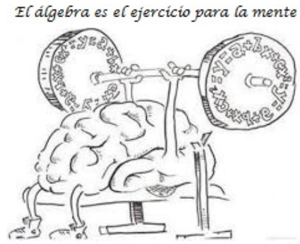

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO

Matemáticas Básicas

Grupo de docentes de Matemáticas Básicas

1. Expresiones Racionales

Introducción El cociente de dos expresiones algebraicas se denomina **expresión fraccionaria**. Por ejemplo:

$$\frac{2x^3}{x-7}, \quad \frac{\sqrt{2x-6}}{x^2+4}, \quad \frac{11x^{5/3}}{x^2-16}$$

Definición 1.1 . *Una **expresión racional** es una expresión fraccionaria donde el numerador y el denominador son polinomios.*

Las siguientes son expresiones racionales:

$$\frac{4x^2+15x-5}{x-7}, \quad \frac{5x^2+x}{x^2+4}, \quad \frac{3x^2+7}{x^2-7x+12}$$

Estamos interesados en estudiar operaciones algebraicas de expresiones racionales.

Una expresión racional por lo general no está definida para todos los valores de la variable, se define por tanto:

Definición 1.2 . *El dominio de la variable en una expresión racional es el conjunto de todos los números reales para los que el valor del denominador es diferente de cero.*

.

Ejemplo 1.3 *De las expresiones racionales dadas anteriormente se tiene:*

1. *Dada la expresión racional* $\dfrac{4x^2+15x-5}{x-7}$*, para determinar el dominio se tiene que* $x-7 \neq 0$*, así* $x \neq 7$ *o en forma de conjuntos* $\{x \mid x \neq 7\}$
2. *Para* $\dfrac{5x^2+x}{x^2+4}$ *el dominio son los valores de* x *que cumplen* $x^2+4 \neq 0$*, en este caso son todos los* $\mathbb{R}$
3. *En la expresión racional* $\dfrac{3x^2+7}{x^2-5x+6}$ *el denominador es diferente de cero, si* $x^2-7x+12 \neq 0$*, factorizando* $(x-4)(x-3) \neq 0$ *de donde* $x \neq 4$ *y* $x \neq 3$*, así el dominio es* $\{x \mid x \neq 4, x \neq 3\}$

2. Simplificación de expresiones racionales

En el resto de esta sección supondremos que las variables están restringidas a los valores para los que todos los denominadores en una expresión sean diferentes de cero, para así poder simplificar sin tener problemas de coherencia.

Para simplificar expresiones racionales, se factorizan el numerador y el denominador y se usa la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

Esto permite cancelar factores comunes del numerador y el denominador.

Ejemplo 2.1 *1. Simplificar* $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{x-3}{x-2}$

2. Simplificar $\dfrac{9x - x^3}{x^2 - 6x + 9} = \dfrac{x(9 - x^2)}{(x-3)^2} = \dfrac{x(3+x)(3-x)}{(x-3)^2} = \dfrac{-x(3+x)(x-3)}{(x-3)^2} = \dfrac{-x(3+x)}{x-3}$

2.1. Multiplicaciones y Divisiones

Para el caso en que se multiplican o dividen expresiones racionales, recordamos las siguientes propiedades de fracciones:

$$\frac{A}{B} * \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}, \qquad \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}$$

Ejemplo 2.2 *Simplificar las siguientes expresiones:*

1. $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 9} * \dfrac{4x^2 - 12x}{2x^2 - 9x - 5}$

2. $\dfrac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{3x^3 - 9x^2} \div \dfrac{x^2 - 2x + 1}{6x^5 - 6x^4}$

Solución:

1.
$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 9} * \frac{4x^2 - 12x}{2x^2 - 9x - 5} &= \frac{(x-5)(x+3)}{(x+3)(x-3)} * \frac{4x(x-3)}{(2x+1)(x-5)} \\ &= \frac{4x}{2x+1} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{3x^3 - 9x^2} \div \frac{x^2 - 2x + 1}{6x^5 - 6x^4} &= \frac{(x-1)(x+3)(x-3)}{3x^2(x-3)} * \frac{6x^4(x-1)}{(x-1)^2} \\ &= 2x^2(x+3) \end{aligned}$$

2.2. Sumas y Restas

Para este caso, recordamos la propiedad de suma y resta de fracciones usando el máximo común divisor; sea $m = mcd(b, d)$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a(m/b) \pm c(m/d)}{m}$$

Ejemplo 2.3 *Simplificar las siguientes expresiones:*

1. $\dfrac{1}{xy} - \dfrac{x^2+y^2}{x^3y - xy^3} + \dfrac{1}{x^2 - xy}$

2. $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}}$

Solución:

1.
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{xy} - \frac{x^2+y^2}{x^3y - xy^3} + \frac{1}{x^2 - xy} &= \frac{1}{xy} - \frac{x^2+y^2}{xy(x^2-y^2)} + \frac{1}{x(x-y)} \\
&= \frac{1}{xy} - \frac{x^2+y^2}{xy(x+y)(x-y)} + \frac{1}{x(x-y)} \\
&= \frac{(x+y)(x-y) - (x^2+y^2) + y(x+y)}{xy(x+y)(x-y)} \\
&= \frac{x^2 - y^2 - x^2 - y^2 + xy + y^2}{xy(x+y)(x-y)} \\
&= \frac{-y^2 + xy}{xy(x+y)(x-y)} \\
&= \frac{y(x-y)}{xy(x+y)(x-y)} \\
&= \frac{1}{x\,(x+y)}
\end{aligned}
$$

2.
$$
\begin{aligned}
\frac{\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}} &= \frac{\dfrac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)}}{\dfrac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}} \\
&= \frac{\dfrac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}} \\
&= \frac{4x(x+1)(x-1)}{2x(x+1)(x-1)} \\
&= 2
\end{aligned}
$$