MATEMÁTICAS BÁSICAS

CLASE 2

ÚMEROS REALES, PROPIEDADES, BASES ALGEBRAICAS

ELABORÓ EFRÉN GIRALDO

MEDELLÍN ENERO 2018

Objetivos - Competencias

Al final de este capítulo Ud. debe:

- Conocer los números, sus propiedades, los distintos subconjuntos de números y sus operaciones.
- Conocer la recta real y la relación con el conjunto de los reales
- **Entender, aprender y trabajar con las operaciones algebraicas y tener un <u>completo dominio de ellas.</u>**

RECOMENDACIÓN IMPORTANTE

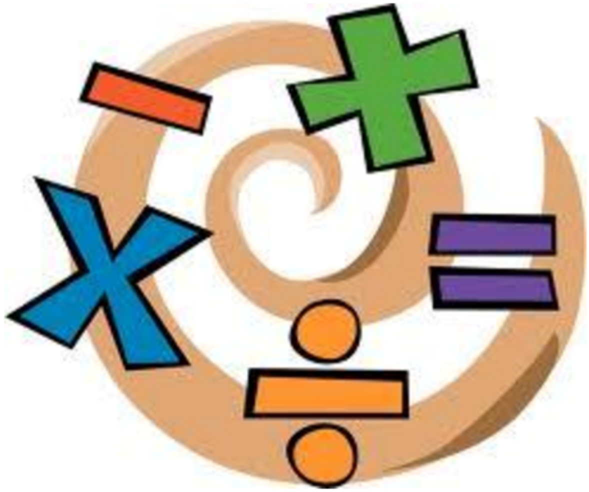
- Amigo estudiante:
- Este es el primer peldaño de la escalera de las matemáticas básicas. Si lo entiende y lo estudia bien, no tendrá problemas con su materia. Si no, consulte con sus compañeros, con su profesor o en las asesorías.

¡Saque mínimo 8 horas semanales fuera de clase para estudiar. No valen disculpas!.

¡<u>No deje para mañana lo que tiene que hacer hoy!</u>

QUÉ PREFIERE:

¡ESTO! O ¡ESTO!



Propiedades de los reales
Bases algebraicas

Menor que y mayor que Dos números reales a y b, con $a \neq b$, pueden compararse mediante la relación de orden **menor que**. Tenemos la definición siguiente.

Definición 2.2.1 Menor que

Se dice que el número real a es **menor que** b, lo que se escribe $a < b$, si y sólo si la diferencia $b - a$ es positiva.

Si a es menor que b, entonces de forma equivalente podemos decir que b es **mayor que** a, lo que se escribe $b > a$. Por ejemplo, $-7 < 5$, ya que $5 - (-7) = 12$ es positivo. Podemos escribir también $5 > -7$.

EJEMPLO 1 Una desigualdad

Usando la relación de orden mayor que, compare los números reales π y $\frac{22}{7}$.

Solución A partir de $\pi = 3.1415\ldots$ y $\frac{22}{7} = 3.1428\ldots$, tenemos que

$$\frac{22}{7} - \pi = (3.1428\ldots) - (3.1415\ldots) = 0.001\ldots.$$

Puesto que esta diferencia es positiva, concluimos que $\frac{22}{7} > \pi$. ≡

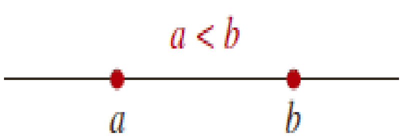


FIGURA 2.2.3 El número a está a la izquierda del número b

Desigualdades La recta de los números reales es útil para demostrar relaciones de orden entre dos números reales a y b.

Para dos números reales cualesquiera a y b, sólo *una* de las tres expresiones siguientes es verdadera:

$$a < b, \quad a = b \quad \text{o} \quad a > b \tag{1}$$

La propiedad dada en (1) se llama **ley de tricotomía**.

Terminología Los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ se llaman **símbolos de desigualdad** y las expresiones como $a < b$ o $b \geq a$ se denominan **desigualdades**. Una desigualdad $a < b$ a menudo se conoce como **desigualdad estricta**, en tanto que una desigualdad como $b \geq a$ se designa **desigualdad no estricta**.

