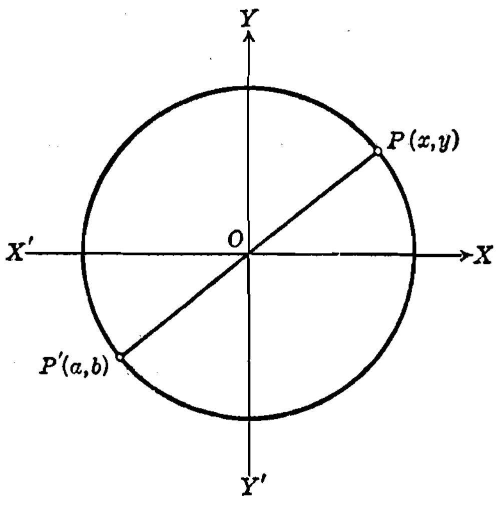

Fig. 25

geométrico no debe alterarse al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$. El recíproco de este enunciado también es verdadero y puede demostrarse. Estos resultados nos dan el

TEOREMA 3. *Si la ecuación de una curva no se altera al reemplazar las variables* x *y* y *por* $-$ x *y* $-$ y, *respectivamente, la curva es simétrica con respecto al origen; y recíprocamente.*

Un ejemplo sencillo del teorema 3 es la curva $y = x^3$. Se recomienda al estudiante la construcción de esta curva. Se llama *parábola cúbica*

NOTA. Si comparamos los teoremas 1, 2 y 3 veremos que, si una curva es simétrica con respecto a *ambos* ejes coordenados, es también simétrica con respecto al origen. Pero el recíproco no es necesariamente verdadero. Por ejemplo, la curva cuya ecuación es $xy = 1$ es simétrica con respecto al origen, pero no es simétrica con respecto a ninguno de los ejes coordenados. Se recomienda al estudiante la construcción de la gráfica de esta ecuación que se llama *hipérbola equilátera*.

17. Extensión de una curva. El tercer punto que consideraremos, en relación con la discusión de una ecuación, es el estudio de la *extensión* de la curva. Con este término queremos expresar la determinación de los intervalos de variación para los cuales los valores de x y y son valores reales. Esta información es útil por dos razones: 1) Da la

x	y
0	0
1	± 1
2	$\pm 2,8$
3	$\pm 5,2$

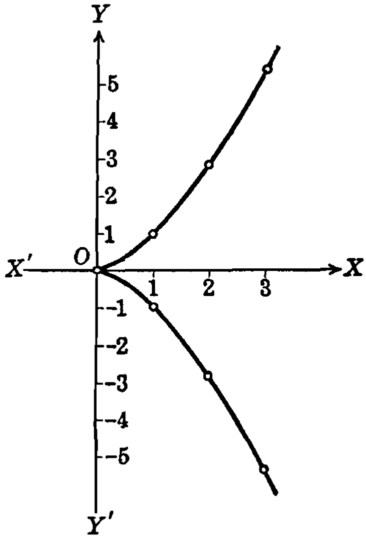

Fig. 26

localización general de la curva en el plano coordenado. 2) Indica si la curva es cerrada o si es de extensión indefinida.

Los intervalos para los cuales los valores de x y y son reales se determinan, simplemente, resolviendo la ecuación dada para y, en términos de x, y para x en términos de y.

Ejemplo. Discutir la ecuación $y^2 = x^3$, estudiando las intercepciones, simetría y extensión de la curva. Trazar la gráfica correspondiente.

Solución. *a) Intercepciones.* Para $y = 0$, $x = 0$; para $x = 0$, $y = 0$. Por tanto, el único punto de intersección con los ejes coordenados es el origen.

b) Simetría. Si se sustituye y por $-y$, la ecuación no se altera Por tanto, la curva es simétrica con respecto al eje X. Si sustituimos x por $-x$, la ecuación se altera; por tanto, la curva no es simétrica con respecto al eje Y. Si se sustituyen x y y por $-x$ y $-y$, respectivamente, la ecuación también cambia; luego, la curva no es simétrica con respecto al origen.

c) *Extensión*. Despejando y en función de x, obtenemos

$$y = \pm \sqrt{x^3}. \qquad (1)$$

Vemos inmediatamente que y es compleja si x es negativa; por tanto, todos los valores negativos de x quedan excluídos. Esto significa que ninguna porción de la curva está a la izquierda del eje Y. En cambio, pueden tomarse todos los valores positivos de x.

Despejando x en función de y, obtenemos

$$x = y^{2/3}.$$

Evidentemente, y puede tomar todos los valores positivos y negativos. Esto, agregado al hecho de que todos los valores positivos de x son admisibles, indica que la curva se extiende indefinidamente hacia la derecha del eje Y y hacia ambos lados, arriba y abajo, del eje X. Por tanto, la curva no es cerrada.

Finalmente, por medio de (1), calculamos unos cuantos pares de valores para x y y como los que aparecen en la tabla. La curva es la trazada en la figura 26. Es una *parábola semicúbica*.

EJERCICIOS. Grupo 5

En cada uno de los ejercicios 1-25 discútase la ecuación estudiando las intercepciones, simetría y extensión. Después trácese la gráfica correspondiente.

1. $5x + 4y - 20 = 0.$
2. $3x - 2y = 0.$
3. $3x^2 + 3y^2 - 10 = 0.$
4. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0.$
5. $4x^2 + 3y^2 - 12 = 0.$
6. $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0.$
7. $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0.$
8. $16x^2 - y = 0.$
9. $16y^2 - x = 0.$
10. $x^2 - y^2 - 9 = 0.$
11. $y = x^3 + x^2 - 9x - 9.$
12. $8x^3 - y = 0.$
13. $x^3 - x - y = 0.$
14. $x^4 - 9x^2 - y = 0.$
15. $x - y^4 + 9y^2 = 0.$
16. $x^2 - y^3 = 0$
17. $x^2 + y^2 - 4y = 0.$
18. $x^2 - 6x + y^2 = 0.$
19. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 14$
20. $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0.$
21. $x^2 + 4x + 3y + 1 = 0.$
22. $y^2 - 2x - 8y + 12 = 0.$
23. $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0.$
24. $4x^2 - y^2 - 2y = 2.$
25. $y^2 - 9x^2 - 18x - 8y - 2 = 0.$
26. Enunciar y demostrar el recíproco del teorema 1, Artículo 16.
27. Demostrar el teorema 2, Artículo 16.
28. Enunciar y demostrar el recíproco del teorema 3, Artículo 16.
29. Demostrar el siguiente teorema: Si la ecuación de una curva no se altera cuando se intercambian las variables x y y, la curva es simétrica con respecto a la recta que pasa por el origen y es bisectriz de los cuadrantes I y III.
30. Demostrar el siguiente teorema: Si la ecuación de una curva no se altera al sustituir la variable x por $-y$ y la variable y por $-x$, la curva es simétrica con respecto a la recta que pasa por el origen y es bisectriz de los cuadrantes II y IV.

18. Asíntotas. El cuarto punto que consideraremos, en relación con la discusión de una ecuación, es la determinación de las asíntotas que la curva pueda tener.

DEFINICIÓN. Si para una curva dada, existe una recta tal que, a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente y tiende a cero, dicha recta se llama *asíntota* de la curva.

Esta definición implica dos cosas: 1) una curva que tiene una asíntota no es cerrada o de extensión finita, sino que se extiende indefinidamente; 2) una curva se aproxima a la asíntota más y más a medida que se extiende más y más en el plano coordenado.

Siendo la asíntota una línea recta, puede tener una cualquiera de tres posiciones particulares. Si es paralela o coincide con el eje X, se llama *asíntota horizontal;* si es paralela o coincide con el eje Y, *asíntota vertical;* y si no es paralela a ninguno de los ejes coordenados, *asíntota oblicua*. Aquí consideraremos solamente la determinación de asíntotas verticales y horizontales. Posteriormente veremos la determinación de asíntotas oblicuas para una curva particular conocida con el nombre de hipérbola.

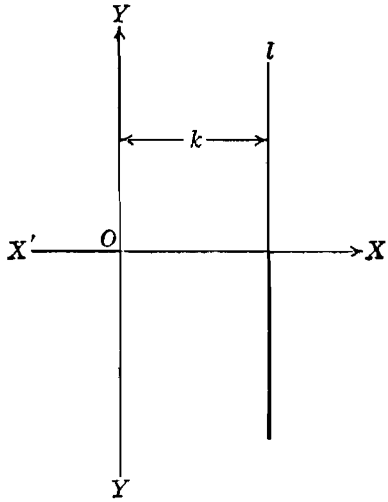

Fig. 27

El estudiante debe tener presente que una curva no tiene necesariamente una o más asíntotas. Hay muchas curvas que no tienen asíntotas. Sin embargo, si una curva tiene asíntotas, su determinación será, como veremos, una gran ayuda para construir su gráfica.

En el capítulo siguiente haremos un estudio detallado de la ecuación general de la recta. Pero ahora tenemos necesidad de saber hallar ecuaciones de asíntotas verticales y horizontales. Para ello sea l (fig. 27) una recta cualquiera paralela al eje Y y que dista k unidades del eje. Todo punto de l, cualquiera que sea el valor de su ordenada, tiene una abscisa igual a k. Las coordenadas de todos los puntos de l satisfacen, por tanto, la ecuación $x = k$. Recíprocamente, cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación es un punto cuya abscisa es k y situado, por tanto, a una distancia de k unidades del eje Y, y, en consecuencia, está sobre la recta l.

De aquí que la ecuación de l es $x = k$. Por un razonamiento análogo hallamos que $y = k$ es la ecuación de una recta paralela al eje X, a k unidades del eje.

Vimos (Art. 17) que se puede determinar la extensión de una curva despejando y en función de x y x en función de y. Para obtener las asíntotas verticales y horizontales, usaremos estas mismas ecuaciones en las que aparecen despejadas las variables.

Ejemplo. Determinar las asíntotas verticales y horizontales de la curva cuya ecuación es

$$xy - y - 1 = 0. \qquad (1)$$

Solución. Despejando y en función de x, resulta

$$y = \frac{1}{x-1}. \qquad (2)$$

Según la ecuación (2) y no está definida para $x = 1$. Sin embargo, si se le asigna a x un valor que sea ligeramente mayor que 1, vemos que y toma un valor positivo muy grande; y si se le da a x un valor ligeramente menor que 1, resulta que y toma un valor negativo numéricamente muy grande. En cualquiera de estos dos casos, obtenemos un punto de la curva para el cual la abscisa tiene un valor muy aproximado a 1 y la ordenada es, numéricamente, muy grande. A medida que x se aproxima al valor 1, el valor absoluto de y se hace mayor que cualquier número por grande que se le suponga. Bajo estas condiciones la curva se extiende indefinidamente lejos y se aproxima a una recta cuyos puntos tienen todos la propiedad común de que su abscisa es igual a 1. La ecuación de dicha recta es, evidentemente, $x = 1$, y, de acuerdo con nuestra definición de asíntota, es la ecuación de una asíntota vertical. Este resultado se obtiene simplemente igualando a cero el denominador $x - 1$ de la ecuación (2).

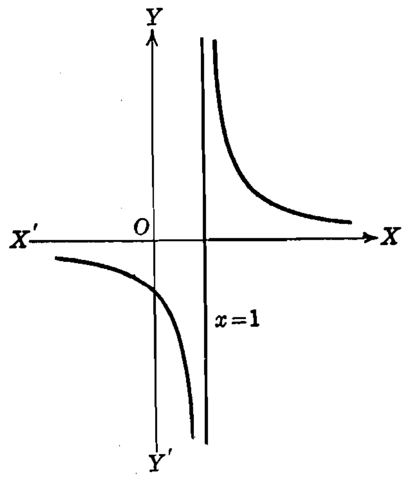

Fig. 28

Despejando de (1) el valor de x en función de y se obtiene

$$x = \frac{y+1}{y}. \qquad (3)$$

Aplicando precisamente el mismo argumento a (3), obtenemos $y = 0$, o sea, el eje X, como asíntota horizontal. La gráfica de (1) se muestra en la figura 28. Se llama una *hipérbola*.

NOTAS. 1. Una curva puede tener más de una asíntota vertical u horizontal. Así, la curva cuya ecuación es

$$y = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

tiene dos asíntotas verticales, $x = 1$ y $x = 2$.

2. La discusión anterior sugiere un método general para obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales. Para obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales, resuélvase la ecuación dada para y en función de x e iguálese a cero cada uno de los factores lineales del denominador; estas son las ecuaciones buscadas. Análogamente, para obtener las ecuaciones de las asíntotas horizontales, resuélvase la ecuación dada para x en función de y e iguálese a cero cada uno de los factores lineales del denominador.

