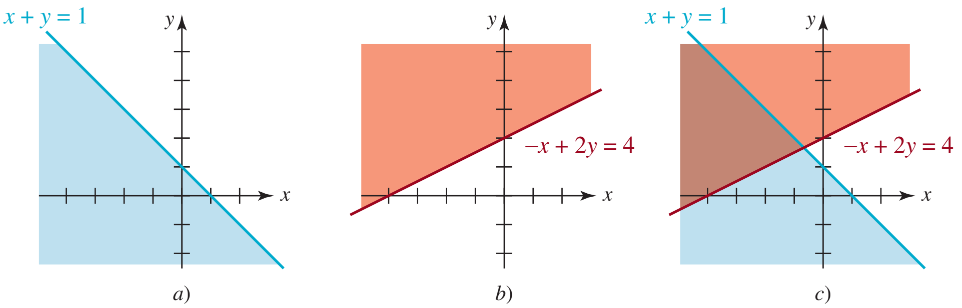


FIGURA 13.4.5 Conjunto solución del ejemplo 4

de rojo en la figura 13.4.5*b*). La gráfica de las soluciones del sistema de desigualdades es la intersección de las gráficas de estos dos conjuntos solución. Esta intersección es la región más oscura de colores superpuestos que se muestra en la figura 13.4.5*c*). ≡

A menudo nos interesan las soluciones de un sistema de desigualdades lineales sujeto a las restricciones $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Esto significa que la gráfica de las soluciones es un subconjunto del conjunto formado por los puntos del primer cuadrante y situado en los ejes coordenados no negativos. Por ejemplo, un examen de la figura 13.4.5*c*) revela que el sistema de desigualdades (4) sujeto a los requisitos adicionales $x \geq 0$, $y \geq 0$, no tiene soluciones.

EJEMPLO 5 Sistema de desigualdades lineales

La gráfica de las soluciones del sistema de desigualdades lineales

$$\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

es la región mostrada en la **FIGURA 13.4.6*a*)**. La gráfica de las soluciones de

$$\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0,\ \ y \geq 0 \end{cases}$$

es la región en el primer cuadrante junto con partes de las dos rectas y partes de los ejes de coordenadas ilustrados en la figura 13.4.6*b*). ≡

Desigualdades no lineales Graficar **desigualdades no lineales** con dos variables x y y es básicamente lo mismo que trazar la gráfica de desigualdades lineales. En el ejemplo siguiente utilizamos de nuevo el concepto de punto de prueba.

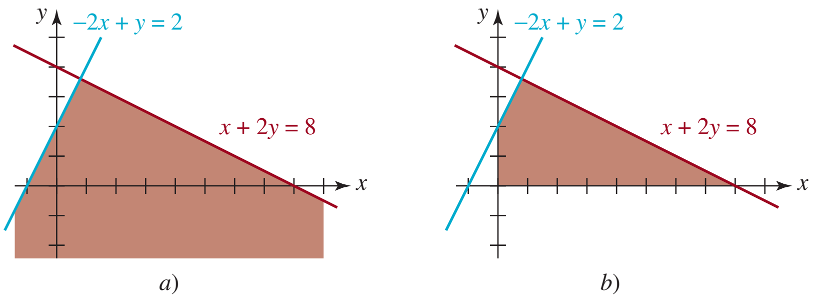


FIGURA 13.4.6 Conjunto solución del ejemplo 5

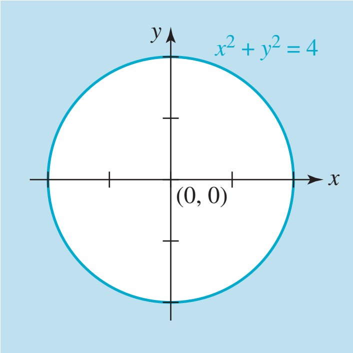


FIGURA 13.4.7 Conjunto solución del ejemplo 6

EJEMPLO 6 Gráfica de una desigualdad no lineal

Para graficar la desigualdad no lineal

$$x^2 + y^2 - 4 \geq 0$$

empezamos trazando el círculo $x^2 + y^2 = 4$ con una línea continua. Como (0, 0) está situado en el interior del círculo, podemos utilizarlo como punto de prueba. Al sustituir $x = 0$ y $y = 0$ en la desigualdad obtenemos la proposición falsa $-4 \geq 0$ y, por tanto, el conjunto solución de la desigualdad dada está formado por todos los puntos que están sobre el círculo o en su exterior (**FIGURA 13.4.7**). ≡

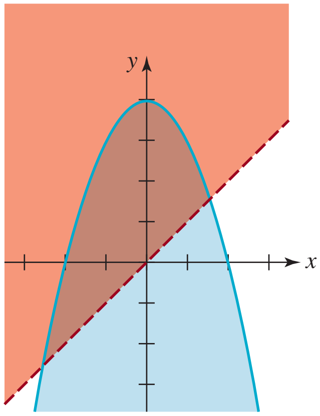


FIGURA 13.4.8 Conjunto solución del ejemplo 7

EJEMPLO 7 Sistema de desigualdades

Grafique el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} y \leq 4 - x^2 \\ y > x. \end{cases}$$

Solución La sustitución de las coordenadas de (0, 0) en la primera desigualdad produce la proposición verdadera $0 \leq 4$ y, por tanto, la gráfica de $y \leq 4 - x^2$ es la región sombreada de azul en la **FIGURA 13.4.8**, por debajo de la parábola $y = 4 - x^2$. Tenga en cuenta que no podemos usar (0, 0) como punto de prueba con la segunda desigualdad, ya que (0, 0) es un punto sobre la recta $y = x$. Sin embargo, si usamos (1, 2) como punto de prueba, la segunda desigualdad resulta en la proposición verdadera $2 > 1$. Por ende, la gráfica de las soluciones de $y > x$ es el semiplano sombreado de rojo por encima de la recta $y = x$ en la figura 13.4.8. La propia recta es discontinua debido a la desigualdad estricta. La intersección de estas dos regiones coloreadas es la región más oscura de la figura. ≡

13.4 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-34.

En los problemas 1 a 12, grafique la desigualdad dada.

1. $x + 3y \geq 6$
2. $x - y \leq 4$
3. $x + 2y < -x + 3y$
4. $2x + 5y > x - y + 6$
5. $-y \geq 2(x + 3) - 5$
6. $x \geq 3(x + 1) + y$
7. $y \geq (x - 1)^2$
8. $x^2 + \frac{1}{4}y^2 < 1$
9. $y - 1 \leq \sqrt{x}$
10. $y \geq \sqrt{x + 1}$
11. $y \geq |x + 2|$
12. $xy \geq 3$

En los problemas 13 a 36, grafique el sistema de desigualdades dado.

13. $\begin{cases} y \leq x \\ x \geq 2 \end{cases}$
14. $\begin{cases} y \geq x \\ y \geq 0 \end{cases}$
15. $\begin{cases} x - y > 0 \\ x + y > 1 \end{cases}$
16. $\begin{cases} x + y < 1 \\ -x + y < 1 \end{cases}$
17. $\begin{cases} x + 2y \leq 4 \\ -x + 2y \geq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$
18. $\begin{cases} 4x + y \geq 12 \\ -2x + y \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x - 3y > -9 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x + y > 4 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} y < x + 2 \\ 1 \leq x \leq 3 \\ y \geq 1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4y > x \\ x \geq 2 \\ y \leq 5 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ y \geq -x \\ y \leq 2x \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ x - y \geq -6 \\ 2x + y \leq 6 \end{cases}$

25. $\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ x + 3y \leq 10 \\ x - y \leq 5 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} -x + y \leq 0 \\ -x + 3y \geq 0 \\ x + y - 8 \geq 0 \\ y - 2 \leq 0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x + y \geq 5 \end{cases}$

29. $\begin{cases} y \leq x^2 + 1 \\ y \geq -x^2 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \leq x^2 - 1 \end{cases}$

31. $\begin{cases} y \geq |x| \\ x^2 + y^2 \leq 2 \end{cases}$

32. $\begin{cases} y \leq e^x \\ y \geq x - 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

33. $\begin{cases} \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{4}y^2 \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

34. $\begin{cases} y < \ln x \\ y > 0 \end{cases}$

35. $\begin{cases} y \leq x^3 + 1 \\ x \geq 0 \\ x \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

36. $\begin{cases} y \geq x^4 \\ y \leq 2 \\ x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases}$

En los problemas 37 a 40, obtenga un sistema de desigualdades lineales cuya gráfica sea la región mostrada en la figura.

37.

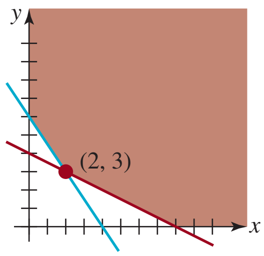


FIGURA 13.4.9 Región para el problema 37

38.

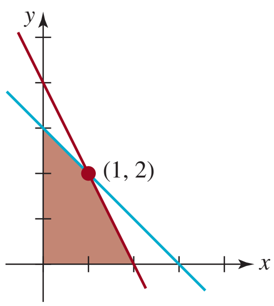


FIGURA 13.4.10 Región para el problema 38

39.

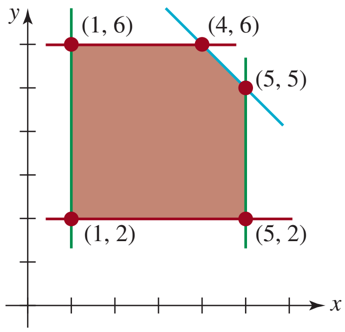


FIGURA 13.4.11 Región para el problema 39

40.

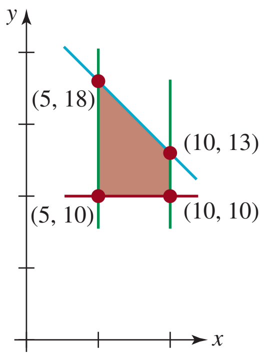


FIGURA 13.4.12 Región para el problema 40

Para la discusión

En los problemas 41 y 42, grafique la desigualdad dada.