Terminología

La desigualdad $a > 0$ significa que el número a está a la derecha del número 0 en la recta numérica y, en consecuencia, a es **positivo**. Indicamos que un número a es **negativo** por medio de la desigualdad $a < 0$. Como la desigualdad $a \geq 0$ significa que a es mayor que 0 (positivo) o igual a 0 (que no es positivo ni negativo), decimos que a es **no negativo**. De manera semejante, si $a \leq 0$, decimos que a es **no positivo**.

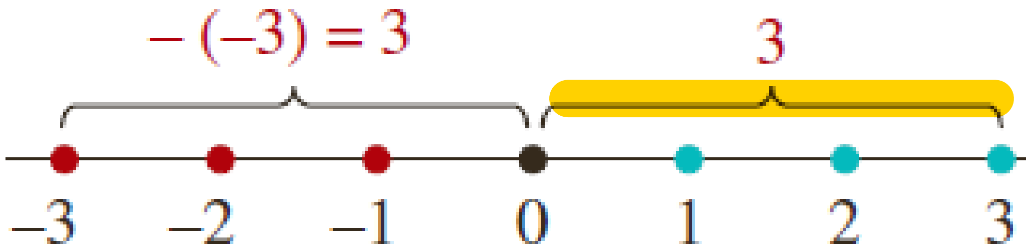


FIGURA 2.2.4 Distancia en la recta de los números reales

Valor absoluto También podemos utilizar la recta de los números reales para presentar la distancia. Como se muestra en la **FIGURA 2.2.4**, la distancia del punto 3 al origen es de 3 unidades, y la distancia del punto -3 al origen es de 3, o $-(-3)$, unidades. De nuestra explicación sobre la recta de los números reales resulta que, en general, la distancia de cualquier número al origen es el "valor sin signo" de ese número.

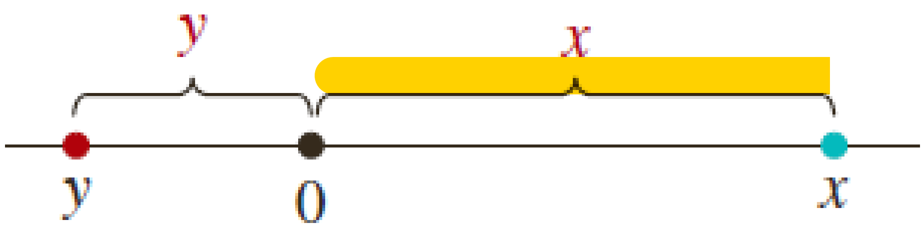


FIGURA 2.2.5 La distancia de 0 a x es x; la distancia de 0 a y es $-y$

De forma más precisa, como se muestra en la **FIGURA 2.2.5**, para cualquier número real positivo x, la distancia del punto x al origen es x, pero para cualquier número *negativo* y, la distancia del punto y al origen es $-y$. Por supuesto, para $x = 0$ la distancia al origen es 0. El concepto de distancia de un punto en la recta numérica al origen se describe mediante la noción del **valor absoluto** de un número real.

Definición 2.2.2 Valor absoluto

Para cualquier número real a, el valor absoluto de a, denotado por $|a|$, es

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0, \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases} \tag{2}$$

EJEMPLO 2 Valores absolutos

Como 3 y $\sqrt{2}$ son números positivos,

$$|3| = 3 \qquad \text{y} \qquad |\sqrt{2}| = \sqrt{2}.$$

Pero como -3 y $-\sqrt{2}$ son números negativos, es decir, $-3 < 0$ y $-\sqrt{2} < 0$, deducimos de (2) que

$$|-3| = -(-3) = 3 \qquad \text{y} \qquad |-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

EJEMPLO 3 Valores absolutos

a) $|2 - 2| = |0| = 0$ $\leftarrow$ de (2), $0 \geq 0$

b) $|2 - 6| = |-4| = -(-4) = 4$ $\leftarrow$ de (2), $-4 < 0$

c) $|2| - |-5| = 2 - [-(-5)] = 2 - 5 = -3$ $\leftarrow$ de (2), $-5 < 0$

EJEMPLO 4 Valor absoluto

Halle $|\sqrt{2} - 3|$.