3. Para muchas ecuaciones en las variables x y y, veremos que, frecuentemente, es ventajoso investigar el comportamiento de una de las variables cuando a la otra se le dan valores cada vez más grandes en valor absoluto. Esto es particularmente útil para la determinación de las asíntotas. Así, para la ecuación (2) de nuestro ejemplo,

$$y = \frac{1}{x-1},$$

si damos valores a x cada vez más grandes, en valor absoluto, el valor de y se aproxima a cero. Es decir, a medida que el punto sobre la curva se aleja indefinidamente del origen, ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda, la curva se aproxima a la recta $y = 0$ que, por lo tanto es una asíntota horizontal.

Análogamente, si escribimos la ecuación (3) en la forma

$$x = 1 + \frac{1}{y},$$

vemos que, a medida que y toma valores cada vez mayores en valor absoluto, x se aproxima a 1. Por tanto, $x = 1$ es una asíntota vertical.

4. El estudiante debe observar la ventaja de usar las asíntotas de una curva, cuando existen, en el trazado de la curva. Las asíntotas actúan como *líneas guía* de la gráfica.

19. Construcción de curvas. La discusión de una ecuación y su representación gráfica constituyen, en conjunto, un problema de tan gran importancia en todas las ramas de la Matemática y sus aplicaciones, que se le ha dado el nombre especial de *construcción de curvas*. Dedicaremos el presente artículo a hacer un resumen de los resultados obtenidos en los artículos inmediatamente precedentes. Desde nuestro punto de vista, el trazado de una curva constará de los seis pasos siguientes:

1. Determinación de las intercepciones con los ejes coordenados.
2. Determinación de la simetría de la curva con respecto a los ejes coordenados y al origen.
3. Determinación de la extensión de la curva.

4. Determinación de las ecuaciones de las asíntotas verticales u horizontales que la curva puede tener.

5. Cálculo de las coordenadas de un número suficiente de puntos para obtener una gráfica adecuada.

6. Trazado de la curva.

Ejemplo 1. Construir la curva cuya ecuación es

$$x^3 + xy^2 - y^2 = 0. \qquad (1)$$

Solución. 1. *Intercepciones.* Para $y = 0$, $x = 0$; para $x = 0$, $y = 0$. Por tanto, el único punto de intersección con los ejes coordenados es el origen.

x	y
0	0
0,25	$\pm$ 0,14
0,5	$\pm$ 0 5
0,75	$\pm$ 1,3

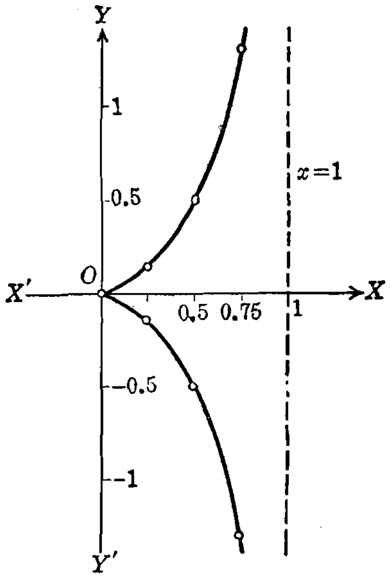

Fig 29

2. *Simetría.* La ecuación dada solamente no se altera en el caso en que y es reemplazada por $-y$. Por tanto, la única simetría de la curva es con respecto al eje X.

3. *Extensión.* Despejando y en función de x, resulta

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}. \qquad (2)$$

De (2) vemos que y es compleja cuando x es negativa. Por tanto, todos los valores negativos de x quedan excluídos; según esto no hay curva a la izquierda del eje Y. Además, y no está definida para $x = 1$ y es compleja para todos los valores de x mayores que 1. Por tanto, los valores de x para los cuales y está definida y es real, están dados por el intervalo de variación

$$0 \leq x < 1. \tag{3}$$

El despejar x en función de y no se puede efectuar fácilmente ya que es una ecuación cúbica en x. Sin embargo, en (2) vemos que y puede tomar todos los valores reales asignando a x valores comprendidos dentro del intervalo de variación dado por (3). La gráfica es, por consiguiente, una curva abierta que se extiende indefinidamente hacia arriba y abajo del eje X.

4. *Asíntotas*. De la ecuación (2) vemos, inmediatamente, que $x = 1$ es una asíntota vertical. Como de (1) no podemos despejar fácilmente x en función de y, no podemos investigar la posible existencia de una o más asíntotas horizontales tan rápidamente como determinamos la asíntota vertical. Sin embargo, de acuerdo con la nota 3, Artículo 18, se pueden investigar las asíntotas horizontales dando a x valores cada vez mayores en valor absoluto. Pero este procedimiento queda aquí excluído por el intervalo de variación permisible para los valores de x dado por (3). Por tanto, no hay asíntotas horizontales.

5. *Cálculo de coordenadas*. Las coordenadas de los puntos pueden obtenerse a partir de (2) asignando a x valores comprendidos en el intervalo dado por (3). Tales pares de valores están dados en la tabla.

6. *Construcción de la curva*. La gráfica está trazada en la figura 29; se llama *cisoide*.

Ejemplo 2. Construir la curva cuya ecuación es

$$x^2y - x^2 - y = 0. \tag{4}$$

Solución. 1. *Intercepciones*. El único punto de intersección con los ejes es el origen.

2. *Simetría*. La curva solamente es simétrica con respecto al eje Y.

3. *Extensión*. Despejando de (4) el valor de y en función de x se obtiene

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1}. \tag{5}$$

En (5), y no está definida para $x = \pm 1$. Para $x > 1$ y $x < -1$, y es positiva; para valores de x comprendidos en el intervalo $-1 < x < 1$, y es negativa o cero. A medida que x se aproxima a $+1$ ó -1, y aumenta numéricamente sin límite.

Despejando de (4) el valor de x en función de y obtenemos

$$x = \pm\sqrt{\frac{y}{y-1}}. \tag{6}$$

En (6), x no está definida para $y = 1$. También x es compleja para los valores de y comprendidos en el intervalo $0 < y < 1$. Por tanto, deben excluirse tales valores de y. A medida que y se aproxima a 1 decreciendo, x aumenta numéricamente sin límite.

Las conclusiones que hemos deducido de las ecuaciones (5) y (6), respecto a los intervalos en los cuales los valores de las variables x y y son reales, nos dan una buena idea de la localización de la curva en el plano coordenado. Hay tres regiones definidas en las cuales la curva existe; arriba de la recta $y = 1$ y a la derecha de la recta $x = 1$; arriba de la recta $y = 1$ y a la izquierda de la recta $x = -1$; y abajo del eje X y entre las rectas $x = 1$ y $x = -1$. Se trata, evidentemente, de una curva abierta.

4. *Asíntotas*. De (5) vemos que hay dos asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = -1$. De (6) vemos que hay una asíntota horizontal: $y = 1$. También podemos obtener estas asíntotas tal y como se sugiere en la nota 3 del Artículo 18.

5. *Cálculo de las coordenadas de algunos puntos*. Las coordenadas de unos cuantos puntos pueden obtenerse a partir de (5), dentro de los intervalos de

x	y
0	0
$\pm \frac{1}{4}$	$-\frac{1}{15}$
$\pm \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$\pm \frac{3}{4}$	$-\frac{9}{7}$
$\pm \frac{5}{4}$	$\frac{25}{9}$
$\pm \frac{3}{2}$	$\frac{9}{5}$
$\pm \frac{7}{4}$	$\frac{49}{33}$
± 2	$\frac{4}{3}$
$\pm \frac{9}{4}$	$\frac{81}{65}$

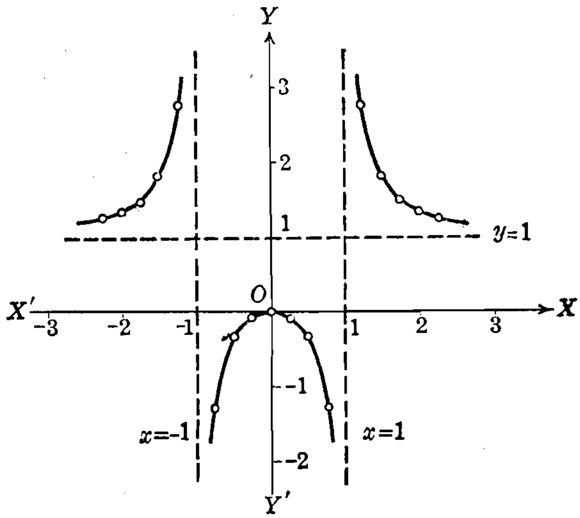

Fig. 30

variación obtenidos en el paso 3. Alguno de tales pares de valores están dados en la tabla.

6. *Construcción de la curva*. La gráfica está trazada en la figura 30. El estudiante debe hacer siempre un estudio particular para comprobar que la gráfica y la discusión de una ecuación estén en completo acuerdo.

EJERCICIOS. Grupo 6

En cada uno de los siguientes ejercicios, construir la curva correspondiente a la ecuación dada.

1. $xy - 2y - 3 = 0$.
2. $xy - 2x - 1 = 0$.
3. $x^4 + y^4 = 16$.
4. $x^3 + x - y = 0$.
5. $xy - 3y - x = 0$.
6. $xy - 3x - y = 0$.
7. $xy - 2x - 2y + 2 = 0$.
8. $x^4 - 4x^2 - y = 0$.
9. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$.
10. $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 6y + 3 = 0$.
11. $x^3 + y^2 - 4y + 4 = 0$.
12. $y^3 - x^2 + 3y^2 + 2x + 3y = 0$.
13. $x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x - 2y - 2 = 0$.
14. $x^2y - 4y - x = 0$.
15. $xy^2 - 9x - y - 1 = 0$.
16. $x^2y - xy - 2y - 1 = 0$.
17. $xy^2 + xy - 2x - 2 = 0$.
18. $x^2 - xy + 5y = 0$.

19. $x^2 y - x^2 - 4xy + 4y = 0$.
20. $xy^2 + 2xy - y^2 + x = 0$.
21. $x^2 y - x^2 + xy + 3x = 2$.
22. $xy^2 - y^2 - xy + y = 0$.
23. $x^2 y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0$.
24. $x^3 - xy^2 + 2y^2 = 0$.
25. $y^3 + x^2 y - x^2 = 0$.

20. Ecuaciones factorizables. El trazado de curvas se puede simplificar considerablemente para ciertos tipos de ecuaciones a las que llamaremos ecuaciones *factorizables;* es decir, aquellas que pueden escribirse en forma del producto de dos o más factores variables igualado a cero. Por ejemplo, es evidente que la ecuación

$$x^2 - y^2 = 0 \tag{1}$$

puede escribirse en la forma equivalente

$$(x - y)(x + y) = 0. \tag{2}$$

La ecuación (2) solamente se satisface para valores de x y y que anulen a uno, por lo menos, de los factores de su primer miembro (Apéndice IB, 2). Es decir, la ecuación (2) se satisface para valores que satisfagan a una cualquiera de las ecuaciones siguientes:

$$x - y = 0, \tag{3}$$

$$x + y = 0. \tag{4}$$

Las coordenadas de cualquier punto que satisfagan ya sea a (3) o (4) satisfarán también (2) y, por tanto, a (1). Por lo tanto, de acuerdo con la definición 1 del Artículo 14, la gráfica de la ecuación (1) constará de dos curvas que son las gráficas de las ecuaciones (3) y (4). Se recomienda al estudiante que trace las gráficas de (3) y (4) y compruebe que se trata de dos rectas que pasan por el origen y tienen de pendientes 1 y -1, respectivamente.

En general, si la ecuación

$$f(x, y) = 0 \tag{5}$$

es factorizable, es decir, si $f(x, y)$ puede escribirse como el producto de dos o más factores variables, la gráfica de (5) constará de las gráficas de las ecuaciones obtenidas al igualar a cero cada uno de estos factores.

21. Intersecciones de curvas. Consideremos dos ecuaciones independientes

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

$$g(x, y) = 0. \tag{2}$$

Si sus gráficas se cortan en uno o más puntos, cada uno de estos puntos se llama *punto de intersección*. Como un punto de intersección de dos curvas (1) y (2) está sobre *cada una* de dichas curvas, sus coordenadas deben satisfacer, simultáneamente, *ambas* ecuaciones (1) y (2), de acuerdo con las definiciones del Artículo 14. La interpretación analítica de un punto de intersección es obvia; en el caso que estamos estudiando, es un punto cuyas coordenadas representan una *solución común* de las ecuaciones (1) y (2).