41. $-1 \le x + y \le 1$

42. $-x \le y \le x$

Proyecto

43. Historia antigua y el servicio postal de Estados Unidos Hace algunos años, las restricciones sobre el tamaño del sobre de la correspondencia de primera clase eran un tanto más confusas que las de hoy en día. Considere el sobre rectangular de longitud x y altura y que se muestra en la **FIGURA 13.4.13** y la norma postal siguiente de noviembre de 1978:

Todos los artículos de primera clase que pesen una onza o menos y todos los artículos de tercera clase que consten de una sola pieza y pesen dos onzas o menos estarán sujetos a un pago adicional de franqueo cuando la altura sea mayor que $6\frac{1}{8}$ in, o cuando la longitud sea mayor que $11\frac{1}{2}$ in, o cuando la longitud sea menor que 1.3 veces la altura, o cuando la longitud sea mayor que 2.5 veces la altura.

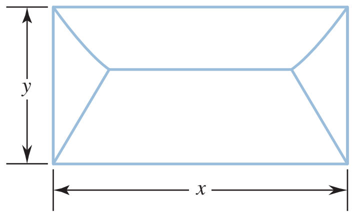


FIGURA 13.4.13 Sobre del problema 43

En los incisos *a*) a *c*) suponga que se satisface la especificación de peso.

a) Usando x y y, interprete la norma anterior como un sistema de desigualdades lineales.

b) Grafique la región que describe los tamaños de los sobres que *no* están sujetos al pago adicional de franqueo.

c) Según esta norma, ¿un sobre de 8 pulgadas de longitud y 4 pulgadas de altura requiere franqueo adicional?

d) Realice una investigación y compare la norma de 2010 para la correspondencia de primera clase con la que acabamos de dar.

13.5 Introducción a la programación lineal

Introducción Una **función lineal con dos variables** es una función de la forma

$$F(x, y) = ax + by + c \tag{1}$$

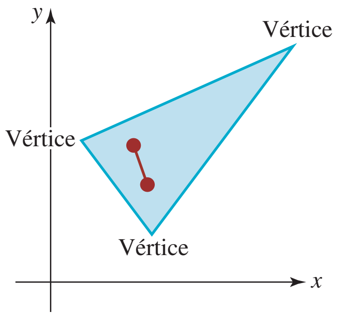
donde a, b y c son constantes, con dominio en un subconjunto del plano cartesiano. El problema básico en la **programación lineal** es hallar el valor máximo (más grande) o el valor mínimo (más pequeño) de una función lineal definida en un conjunto determinado por un sistema de desigualdades lineales. En esta sección estudiaremos una forma de encontrar el valor máximo o mínimo de F.

Terminología Un problema típico de programación lineal está dado por

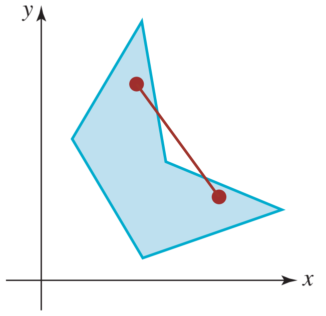
$$\begin{aligned} &\text{Maximice:} \quad F(x, y) = 5x + 10y \\ &\text{sujeto a:} \quad \begin{cases} x + 2y \le 6 \\ 3x + y \le 9 \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

En este contexto, F se llama **función objetivo** y las desigualdades lineales se denominan **restricciones**. Se dice que todo par ordenado de números reales (x_0, y_0) que satisfaga todas las restricciones es una **solución factible** del problema. El conjunto de soluciones factibles se simboliza con S. Se puede demostrar que para cualquier par de puntos en la gráfica de S, el segmento de recta que los une está completamente en la gráfica de S. Cualquier conjunto del plano que tenga esta propiedad se llama **convexo**. En la **FIGURA 13.5.1*a*)** se ilustra un polígono convexo y en la figura 13.5.1*b*) uno no es convexo. Los puntos de las esquinas del conjunto convexo S determinados por las restricciones se llaman **vértices**.

En todo este análisis nos ocuparemos de la gráfica del conjunto S de las soluciones factibles del sistema de desigualdades lineales en las que $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Exponemos el teorema siguiente sin demostración.



a) Polígono convexo



b) No convexo

FIGURA 13.5.1 Polígonos en el plano

Teorema 13.5.1 Valores máximo y mínimo

Sea $F(x, y) = ax + by + c$ una función definida en un conjunto S. Si la gráfica de S es un polígono convexo, entonces F tiene a la vez un valor máximo y uno mínimo en S, y cada uno de ellos se ubica en un vértice de S.

EJEMPLO 1 Determinación de los valores máximo y mínimo

Determine los valores máximo y mínimo de la función objetivo en (2).

Solución Primero trazamos la gráfica del conjunto S de soluciones factibles y hallamos todos los vértices resolviendo las ecuaciones simultáneas apropiadas. Por ejemplo, el vértice $(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$ se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x + y = 9. \end{cases}$$

(**FIGURA 13.5.2**). Se deduce del teorema 13.5.1 que los valores máximo y mínimo de F ocurren en los vértices. En la tabla de abajo vemos que el valor máximo de la función objetivo es

$$F(\tfrac{12}{5}, \tfrac{9}{5}) = 10(\tfrac{12}{5}) + 15\,(\tfrac{9}{5}) = 51.$$

El valor mínimo es $F(0, 0) = 0$.

Vértice	Valor de F
(0, 3)	45
(0, 0)	0
(3, 0)	30
$(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$	51

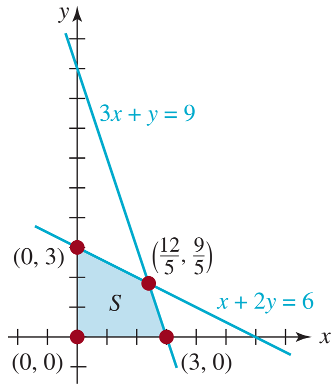


FIGURA 13.5.2 Conjunto convexo para el ejemplo 1

EJEMPLO 2 Determinación de los valores máximo y mínimo

Determine los valores máximo y mínimo de

$$F(x, y) = 6x + y + 1$$

sujeto a
$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 1 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq y \leq 6. \end{cases}$$

Solución En la **FIGURA 13.5.3** se da la gráfica de S determinada por las restricciones, y los vértices están marcados. Como se observa en la tabla de abajo, el valor máximo de F es

$$F(5, 5) = 6(5) + 5 + 1 = 36$$

El valor mínimo es

$$F(1, 2) = 6(1) + 2 + 1 = 9$$

Vértice	Valor de F
(1, 6)	13
(1, 2)	9
(5, 2)	33
(5, 5)	36
(4, 6)	31

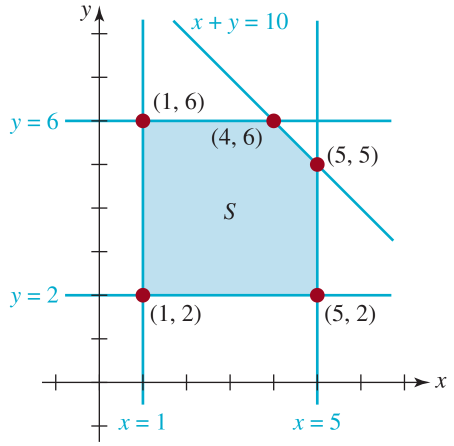


FIGURA 13.5.3 Conjunto convexo para el ejemplo 2

EJEMPLO 3 Utilidad máxima

Una pequeña compañía manufacturera de herramientas tiene dos fraguas F_1 y F_2, cada una de las cuales, por las necesidades de mantenimiento, puede operar máximo 20 horas por día. La compañía hace dos tipos de herramientas: A y B. La herramienta A requiere 1 hora en la fragua F_1 y 3 horas en la fragua F_2. La herramienta B requiere 2 horas en la fragua F_1 y 1 hora en la fragua F_2. La compañía obtiene una utilidad de \$20 por herramienta A y de \$10 en la herramienta B. Determine la cantidad de cada tipo de herramienta que la compañía debe hacer para maximizar su utilidad diaria.

Solución Sea

x = el número de herramientas A que se producen cada día y
y = el número de herramientas B que se producen cada día

La función objetivo es la utilidad diaria

$$P(x, y) = 20x + 10y$$

El número total de horas por día que ambas herramientas requieren en la fragua F_1 debe satisfacer

$$1 \cdot x + 2 \cdot y \leq 20$$

De forma similar, el número total de horas por día que ambas herramientas requieren en la fragua F_2 debe satisfacer

$$3 \cdot x + 1 \cdot y \leq 20$$

Así necesitamos

$$\text{Maximizar:} \quad P(x, y) = 20x + 10y$$

$$\text{sujeto a:} \quad \begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 3x + y \leq 20 \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

La gráfica de S determinada por las restricciones se muestra en la **FIGURA 13.5.4**. En la tabla se observa que la utilidad máxima diaria es

$$P(4, 8) = 20(4) + 10(8) = 160$$

Esto es, cuando la compañía hace cuatro de las herramientas *A* y 8 de las herramientas *B* cada día, su máxima utilidad diaria es de $160.

Vértice	Valor de P
(0, 10)	100
(0, 0)	0
$(\frac{20}{3}, 0)$	133.33
(4, 8)	160

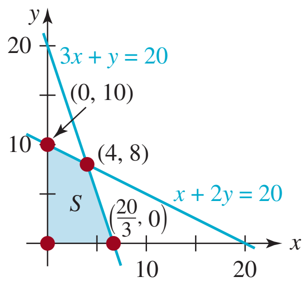


FIGURA 13.5.4 Conjunto convexo para el ejemplo 3

EJEMPLO 4 Costo mínimo

Durante su tiempo libre, John trabaja a destajo en la casa, tejiendo pares de guantes, bufandas y gorros. Durante el invierno produce un total de 300 de estos artículos por mes. Tiene un pedido fijo mensual de una compañía grande de venta por catálogo de artículos para actividades al aire libre de 50 a 100 pares de guantes, por lo menos 100 bufandas y 70 gorros. Los costos del material usado son de $0.20 por cada par de guantes, $0.40 por cada bufanda y $0.50 por cada gorro. Determine el número de cada artículo que John debe tejer cada mes para minimizar su costo total mensual.