Solución Para hallar $|\sqrt{2} - 3|$ primero debemos determinar si $\sqrt{2} - 3$ es positivo o negativo. Como $\sqrt{2} \approx 1.4$, vemos que $\sqrt{2} - 3$ es un número negativo. Por tanto,

$$|\sqrt{2} - 3| = -(\sqrt{2} - 3) = -\sqrt{2} + 3 \quad \leftarrow \text{Aquí se usa la ley distributiva}$$

$$= 3 - \sqrt{2}.$$

≡

EJEMPLO 5 Valor de una expresión de valor absoluto

Halle $|x - 6|$ si ***a***) $x > 6$, ***b***) $x = 6$ y ***c***) $x < 6$.

Solución

a) Si $x > 6$, entonces $x - 6$ es positivo. Luego, de la definición de valor absoluto en (2) concluimos que $|x - 6| = x - 6$.

b) Si $x = 6$, entonces $x - 6 = 0$; luego, $|x - 6| = |0| = 0$.

c) Si $x < 6$, entonces $x - 6$ es negativo y tenemos que $|x - 6| = -(x - 6) = 6 - x$. ≡

Para cualquier número real x y su negativo, $-x$, la distancia al origen es la misma. Es decir, $|x| = |-x|$. Ésta es una de las propiedades especiales del valor absoluto, las cuales describimos en el teorema siguiente.

Teorema 2.2.2 Propiedades del valor absoluto

Sean x y y números reales. Entonces

i) $|x| \geq 0$

ii) $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$

iii) $|x| = |-x|$

iv) $|xy| = |x||y|$

v) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, con $y \neq 0$

vi) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Definir estas propiedades con palabras es una forma de comprenderlas cabalmente. Por ejemplo, la propiedad *i*) dice que el valor absoluto de una cantidad es siempre no negativa. La propiedad *iv*) dice que el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos de los dos factores. El inciso *vi*) del teorema 2.2.2 es una propiedad importante del valor absoluto llamada **desigualdad triangular**.

Definición 2.2.3 Distancia en la recta de los números reales

Si a y b son dos puntos en la recta de los números reales, la **distancia** de a a b está dada por

$$d(a, b) = |b - a|. \tag{3}$$

EJEMPLO 6 Distancias

a) La distancia de -5 a 2 es

$$d(-5, 2) = |2 - (-5)| = |7| = 7.$$

b) La distancia de 3 a $\sqrt{2}$ es

$$d(3, \sqrt{2}) = |\sqrt{2} - 3| = 3 - \sqrt{2}.$$ ←véase el ejemplo 4

Vemos que la distancia de a a b es la misma que la distancia de b a a, pues por la propiedad *iii*) del teorema 2.2.2,

$$d(a, b) = |b - a| = |-(b - a)| = |a - b| = d(b, a).$$ ← $b - a$ representa la parte de x en *iii*) del teorema 2.2.2

Así, $d(a, b) = d(b, a)$

Coordenada del punto medio La definición 2.2.3 sirve para hallar una expresión para el **punto medio** de un segmento de recta. El punto medio m de un segmento de recta que une a a y b es el promedio de los dos extremos:

$$m = \frac{a + b}{2}. \tag{4}$$

Véase la **FIGURA 2.2.7**.

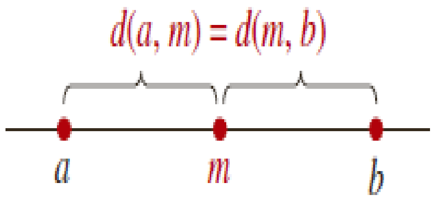


FIGURA 2.2.7 La distancia de a a m es igual a la distancia de m a b

EJEMPLO 7 Punto medio

Con base en la fórmula (4), el punto medio del segmento de recta que une los puntos 5 y -2 es