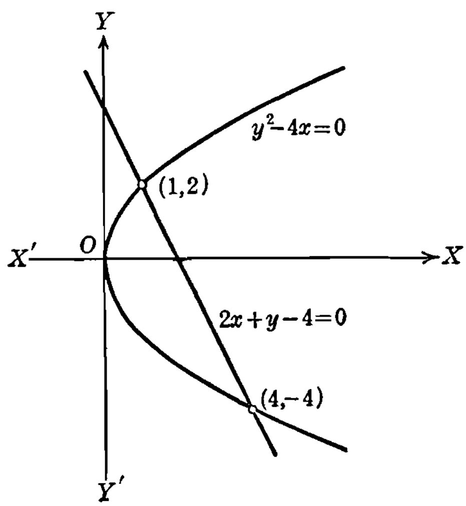

Fig. 31

Como las coordenadas de un punto deben ser ambas números reales, una solución común (x, y) de (1) y (2) no puede representar un punto de intersección en nuestro sistema coordenado real a menos que ambos valores de x y y sean reales. Además, si las ecuaciones (1) y (2) son incompatibles, es decir, no tiene solución común, sus gráficas no se cortan.

Ejemplo. Hallar analítica y gráficamente, los puntos de intersección de las dos curvas (la primera es realmente una recta) cuyas ecuaciones son

$$2x + y - 4 = 0, \qquad (3)$$

$$y^2 - 4x = 0. \qquad (4)$$

Solución. De (3), $y = 4 - 2x$; sustituyendo en (4) se obtiene la ecuación cuadrática

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

cuyas raíces son $x = 1, 4$.

Sustituyendo en (3) se obtiene que los valores correspondientes de y son 2, -4. Por tanto, los puntos de intersección son $(1, 2)$ y $(4, -4)$.

Gráficamente, los puntos de intersección se obtienen trazando la recta (3) y la curva (4). La gráfica correspondiente aparece en la figura 31

EJERCICIOS. Grupo 7

En cada uno de los ejercicios 1-10, factorizar la ecuación correspondiente y trazar la gráfica.

1. $x^2 - 4y^2 = 0$.
2. $9x^2 - 2y^2 = 0$.
3. $x^3 - x^2 y - 2xy^2 = 0$.
4. $x^2 + 2xy + y^2 = 1$.
5. $6x^2 + xy - 2y^2 + 7x + 7y - 3 = 0$.
6. $x^3 + y^3 + x^2 y + xy^2 - 4x - 4y = 0$.
7. $x^3 - x^2 y - xy + y^2 = 0$.
8. $x^2 y^2 - 4x^3 + 4xy^2 - y^4 = 0$.
9. $x^2 y + x^2 - xy^2 + xy + 2x = 0$.
10. $x^3 + x^2 + 2xy^2 + 2y^2 - 4x - 4 = 0$.

En cada uno de los ejercicios 11-20 hallar, analítica y gráficamente, los puntos de intersección, cuando los haya, para las curvas dadas.

11. $2x - y - 1 = 0;\ 3x + y - 9 = 0$.
12. $x + 4y + 7 = 0;\ 2x - 3y - 8 = 0$.
13. $x + y - 5 = 0;\ 3x + 3y + 7 = 0$.
14. $y^2 - x = 0;\ 2x - y - 6 = 0$.
15. $x^2 - y = 0;\ y^2 - x = 0$.
16. $x^2 + y^2 = 4;\ x + y = 2$.
17. $x^2 + y^2 = 8;\ y^2 = 2x$.
18. $x^2 + y^2 = 1;\ x^2 - y^2 = 4$.
19. $x^2 + y^2 = 13;\ xy = 6$.
20. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0;\ 3x - y - 8 = 0$.

22. Segundo problema fundamental. Consideremos ahora el segundo problema fundamental de la Geometría analítica, ya enunciado en el Artículo 13: Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

Una figura geométrica, tal como una curva, se da, generalmente, por su *definición*. Por *definición de un objeto* entendemos una descripción de ese objeto, de tal naturaleza que sea posible identificarlo de una manera definida entre todos los demás objetos de su clase. Debemos observar cuidadosamente lo que implica este enunciado: expresa una *condición necesaria y suficiente* para la existencia del objeto definido (Art. 9). Así, consideremos que estamos definiendo una curva plana del tipo C por medio de una propiedad P que únicamente posee C. Entonces, entre todas las curvas planas, una curva es del tipo C *si y solamente si* posee la propiedad P.

Como un ejemplo específico, consideremos una curva plana muy conocida, *la circunferencia*. *Definimos* una circunferencia como una curva plana que posee la propiedad única P de que todos sus puntos están a igual distancia de un punto

fijo en su plano. Esto significa que toda circunferencia tiene la propiedad P, y recíprocamente, toda curva plana que tenga la propiedad P es una circunferencia.

Para una curva, dar la *condición* que deben cumplir sus puntos es dar una *ley* a la cual deben obedecer los puntos de la curva. Esto significa que *todo punto* de la curva debe satisfacer la ley particular de la curva. De acuerdo con esto se define frecuentemente una curva como *el lugar geométrico descrito por un punto que se mueve siguiendo una ley especificada*. Así, una circunferencia puede definirse como el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a un punto fijo de ese plano es constante.

Un lugar geométrico no debe satisfacer necesariamente una sola condición; puede satisfacer dos o más condiciones. Así podemos tener una curva que sea el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que: 1) pasa por un punto dado, y 2) se conserva siempre a una distancia constante de una recta dada. Podemos entonces hacer el resumen de las notas precedentes en la siguiente

DEFINICIÓN. Una curva es el lugar geométrico de todos aquellos puntos, y *solamente* de aquellos puntos, que satisfacen una o más condiciones geométricas dadas.

El estudiante debe observar que esta definición implica que la condición o condiciones dadas sean necesarias y suficientes para la existencia de la curva. Esta definición debe también compararse con la definición 1 del Artículo 14.

En este artículo hemos estudiado el problema desde un punto de vista puramente geométrico. En el siguiente, consideraremos la interpretación analítica.

23. Ecuación de un lugar geométrico. Estudiaremos ahora el problema de la determinación de la ecuación de un lugar geométrico en el caso de que la interpretación analítica de la condición o condiciones geométricas definen el lugar geométrico. El método está indicado claramente por dos definiciones previas, la definición 1 del Artículo 14 y la última definición del Artículo 22. Combinando estas dos definiciones tenemos una nueva

DEFINICIÓN. Se llama *ecuación de un lugar geométrico plano* a una ecuación de la forma

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

cuyas soluciones reales para valores correspondientes de x y y son todas las coordenadas de aquellos puntos, y *solamente* de aquellos puntos, que satisfacen la condición o condiciones geométricas dadas que definen el lugar geométrico.

Nótese que esta definición expresa una condición necesaria y suficiente para que (1) sea la ecuación de un lugar geométrico. De acuerdo con esto, el procedimiento para obtener la ecuación de un lugar geométrico es esencialmente como sigue:

1. Se supone que el punto P, de coordenadas (x, y) es un punto *cualquiera* que satisface la condición o condiciones dadas, y, por tanto, un punto del lugar geométrico.

2. Se expresa, analíticamente, la condición o condiciones geométricas dadas, por medio de una ecuación o ecuaciones en las coordenadas variables x y y.

3. Se simplifica, si hace falta, la ecuación obtenida en el paso 2 de tal manera que tome la forma (1).

4. Se comprueba el recíproco: sean (x_1, y_1) las coordenadas de *cualquier* punto que satisfacen (1) de tal manera que la ecuación

$$f(x_1, y_1) = 0 \qquad (2)$$

es verdadera. Si de (2) se puede deducir la expresión analítica de la condición o condiciones geométricas dadas, cuando se aplica al punto (x_1, y_1), entonces (1) es la ecuación del lugar geométrico que se buscaba.

En la práctica se omite, generalmente, el paso 4, ya que la repetición del trabajo del paso 3 al paso 2 es, generalmente, inmediata. Nótese en el paso 1 que, al tomar P como un punto *cualquiera* del lugar geométrico, estamos considerando *todos* los puntos de ese lugar geométrico.

Ahora aplicaremos este procedimiento a dos ejemplos. Se recomienda al lector que estudie cuidadosamente estos ejemplos, porque una gran parte de nuestro futuro trabajo en Geometría analítica será la determinación de las ecuaciones de lugares geométricos.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que siempre equidista de dos puntos dados $A(-1, 2)$ y $B(4, -1)$.

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Entonces P debe satisfacer la condición geométrica de que los segmentos PA y PB sean iguales en longitud, o sea, que

$$|\overline{PA}| = |\overline{PB}| \qquad (3)$$

2. Por el teorema 2 del Artículo 6, tenemos

$$|\overline{PA}| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2},$$

$$|\overline{PB}| = \sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2}.$$

Por tanto, la condición geométrica dada (3) esta expresada analíticamente por la ecuación

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}. \qquad (4)$$

3. Si elevamos al cuadrado ambos miembros de (4), desarrollamos, trasponemos y simplificamos, la ecuación se reduce a

$$5x - 3y - 6 = 0. \qquad (5)$$

4. Sean (x_1, y_1) las coordenadas de un punto cualquiera P_1 que satisfacen (5) de tal manera que la ecuación

$$5x_1 - 3y_1 - 6 = 0 \qquad (6)$$

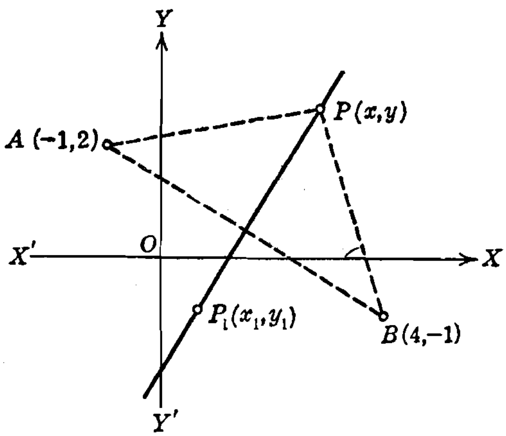

Fig. 32

es verdadera. Invirtiendo los pasos dados para reducir (4) a (5), podemos demostrar que de la ecuación (6) se deduce la ecuación

$$\sqrt{(x_1+1)^2+(y_1-2)^2} = \sqrt{(x_1-4)^2+(y_1+1)^2},$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (3) aplicada al punto P_1.

Luego (5) es la ecuación buscada. El lugar geométrico, que aparece en la figura 32, es la perpendicular al segmento AB en su punto medio, es decir, la *mediatriz* del segmento AB.

Ejemplo 2. Un punto se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual a su distancia del punto $A(4, 0)$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Sea B el pie de la perpendicular bajada de P al eje Y (fig. 33). Según el problema, P debe satisfacer la condición geométrica

$$|\overline{PB}| = |\overline{PA}|. \qquad (7)$$

2. Por definición de abscisa (Art. 4),

$$|\overline{PB}| = |x|,$$

y por el teorema 2 del Artículo 6,

$$|\overline{PA}| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}.$$

Por tanto, la condición geométrica (7) está expresada, analíticamente, por la ecuación

$$|x| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}. \qquad (8)$$

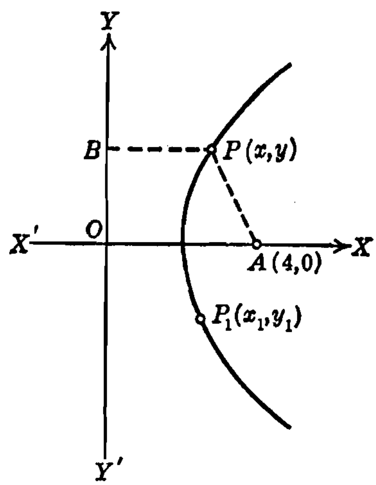

Fig. 33

3. Elevando al cuadrado ambos miembros de (8), desarrollando, y trasponiendo, obtenemos

$$y^2 - 8x + 16 = 0. \qquad (9)$$

4. Si (x_1, y_1) son las coordenadas de cualquier punto P_1 que satisfacen (9), entonces

$$y_1^2 - 8x_1 + 16 = 0. \qquad (10)$$

Si aplicamos a (10), en orden inverso, las mismas operaciones empleadas para reducir (8) a (9), obtenemos

$$|x_1| = \sqrt{(x_1-4)^2 + y_1^2},$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (7) aplicada al punto P_1.

Por tanto, (9) es la ecuación buscada. El lugar geométrico, una parábola, está trazado en la figura 33.

EJERCICIOS. Grupo 8

En cada uno de los ejercicios siguientes se recomienda al lector que, después de obtener la ecuación del lugar geométrico, construya la curva de acuerdo con lo dicho en el Artículo 19.