Solución Si x y y denotan el número de pares de guantes y bufandas, respectivamente, suministrados por John a la compañía de venta por catálogo cada mes, el número de gorros suministrados es, entonces, $300 - x - y$. La función objetivo es el costo total mensual

$$C(x, y) = 0.2x + 0.4y + 0.5(300 - x - y)$$

o

$$C(x, y) = -0.3x - 0.1y + 150$$

Las restricciones son

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 300 - x - y \geq 0 \\ 50 \leq x \leq 100 \\ y \geq 100 \\ 300 - x - y \geq 70. \end{cases}$$

La última desigualdad de este sistema es equivalente a $x + y \leq 230$. La gráfica del conjunto S de soluciones factibles determinada por las restricciones y los vértices del conjunto se muestran en la **FIGURA 13.5.5**. De la tabla obtenemos que $C(100, 130) = 107$ es el mínimo.

Vértice	Valor de C
(50, 100)	125
(50, 180)	117
(100, 130)	107
(100, 100)	110

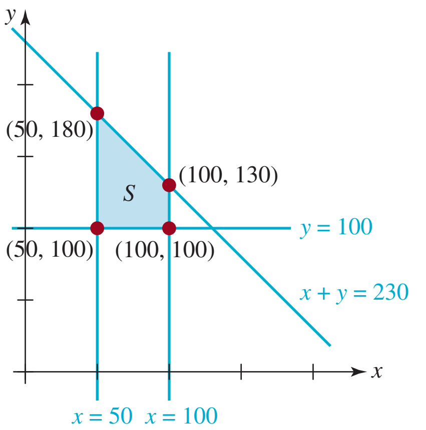


FIGURA 13.5.5 Conjunto convexo para el ejemplo 4

Así, John debe tejer 100 pares de guantes, 130 bufandas y 70 gorros cada mes, para minimizar los costos totales. ≡

Del análisis precedente no debe quedarle la impresión de que una función objetivo debe tener tanto un máximo como un mínimo. Si la gráfica de S no es un polígono convexo, entonces la conclusión del teorema 13.5.1 puede no ser verdadera. Según las restricciones, podría suceder que una función lineal F tenga un mínimo, pero no un máximo (o viceversa). Sin embargo, se puede demostrar que si F tiene un mínimo (o un máximo) en S, entonces se obtiene en el vértice de la región. Además, el máximo (o el mínimo) de una función objetivo puede ocurrir en más de un vértice.

EJEMPLO 5 Mínimo, pero no máximo

Considere la función lineal

$$F(x, y) = 5x + 20y$$

sujeta a las restricciones $\begin{cases} 3x + 4y \geq 12 \\ 2x + \ \ y \geq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$

La inspección de la **FIGURA 13.5.6** muestra que la gráfica del conjunto S de las soluciones de las restricciones no es un polígono convexo. Se puede probar que

$$F(4, 0) = 20$$

es un mínimo. No obstante, en este caso, la función objetivo no tiene máximo, puesto que $F(x, y)$ puede aumentar sin límite simplemente aumentando $x(x \geq 4)$ o aumentando $y(y \geq 4)$.

Vértice	Valor de F
$(0, 4)$	80
$\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$	52
$(4, 0)$	20

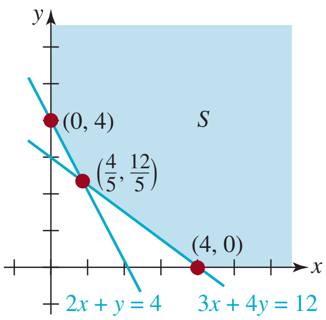


FIGURA 13.5.6 Conjunto convexo para el ejemplo 5 ≡

13.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-35.

En los problemas 1 a 12, halle los valores máximo y mínimo, si existen, de la función lineal F dada sobre el conjunto S definido por las restricciones. Suponemos $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

1. $F(x, y) = 4x + 7$

$\begin{cases} x \leq 3, y \geq 1 \\ y \leq x \end{cases}$

2. $F(x, y) = 20x - 3y$

$\begin{cases} y \leq 4 \\ x + y \geq 3 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$

3. $F(x, y) = 5x + 8y$
$$\begin{cases} x \le 2 \\ x + y \le 3 \\ x - y \ge 0 \end{cases}$$

4. $F(x, y) = 3x + 6y$
$$\begin{cases} x \ge 2, y \le 4 \\ x + 3y \ge 6 \\ 2x - y \le -2 \\ 3x + 2y \le 18 \end{cases}$$

5. $F(x, y) = 3x + 6y$
$$\begin{cases} x + 3y \ge 6 \\ 2x - y \le -2 \\ 3x + 2y \le 18 \end{cases}$$

6. $F(x, y) = 8x + 12y$
$$\begin{cases} x - 4y \le -6 \\ -3x + y \le -4 \\ 2x + 3y \le 21 \end{cases}$$

7. $F(x, y) = x + 4y$
$$\begin{cases} x + y \ge 1 \\ 2x - y \ge -1 \\ 2x + y \le 5 \end{cases}$$

8. $F(x, y) = x + y$
$$\begin{cases} y \le 5 \\ x - y \le 3 \end{cases}$$

9. $F(x, y) = 3x + 6y$
$$\begin{cases} x \le 4, y \le 5 \\ 2x + y \le 10 \\ x + 2y \le 10 \end{cases}$$

10. $F(x, y) = x - 4y$
$$\begin{cases} 3x + y \ge 12 \\ 3x - 2y \le 6 \\ 3x + 4y \le 30 \\ 3x - 2y \ge 3 \end{cases}$$

11. $F(x, y) = 4x + 2y + 25$
$$\begin{cases} -x + 2y \ge 0 \\ x + y \le 10 \\ -3x + y \le 5 \end{cases}$$

12. $F(x, y) = 2x + 3y + 6$
$$\begin{cases} x \le 8, y \le 5 \\ 3x + 2y \ge 8 \\ -x + 5y \le 20 \end{cases}$$

En los problemas 13 a 16, la función objetivo F, sujeta a las restricciones, tiene un valor mínimo. Halle ese valor. Explique por qué F no tiene valor máximo. Suponga que $x \ge 0$ y $y \ge 0$.

13. $F(x, y) = 6x + 4y$
$$\begin{cases} 2x - y \ge 6 \\ 2x + 5y \ge 10 \end{cases}$$

14. $F(x, y) = 10x + 20y$
$$\begin{cases} x \ge 3, y \ge 1 \\ y \le x \end{cases}$$

15. $F(x, y) = 10x + 10y$
$$\begin{cases} x + 2y \ge 5 \\ 2x + y \ge 6 \end{cases}$$

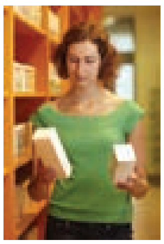
16. $F(x, y) = 10x + 5y$
$$\begin{cases} x + y \ge 4 \\ x + 2y \ge 6 \\ x + 4y \ge 8 \end{cases}$$

Aplicaciones diversas

17. ¿Cuántos? Una empresa fabrica radios satelitales y reproductores portátiles de DVD. Obtiene una utilidad de \$10 por cada radio y de \$40 por cada reproductor. Debido a sus instalaciones limitadas para la producción, el número total de radios y reproductores de DVD que la empresa puede fabricar en un mes es, cuando mucho, de 350. Debido a la disponibilidad de las partes, la empresa puede fabricar, cuando mucho, 300 radios y 100 reproductores de DVD cada mes. Determine cuántos radios satelitales y reproductores de DVD debe producir la empresa cada mes para maximizar su utilidad.

18. Ganancias Una mujer tiene hasta \$10 000 que desea invertir en dos tipos de certificados de depósito, A y B, que ofrecen rendimientos anuales de 6.5% y 7.5%. Quiere invertir en B, cuando mucho, tres veces la cantidad en A. Obtenga el rendimiento anual máximo si no puede invertir más de \$6 000 en B y no más de \$5 000 en A.

19. Gastos médicos menores Se informa a una paciente que su ingesta diaria de vitaminas debe ser por lo menos de 6 unidades de A, 4 unidades de B y 18 unidades de C, pero no más de 12 unidades de A, 8 unidades de B y 56 unidades de C. La paciente averigua que en la farmacia se venden dos marcas, X y Y, de complementos multivitamínicos que contienen la cantidad necesaria de vitaminas. Una cápsula de la marca X contiene 1 unidad de A, 1 unidad de B y 7 unidades de C, y cuesta 5 centavos. Una cápsula de la marca Y contiene 3 unidades de A, 1 unidad de B y 2 unidades de C y cuesta 6 centavos. ¿Cuántas cápsulas de cada marca debe tomar la paciente todos los días para minimizar el costo?



¿Cuánto de cada una?

20. Costo de hacer negocios Una compañía de seguros usa dos computadoras, una IBC 490 y una CDM 500. Cada hora, la IBC procesa 8 unidades (1 unidad = 1 000) de reclamaciones de gastos médicos, 1 unidad de reclamaciones de seguro de vida y 2 unidades de reclamaciones de seguro de automóvil. Cada hora, la CDM puede procesar 2 unidades de reclamaciones de gastos médicos, 1 unidad de reclamaciones de seguro de vida y 7 unidades de reclamaciones de seguro de automóvil. La empresa considera que es necesario procesar por lo menos 16 unidades de reclamaciones de gastos médicos, por lo menos 5 unidades de reclamaciones de seguro de vida y por lo menos 20 unidades de reclamaciones de seguro de automóvil por día. Si a la compañía le cuesta $100 la hora de funcionamiento de la IBC y $200 la hora de funcionamiento de la CDM, ¿cuántas horas, cuando mucho, debe funcionar cada computadora cada día para mantener en el nivel mínimo el costo diario para la compañía? ¿Cuál es el costo mínimo? ¿Hay un costo máximo por día?

