



1. Potenciación y Radicación

1.1. Potenciación

Introducción Así como cuando se tiene una suma repetida $x + x + x + x + x$ se expresa más fácil de la forma $5x$. Así mismo, podemos escribir el producto repetido $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ de manera más eficiente con exponentes.

Definición 1.1 Sea x un número real y n un número natural, el símbolo x^n se llama la **potencia n -ésima de x** , y representa el producto n veces de x . Así

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ veces } x}$$

donde x es la base y n es el exponente. Se lee usualmente como « x elevado a la n »

Algunos casos particulares son: cuando $n = 2$, se lee elevado al cuadrado y cuando $n = 3$ se dice que está elevado al cubo.

Ejemplo 1.2 1. $7^5 = 7 * 7 * 7 * 7 * 7 = 16807$

2. $(-6)^4 = (-6) * (-6) * (-6) * (-6) = 1296$

3. $-6^4 = -6 * 6 * 6 * 6 = -1296$

4. $(5x)^3 = (5x) * (5x) * (5x)$

5. $(x - y)^2 = (x - y) * (x - y)$

Observación: CUIDADO De los ejemplos 2. y 3. se nota que $(-x)^n \neq -x^n$ en algunos casos

A continuación damos la definición de potencia n -ésima de x para n en los enteros

Definición 1.3 Para un número real x que no sea cero y un entero positivo n , el símbolo x^{-n} representa el recíproco de x^n , es decir,

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \text{ para } x \neq 0$$

Para $n = 0$, se define $x^n = x^0 = 1$

Ejemplo 1.4 1. $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

$$2. (-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = \frac{-1}{32}$$

$$3. (7y)^{-3} = \frac{1}{(7y)^3}$$

$$4. (3z - w)^{-2} = \frac{1}{(3z - w)^2}$$

Leyes de los exponentes. Se han establecido varias reglas para combinar potencias, llamadas leyes de los exponentes

Sean x y y números reales, m y n enteros, se tienen las siguientes leyes para los exponentes

$$1. x^m x^n = x^{m+n}$$

$$3. \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$5. \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$2. (x^m)^n = x^{mn}$$

$$4. (xy)^n = x^n y^n$$

Otras leyes que se concluyen de las anteriores son:

$$1. \left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$$

$$2. \frac{x^{-n}}{y^{-m}} = \frac{y^m}{x^n}$$

$$3. \frac{x^n}{y^{-m}} = x^n y^m$$

$$4. \frac{x^{-n}}{y^m} = \frac{1}{x^n y^m}$$

Observación: CUIDADO $(x \pm y)^n \neq x^n \pm y^n$, por ejemplo para $x = 3, y = 4, n = 2$, se tiene $(3 + 4)^2 = 49 \neq 25 = 3^2 + 4^2$

Ejemplo 1.5 Simplificar y expresar con exponentes positivos:

$$1. 3^{-7} 3^2 = 3^{-7+2} = 3^{-5} = \frac{1}{3^5}$$

$$2. \frac{(-2)^3}{(-2)^5} = (-2)^{3-5} = (-2)^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

$$3. ((6x)^{-3})^4 = (6x)^{-12} = \frac{1}{(6x)^{12}}$$

$$4. \frac{-xy^2 z^3}{(x^3 y^5 z^2)^{-2}} = (-xy^2 z^3)(x^3 y^5 z^2)^2 = -xy^2 z^3 x^6 y^{10} z^4 = -x^7 y^{12} z^7$$

$$5. \frac{x^{-1} + y^{-1}}{(x+y)^{-1}} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x+y}} = \frac{\frac{y+x}{xy}}{\frac{1}{x+y}} = \frac{(x+y)(x+y)}{xy} = \frac{(x+y)^2}{xy}$$

1.2. Radicación

Sabemos lo que 3^n significa siempre que n sea un entero. Para dar significado a una potencia cuyo exponente es un número racional, por ejemplo $3^{2/7}$, necesitamos estudiar radicales

Definición 1.6 Sean x un número real y n entero positivo mayor que 2, entonces la **raíz n -ésima principal** de x se define como el número r que cumple:

$$\sqrt[n]{x} = r \text{ significa que } r^n = x$$

donde x se llama el radicando o subradical y n el índice.