1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que: *a*) se conserva siempre a 2 unidades a la izquierda del eje Y; *b*) está siempre 4 unidades arriba del eje X; *c*) está siempre a igual distancia de los ejes X y Y.

2. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que: *a*) su abscisa es siempre igual al doble de su ordenada; *b*) su ordenada es siempre igual a su abscisa incrementada en 2; *c*) su abscisa es siempre igual a la recíproca de su ordenada.

3. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje Y disminuída en 3 es siempre igual al doble de su distancia al eje X. Hallar la ecuación de su lugar geométrico y dar su interpretación geométrica.

4. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al origen es siempre igual a 2. Hallar la ecuación de su lugar geométrico y dar su intepretación geométrica.

5. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(2, 3)$ es siempre igual a 5. Hallar la ecuación de su lugar geométrico y dar su interpretación geométrica.

6. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los dos puntos $A(1, -2)$ y $B(5, 4)$. Identificar el lugar geométrico, y construirlo gráficamente.

7. Una recta contiene los dos puntos $A(-1, 5)$ y $B(1, 3)$. Expresar, analíticamente, el hecho de que un punto cualquiera $P(x, y)$ está sobre la recta. Deducir la ecuación de la recta.

8. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia al punto $(4, 1)$ es siempre igual a su distancia del eje Y.

9. Una recta l, que pasa por el punto $A(-5, 1)$, es perpendicular a otra cuya pendiente es $\frac{1}{2}$. Expresar, analíticamente, el hecho de que un punto cualquiera $P(x, y)$ está sobre la recta l, y deducir, de aquí, su ecuación.

10. Una circunferencia de radio 3 tiene su centro en el punto $C(-3, -2)$. A partir de la definición, hallar la ecuación de esta circunferencia.

11. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje X es siempre igual a su distancia del punto $A(0, 4)$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

12. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los dos puntos $A(3, 5)$ y $B(-4, 2)$ es siempre igual a 30.

13. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los dos puntos $A(2, -2)$ y $B(4, 1)$ es siempre igual a 12. (Dos casos.)

14. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(2, 4)$ es siempre igual a su distancia del eje Y aumentada en 3. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

15. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos $A(3, 0)$ y $B(-3, 0)$ es siempre igual a 8.

16. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -3)$ es siempre igual a 8. Compárese el resultado con el obtenido en el ejercicio 15.

17. Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los dos puntos $A(3, 0)$ y $B(-3, 0)$ es siempre igual a 4. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

18. Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los dos puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -3)$ es siempre igual a 4. Hallar la ecuación de su lugar geométrico. Comparar el resultado con el obtenido en el ejercicio 17.

19. Un círculo de radio 4 tiene su centro en el punto $C(1, -1)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de todos sus radios.

20. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(3, 1)$ es siempre igual a la mitad de su distancia al eje Y. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

21. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(-1, 2)$ es siempre el doble de su distancia al eje X. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

22. Un segmento rectilíneo de longitud 4 se mueve de tal manera que uno de los puntos extremos permanece siempre sobre el eje X y el otro permanece siempre sobre el eje Y. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio del segmento. *Sugestión.* Véase el ejercicio 5 del grupo 4, Art. 11.

23. Dos de los vértices de un triángulo son los puntos fijos $A(-1, 3)$ y $B(5, 1)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice C si se mueve de tal manera que la pendiente del lado AC es siempre el doble de la del lado BC.

24. Dos de los vértices de un triángulo son los puntos fijos $A(1, 0)$ y $B(5, 0)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice C si se mueve de tal manera que la diferencia entre las longitudes de los lados AC y BC es siempre igual a la mitad de la longitud del lado AB.

25. Los extremos de la base de un triángulo son los puntos $A(0, 0)$ y $B(3, 0)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto C si se mueve de tal manera que el ángulo en la base CAB es siempre igual al doble del ángulo en la base CBA.

CAPITULO III

LA LINEA RECTA

24. Introducción. Hemos llegado a un punto en que debemos dar un giro a nuestro estudio de la Geometría analítica. Hasta aquí hemos deducido algunas relaciones fundamentales y considerado métodos generales para la construcción de curvas y la obtención de la ecuación de un lugar geométrico. Pero todavía no hemos hecho ningún intento sistemático de identificar las ecuaciones y sus lugares geométricos de una manera específica. Más aun, hasta este momento, no hemos establecido ninguna de las propiedades particulares que puede poseer una curva. En éste y en los siguientes capítulos, haremos un estudio detallado de la línea recta y de algunas de las curvas que son de máxima importancia en la Geometría analítica y sus aplicaciones. Naturalmente comenzaremos con el estudio de la línea recta debido a que su ecuación es la más sencilla.

25. Definición de línea recta. Nuestro primer objetivo en este capítulo es la obtención de la ecuación de la recta. Ya dijimos en el Artículo 23, que la ecuación de un lugar geométrico se obtiene a partir de un número suficiente de las propiedades únicas que lo definen. El estudiante recordará varias definiciones de la línea recta dadas en sus estudios anteriores, siendo la más común la que se expresa diciendo que una recta es la distancia más corta entre dos puntos. Pero esta definición se apoya en el significado del término distancia. Si tratamos ahora de definir la distancia, veremos que cualquier explicación nos devuelve al punto de partida. Por esta razón, los tratados superiores de Geometría, construídos sobre bases axiomáticas, admiten la existencia de la línea recta como un postulado. Nosotros admitiremos la siguiente definición de línea recta basada en el concepto de pendiente dado en el Artículo 8.

Definición de línea recta. Llamamos línea recta al lugar geométrico de los puntos tales que tomados *dos puntos diferentes cualesquiera*

$P_1(x_1, y_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2)$ *del lugar*, el valor de la pendiente m calculado por medio de la fórmula del teorema 4, Artículo 8,

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2,$$

resulta siempre constante.

26. Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada. Geométricamente, una recta queda perfectamente determinada por uno de sus puntos y su dirección. Analíticamente, la

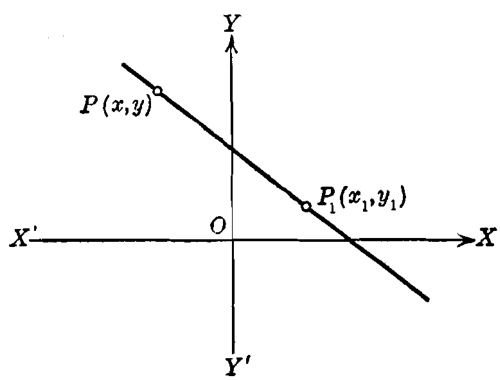

Fig. 34

ecuación de una recta puede estar perfectamente determinada si se conocen las coordenadas de uno de sus puntos y su ángulo de inclinación (y, por tanto, su pendiente).

TEOREMA 1. *La recta que pasa por el punto dado* $P_1(x_1, y_1)$ *y tiene la pendiente dada* m, *tiene por ecuación*

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con el método dado en el Artículo 23, sea $P(x, y)$ (fig. 34) un punto cualquiera de la recta, diferente del punto dado $P_1(x_1, y_1)$. Por la definición de recta (Art. 25), las coordenadas del punto $P(x, y)$ satisfacen la ecuación

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

de la cual obtenemos, inmediatamente, quitando denominadores, la ecuación (1).

Recíprocamente, si las coordenadas de cualquier otro punto $P_2(x_2, y_2)$ satisfacen (1), tenemos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

que es la expresión analítica de la definición de recta, aplicada a los dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Por tanto, P_2 está sobre la recta. Esto completa la demostración.

NOTAS. 1. Como la ecuación (1) está dada en función de un punto y la pendiente, se llama, a veces, *de la forma de punto y pendiente.*

2. Una recta que coincide o es paralela al eje Y no tiene pendiente (Art. 8). Por tanto, la ecuación (1) no puede representar a una recta de tal naturaleza, ni nuestra definición de recta puede aplicarse a ella. Para este caso, se ha demostrado en el Artículo 18 que la ecuación de la recta es de la forma $x = k$, en donde k es cualquier número real.

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4, -1)$ y tiene un ángulo de inclinación de 135°.

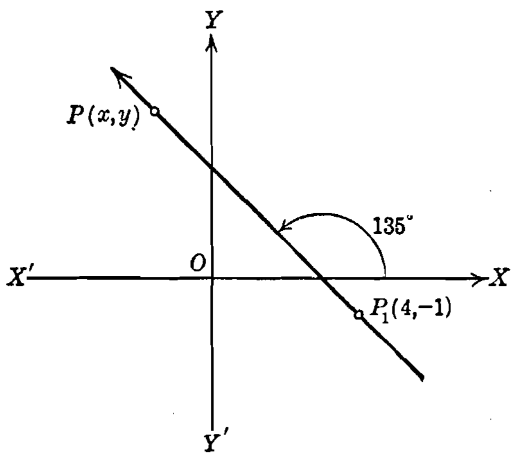

Fig. 35

Solución. La recta cuya ecuación se busca es la trazada en la figura 35. Por el Artículo 8, la pendiente de esta recta es

$$m = \operatorname{tg} 135° = -1.$$

Por tanto, por el teorema 1, la ecuación de la recta es

$$y - (-1) = -1(x - 4),$$

o sea,

$$x + y - 3 = 0.$$

27. Otras formas de la ecuación de la recta. Una recta es o no paralela al eje Y. Si es paralela al eje Y su ecuación es de la forma $x = k$; si no es paralela a dicho eje, su pendiente está definida y su ecuación está dada por el teorema 1 del Artículo 26 Como todas las rectas caen bajo una de estas dos clasificaciones, cualquiera otra forma de la ecuación de una recta debe reducirse, necesariamente, a una de estas dos formas. Para algunos tipos de problemas, sin embargo, son más convenientes otras formas; a continuación consideramos algunas de ellas.

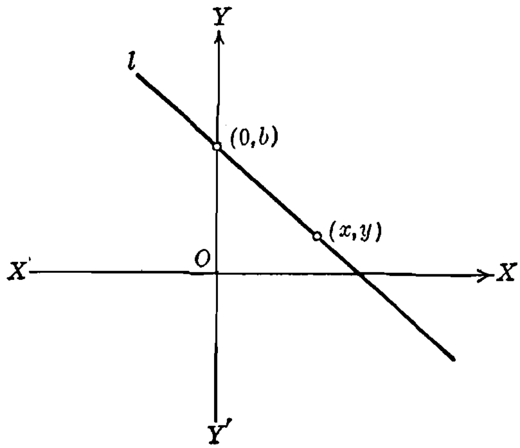

Fig. 36

a) *Ecuación de la recta dada su pendiente y su ordenada en el origen.* Consideremos una recta l (fig. 36) cuya pendiente es m y cuya *ordenada en el origen,* es decir, su intercepción con el eje Y, es b. Como se conoce b, el punto cuyas coordenadas son $(0, b)$ está sobre la recta (Art. 15). Por tanto, el problema se reduce a hallar la ecuación de la recta que pasa por un punto $(0, b)$ y tiene una pendiente dada. Según el teorema 1 del Artículo 26 la ecuación buscada es

$$y - b = m(x - 0),$$

o sea,

$$y = mx + b.$$

Podemos enunciar este resultado como el

TEOREMA 2. *La recta cuya pendiente es* m *y cuya ordenada en el origen es* b *tiene por ecuación*

$$y = mx + b.$$

NOTA. Una recta paralela al eje Y no tiene ordenada en el origen. En este caso no puede usarse la forma de ecuación que acabamos de obtener. Como ya dijimos la ecuación de una recta tal es de la forma $x = k$.

b) *Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.* Geométricamente, una recta queda perfectamente determinada por dos cualesquiera de sus puntos. Analíticamente, la ecuación de una recta también queda perfectamente determinada conociendo las coordenadas de dos cualesquiera de sus puntos.

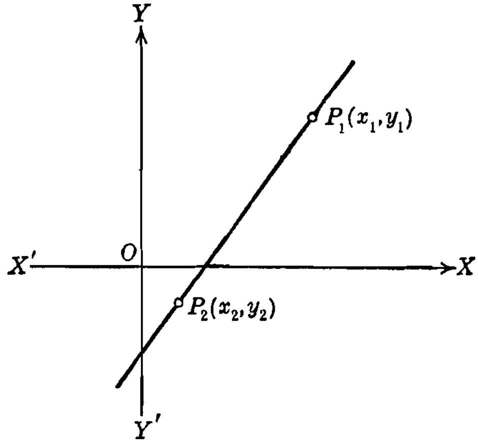

Fig. 37

TEOREMA 3. *La recta que pasa por dos puntos dados* $P_1(x_1, y_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2)$ *tiene por ecuación*

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1), \quad x_1 \neq x_2. \qquad (1)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea la recta P_1P_2 de la figura 37. Como se conocen dos de sus puntos, su pendiente está dada por (Teorema 4, Artículo 8)

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2.$$

Por tanto, con esta pendiente y el punto $P_1(x_1, y_1)$, el problema se reduce a hallar la ecuación de una recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada. En consecuencia, sustituyendo este valor de la pendiente en la ecuación (1) del Teorema 1, Art. 26, obtenemos la forma (1) tal como se quería demostrar.