21. Utilidad La bodega Werry's Warehouse tiene un inventario de 1 300 pares de jeans de diseñador y 1 700 pares de jeans de marca genérica, que se enviarán a dos tiendas: una tienda de lujo y un almacén de descuento. La bodega gana una utilidad de $14.25 por par sobre los pantalones de diseñador y $12.50 por par sobre los de marca genérica en la tienda de lujo. Las utilidades correspondientes en el almacén de descuento son de $4.80 y $3.40 por par. Sin embargo, la tienda de lujo puede adquirir cuando mucho 1 800 pares de jeans, en tanto que el almacén de descuento tiene espacio para 2 500 pares a lo sumo. Obtenga el número de pantalones de diseñador y de marca genérica que la bodega debe enviar a cada tienda para maximizar su utilidad total. ¿Cuál es la utilidad máxima?

22. Minimizar el costo La empresa manufacturera de Joan fabrica tres tipos de automóviles deportivos: A, B y C. La empresa produce un total de 100 automóviles cada año. El número de automóviles B que fabrica no debe ser mayor que tres veces el número de automóviles A fabricados, pero la producción anual combinada debe ser por lo menos de 20 automóviles. El número de automóviles C que se fabrican cada año debe ser por lo menos de 32. La fabricación de cada automóvil A cuesta $9 000; la de los automóviles B y C, $6 000 y $8 000, respectivamente. ¿Cuántos de cada tipo de automóvil deben fabricarse para minimizar el costo de producción anual de la empresa? ¿Cuál es el costo mínimo?

23. Dieta saludable Los alces que viven en un parque nacional de Michigan comen plantas acuáticas que tienen un contenido alto de sodio, pero proporcionan poca energía (contienen una gran cantidad de agua), y plantas terrestres, las cuales tienen un contenido alto de energía, pero prácticamente no contienen sodio. Los experimentos han demostrado que un alce puede obtener cerca de 0.8 mj (megajulios) de energía de 1 kilo de plantas acuáticas y cerca de 3.2 mj de energía de 1 kilo de plantas terrestres. Se estima que un alce adulto necesita comer por lo menos 17 kg de plantas acuáticas diariamente para satisfacer sus necesidades de sodio. Se ha estimado también que el primer estómago del alce es incapaz de digerir más de 33 kg de alimento diariamente. Encuentre la ingesta diaria tanto de plantas acuáticas como de terrestres que proporcionarán el máximo de energía al alce, sujeta al requerimiento de sodio y a la capacidad del primer estómago.

Alce comiendo
plantas acuáticas

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Ecuación lineal
Sistemas de ecuaciones lineales
Solución de un sistema lineal
Sistemas lineales equivalentes
Sistema consistente
Sistema inconsistente
Método de sustitución
Método de eliminación
Sustitución hacia atrás
Sistemas homogéneos
Solución trivial

Expresión racional propia
Expresión racional impropia
Descomposición en fracciones parciales:
- factor cuadrático irreducible

Desigualdad lineal
Solución de una desigualdad:
- semiplano

Sistema de desigualdades lineales:
- punto de prueba

Desigualdad no lineal

Sistema de desigualdades no lineales
Gráfica de un conjunto solución
Programación lineal:
- función objetivo
- solución factible
- restricciones
- conjunto convexo
- vértices de un conjunto convexo

CAPÍTULO 13 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-35.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 10, responda verdadero o falso.

1. Las gráficas de $2x + 7y = 6$ y $x^4 + 8xy - 3y^6 = 0$ se intersecan en $(-4, 2)$. ________
2. El sistema homogéneo
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -2x - 4y + 6z = 0 \end{cases}$$
tiene sólo la solución cero $(0, 0, 0)$. ________
3. El sistema
$$\begin{cases} y = mx \\ x^2 + y^2 = k \end{cases}$$
siempre tiene dos soluciones cuando $m \neq 0$ y $k > 0$. ________
4. El sistema
$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = 1 - x \end{cases}$$
no tiene solución. ________
5. Los sistemas no lineales
$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = \sqrt{4 - x} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} y^2 = x \\ y^2 = 4 - x \end{cases}$$
son equivalentes.
6. $(1, -2)$ es una solución de la desigualdad $4x - 3y + 5 \leq 0$. ________
7. El origen está en el semiplano determinado por $4x - 3y < 6$. ________
8. El sistema de desigualdades
$$\begin{cases} x + y > 4 \\ x + y < -1 \end{cases}$$
no tiene soluciones. ________
9. El sistema de ecuaciones no lineales
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y = 5 \end{cases}$$
tiene exactamente tres soluciones. ________
10. La forma de la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{1}{x^2(x + 1)^2}$ es
$$\frac{A}{x^2} + \frac{B}{(x + 1)^2}.$$ ________

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 10, llene los espacios en blanco.

1. El sistema
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$$
es ____________ (consistente o inconsistente).
2. El sistema
$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -\frac{1}{2}x + y = b \end{cases}$$
es consistente para $b =$ ________.
3. La gráfica de una sola desigualdad lineal con dos variables representa un(a) ____________ en el plano.
4. En sus propias palabras, describa la gráfica de la desigualdad $1 \leq x - y \leq 4$. __________
5. Para descomponer
$$\frac{x^3}{(x + 1)(x + 2)}$$
en fracciones parciales, comenzamos con ________.
6. La solución del sistema
$$\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ y + 2z = 1 \\ 4z = -8 \end{cases}$$
es ____________.
7. Si el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables tiene un número infinito de soluciones, entonces se dice que las ecuaciones son ____________.
8. Si la gráfica de $y = ax^2 + bx$ pasa por $(1, 1)$ y $(2, 1)$, entonces $a =$ ________ y $b =$ ________.
9. La gráfica del sistema
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ y - 1 > 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$$
se sitúa en el ________ cuadrante.

10. Un sistema de desigualdades cuya gráfica esta dada en la **FIGURA 13.R.1** es ________________

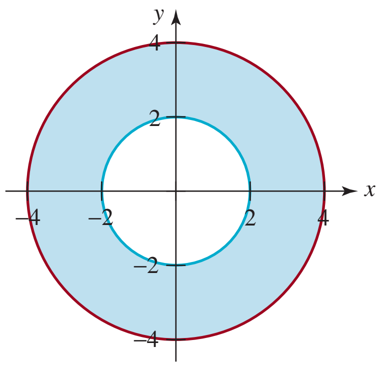


FIGURA 13.R.1 Gráfica para el problema 10

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 a 14, resuelva el sistema de ecuaciones dado.

1. $\begin{cases} x^2 - 4x + y = 5 \\ x + y = -1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 101y = 10^x + 10^{-x} \\ y - 10^x = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy = 12 \\ -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

5. $\begin{cases} y - \log_{10}x = 0 \\ y^2 - 4\log_{10}x + 4 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2y = 63 \\ y = 16 - x^2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 3 \\ 5\ln x + 2\ln y = 8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + 5y - 6z = 1 \\ 4x - y + 2z = 4 \\ 2x - 11y + 14z = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ x + y + z = -2 \\ 4x + 2y + 2z = -6 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x - 2y = 10 \\ x + 4y = 4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 4 + \log_2 y \\ y = 8^x \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = |x| \\ -x + y = 1 \end{cases}$

15. Juego de números En un número de dos dígitos, el dígito de las unidades es uno más que tres veces el dígito de las decenas. Cuando los dígitos se invierten, el nuevo número es 45 más que el número original. Obtenga el número original.

16. Longitud Un triángulo rectángulo tiene un área de 24 cm^2. Si la hipotenusa mide 10 cm de largo, ¿cuál es la longitud de los dos catetos del triángulo?

17. ¿Tiene un cortador de alambre? Un alambre de 1 m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar una circunferencia y la otra se usa para formar un cuadrado. La suma de las áreas del círculo y el cuadrado es $\frac{1}{16}$ m^2. ¿Cuánto mide de largo el lado del cuadrado y el radio del círculo?

18. Coordenadas Obtenga las coordenadas del punto P de la intersección de la recta y la parábola que se ilustran en la **FIGURA 13.R.2**.

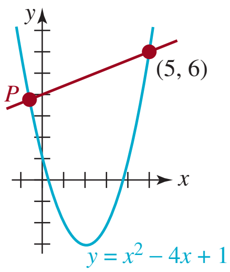


FIGURA 13.R.2 Gráficas para el problema 18

En los problemas 19 a 22, obtenga la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional dada.

19. $\dfrac{2x - 1}{x(x^2 + 2x - 3)}$

20. $\dfrac{1}{x^4(x^2 + 5)}$

21. $\dfrac{x^2}{(x^2 + 4)^2}$

22. $\dfrac{x^5 - x^4 + 2x^3 + 5x - 1}{(x - 1)^2}$

En los problemas 23 a 28, grafique el sistema de desigualdades dado.

23. $\begin{cases} y - x \leq 0 \\ y + x \leq 0 \\ y \geq -1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - 3y \geq -6 \\ 3x - 2y \leq 12 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x + y \geq 1 \\ -x + y \leq 7 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 2 \leq y \leq 6 \\ x + y \geq 5 \\ -x + y \leq 9 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} y \leq -x^2 - x + 6 \\ y \geq x^2 - 2x \end{cases}$

En los problemas 29 a 32, use las funciones $y = x^2$ y $y = 2 - x$ para formar un sistema de desigualdades cuya gráfica se presenta en la figura.

29.

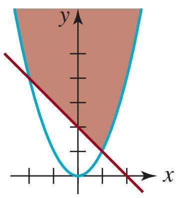


FIGURA 13.R.3 Gráfica para el problema 29

30.

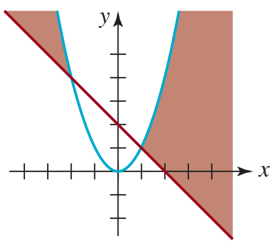


FIGURA 13.R.4 Gráfica para el problema 30

31.