Observaciones:

1. Cuando n es par, x tiene que ser positivo, ya que no hay (en los reales) un número r elevado a una potencia par, que de por resultado un número negativo.
2. Cuando n es par y x es positivo, existen dos valores para la raíz n -ésima ($\pm r$), sin embargo el símbolo $\sqrt[n]{x}$ se reserva para la raíz n -ésima positiva (principal); denotamos la raíz n -ésima negativa mediante $-\sqrt[n]{x}$.
3. Si el índice $n = 2$, normalmente se omite del radical; es decir, $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ y decimos que \sqrt{x} es la raíz cuadrada de x ; Cuando $n = 3$, decimos que $\sqrt[3]{x}$ es la raíz cúbica de x .

Ejemplo 1.7 1. $\sqrt[4]{81} = 3$ ya que $3^4 = 81$

2. $\sqrt[5]{-32} = -2$ ya que $(-2)^5 = -32$

3. $\sqrt[3]{x^{21}} = x^7$ ya que $(x^7)^3 = x^{21}$

4. $\sqrt[6]{-64}$ = no está definida, ya que NO existe un número real r tal que $r^6 = -64$

Propiedades de los radicales.

Sean x y y números reales, m y n naturales mayores que 1, se tienen las siguientes propiedades:

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x}$ | 3. $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$ | 5. $\sqrt[n]{x^n} = x$ si n es impar |
| 2. $\sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ | 4. $(\sqrt[n]{x})^n = x$ | 6. $\sqrt[n]{x^n} = x $ si n es par |

Ejemplo 1.8 Simplificar y expresar con exponentes positivos:

1. $\sqrt[3]{25x} \sqrt[3]{5x^2y^3} = \sqrt[3]{5^3x^3y^3} = \sqrt[3]{(5xy)^3} = 5xy$

2. $\frac{\sqrt[4]{48x^6}}{\sqrt[4]{3x^2}} = \sqrt[4]{\frac{48x^6}{3x^2}} = \sqrt[4]{16x^4} = \sqrt[4]{2^4x^4} = \sqrt[4]{(2x)^4} = |2x|$

3. $\sqrt[5]{\sqrt[7]{x^{35}}} = \sqrt[35]{x^{35}} = x$

Observación: CUIDADO

1) $\sqrt[n]{x+y} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$

2) $\sqrt{x^2+y^2} \neq x+y$

con frecuencia es más fácil trabajar con exponentes racionales que con radicales, por ello, definimos los exponentes racionales como sigue:

Definición 1.9 Para cualquier exponente racional m/n , donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos:

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

Si n es par, entonces es necesario que $x > 0$.

Observación: Con la definición anterior, las leyes de los exponentes para exponentes enteros, se cumplen para exponentes racionales.

Ejemplo 1.10 *Simplificar y expresar con exponentes positivos:*

$$1. 3x^{7/3}5(xy)^{8/3}y^{2/3} = 15x^{7/3+8/3}y^{8/3+2/3} = 15x^{15/3}y^{10/3} = 15x^5y^{10/3}$$

$$2. \frac{8^2x^{9/5}y^{-7/2}}{4^3x^{-4/3}y^{-5/2}} = \frac{64x^{9/5+4/3}y^{-7/2+5/2}}{64} = x^{47/15}y^{-1} = \frac{x^{47/15}}{y}$$

$$3. \left(\frac{(xy)^{7/8}}{x^2y^{-9/8}}\right)^4 = \frac{((xy)^{7/8})^4}{(x^2y^{-9/8})^4} = \frac{(xy)^{28/8}}{x^8y^{-36/8}} = \frac{(xy)^{7/2}}{x^8y^{-9/2}} = \frac{x^{7/2}y^{7/2}}{x^8y^{-9/2}} \\ = x^{7/2-8}y^{7/2+9/2} = x^{-9/2}y^8 = \frac{y^8}{x^{9/2}}$$