NOTAS. 1. Si $x_1 = x_2$, la ecuación (1) no puede usarse. En este caso, la recta es paralela al eje Y, y su ecuación es $x = x_1$.

2. Si se multiplica la ecuación (1) por $x_1 - x_2$ y se pasan todos sus términos al primer miembro, se obtiene

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 - y_2 x + x_2 y + y_1 x - x_1 y = 0, \qquad (2)$$

que puede escribirse en forma de determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

En efecto, si desarrollamos este determinante por menores con respecto a los elementos de la tercera columna, obtendremos el primer miembro de (2). Más adelante deduciremos la ecuación (3) por otro método (Art. 35) y será discutida en esa ocasión.

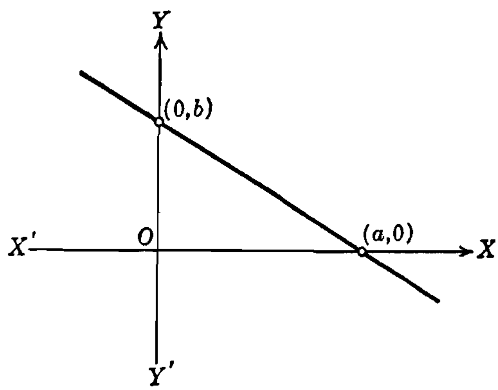

Fig. 38

c) *Ecuación simétrica de la recta*. Sean $a \neq 0$ y $b \neq 0$ los segmentos que una recta determina sobre los ejes X y Y (fig. 38), es decir, sus intercepciones. Entonces $(a, 0)$ y $(0, b)$ son dos puntos de la recta (Art. 15). Por tanto, el problema de obtener la ecuación de una recta cuando se conocen los segmentos que determina sobre los ejes se reduce a hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, y tenemos, por el teorema 3,

$$y - 0 = \frac{0 - b}{a - 0}(x - a),$$

de donde

$$ay = -bx + ab.$$

Trasponiendo $-bx$ al primer miembro y dividiendo por ab, obtenemos

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Esta ecuación es la llamada ecuación simétrica de la recta. De aquí el siguiente

TEOREMA 4. *La recta cuyas intercepciones con los ejes* X *y* Y *son* a $\neq 0$ *y* b $\neq 0$, *respectivamente, tiene por ecuación*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{4}$$

NOTAS. 1. Si $a = 0$, entonces también $b = 0$, y la forma simétrica no puede usarse. En este caso, solamente se conoce un punto, el origen, y no es suficiente para determinar una recta.

2. Como una recta queda perfectamente determinada por dos cualesquiera de sus puntos, la manera más conveniente de trazar una recta a partir de su ecuación

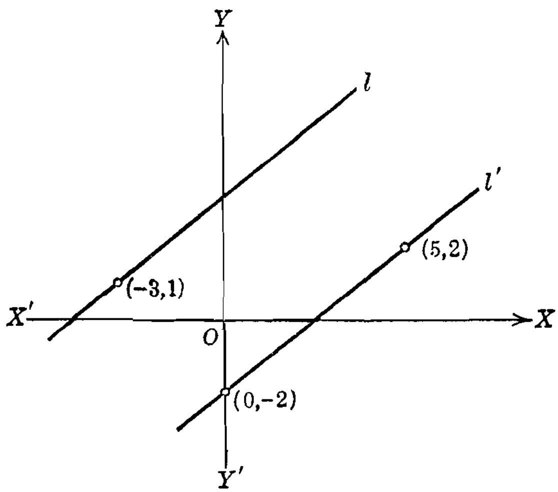

Fig. 39

es determinar las dos intersecciones con los ejes. Si la recta pasa por el origen, basta determinar otro punto cuyas coordenadas satisfagan la ecuación.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-3, 1)$ y es paralela a la recta determinada por los dos puntos $(0, -2)$ y $(5, 2)$.

Solución. Como se conoce un punto de la recta requerida l (fig. 39), solamente es necesario obtener su pendiente que, según sabemos, es la misma que la de la recta paralela l' que pasa por los dos puntos $(0, -2)$, $(5, 2)$ (corolario 1 del teorema 5, Art. 10). La pendiente de l' es, por el teorema 4 del Artículo 8,

$$m = \frac{2 - (-2)}{5 - 0} = \frac{4}{5}.$$

Por tanto, según el teorema 1, Artículo 26, la ecuación de l es

$$y - 1 = \tfrac{4}{5}(x + 3),$$

o sea,

$$4x - 5y + 17 = 0.$$

Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la mediatriz (perpendicular en su punto medio) del segmento $(-2, 1)$, $(3, -5)$.

Solución. Supongamos que la mediatriz es la recta l y que el segmento es l' (fig. 40). Las coordenadas del punto medio M de l' son $(\frac{1}{2}, -2)$ por el corolario al teorema 3, Artículo 7. La pendiente de l', por el teorema 4 del Artículo 8, es

$$m' = \frac{1-(-5)}{-2-3} = -\frac{6}{5}.$$

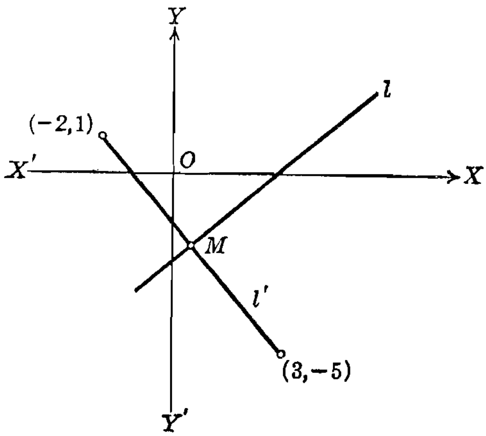

Fig. 40

Como l es perpendicular a l', su pendiente, por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 10, es $m = \frac{5}{6}$. Por tanto, por el teorema 1, Artículo 26, la ecuación de l es

$$y + 2 = \tfrac{5}{6}(x - \tfrac{1}{2}),$$

la cual se reduce a

$$10x - 12y - 29 = 0.$$

EJERCICIOS. Grupo 9

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 5)$ y tiene de pendiente 2.

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-6, -3)$ y tiene un angulo de inclinación de 45°.

3. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y cuya intercepción con el eje Y es -2.

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos $A(4, 2)$ y $B(-5, 7)$.

5. Los vértices de un cuadrilátero son $A(0, 0)$, $B(2, 4)$, $C(6, 7)$, $D(8, 0)$. Hallar las ecuaciones de sus lados.

6. Los segmentos que una recta determina sobre los ejes X y Y son 2 y -3, respectivamente. Hallar su ecuación.

7. Una recta pasa por los dos puntos $A(-3, -1)$ y $B(2, -6)$. Hallar su ecuación en la forma simétrica.

8. Una recta de pendiente -2 pasa por el punto $A(-1, 4)$. Hallar su ecuación en la forma simétrica.

9. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$.

10. Una recta pasa por el punto $A(7, 8)$ y es paralela a la recta $C(-2, 2)$ y $D(3, -4)$. Hallar su ecuación.

11. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, 4)$, y determina sobre el eje X el segmento -9.

12. Demostrar que los puntos $A(-5, 2)$, $B(1, 4)$ y $C(4, 5)$ son colineales hallando la ecuación de la recta que pasa por dos de estos puntos.

13. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que los ejes coordenados determinan en la recta $5x + 3y - 15 = 0$.

Los ejercicios 14-21 se refieren al triángulo cuyos vértices son $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ y $C(6, -3)$.

14. Hallar las ecuaciones de los lados.

15. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el vértice A y es paralela al lado opuesto BC.

16. Hallar las ecuaciones de la rectas que pasan por el vértice B y trisecan al lado opuesto AC.

17. Hallar los vértices del triángulo formado por las rectas que pasan por los vértices A, B y C y son paralelas a los lados opuestos.

18. Hallar las ecuaciones de las medianas y las coordenadas de su punto de intersección.

19. Hallar las ecuaciones de las mediatrices de los lados y las coordenadas de su punto de intersección. Este punto se llama *circuncentro*.

20. Hallar las ecuaciones de las alturas y su punto de intersección. Este punto se llama *ortocentro*.

21. Hallar las coordenadas del pie de la altura correspondiente al lado AC. A partir de estas coordenadas hállese la longitud de la altura y luego el área del triángulo.

22. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -4, y que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y - 8 = 0$ y $3x - 2y + 9 = 0$.

23. Las ecuaciones de los lados de un cuadrilátero son $3x - 8y + 36 = 0$, $x + y - 10 = 0$, $3x - 8y - 19 = 0$ y $x + y + 1 = 0$. Demostrar que la figura es un paralelogramo, y hallar las coordenadas de sus vértices.

24. Hallar el área del triángulo rectángulo formado por los ejes coordenados y la recta cuya ecuación es $5x + 4y + 20 = 0$.

25. Las coordenadas de un punto P son $(2, 6)$, y la ecuación de una recta l es $4x + 3y = 12$. Hallar la distancia del punto P a la recta l siguiendo en orden los siguientes pasos: *a*) Hallar la pendiente de l. *b*) Hallar la ecuación de la recta l' que pasa por P y es perpendicular a l. *c*) Hallar las coordenadas de P', punto de intersección de l y l'. *d*) Hallar la longitud del segmento PP'.

26. El punto P de ordenada 10 está sobre la recta cuya pendiente es 3 y que pasa por el punto $A(7, -2)$. Calcular la abscisa de P.

27. Determinar el valor de los coeficientes A y B de la ecuación $Ax - By + 4 = 0$ de una recta, si debe pasar por los puntos $C(-3, 1)$ y $D(1, 6)$.

28. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $5x - 7y + 27 = 0$, $9x - 2y - 15 = 0$ y $4x + 5y + 11 = 0$. Hallar sus ángulos y comprobar los resultados.

29. Deducir la ecuación de la recta cuya pendiente es m y determina sobre el eje X el segmento a. Compárese este resultado con la ecuación de una recta conocida su pendiente y su ordenada en el origen, dada en el Artículo 27.

30. Una recta pasa por los dos puntos $A(-1, 3)$ y $B(5, 4)$. Escríbase su ecuación en forma de determinante. Verifíquese el resultado desarrollando el determinante.

28. Forma general de la ecuación de una recta. En los artículos precedentes hemos visto que la ecuación de una recta cualquiera, en el plano coordenado, es de la forma lineal

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

en donde ya sea A o B debe ser diferente de cero y C puede o no ser igual a cero. La ecuación (1) se llama la *forma general* de la ecuación de una recta.

Ahora consideraremos el problema inverso, a saber, la ecuación lineal (1), ¿representa siempre una línea recta? Para contestar a esta pregunta examinaremos las dos formas posibles de la ecuación (1) con respecto al coeficiente de y, es decir, las formas para $B = 0$ y $B \neq 0$.

CASO I. $B = 0$. Si $B = 0$, entonces $A \neq 0$, y la ecuación (1) se reduce a la forma

$$x = -\frac{C}{A}. \tag{2}$$

Pero (2) es de la forma $x = k$, de la que anteriormente se demostró que es la ecuación de una recta paralela al eje Y (Art. 18).

CASO II. $B \neq 0$. Si $B \neq 0$, podemos dividir la ecuación (1) por B, y entonces por trasposición se reduce a la forma

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \tag{3}$$

Pero (3) está en la forma $y = mx + b$ (Art. 27) y, por tanto, es la ecuación de una recta cuya pendiente es $-\frac{A}{B}$ y cuya ordenada en el origen es $-\frac{C}{B}$.

En consecuencia, vemos que en todos los casos la ecuación (1) representa una recta. Vamos a hacer un resumen de estos resultados en el

TEOREMA 5. *Una ecuación lineal en las variables* x *y* y *representa una recta y recíprocamente.*

NOTAS. 1. Este teorema muestra lo apropiado del término *lineal* para designar las expresiones algebraicas de primer grado.

2. La pendiente de una recta cualquiera, no paralela al eje Y, puede obtenerse directamente a partir de su ecuación. Para ello bastará reducir la forma dada (1) a la forma (3): el coeficiente de x es la pendiente. Más sencillamente, todo lo que tenemos que hacer es dividir en (1) el coeficiente de x por el coeficiente de y y después cambiar el signo.