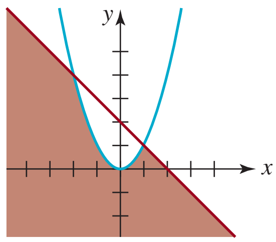


FIGURA 13.R.5 Gráfica para el problema 31

32.

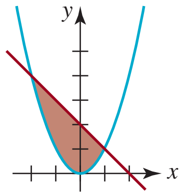


FIGURA 13.R.6 Gráfica para el problema 32

33. Obtenga los valores máximo y mínimo de

$$F(x, y) = 100x - 40y$$

sujeta a

$$\begin{cases} -x + 3y \leq 5 \\ x + y \geq 3 \\ 2x - y \leq 7 \\ x \geq 0,\ 1 \leq y \leq 3. \end{cases}$$

34. La función $F(x, y) = 20x + 5y$ sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} 4x + 5y \geq 20 \\ 3x + y \geq 10 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

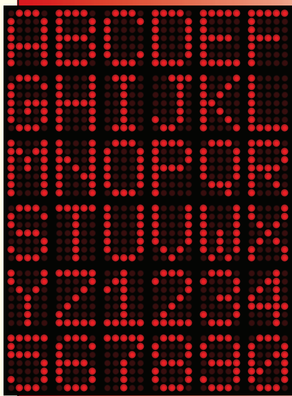
tiene un valor mínimo. ¿Cuál es? Explique por qué la función no tiene valor máximo.

35. **Rendimiento total** En una pequeña empresa agrícola, cultivar un acre de maíz requiere 6 h de mano de obra y \$36 de capital, en tanto que cultivar un acre de avena requiere 2 h de mano de obra y \$18 de capital. Suponga que el agricultor tiene 12 acres de tierra, 48 h de mano de obra y \$360 de capital disponibles. Si el rendimiento del maíz es de \$40 por acre y el de la avena es de \$20 por acre, ¿cuántos acres de cada cultivo debe sembrar el agricultor para maximizar el rendimiento total (incluido el capital no utilizado)?

MATRICES Y DETERMINANTES

14

En este capítulo



Una tabla ordenada rectangular de números o símbolos se llama *matriz*.

Un poco de historia Este capítulo se centrará en tres temas: **matrices**, **determinantes** y **sistemas de ecuaciones**. Veremos cómo los primeros dos conceptos pueden emplearse para resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

Las matrices fueron creación de los eminentes matemáticos ingleses **Arthur Cayley** (1821-1895) y **James Joseph Sylvester** (1814-1897). Como muchas invenciones matemáticas, la teoría y el álgebra de matrices surgieron como producto secundario de las investigaciones e intereses matemáticos primarios de Cayley, niño prodigio en matemáticas que sobresalió en esa materia mientras estudiaba en el Trinity College, en Cambridge. Sin embargo, como no pudo conseguir trabajo como matemático, llegó a ser abogado a la edad de 28 años. Después de soportar 14 años en esta profesión, le ofrecieron una cátedra de matemáticas en Cambridge en 1863, donde influyó para que la universidad admitiera a las primeras mujeres. Arthur Cayley también inventó el concepto de la geometría n-dimensional e hizo muchas contribuciones significativas a la teoría de los determinantes. Entre 1881 y 1882, Cayley fue profesor de la Universidad Johns Hopkins en Estados Unidos. Sylvester también dio clases en la Universidad Johns Hopkins de 1877 a 1883.

14.1 Introducción a las matrices

Introducción El método de resolución, y la resolución misma de un sistema de ecuaciones lineales, no depende de ninguna manera de los símbolos que se usen como variables. En el ejemplo 2 de la sección 13.1 vimos que la solución del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ 4x - 2y - z = -4 \\ 2x - y + 3z = 19 \end{cases} \tag{1}$$

es $x = -2$, $y = -5$, $z = 6$, o como tripleta ordenada: $(-2, -5, 6)$. Esta misma tripleta ordenada también es una solución de

$$\begin{cases} u + 2v + w = -6 \\ 4u - 2v - w = -4 \\ 2u - v + 3w = 19 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} r + 2s + t = -6 \\ 4r - 2s - t = -4 \\ 2r - s + 3t = 19. \end{cases}$$

Lo importante es esto: la solución de un sistema de ecuaciones lineales depende solamente de los coeficientes y constantes que aparecen en el sistema y no de los símbolos que se utilizan para representar las variables. Veremos que (1) puede resolverse por medio de operaciones apropiadas en el *arreglo ordenado* de números

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 19 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

En (2), la primera, segunda y tercera columnas representan los coeficientes de x, y y z, respectivamente, en (1), y la última columna está formada por las constantes a la derecha del signo de igualdad en (1).

Antes de examinar esta idea necesitamos desarrollar un sistema matemático cuyos elementos sean arreglos ordenados de números. Un arreglo ordenado rectangular como (2) se llama **matriz**.

Definición 14.1.1 Matriz

Una **matriz** A es un arreglo ordenado rectangular de números:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Terminología Si hay m filas y n columnas, decimos que el **orden** de la matriz es $m \times n$, y nos referimos a ella como "matriz de m por n" o, simplemente, como **matriz rectangular**. La que vemos en (3) es una matriz de $m \times n$. Una matriz $n \times n$ se llama **matriz cuadrada** y se dice que es de **orden** n. La **entrada**, o **elemento** en la i-ésima fila y en la j-ésima columna de una matriz A de $m \times n$ se representa con el símbolo a_{ij}. Así, la entrada, por ejemplo, en la tercera fila y la cuarta columna de una matriz A es a_{34}.

EJEMPLO 1 Orden

a) El orden de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

es, respectivamente, 2×3 y 3×1.

b) La matriz de 2×2

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -3 & \pi \end{bmatrix}$$

también se conoce como matriz cuadrada de segundo orden. ≡

Una matriz de $1 \times n$ consta de una fila y n columnas y se llama **matriz fila** o **vector fila**. Por otra parte, una matriz de $m \times 1$ tiene m filas y una columna; como es natural, se denomina **matriz columna** o **vector columna**. La matriz B de 3×1 del inciso *a*) del ejemplo 1 es una matriz columna.

■ Notación matricial Para ahorrar tiempo y espacio al escribir es conveniente usar una notación especial para una matriz general. Una matriz A de $m \times n$ suele escribirse abreviadamente como $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

EJEMPLO 2 Determine la matriz

Determine la matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ si $a_{ij} = i + j$ para cada i y cada j.

Solución Para obtener la entrada de la primera fila y la primera columna sea $i = 1$ y $j = 1$; esto es $a_{11} = 1 + 1 = 2$. El resto de las entradas se obtienen de manera similar:

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \\ 3+1 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$ ≡

Se dice que las entradas $a_{11}, a_{22}, a_{33}\ldots$ en una matriz cuadrada están sobre su **diagonal principal**. Por ejemplo, las entradas de la diagonal principal de las matrices cuadradas

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

se muestran aquí resaltadas en rojo.

■ Igualdad Dos matrices son **iguales** si tienen el mismo orden y si sus correspondientes entradas son iguales.

Definición 14.1.2 Igualdad

Si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{m \times n}$, entonces $A = B$ si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para toda i y toda j.

EJEMPLO 3 Igualdad de dos matrices

De la definición 14.1.2, tenemos la igualdad

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & -3 \\ 0 & -\pi & \sqrt{2} & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{100}{100} & 0.5 & \sqrt{4} & -3 \\ 0 & (-1)\pi & \sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}$$

pero

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

puesto que las correspondientes entradas en la segunda fila no son todas iguales. Asimismo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

puesto que las matrices no tienen el mismo orden. ≡

EJEMPLO 4 Ecuación matriz

Halle los valores de x y y si

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ x^3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y+1 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución De la definición 14.1.2, igualamos las entradas correspondientes. Se deduce que

$$-1 = 2y + 1 \qquad \text{y} \qquad x^3 = 8.$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos $y = -1$ y $x = 2$. ≡

Definición 14.1.3 Transpuesta de una matriz

La transpuesta de la matriz A de $m \times n$ en (3) es la matriz A^T de $n \times m$ dada por

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

En otras palabras, las filas de la matriz A son las columnas de la matriz transpuesta A^T.

EJEMPLO 5 Transposición

Obtenga la matriz transpuesta de ***a***) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 10 \\ 6 & 5 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ y ***b***) $B = [5 \quad 3]$.

Solución ***a***) Puesto que A es un matriz de 3×4, la transpuesta A^T será una matriz de 4×3. En la formación de la matriz transpuesta escribimos la primera fila como la primera columna, la segunda fila como la segunda columna y así sucesivamente. Por tanto,

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 10 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

b) La transpuesta de una matriz fila es una matriz columna:

$$B^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad \equiv$$

Como veremos en la sección 14.4, la transpuesta de una matriz cuadrada es particularmente útil.

14.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-36.

En los problemas 1 a 10, establezca el orden de la matriz dada.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $[8]$

6. $[0 \quad 5 \quad -7]$

7. $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

9. $(a_{ij})_{5 \times 7}$

10. $(a_{ij})_{6 \times 6}$

En los problemas 11 a 16, suponga que la matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$ se define como

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} & -9 \\ \frac{1}{4} & 5 & 11 & 27 \end{bmatrix}.$$

Encuentre el número indicado.

11. a_{13}

12. a_{32}

13. a_{24}

14. a_{33}

15. $2a_{11} + 5a_{31}$

16. $a_{23} - 4a_{33}$

En los problemas 17 a 22, determine la matriz $(a_{ij})_{2 \times 3}$ que satisfaga la condición dada.

17. $a_{ij} = i - j$

18. $a_{ij} = ij$

19. $a_{ij} = ij^2$

20. $a_{ij} = 2i + 3j$

21. $a_{ij} = \dfrac{4i}{j}$

22. $a_{ij} = i^j$

En los problemas 23 a 26, determine si las matrices dadas son o no iguales.