$$\frac{5 + (-2)}{2} = \frac{3}{2}.$$

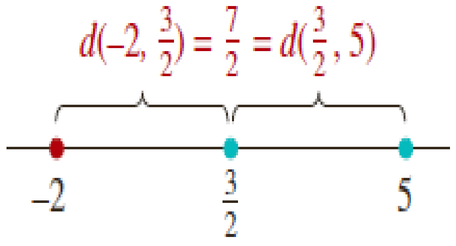


FIGURA 2.2.8 Punto medio del ejemplo 7

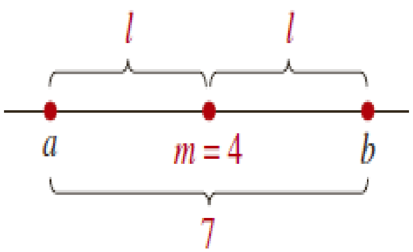


FIGURA 2.2.9 Las distancias son iguales en el ejemplo 8

EJEMPLO 8 Dado el punto medio

El segmento de recta que une a a y b tiene punto medio $m = 4$. Si la distancia de a a b es de 7, halle a y b.

Solución Como observamos en la **FIGURA 2.2.9**, como m es el punto medio,

$$l = d(a, m) = d(m, b).$$

Por tanto, $2l = 7$ o $l = \frac{7}{2}$. Ahora tenemos que $a = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$ y $b = 4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}$. ≡

- Regla de los signos para multiplicar (no para sumar)

Efrén Giraldo Toro

- +(+)=+ mas por mas da mas
- +(-)= - mas por menos da menos
- -(+)=- menos por mas da menos
- -(-)=+ menos por menos da mas

Efrén Giraldo Toro

- ¡Ojo! Para sumar aplique lo de las dos diapositivas anteriores.

PROPIEDADES DE NEGATIVOS

Propiedad	Ejemplo
1. $(-1)a = -a$	$(-1)5 = -5$
2. $-(-a) = a$	$-(-5) = 5$
3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$	$(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$
4. $(-a)(-b) = ab$	$(-4)(-3) = 4 \cdot 3$
5. $-(a + b) = -a - b$	$-(3 + 5) = -3 - 5$
6. $-(a - b) = b - a$	$-(5 - 8) = 8 - 5$

Signos para la división(no para la suma)

- $\frac{+}{+} = +$
- $\frac{-}{-} = +$
- $\frac{+}{-} = -$
- $\frac{-}{+} = -$

Muchas veces para multiplicar un número o una expresion por - se usa -1 que es lo mismo.

Efrén Giraldo Toro

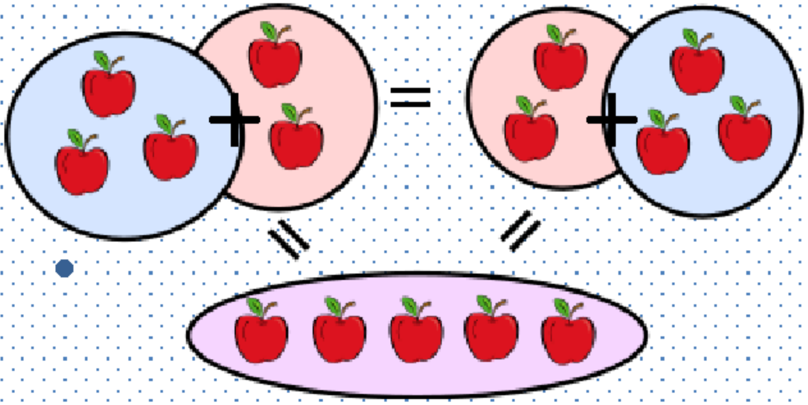
Efrén Giraldo Toro

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Propiedades	Ejemplo	Descripción
Conmutativas		
$a + b = b + a$	$7 + 3 = 3 + 7$	Cuando sumamos dos números, el orden no importa.
$ab = ba$	$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$	Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa.
Asociativas		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$	Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos de ellos sumamos primero.
$(ab)c = a(bc)$	$(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$	Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos de ellos multiplicamos primero.
Distributivas		
$a(b + c) = ab + ac$ $(b + c)a = ab + ac$	$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ $(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$	Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados.

PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS NÚMEROS REALES

Adición	**Multiplicación**
1. Propiedades de cerradura	
i) $a + b$ es un número real	*ii*) $a \cdot b$ es un número real
2. Propiedades conmutativas	
i) $a + b = b + a$	*ii*) $a \cdot b = b \cdot a$
3. Propiedades asociativas	
i) $a + (b + c) = (a + b) + c$	*ii*) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
4. Propiedades de identidad	
i) $a + 0 = 0 + a = a$	*ii*) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
5. Propiedades del inverso	
i) $a + (-a) = (-a) + a = 0$	*ii*) $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$



Propiedad conmutativa de la suma

- **Conmutar es cambiar**

Propiedades conmutativas

$a + b = b + a$	$7 + 3 = 3 + 7$	Cuando se suman dos números, no importa el orden.

Cuando se suman dos o más letras, dos o más expresiones algebraicas o dos o más números, se pueden colocar en cualquier orden.

(STEWART.2007)

Propiedad conmutativa del producto

$$8*3= 3*8=24$$

$ab = ba$ $\qquad 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ $\qquad$ Cuando se multiplican dos números no importa el orden.

- **Producto es el resultado de multiplicar.**
- **Producto es sinónimo de factor**

- Entienda muy bien la propiedad conmutativa del producto, pues se va a usar mucho a través del curso. Vale tanto para letras, expresiones o números.
- 4.3.5=3.4.5=4.5.3=5.4.3=60
- abc= bca=acb=cba=cab
- a(b+c)=(b+c)a
- 20*1000= 1000*20= 20.000

Uso del paréntesis

- Cuando aparece un **paréntesis** o corchete inmediatamente **después de un número** o de una expresión significa **multiplicación.**

Efrén Giraldo Toro

- a(3)=a3 a(b+c)= a$\times (b+c)$

- No siempre es necesario el paréntesis: 6(b) = 6b

Efrén Giraldo Toro

- Es muy útil si después de un número o letra sigue un menos – que multiplica (porque no se genera confusión):

Efrén Giraldo Toro

3 $\times$ -1 = 3(-1)= -3 muy diferente de 3-1=2

- Un signo **positivo solo,** antes de un paréntesis no afecta lo que va dentro del paréntesis
- $+(5+3)=(5+3)= 5+3$
- Un signo – antes de un paréntesis cambia el signo de todo lo que hay adentro del paréntesis por aquello de – por + = – ó – por - = +
- $-(a+b)= -a-b$
- $-(-a +b)= a-b$ $\qquad$ $5-(3)= 5-3= 2$

Propiedad asociativa

Asociar es juntar, agrupar en

diferentes subconjuntos.

2. Propiedades asociativas

$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(2+4)+7 = 2+(4+7)$	Cuando se suman tres números, no importa cuáles dos se suman primero.
$(ab)c = a(bc)$	$(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$	Cuando multiplicamos tres números no importa cuáles dos se multiplican primero.

Vale para cualquier cantidad de letras, expresiones o

números.

(STEWART.2007)

$a3 = 3a$ $\qquad$ $(a+b)3 = 3(a+b)$

PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS NÚMEROS REALES (CONTINÚA)

6. Propiedades distributivas:

i) $a(b + c) = ab + ac$ *ii*) $(a + b)c = ac + bc$

La propiedad distributiva se puede extender para incluir más de dos números en la suma. Por ejemplo,

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

y

$$(a + b + c + d)e = ae + be + ce + de$$

¡URGENTE!

- LUEGO DE ESTA **CLASE** UD. AMIGO ESTUDIANTE, **TIENE QUE DOMINAR** TODOS LOS CONCEPTOS PROFUNDAMENTE. DE LO CONTRARIO VUELVA REPASE, ESTUDIE, CONSULTE.

- **SI NO LO HACE COMIENZA A TENER PROBLEMAS ES SU MATERIA Y ESTÁ DANDO EL PRIMER PASO PARA PERDERLA Y POSIBLEMENTE PERDER TAMBIÉN SU CARRERA Y HASTA ARRUINAR SU VIDA.**

Tareas para la casa

- Repasar notas de clase y problemas vistos.
- Repasar Stewart páginas 1 a11
- Hacer ejercicios Stewart Sección 1.1 página 10
- Lectura previa en casa a clase # 3

Bibliografía

- Stewart, J. Redlin, L., Watson, S. (2007). Precálculo 5 edición. Editorial Thonson. México.