29. Discusión de la forma general. Ahora haremos algunas observaciones de gran importancia, no sólo con respecto a la recta, sino también a toda la Geometría analítica. Acabamos de ver que la ecuación de una recta es, necesariamente, de la forma

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Por tanto, al buscar la ecuación de una recta particular, sabemos *a priori* que es de la forma lineal (1); el problema que queda por resolver es el de determinar los coeficientes A, B y C. El estudio de los coeficientes es, pues, de gran importancia. Este último enunciado, sin embargo, no está restringido a la línea recta solamente; a medida que avancemos en el estudio de la Geometría analítica veremos que, una vez que se haya establecido la ecuación general de un tipo particular de curva, las propiedades y características distintivas de esa curva pueden determinarse por una investigación de los coeficientes de su ecuación.

Consideremos los tres coeficientes A, B y C en la forma general (1). Notamos, en primer lugar, que todos son constantes reales y arbitrarias, es decir, que pueden tomar cualquier valor real, siempre que A y B no sean simultáneamente nulos. Puede parecer a primera vista que estas tres constantes son independientes. Pero puede demostrarse fácilmente que, en realidad, solamente hay dos constantes independientes. En efecto, uno, cuando menos, de los coeficientes A y B debe ser diferente de cero. Por tanto, si $A \neq 0$, podemos dividir la ecuación (1) por A de manera que tome la forma

$$x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A} = 0, \qquad (2)$$

en la que hay solamente dos constantes independientes que son las razones arbitrarias B/A y C/A. Sabemos, por Algebra, que para calcular estas constantes se necesitan dos ecuaciones independientes que las contengan, y que cada una de estas ecuaciones se obtiene a partir de una condición independiente. Por tanto, *analíticamente, la ecuación de una recta queda perfectamente determinada por dos condiciones independientes.* Geométricamente, una recta también queda determinada por dos condiciones independientes; luego una recta está completamente determinada si se conocen dos de sus puntos, o uno de sus puntos y su dirección.

Ejemplo. Hallar los valores que deben tener los coeficientes de la ecuación general $Ax + By + C = 0$ de una recta, para que pase por los dos puntos $(-1, 4)$ y $(3, -2)$. De ahí hallar la ecuación de la recta.

Solución. Como los dos puntos están sobre la recta, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de dicha recta (Art. 14). Por tanto, para el punto $(-1, 4)$, tenemos:

$$-A + 4B + C = 0; \tag{3}$$

y para el punto $(3, -2)$ tenemos

$$3A - 2B + C = 0. \tag{4}$$

Resolviendo las ecuaciones (3) y (4) para A y B en términos de C, obtenemos

$$A = -\tfrac{3}{5}C, \quad B = -\tfrac{2}{5}C.$$

Si sustituímos estos valores de A y B en la forma general, obtenemos

$$-\tfrac{3}{5}Cx - \tfrac{2}{5}Cy + C = 0.$$

Dividiendo toda la ecuación por C y simplificando, obtenemos como ecuación de la recta

$$3x + 2y - 5 = 0,$$

cuyos coeficientes son $A = 3$, $B = 2$, $C = -5$.

NOTA. Si $C = 0$, el problema no puede resolverse tal como se ha hecho. En este caso podemos resolver (3) y (4) para A y C en términos de B si $B \neq 0$, o para B y C en términos de A si $A \neq 0$.

30. Posiciones relativas de dos rectas. Ahora consideraremos las posiciones relativas de dos rectas, cuyas ecuaciones pueden ponerse en las formas generales:

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

$$A'x + B'y + C' = 0. \tag{2}$$

En particular, determinaremos las condiciones analíticas bajo las cuales estas dos rectas son: *a*) paralelas; *b*) perpendiculares; *c*) coinciden; *d*) se cortan en uno y solamente en un punto.

a) La pendiente de (1) es $-\dfrac{A}{B}$ si $B \neq 0$, y la pendiente de (2) es $-\dfrac{A'}{B'}$ si $B' \neq 0$. Por el corolario 1 al teorema 5, Artículo 10, una condición necesaria y suficiente para que las rectas (1) y (2) sean paralelas es que

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'},$$

o sea,

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'},$$

es decir, los coeficientes de x y y deben ser proporcionales.

Si $B = 0$, la recta (1) es paralela al eje Y. Si la recta (2) es paralela a la (1), también es paralela al eje Y, luego también $B' = 0$. En este caso, la última proporción establecida no tiene sentido; lo mismo sucede si A y A' son cero, es decir, si ambas rectas son paralelas al eje X. Pero, si escribimos esta relación en la forma

$$AB' - A'B = 0,$$

tenemos una relación verdadera para todos los casos.

b) Por el corolario 2 al teorema 5, Artículo 10, una condición necesaria y suficiente para que las rectas (1) y (2) sean perpendiculares es que

$$\left(-\frac{A}{B}\right)\left(-\frac{A'}{B'}\right) = -1,$$

o sea,

$$AA' + BB' = 0.$$

El estudiante debe demostrar que esta última relación es también verdadera si una de las rectas es paralela al eje Y y, por lo tanto, no tiene pendiente.

c) Dos rectas coinciden si tienen un punto común y la misma dirección o pendiente. La intersección de la recta (1) con el eje X es el punto de abscisa $-\frac{C}{A}$, y la de la recta (2) es el punto de abscisa $-\frac{C'}{A'}$. Por tanto, debemos tener

$$-\frac{C}{A} = -\frac{C'}{A'},$$

o sea,

$$\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}. \tag{3}$$

También, por ser las pendientes iguales,

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'},$$

o sea,

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}. \tag{4}$$

De (3) y (4) tenemos

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}; \tag{5}$$

es decir, dos rectas coinciden si y solamente si sus coeficientes correspondientes son proporcionales.

La proporción (5) se ha escrito suponiendo que todos los coeficientes de las ecuaciones (1) y (2) son diferentes de cero. Si, en vez de esto, uno o más coeficientes son cero, esta proporción no tiene sentido en su totalidad o en parte. Pero si escribimos

$$A = kA', \quad B = kB', \quad C = kC',$$

en donde k es una constante diferente de cero, obtendremos relaciones verdaderas para todos los casos.

d) Geométricamente, dos rectas se cortan en uno y solamente en un punto en el caso de que no sean paralelas. Analíticamente, si las rectas (1) y (2) no son paralelas, del apartado (*a*) anterior se deduce que

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}, \quad \text{o sea, que } AB' - A'B \neq 0.$$

Podemos hacer el resumen de los resultados anteriores en el

TEOREMA 6. *Si las ecuaciones de dos rectas son* $Ax + By + C = 0$ *y* $A'x + B'y + C' = 0$, *las relaciones siguientes son condiciones necesarias y suficientes para*

a) *Paralelismo*, $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$, *o sea*, $AB' - A'B = 0$;

b) *Perpendicularidad*, $AA' + BB' = 0$;

c) *Coincidencia*, $A = kA'$, $B = kB'$, $C = kC'$ $(k \neq 0)$;

d) *Intersección en uno y solamente un punto*,

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}, \quad \text{o sea,} \quad AB' - A'B \neq 0.$$

Ejemplo. La ecuación de una recta l es $5x - 7y + 11 = 0$. Escribir la ecuación que representa a todas las rectas paralelas a l. A partir de esta última ecuación hallar la de la recta paralela a l y que pasa por el punto $(4, 2)$.

Solución. Representemos por $Ax + By + C = 0$ la ecuación de todas las rectas paralelas a l. Por el apartado (a) del teorema 6 se verifica

$$\frac{A}{5} = \frac{B}{-7}, \quad \text{o sea,} \quad B = -\frac{7}{5}A.$$

Por tanto, la ecuación de todas las rectas paralelas a l es

$$Ax - \frac{7A}{5}y + C = 0,$$

de donde,

$$5x - 7y + \frac{5C}{A} = 0,$$

o sea,

$$5x - 7y + k = 0, \tag{6}$$

en donde $k = \frac{5C}{A}$ es una constante arbitraria.

Si la recta (6) debe pasar por el punto (4, 2), las coordenadas deben satisfacer (6). Por tanto:

$$5 \cdot 4 - 7 \cdot 2 + k = 0,$$

de donde $k = -6$, y la recta buscada es

$$5x - 7y - 6 = 0.$$

EJERCICIOS. Grupo 10

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Transformar la forma general de la ecuación de una recta a la forma simétrica. Establecer las restricciones a que deben estar sometidos los coeficientes para permitir esta transformación.

2. Hallar la ecuación de la recta, determinando los coeficientes de la forma general, que pasa por el punto $(-2, 4)$ y tiene una pendiente igual a -3.

3. Hallar la ecuación de una recta, determinando los coeficientes de la forma general, si los segmentos que determina sobre los ejes X y Y, es decir, sus intercepciones, son 3 y -5, respectivamente.

4. Hallar la ecuación de la recta, determinando los coeficientes de la forma general, que es perpendicular a la recta $3x - 4y + 11 = 0$ y pasa por el punto $(-1, -3)$.

5. Hallar el valor de k para que la recta $kx + (k-1)y - 18 = 0$ sea paralela a la recta $4x + 3y + 7 = 0$.

6. Determinar el valor de k para que la recta $k^2x + (k+1)y + 3 = 0$ sea perpendicular a la recta $3x - 2y - 11 = 0$.

7. Hallar la pendiente e intercepciones de la recta $7x - 9y + 2 = 0$.

8. Hallar la pendiente, ángulo de inclinación y las intercepciones de la recta que pasa por el punto (2, 3) y es perpendicular a la recta $2x - 7y + 2 = 0$.

9. Determinar el valor de k para que la recta $4x + 5y + k = 0$ forme con los ejes coordenados un triángulo rectángulo de área igual a $2\frac{1}{2}$ unidades cuadradas

10. En las ecuaciones $ax + (2 - b)y - 23 = 0$ y $(a - 1)x + by + 15 = 0$ hallar los valores de a y b para que representen rectas que pasan por el punto $(2, -3)$.

11. Demostrar que la recta que pasa por los puntos $(4, -1)$ y $(7, 2)$ bisecta al segmento cuyos extremos son los puntos $(8, -3)$ y $(-4, -3)$.

12. Demostrar que las rectas $2x - y - 1 = 0$, $x - 8y + 37 = 0$, $2x - y - 16 = 0$ y $x - 8y + 7 = 0$ forman un paralelogramo, y hallar las ecuaciones de sus diagonales.

13. Demostrar que las rectas $5x - y - 6 = 0$, $x + 5y - 22 = 0$, $5x - y - 32 = 0$ y $x + 5y + 4 = 0$ forman un cuadrado.

14. Demostrar que los ángulos suplementarios formados por las dos rectas $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$ están dados por las fórmulas

$$\operatorname{tg} \theta = \pm \frac{A'B - AB'}{AA' + BB'}.$$

15. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas $4x - 9y + 11 = 0$ y $3x + 2y - 7 = 0$.

16. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(2, -1)$ y que forman cada una un ángulo de 45° con la recta $2x - 3y + 7 = 0$.

17. A partir del resultado del ejercicio 14, deducir las condiciones necesarias y suficientes para el paralelismo y perpendicularidad de dos rectas, dadas en los apartados (a) y (b) del teorema 6, Artículo 30.

18. Si k es una constante cualquiera diferente de cero, demuéstrese que todo punto que esté sobre la recta $Ax + By + C = 0$ también estará sobre la recta $kAx + kBy + kC = 0$. Por tanto, dedúzcase la condición necesaria y suficiente para la coincidencia de dos rectas, dada en el apartado (c) del teorema 6, Artículo 30.

19. Por medio de determinantes obténgase la condición necesaria y suficiente para que las dos rectas $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$ se corten en uno y solamente un punto, dada en el apartado (d) del teorema 6, Artículo 30. *Sugestión*: Véase apéndice IB, 6.

20. Si tres rectas se cortan en un punto común, se dice que son *concurrentes*. Si las tres rectas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ y $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ son concurrentes, demuéstrese que sus coeficientes satisfacen la condición

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

El recíproco es verdad si c/par es no paralelo

21. Demostrar que las tres rectas $3x - 5y + 7 = 0$, $2x + 3y - 8 = 0$ y $6x - 7y + 8 = 0$ son concurrentes.

22. Demostrar analíticamente que las medianas de cualquier triángulo son concurrentes.

23. Demostrar analíticamente que las mediatrices perpendiculares a los lados en su punto medio en cualquier triángulo son concurrentes.

24. Demostrar analíticamente que las alturas de cualquier triángulo son concurrentes.

25. Los vértices de un triángulo son $(1, 1)$, $(4, 7)$ y $(6, 3)$. Demostrar que el baricentro (punto de intersección de las medianas), el circuncentro (pun-

to de intersección de las mediatrices) y el ortocentro (punto de intersección de las alturas) son colineales.