23. $\begin{bmatrix} |-4| & 3^2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 1.4 \end{bmatrix}$

24. $[0 \quad 0], [0 \quad 0 \quad 0]$

25. $\begin{bmatrix} 0 & |4-5| & 0 \\ \frac{7}{2} & -4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 0 \\ 3.5 & -4 & \frac{12}{2} \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

En los problemas 27 a 32, despeje las variables.

27. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ x & -y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ x-y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} w+1 & 10+x \\ 3y-2 & x-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2x+1 \\ y-5 & 4z \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & y \\ y & -x \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} x^2 - 9x & x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & x \\ 1 & y^2 - 1 \end{bmatrix}$

En los problemas 33 a 38, obtenga la transpuesta de la matriz dada.

33. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

34. $[-1 \quad 6 \quad 7]$

35. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 6 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

En los problemas 39 y 40, compruebe que la matriz dada es simétrica. Se dice que una matriz A de $n \times n$ es **simétrica** si $A^T = A$.

39. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

40. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Para la discusión

41. Dé un ejemplo de una matriz de 4×4 que sea simétrica (véase el problema 39).

42. Suponga que A^T es la transpuesta de la matriz A. Explique: ¿qué es $(A^T)^T$?

14.2 Álgebra de matrices

Introducción En álgebra común, damos por sentado el hecho de que cualquier par de números reales pueden sumarse, restarse y multiplicarse. En álgebra de matrices, sin embargo, dos matrices pueden sumarse, restarse y multiplicarse sólo en ciertas condiciones.

Adición de matrices Solamente las matrices que tienen el mismo orden pueden sumarse. Si A y B son ambas matrices de $m \times n$, su suma $A + B$ es la matriz de $m \times n$ formada al sumar las correspondientes entradas en cada matriz. En otras palabras, la entrada de la primera fila y la primera columna de A se suma a la entrada de la primera fila y la primera columna de B, y así sucesivamente. Usando símbolos, tenemos la definición siguiente.

Definición 14.2.1 Suma de dos matrices

Si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{m \times n}$, entonces su **suma** es

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}. \tag{1}$$

Si las matrices A y B son de diferente orden no pueden sumarse.

EJEMPLO 1 Suma de dos matrices

a) Como las dos matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

son del mismo orden (de 2×3), podemos sumarlas para obtener una tercera matriz del mismo orden:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+1 & 0+3 \\ 7+(-5) & 3+0 & -4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Como las dos matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

son de diferente orden (respectivamente, 2×3 y 2×2), no podemos sumarlas. ≡

Se deduce directamente de las propiedades de los números reales y de la definición 14.2.1 que la operación de adición en el conjunto de matrices de $m \times n$ satisface las siguientes dos propiedades conocidas:

Ley conmutativa: $A + B = B + A$,

Ley asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Identidad aditiva Se dice que una matriz cuyas entradas son ceros en su totalidad es una **matriz cero** y se simboliza con O. Si A y O son ambas matrices de $m \times n$, entonces tenemos que $A + O = O + A = A$ para cada matriz A de $m \times n$. Decimos que la matriz cero O de $m \times n$ es la **identidad aditiva** del conjunto de matrices de $m \times n$. Por ejemplo, para el conjunto de matrices de 3×2, la matriz cero es

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Producto escalar En el estudio de matrices, los números reales se llaman **escalares**. Si k es un número real, el **producto escalar** de una matriz A y un número real k es la matriz kA con cada entrada igual al producto del número real k y la entrada correspondiente en la matriz dada.

Definición 14.2.2 Producto escalar

Si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y k es cualquier número real, entonces el **producto escalar** de A y k es

$$kA = (ka_{ij})_{m \times n}. \tag{2}$$

EJEMPLO 2 Producto escalar

Para $k = 3$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ se deduce de la definición 14.2.2 que

$$3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(2) \\ 3(3) & 3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$ ≡

EJEMPLO 3 Suma de dos productos escalares

Considere las matrices de 2×3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Encuentre ***a)*** $(-1)A + 2B$ y ***b)*** $(-1)A + A$.

Solución ***a)*** Aplicando la definición 14.2.2, tenemos los productos escalares

$$(-1)A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad 2B = \begin{bmatrix} 14 & 4 & -2 \\ 8 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Usando los resultados anteriores, tenemos de la definición 14.2.1

$$(-1)A + 2B = \begin{bmatrix} -1+14 & 0+4 & -2+(-2) \\ 3+\ 8 & -4+0 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 4 & -4 \\ 11 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) $$(-1)A + A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1+1 & 0+0 & -2+2 \\ 3+(-3) & -4+4 & -5+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \equiv$$

Las propiedades siguientes del producto escalar se establecen fácilmente con base en las definiciones 14.2.1 y 14.2.2. Si k_1 y k_2 son números reales, entonces

$$k_1(A + B) = k_1A + k_1B,$$
$$(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A,$$
$$k_1(k_2A) = (k_1k_2)A.$$

Inverso aditivo Como se muestra en el ejemplo 3, el **inverso aditivo** $-A$ de la matriz A se define como el producto escalar $(-1)A$. Por ende, si O es la matriz cero de $m \times n$,

$$A + (-A) = O = (-A) + A$$

para cualquier matriz A de $m \times n$. Usamos el inverso aditivo para definir la **resta**, o **diferencia** $A - B$ de dos matrices A y B de $m \times n$, como sigue:

$$A - B = A + (-B).$$

De $$A + (-B) = (a_{ij} + (-b_{ij}))_{m \times n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n},$$

vemos que la diferencia se obtiene restando las entradas de B de las entradas correspondientes de A.

EJEMPLO 4 Diferencia

Las dos matrices fila

$$A = [1 \quad 2 \quad 3] \qquad \text{y} \qquad B = [-2 \quad 7 \quad 4]$$

son del mismo orden (1×3) y, por tanto, su diferencia es

$$\begin{aligned} A - B &= [1 \quad 2 \quad 3] - [-2 \quad 7 \quad 4] \\ &= [1-(-2) \quad 2-7 \quad 3-4] = [3 \quad -5 \quad -1]. \end{aligned} \equiv$$

EJEMPLO 5 Diferencia

Si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 10 & 6 & 8 \\ 9 & -7 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix},$$

encuentre $A - B$ y $B - A$.

Solución

$$A - B = \begin{bmatrix} 4-5 & 5-1 & -2-3 \\ 10-(-1) & 6-2 & 8-6 \\ 9-4 & -7-9 & -1-(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 11 & 4 & 2 \\ 5 & -16 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 5-4 & 1-5 & 3-(-2) \\ -1-10 & 2-6 & 6-8 \\ 4-9 & 9-(-7) & -8-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -11 & -4 & -2 \\ -5 & 16 & -7 \end{bmatrix}. \qquad \equiv$$

En el ejemplo 5 se ilustra que $B - A = -(A - B)$.

Multiplicación de dos matrices Para hallar el **producto** AB de dos matrices A y B, necesitamos que el número de columnas de A sea igual al número de filas en B. Suponga que $A = (a_{ij})_{m \times n}$ es una matriz de $m \times n$ y $B = (b_{ij})_{n \times p}$ es una matriz de $n \times p$. Como se ilustra a continuación, para encontrar la entrada c_{ij} en el producto $C = AB$, hacemos parejas con los números de la fila i-ésima de A con los de la columna j-ésima de B. Luego multiplicamos los pares y sumamos los productos, como sigue:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \tag{3}$$

esto es,

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{fila } i\text{-ésima} \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{columna } j\text{-ésima} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{columna } j\text{-ésima} \\ \begin{bmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}. \ \text{fila } i\text{-ésima}$$

Decimos que (3) es el producto de la fila i-ésima y la fila j-ésima de B. Se deduce de (3) que el producto AB tiene m filas y p columnas. Dicho con otras palabras, el orden del producto $C = AB$ se determina por el número de filas de A y el número de columnas de B:

debe ser igual

$$A_{m \times n}B_{n \times p} = C_{m \times p}.$$

orden del producto

Por ejemplo, el producto de una matriz de 2×3 y una matriz de 3×3 es una matriz de 2×3:

$$\begin{array}{r} \text{1a. fila} \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{2a. columna} \\ \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{2a. columna} \\ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} \end{array}. \ \text{1a. fila}$$

La entrada, digamos, c_{12} es el producto de la primera fila de A y la segunda columna de B:

$$\begin{aligned} c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ &= 0 \cdot 7 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 13 = 36. \end{aligned}$$

Resumimos el análisis anterior con una definición formal.

Definición 14.2.3 Producto de dos matrices

Si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{n \times p}$, entonces el **producto** AB es la matriz C de $m \times p = (c_{ij})_{m \times p}$, donde c_{ij} es el producto de la i-ésima fila de A y la j-ésima fila de B definida por

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}. \tag{4}$$

Aunque a primera vista la definición del producto de dos matrices puede no parecer natural, tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, en la sección 14.6 se presenta una técnica nueva para resolver algunos sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 6 Producto

Si $A = [6 \quad -5]$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, entonces, por inspección, vemos que A y B son *ajustables* a la multiplicación en el orden AB porque el orden de A es 1×2 y el de B es 2×2. Se deduce de la definición 14.2.3 que

En otras palabras, el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

$$\begin{aligned} AB &= [6 \quad -5]\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \\ &= [6 \cdot 1 + (-5) \cdot 3 \quad 6 \cdot (-2) + (-5) \cdot 6] \\ &= [-9 \quad -42]. \end{aligned}$$

≡

Es posible que el producto AB exista aunque el producto BA pueda no estar definido. En el ejemplo 6, debido a que el número de columnas de B (2) no es igual al número de filas de A (1), el producto BA no está definido.

EJEMPLO 7 Producto

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$, encuentre el producto AB.

Solución Usando la definición 14.2.3, tenemos

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 + 5 \cdot 5 & 2 \cdot 7 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 7 & 2 \cdot 8 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 7 + 0 \cdot 6 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 8 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 27 & 55 & 31 \\ 17 & 49 & 36 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 8 Comparación de AB con BA

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, encuentre los productos AB y BA.

Solución Puesto que A y B son de 2×2, podemos formar los productos AB y BA:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -10 & 12 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & -2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}.$$ ≡

Nótese que en el ejemplo 8, aunque los productos BA y AB están ambos definidos, tenemos $AB \neq BA$. En otras palabras, la multiplicación de matrices no es, en general, conmutativa. Sin embargo, la multiplicación de las matrices tiene las propiedades siguientes:

$$\text{Ley asociativa: } A(BC) = (AB)C,$$

$$\text{Leyes distributivas: } \begin{cases} A(B + C) = AB + AC, \\ (A + B)C = AC + BC, \end{cases}$$

con la condición de que estos productos y sumas estén definidos (véanse problemas 23 al 26 en los ejercicios 14.2).

■ Matriz identidad El conjunto de todas las matrices cuadradas de un orden dado n tiene una identidad multiplicativa, esto es, hay una matriz única I_n de $n \times n$ tal que

$$AI_n = I_nA = A,$$

para cualquier matriz A de $n \times n$. Decimos que I_n es la **matriz identidad de orden n** o, simplemente, la **matriz identidad**. Se puede demostrar que cada entrada en la diagonal principal de I_n es 1 y todas las otras entradas son 0:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son matrices identidad de segundo y tercer órdenes, respectivamente.

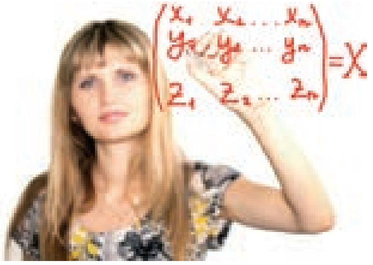
EJEMPLO 9 Identidad del conjunto de matrices de 2×2

Compruebe que $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la identidad multiplicativa para el conjunto de matrices de 2×2.

Solución Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ una matriz de 2×2. Entonces

$$AI_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 & a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} \\ 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} & 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A.$$ ≡



Notas del aula

Una matriz de $1 \times n$, o matriz fila, y una matriz de $m \times 1$, o matriz columna,

$$[b_{11} \quad b_{12} \quad \cdots \quad b_{1n}] \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},$$

también se llaman **vector fila** y **vector columna**, respectivamente. Por ejemplo,

$$[1 \quad 2], \quad [9 \quad 1 \quad 5], \quad [-2 \quad \tfrac{1}{2} \quad 4 \quad -3]$$

son vectores fila, y

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

son vectores columna.

Véase la sección 12.5

Suponga que A es un vector fila de $1 \times n$ y B es un vector columna de $n \times 1$, es decir, A tiene un número de columnas igual al número de filas de la matriz fila B; entonces el producto AB es una matriz de 1×1 o escalar. También decimos que AB es el **producto interno** de las dos matrices. Por ejemplo, si $A = [4 \quad 8]$ y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, su producto interno es

$$AB = [4 \quad 8]\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = 4 \cdot 2 + 8 \cdot (-5) = -32.$$

Esto es lo que sucede en (4): si A es una matriz de $m \times n$ y B es una matriz de $n \times p$, entonces la matriz AB de $m \times p$ se forma obteniendo el producto interno de cada vector fila de A con todos los vectores columna de B.

14.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-36.

En los problemas 1 a 10, encuentre $A + B$, $A - B$, $4A$ y $3A - 2B$.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -7 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 & 1 \\ 5 & 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

7. $A = [10 \quad 3], B = [4 \quad -5]$

8. $A = [5], B = [2]$

9. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

En los problemas 11 a 20, halle AB y BA, si es posible.

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

17. $A = [1 \quad 2 \quad -3], B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, B = [-3 \quad 4]$

20. $A = [4 \quad 0 \quad 2], B = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

En los problemas 21 y 22, obtenga $A^2 = AA$ para la matriz A dada.

21. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

En los problemas 23 a 26, obtenga la matriz dada si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

23. $A(BC)$

24. $C(BA)$

25. $A(B + C)$

26. $B(C - A)$

En los problemas 27 y 28, escriba la suma dada como una matriz de una sola columna.

27. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix}$

En los problemas 29 a 32, dé el orden de la matriz A para que los productos siguientes queden definidos.

29. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} A$

30. $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

En los problemas 33 y 34, obtenga c_{23} y c_{12} para la matriz $C = 2A - 3B$.

33. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

34. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

35. Pruebe que el polinomio con dos variables $ax^2 + bxy + cy^2$ es igual al producto de matrices

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

36. Escriba $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ sin matrices.

En los problemas 37 y 38, obtenga una matriz X de 2×2 que satisfaga la ecuación dada.

37. $X + 3\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 10I_{2\times 2}$

38. $X + 2I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

En los problemas 39 a 42, suponga que $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Compruebe la propiedad dada de la transpuesta calculando los miembros izquierdo y derecho de la igualdad dada.

39. $(A + B)^T = A^T + B^T$

40. $(A - B)^T = A^T - B^T$

41. $(AB)^T = B^T A^T$

42. $(6A)^T = 6A^T$

Aplicaciones diversas

43. Propagación de una enfermedad Dos personas, X y Y, tienen hepatitis infecciosa. Existe la posibilidad de que entren en contacto con cuatro personas: P_1, P_2, P_3 y P_4 y, por tanto, de que les contagien la enfermedad. Sea una matriz de 2×4 como sigue:

$$A = \begin{array}{c} \\ X \\ Y \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Si la persona X (o Y) entra en contacto con cualquiera de las cuatro personas, se escribe un 1 en la fila rotulada X (o Y) en la columna correspondiente. Si X (o Y) no tiene contacto con una persona específica, se escribe 0. Defina los contactos entre P_1, P_2, P_3 y P_4 con otras cuatro personas P_5, P_6, P_7 y P_8 mediante

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Calcule el producto AB e interprete las entradas.

44. Ingresos Los ingresos, en miles de dólares, de tres semanas consecutivas en cinco tiendas de una cadena de supermercados están representados por las entradas en las siguientes matrices R_1, R_2 y R_3:

$$R_1 = [100 \quad 150 \quad 210 \quad 125 \quad 190], \quad R_2 = 2R_1 \text{ y } R_3 = R_1.$$

En el mismo periodo, los costos se pueden representar por

$$C_1 = [40 \quad 60 \quad 80 \quad 50 \quad 70], \quad C_2 = 1.5C_1 \text{ y } C_3 = C_1.$$

Calcule la matriz $4R_1 - 3.5C_1$ e interprete las entradas.

45. Comercio minorista Un almacén de ventas al por menor compra a almacenes de venta al por mayor dos marcas de equipos estereofónicos que constan de amplificadores, sintonizadores y micrófonos. Por lo limitado de las cantidades, el almacén debe comprar estos aparatos a tres comerciantes mayoristas. La matriz A da el precio al por mayor de cada pieza del equipo en dólares. La matriz B representa el número de unidades de cada pieza de equipo comprado (por ejemplo, $b_{11} = 1$ significa que un amplificador, un sintonizador y un juego de micrófonos de marca 1 se le compran al mayorista l).

Si

$$A = \begin{array}{r} \\ \text{Amplificadores} \\ \text{Sintonizadores} \\ \text{Bocinas} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Precio de la marca 1} & \text{Precio de la marca 1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 100 \\ 200 & 150 \\ 400 & 300 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{r} \\ \text{Unidades de marca 1} \\ \text{Unidades de marca 2} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Mayorista 1} & \text{Mayorista 2} & \text{Mayorista 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Impuesto estatal sobre ventas} & \text{Impuesto municipal sobre ventas} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.06 & 0.01 \\ 0.06 & 0.01 \\ 0.06 & 0.01 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Halle la matriz $P = (AB)C$, e interprete el significado de las entradas.

46. Informe de investigación Una estación televisiva realiza una comparación semanal de los costos de cinco productos alimenticios básicos en tres supermercados. En una semana determinada, la siguiente matriz da el precio por kilogramo de cada producto:

$$\begin{array}{r} \\ \text{Verduras} \\ \text{Carne} \\ \text{Pan} \\ \text{Queso} \\ \text{Fruta} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Tienda 1} & \text{Tienda 2} & \text{Tienda 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.39 & 0.41 & 0.38 \\ 1.50 & 1.29 & 1.35 \\ 0.72 & 0.68 & 0.70 \\ 1.00 & 0.92 & 0.98 \\ 0.50 & 0.58 & 0.52 \end{bmatrix} \end{array}.$$

El número de kilogramos de cada producto está dado por la matriz

$$[2 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 4]$$

Mediante la multiplicación de matrices correspondiente, compare los costos totales en las tres tiendas.

47. Inventario Una compañía tiene cinco almacenes de llantas. El inventario de las llantas en el almacén S se da por

$$\begin{array}{r} \\ \text{Llantas trenzadas} \\ \text{Radiales} \\ \text{De acero trenzado} \\ \text{Llantas regulares} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Marca } X & \text{Marca } Y & \text{Marca } Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 100 & 50 & 40 \\ 80 & 20 & 50 \\ 200 & 60 & 20 \\ 100 & 100 & 100 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Los almacenes S_2 y S_3 tienen cada uno tres veces el número de llantas que S_1; el almacén S_4 tiene la mitad de las llantas que tiene el almacén S_1 y el almacén S_5 tiene el doble del número de llantas que tiene S_1. Encuentre la matriz que muestra el inventario total de llantas que tiene la compañía.

48. Distancia recorrida Las velocidades de los automóviles X, Y y Z, en kilómetros por hora, están dadas por la matriz de 3×1

$$A = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 120 \end{bmatrix}.$$

El número de horas que viaja cada automóvil está dado por la matriz de 1×3 $B = [3 \quad 4 \quad 6]$. Calcule los productos AB y BA e interprete las entradas de cada una.