26. Demostrar analíticamente que el baricentro, circuncentro y ortocentro de cualquier triángulo son colineales. La recta que los une se llama *recta de Euler*.

132

27. Desde el punto (6, 0) se trazan perpendiculares a los lados $5x - y - 4 = 0$, $y = 1$ y $x - y - 4 = 0$ de un triángulo. Demostrar que los pies de estas perpendiculares son colineales.

n° 20

28. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (a, b) y por la intersección de las rectas $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ y $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$.

29. Una recta se mueve de tal manera que la suma de los recíprocos de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es siempre igual a una constante $k \neq 0$. Demostrar que la recta pasa siempre por el punto fijo $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$.

30. Hallar la longitud de la perpendicular bajada del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $l : Ax + By + C = 0$. Demostrar, a partir de esto, que la distancia d del punto P_1 a la recta l está dada por

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

31. Forma normal de la ecuación de la recta. Consideremos un segmento OP_1 de longitud p y con uno de sus extremos O siempre en el origen, tal como puede verse en la figura 41. La posición exacta de este segmento de recta en el plano coordenado está determinada por el ángulo ω, que, como en Trigonometría, es el ángulo positivo engendrado por el radio vector OP_1 al girar alrededor del origen (Apéndice IC, 1). De acuerdo con esto, la longitud p se considera siempre *positiva*, y la variación de los valores del ángulo ω viene dada por

$$0° \leq \omega < 360°. \qquad (1)$$

Es evidente que, para un par cualquiera de valores dados de p y ω, la recta l trazada por $P_1(x_1, y_1)$ perpendicular a OP_1 queda perfectamente determinada. Ahora obtendremos la ecuación de l por medio de la fórmula de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada.

Por Trigonometría, para cualquier posición de la recta l,

$$x_1 = p \cos \omega, \quad y_1 = p \operatorname{sen} \omega. \qquad (2)$$

Por tanto, las coordenadas del punto P_1 son $(p \cos \omega, p \operatorname{sen} \omega)$.

Para las posiciones (a) y (b) (fig. 41) el ángulo de inclinación del segmento OP_1 es ω, y, por tanto, su pendiente es $\operatorname{tg} \omega$.

Para las posiciones (c) y (d) (fig. 41) en donde α es el ángulo de inclinación de OP_1, tenemos (Apéndice IC, 3)

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg}\,(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha .$$

De aquí que para todas las posiciones del segmento OP_1, su pendiente está dada por $\operatorname{tg} \omega$. Como la recta l es perpendicular a OP_1, su

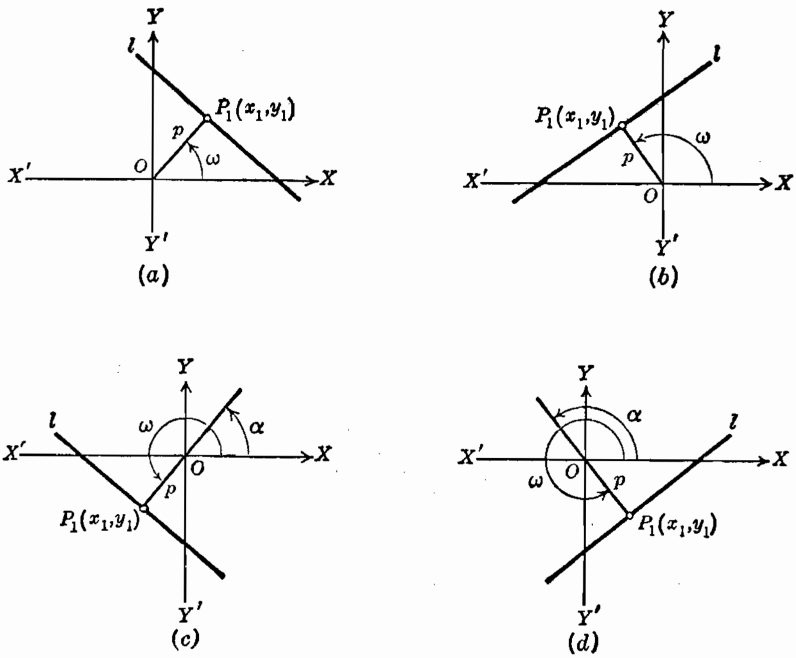

Fig. 41

pendiente para todas las posiciones es, por el corolario 2 del teorema 5, Artículo 10,

$$m = -\operatorname{ctg} \omega = -\frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}. \tag{3}$$

Según esto, de (2) y (3), la ecuación de l (teorema 1, Artículo 26) es

$$y - p \operatorname{sen} \omega = -\frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}\,(x - p \cos \omega),$$

de donde

$$y \operatorname{sen} \omega - p \operatorname{sen}^2 \omega = -x \cos \omega + p \cos^2 \omega ,$$

o sea, $$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p(\operatorname{sen}^2 \omega + \cos^2 \omega) = 0 .$$

Como $\text{sen}^2\,\omega + \cos^2\,\omega = 1$ (Apéndice IC, 2), esta última ecuación se reduce a

$$x \cos \omega + y \text{ sen } \omega - p = 0. \qquad (4)$$

Este resultado conduce al siguiente

TEOREMA 7. *La forma normal de la ecuación de una recta es*

$$x \cos \omega + y \text{ sen } \omega - p = 0,$$

en donde p *es un número positivo, numéricamente igual a la longitud de la normal trazada desde el origen a la recta, y* ω *es el ángulo positivo* $< 360°$ *medido a partir de la parte positiva del eje* X *a la normal.*

NOTA. Si una recta pasa por el origen, se tiene $p = 0$ en la forma normal de su ecuación. En este caso se prefiere suponer que la recta normal está dirigida hacia arriba del origen de tal manera que la variación de los valores de ω esté dada por

$$0 \leq \omega < 180°.$$

Ejemplo. En un círculo de centro en el origen y radio igual a 5, hallar la forma normal de la ecuación de su tangente en el punto $(-3, 4)$.

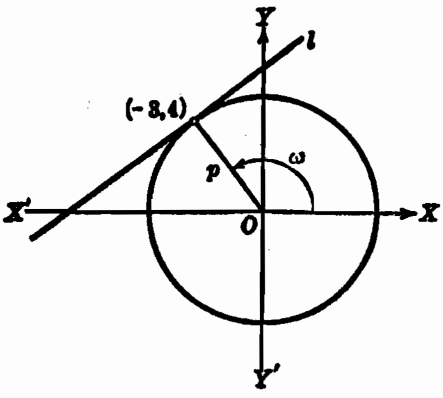

Fig. 42

Solución. La tangente buscada l aparece trazada en la figura 42. Por Geometría elemental sabemos que el radio que va al punto de tangencia es perpendicular a la tangente. Por tanto, $p = 5$, y $\text{sen } \omega = \frac{4}{5}$ y $\cos \omega = -\frac{3}{5}$. Luego la ecuación de l en la forma normal es

$$-\tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{5}y - 5 = 0. \qquad (5)$$

Ordinariamente, después de obtener la forma (5) en un problema, la escribiríamos en la forma general, que es más simple,

$$3x - 4y + 25 = 0. \qquad (6)$$

Aunque (5) y (6) representan la misma recta l, debe tenerse presente que (5) es la forma normal, y (6) no lo es. La importancia de esta distinción se apreciará cuando consideremos las aplicaciones de la forma normal (Art. 33).

32. Reducción de la forma general de la ecuación de una recta a la forma normal. Usualmente, la ecuación de una recta se da en la forma general

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Sin embargo, la forma normal

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0, \qquad (2)$$

es útil para ciertos tipos de problemas. Por esto consideraremos en este artículo el método de obtener la forma normal a partir de la forma general de la ecuación.

Si las ecuaciones (1) y (2) representan la misma recta, sus coeficientes correspondientes deben ser proporcionales (apartado (*c*) del teorema 6, Art. 30). Por tanto,

$$\cos \omega = kA, \qquad (3)$$

$$\operatorname{sen} \omega = kB, \qquad (4)$$

$$-p = kC. \qquad (5)$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de (3) y (4), y sumamos, obtenemos

$$\cos^2 \omega + \operatorname{sen}^2 \omega = k^2(A^2 + B^2).$$

Pero como $\cos^2 \omega + \operatorname{sen}^2 \omega = 1$, esta última relación nos da

$$k = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad A^2 + B^2 \neq 0. \qquad (6)$$

Si se sustituye este valor de k en cada una de las ecuaciones (3), (4) y (5), obtenemos las relaciones buscadas entre los coeficientes correspondientes de las dos formas (1) y (2). Estas son:

$$\cos \omega = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \operatorname{sen} \omega = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$p = -\frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}},$$

y la recta definida por la forma general (1) tiene por ecuación en la forma normal

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Es evidente, sin embargo, que, en cualquier caso particular, no podemos usar en (6) ambos signos del radical, ya que esto no nos daría un único valor para el ángulo ω. Para determinar el signo de este radical, notamos en primer lugar que, cuando p es diferente de cero, debe ser *positivo* (Art. 31). En este caso, la relación (5) muestra que k y C deben ser de signos diferentes y, por tanto, que al radical de (6) se le debe dar el signo opuesto al de C.

Si la recta pasa por el origen, en la forma (1) es $C = 0$, y $p = 0$ en la (2), y el signo del radical no puede ser determinado por la relación (5). En este caso, sin embargo, hemos elegido, como se estableció en la nota del teorema 7, Artículo 31, restringir los valores de ω al intervalo

$$0 \leq \omega < 180^\circ,$$

en donde sen ω no es negativo. La relación (4) nos dice entonces que k y B deben concordar en signo si $B \neq 0$, y, por tanto, al radical de (6) se le debe dar el mismo signo que tenga B.

Finalmente, si ambos B y C son iguales a cero en la forma general (1), la relación (4) muestra que sen $\omega = 0$. Por tanto, $\omega = 0^\circ$, ya que $\omega < 180^\circ$ para $C = 0$ como ya hemos dicho. Entonces cos $\omega = 1$, y la relación (3) muestra que k y A deben concordar en signo.

Los resultados anteriores quedan resumidos en el siguiente

TEOREMA 8. *La forma general de la ecuación de una recta,*

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

puede reducirse a la forma normal,

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0,$$

dividiendo cada término de (1) *por* $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$, *en donde el signo que precede al radical* r *se escoge como sigue:*

a) *Si* $C \neq 0$, r *es de signo contrario a* C.

b) *Si* $C = 0$ *y* $B \neq 0$, r *y* B *tienen el mismo signo.*

c) *Si* $C = B = 0$, r *y* A *tienen el mismo signo.*

Ejemplo. La ecuación de una recta es $5x - 7y - 11 = 0$. Reducir su ecuación a la forma normal, y hallar los valores de p y ω.

Solución. Para la ecuación dada, $A = 5$, $B = -7$ y $C = -11$. Por anto, $\pm\sqrt{A^2 + B^2} = \pm\sqrt{5^2 + (-7)^2} = \pm\sqrt{74}$. Como C es negativo, damos al radical el signo positivo. Dividiendo la ecuación dada por $\sqrt{74}$, obtenemos su forma normal,

$$\frac{5}{\sqrt{74}}x + \frac{-7}{\sqrt{74}}y - \frac{11}{\sqrt{74}} = 0,$$

en donde,

$$\cos \omega = \frac{5}{\sqrt{74}}, \quad \operatorname{sen} \omega = -\frac{7}{\sqrt{74}} \quad \text{y} \quad p = \frac{11}{\sqrt{74}}.$$

Como $\cos \omega$ es positivo y $\operatorname{sen} \omega$ es negativo, ω está en el cuarto cuadrante (Apéndice IC, 1). En la tabla B del Apéndice II, se encuentra que el valor de ω es $305° 32'$. En la figura 43 se ha trazado la recta.

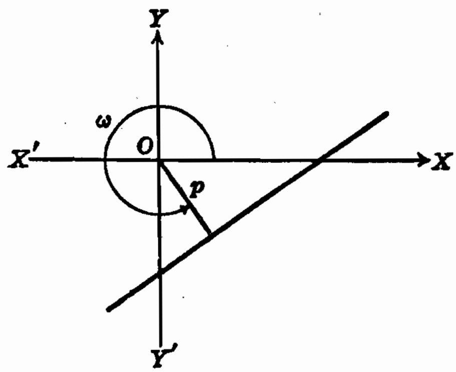

Fig. 43

EJERCICIOS. Grupo 11

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar la ecuación de una recta en la forma normal, siendo $\omega = 60°$ y $p = 6$.

2. Una recta es tangente a un círculo de centro en el origen y radio 3. Si el punto de tangencia es $(2, -\sqrt{5})$, hállese la ecuación de la tangente en la forma normal.

3. La ecuación de una recta en la forma normal es $x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - 5 = 0$. Hallar el valor de ω para que la recta pase por el punto $(-4, 3)$.

4. Reducir la ecuación $12x - 5y - 52 = 0$ a la forma normal, y hallar los valores de p y ω.

5. Hallar la distancia* del origen a la recta $2x - 3y + 9 = 0$.

6. Determinar el valor de k para que la distancia del origen a la recta $x + ky - 7 = 0$ sea 2.

7. Reducir la ecuación $y = mx + b$ a la forma normal, y hallar los valores de p y ω.

8. Hallar la ecuación de la recta cuya distancia del origen es 5 y que pasa por el punto $(1, 7)$. (Dos soluciones.)

---

* Al hablar de distancia de un punto a una recta se sobrentiende el segmento de perpendicular trazado del punto a la recta. Lo mismo al hablar de distancia entre paralelas.

9. El ángulo de inclinación de una recta es de 45°. Hallar su ecuación si su distancia del origen es 4. (Dos soluciones.)

10. Reducir la ecuación $x = k$ a la forma normal, y hallar los valores de p y ω para los tres casos: $k < 0$, $k = 0$ y $k > 0$.

11. Reducir la ecuación $y = k$ a la forma normal, y hallar los valores de p y ω para los tres casos: $k < 0$, $k = 0$ y $k > 0$.

12. La pendiente de una recta es -3. Hallar su ecuación si su distancia del origen es 2. (Dos soluciones.)

13. Hallar la forma normal de la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos $A(-1, 7)$ y $B(4, 2)$.

14. Hallar la forma normal de la ecuación de la recta que es paralela a la recta $x - 5y + 11 = 0$ y pasa por el punto $A(-7, 2)$.

15. Hallar la ecuación de la recta que es paralela a la que tiene por ecuación $3x + 2y - 9 = 0$ y cuya distancia del origen es 8. (Dos soluciones.)

16. Hallar la forma normal de la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $2x - 3y + 7 = 0$ y determina sobre el eje X el segmento -9.

17. Los vértices de un triángulo son $A(-4, 2)$, $B(-1, 5)$ y $C(2, -1)$. Hállense las ecuaciones de las alturas en la forma normal.

18. Hallar la distancia del origen a cada una de las rectas paralelas $3x + 5y - 11 = 0$ y $6x + 10y - 5 = 0$. Deducir de este resultado la distancia entre las dos rectas.

19. Hallar la distancia del origen a cada una de las rectas paralelas $2x + 3y - 4 = 0$ y $6x + 9y + 11 = 0$. A partir de esto calcular la distancia entre las dos rectas.

20. La ecuación de una recta l es $x + 3y - 6 = 0$, y las coordenadas de un punto P son $(4, 7)$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por P y es paralela a l. A partir de este resultado hallar la distancia de P a l.

33. Aplicaciones de la forma normal. A continuación vamos a considerar dos aplicaciones de la forma normal.

a) *Cálculo de la distancia de una recta a un punto dado.* Sea l la recta dada y $P_1(x_1, y_1)$ el punto, y designemos por d la distancia de l a P_1. Como P_1 y l pueden ser cualesquiera en el plano coordenado, hay seis posiciones relativas posibles de P_1, l y el origen O, tal como se indica en la figura 44. (Véase Art. 2, fig. 2.)

Supongamos que la forma normal de la ecuación de l es

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0. \tag{1}$$

Sea l' la recta trazada por P_1 y paralela a l, y sea p' la longitud de la perpendicular trazada desde el origen a l'.

Como tendremos ocasión de tratar con segmentos de recta dirigidos, asignaremos la dirección positiva a la recta normal trazada *desde* el origen hacia la recta l. Esta dirección positiva está indicada en la figura 44 por la normal ON que corta a l en el punto A y a l' en el B. Entonces, en cada uno de los casos,

$$d = |\overline{AB}|. \tag{2}$$

La longitud de la normal OA hasta l es siempre positiva, ya que tiene la misma dirección que ON; la longitud de la normal OB hasta l' es positiva o negativa según que su dirección sea la misma o sea

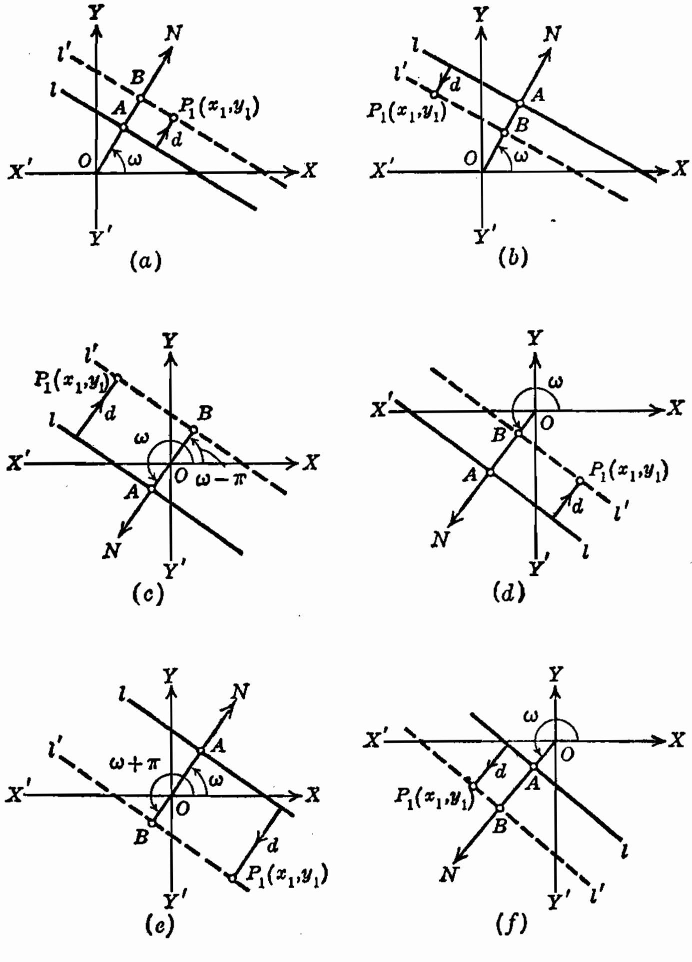

Fig. 44

opuesta a la de ON. Como p y p' son siempre números no-negativos (Art. 31), tenemos

$$\overline{OA} = p, \quad |\overline{OB}| = p'. \tag{3}$$

Por la relación fundamental (2) del Artículo 2 para segmentos dirigidos, tenemos

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB},$$

de donde

$$\overline{AB} = -\overline{OA} + \overline{OB}. \tag{4}$$

Por tanto, por (3) y (4), tenemos, para las seis posiciones indicadas en la figura 44,

$$\left.\begin{array}{ll}(a) & \overline{AB} = -p + p' > 0, \text{ ya que } p' > p.\\ (b) & \overline{AB} = -p + p' < 0, \text{ ya que } p' < p.\\ (c) & \overline{AB} = -p - p' < 0.\\ (d) & \overline{AB} = -p + p' < 0, \text{ ya que } p' < p.\\ (e) & \overline{AB} = -p - p' < 0.\\ (f) & \overline{AB} = -p + p' > 0, \text{ ya que } p' > p.\end{array}\right\} \tag{5}$$

Por el teorema 7, Artículo 31, la ecuación de l' para los casos (a), (b), (d) y (f) es

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p' = 0. \tag{6}$$

Para el caso (c), la ecuación de l' es

$$x \cos (\omega - \pi) + y \operatorname{sen} (\omega - \pi) - p' = 0,$$

de donde (ver el Apéndice IC, 3), tenemos

$$-x \cos \omega - y \operatorname{sen} \omega - p' = 0. \tag{7}$$

Para el caso (e), la ecuación de l' es

$$x \cos (\pi + \omega) + y \operatorname{sen} (\pi + \omega) - p' = 0,$$

de donde obtenemos nuevamente la ecuación (7).

Como el punto P_1 está sobre l', sus coordenadas (x_1, y_1) satisfacen (6) y (7), y tenemos, respectivamente,

$$x_1 \cos \omega + y_1 \operatorname{sen} \omega - p' = 0,$$

y

$$-x_1 \cos \omega - y_1 \operatorname{sen} \omega - p' = 0,$$

de donde para los casos (a), (b), (d) y (f),

$$p' = x_1 \cos \omega + y_1 \operatorname{sen} \omega, \tag{8}$$

y para los casos (c) y (e),

$$p' = -x_1 \cos \omega - y_1 \operatorname{sen} \omega. \tag{9}$$

Entonces de (8) y 5(a), 5(b), 5(d) y 5(f), tenemos

$$\overline{AB} = x_1 \cos \omega + y_1 \operatorname{sen} \omega - p; \tag{10}$$

y de (9) y 5 (c), 5 (e), tenemos el mismo resultado (10). Por tanto, de (2) y (10), tenemos

$$d = |x_1 \cos \omega + y_1 \operatorname{sen} \omega - p|. \qquad (11)$$

Comparando (1) y (11), vemos que la distancia buscada d puede obtenerse simplemente sustituyendo las coordenadas de P_1 en el primer miembro de la forma normal de la ecuación de l. Ahora bien, como la ecuación de una recta se da ordinariamente en la forma general

$$Ax + By + C = 0, \qquad (12)$$

es necesario reducir (12) a la forma normal (teorema 8, Art. 32),

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

de manera que, de (11), el valor buscado es

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Este resultado lo enunciamos como sigue:

TEOREMA 9. *La distancia* d *de una recta* Ax + By + C = 0 *a un punto dado* $P_1(x_1, y_1)$ *puede obtenerse sustituyendo las coordenadas del punto en el primer miembro de la forma normal de la ecuación de la recta. El valor está dado entonces por*

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Para los fines del segundo problema de este artículo, será necesario considerar la distancia d del teorema 9 como la longitud del segmento de recta perpendicular dirigido *de* la recta l *hacia* el punto P_1. En este sentido, nos referimos a d como la *distancia dirigida*. Su signo y magnitud están dados entonces por el signo y longitud del segmento dirigido AB; es decir,

$$d = \overline{AB}.$$

Si comparamos ahora cada relación de (5) con la posición correspondiente que aparece en la figura 44, observamos que para los casos (a) y (f), con P_1 y el origen O en lados *opuestos* de la recta l, $\overline{AB}$ es positiva, mientras que para los cuatro casos restantes, con P_1 y O del *mismo* lado de l, $\overline{AB}$ es negativa. Si, en vez de esto, la recta l pasa por el origen, se deduce, de la nota del teorema 7, Artículo 31, que $\overline{AB}$ es positiva si P_1 está arriba de l y negativa si está abajo.

Estos resultados se expresan en conjunto en el

TEOREMA 10. *La distancia dirigida* d *de la recta dada*

$$Ax + By + C = 0$$

al punto dado $P_1(x_1, y_1)$ *se obtiene por la fórmula*

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

en donde el signo del radical se elige de acuerdo con el teorema 8, Artículo 32.

Si la recta dada no pasa por el origen, d *es positiva o negativa según que el punto* P_1 *y el origen estén en lados opuestos o del mismo lado de la recta.*

Si la recta dada pasa por el origen, d *es positiva o negativa según que el punto* P_1 *esté arriba o abajo de la recta.*

Ejemplo 1. Hallar la distancia de la recta $3x - 4y + 12 = 0$ al punto $(4, -1)$. Interpretar el signo de la distancia como segmento dirigido.

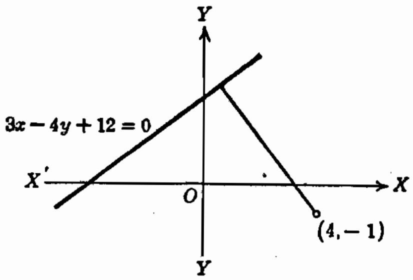

Fig. 45

Solución. La recta y el punto aparecen en la figura 45. Por el teorema 10, la distancia dirigida de la recta dada al punto es

$$d = \frac{3(4) - 4(-1) + 12}{-\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{-28}{5}.$$

Por tanto, la distancia buscada es $^{28}\!/\!_5$. El signo negativo indica que el punto y el origen están del mismo lado de la recta.

b) *Determinación de las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por dos rectas dadas que se cortan.* Supongamos que las ecuaciones de las dos rectas dadas son

$$l: \quad Ax + By + C = 0, \qquad (13)$$

$$l': \quad A'x + B'y + C' = 0, \qquad (14)$$