49. **Deserción de estudiantes universitarios** Una universidad tiene 3 000 alumnos inscritos al principio de cierto año académico. La matriz siguiente presenta el desglose por clase de estudiantes:

$$\begin{array}{ll} \text{Año} & \begin{matrix} \text{Primero} & \text{Segundo} & \text{Tercero} & \text{Cuarto} \end{matrix} \\ \text{Número de alumnos} & [1\,100 \quad 800 \quad 600 \quad 500]. \end{array}$$

Se proyecta que el porcentaje de deserción por clase, en un año cualquiera, está dado por

$$\begin{bmatrix} 0.20 \\ 0.15 \\ 0.05 \\ 0.03 \end{bmatrix}.$$

Es decir, se espera que 20% de los estudiantes de la clase de primer año abandonen la escuela antes de concluir el año, y así sucesivamente. Usando la multiplicación de matrices, determine el número total proyectado de deserciones en un año determinado.

Para la discusión

50. Demuestre por ejemplo que, en general, para las matrices A y B de $n \times n$

$$(A - B)(A + B) \neq A^2 - B^2.$$

[*Pista:* use matrices de 2×2 y $A^2 = AA$ y $B^2 = BB$].

51. Sea A y B con matrices 2×2. ¿Es verdad que, en general

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2?$$

Explique.

52. Obtenga dos matrices A de 2×2, donde $A \neq O$, para las cuales $A^2 = O$.

53. Suponga que $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. Obtenga una matriz B de 2×2 tal que $AB = BA = I_2$.

54. Si a, b y c son números reales y $c \neq 0$, entonces $ac = bc$ implica que $a = b$. En matrices, $AC = BC$ no implica que $A = B$. Compruebe esto para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 9 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

14.3 Determinantes

Introducción Para cada matriz cuadrada A, podemos asociar un *número* llamado **determinante** de A. Por ejemplo, los determinantes de las matrices de 2×2 y 3×3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1}$$

se escriben

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \tag{2}$$

en otras palabras, los corchetes se sustituyen por barras verticales. Se dice que un determinante de una matriz de $n \times n$ es un **determinante de orden n** o un **determinante de n-ésimo orden**. Los determinantes de (2) son, a su vez, determinantes de órdenes 2 y 3. En un análisis, el determinante de una matriz cuadrada A se representa con los símbolos det A o $|A|$. Usaremos el primer símbolo exclusivamente. Por consiguiente, si

Aunque un determinante es un número, suele resultar práctico imaginarlo como un arreglo cuadrado. Así, por ejemplo, podemos referirnos a los determinantes de segundo y tercer orden como determinantes de 2×2 y de 3×3, respectivamente.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}, \text{ entonces det } A = \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

Examinaremos dos aplicaciones de los determinantes en las secciones 14.4 y 14.7.

■ Determinante de una matriz de 2 × 2

Como hemos expuesto, un determinante es un número. Comenzamos con la definición del determinante de orden 2, es decir, el determinante de una matriz de 2×2.

Definición 14.3.1 Determinante de una matriz de 2 × 2

Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

entonces, el det A es el número

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{3}$$

EJEMPLO 1 Determinante de orden 2

Evalúe el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Solución Por (3),

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - 3(4) = -22.$$

≡

Como ayuda para memorizar la fórmula de (3), recuerde que el determinante es la diferencia de los productos de los elementos en las diagonales:

multiplicar multiplicar restar productos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \underset{\uparrow}{-} a_{12}a_{21}.$$

Los determinantes de las matrices de 2×2 cumplen una función fundamental en la evaluación de los determinantes de las matrices de $n \times n$, donde $n > 2$. En general, el determinante de una matriz de $n \times n$ puede expresarse en términos de los determinantes de las matrices de $(n - 1) \times (n - 1)$, es decir, determinantes del orden $n - 1$. Así, por ejemplo, el determinante de una matriz de 3×3 puede expresarse en términos de los determinantes de orden 2. Como preparativo para estudiar un método de evaluación del determinante de una matriz de $n \times n$, con $n > 2$, es necesario introducir el concepto de determinante cofactor.

■ Menor y cofactor

Si a_{ij} representa la entrada en la i-ésima fila y la j-ésima columna de una matriz cuadrada A, el **menor** M_{ij} de a_{ij} se define como el determinante de la matriz obtenida al suprimir la fila i-ésima y la columna j-ésima de A. Así, para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

tenemos que los menores de $a_{11} = 1$, $a_{12} = 5$, $a_{22} = 4$ y $a_{32} = 2$ son, a su vez, los determinantes se suprime la primera columna ↓

se suprime la primera fila →

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{3} \\ \cancel{2} & 4 & 5 \\ \cancel{1} & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4(3) - 5(2) = 2,$$

se suprime la segunda columna ↓

se suprime la primera fila →

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{3} \\ 2 & \cancel{4} & 5 \\ 1 & \cancel{2} & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - 5(1) = 1,$$

se suprime la segunda fila →

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & \cancel{5} & 3 \\ \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ 1 & \cancel{2} & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3) - 3(1) = 0,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & \cancel{5} & 3 \\ 2 & \cancel{4} & 5 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1(5) - 3(2) = -1.$$

se suprime la tercera fila →

El **cofactor** A_{ij} de la entrada a_{ij} se define como el menor M_{ij} multiplicado por $(-1)^{i+j}$, esto es,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{5}$$

$(-1)^{i+j}$ es 1 si $i + j$ es un número par y es -1 si $i + j$ es un número impar.

Así, para la matriz A en (4) los cofactores relacionados con los determinantes del menor anterior son

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} = 2, \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} = -1, \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} M_{22} = 0, \\ A_{32} &= (-1)^{3+2} M_{32} = -(-1) = 1, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Para una matriz de 3×3, el coeficiente $(-1)^{i+j}$ del menor M_{ij} sigue el patrón

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}.$$

Este patrón de signos de "tablero de damas" se extiende también a matrices de orden mayor que 3.

EJEMPLO 2 Cofactores

Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 7 \\ -1 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

obtenga el cofactor de la entrada dada: ***a***) 0, ***b***) 7, ***c***) -1.

Solución ***a***) El número 0 es la entrada de la primera fila ($i = 1$) y la tercera columna ($j = 3$). Por (5), el cofactor de 0 es el determinante

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (1) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 3 = 27.$$

b) El número 7 es la entrada de la segunda fila ($i = 2$) y la tercera columna ($j = 3$). Así, el cofactor es

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = (-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [-12 - (-1)] = 11.$$

c) Por último, como -1 es la entrada de la tercera fila ($i = 3$) y la primera columna ($j = 1$), su cofactor es

$$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 0 = 7.$$

≡

Ahora podemos proceder a evaluar el determinante de toda matriz cuadrada.

Teorema 14.3.1 Teorema de desarrollo

El **determinante** det A de una matriz A de $n \times n$ puede evaluarse multiplicando cada entrada en cualquier fila (o columna) por su cofactor y sumando los productos resultantes.

Cuando aplicamos el teorema 14.3.1 para obtener el valor del determinante de una matriz cuadrada A, decimos que hemos **expandido o desarrollado el determinante de A por una fila o por una columna dadas**. Por ejemplo, el desarrollo del determinante de la matriz de 3×3 en (1) por la primera fila es:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

o

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO 3 Desarrollo por la primera fila

Evalúe el determinante de la matriz de 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solución Usando el desarrollo por la primera fila dada en (6) tenemos

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} &= 6\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 6 \cdot (-22) - 5 \cdot (-11) + 3 \cdot 0 = -77. \end{aligned}$$

≡

El teorema 14.3.1 establece que el determinante de una matriz cuadrada A puede expandirse por *cualquier* fila o *cualquier* columna. Por ejemplo, el desarrollo del determinante de la matriz de 3×3 en (1), digamos, por la segunda fila, resulta en

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\
&= (-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Reconsideración del ejemplo 3

El desarrollo del determinante del ejemplo 3 por la tercera columna es

$$\begin{aligned}
\det A = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} &= 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) \cdot 7 + (-3) \cdot 14 = -77.
\end{aligned}$$

≡

En el desarrollo de un determinante, como las entradas de una fila (o columna) se multiplican por los cofactores de esa fila (o columna), es lógico que si un determinante tiene una fila (o columna) con varias entradas 0, desarrollemos el determinante por esa fila (o columna).

EJEMPLO 5 Determinante de orden 4

Evalúe el determinante de la matriz de 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Solución Puesto que la tercera columna tiene sólo una entrada diferente de cero, desarrollamos $\det A$ por la tercera columna:

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} \\
&= (0)A_{13} + (0)A_{23} + (0)A_{33} + (-2)A_{43} \\
&= (-2)A_{43}
\end{aligned}$$

donde el cofactor A_{43} es

$$A_{43} = (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Usando (6), desarrollamos el último determinante por la primera fila:

$$\begin{aligned}
A_{43} &= (-1)\left((1)\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right) \\
&= (-1)(-12 + 0 + 2 \cdot 3) \\
&= (-1)(-6) = 6.
\end{aligned}$$

Así, $\qquad \det A = (-2)A_{43} = (-2)(6) = -12.$

≡

Propiedades Los determinantes tienen muchas propiedades especiales, algunas de las cuales se presentan en el teorema que sigue.

Teorema 14.3.2 Propiedades de los determinantes

Sea A una matriz cuadrada.

i) Si toda entrada en una fila (o columna) de A es cero, entonces $\det A = 0$.
ii) Si una matriz B se forma intercambiando dos filas (o dos columnas) de A, entonces $\det B = -\det A$.
iii) Si una matriz B se forma multiplicando cada entrada en una fila (o columna) de A por un número real k, entonces $\det B = k \det A$.
iv) Si dos filas (o columnas) de A son iguales, entonces $\det A = 0$.
v) Si una matriz B se forma sustituyendo cualquier fila (o columna) de A por la suma de esa fila (o columna) y k veces cualquier otra fila (o columna) de la misma A, entonces $B = \det A$.

Es fácil demostrar el inciso *i*) del teorema 14.3.2 a partir del teorema 14.3.1: desarrollamos $\det A$ por la fila (o columna) que contiene todas las entradas cero. Como ejercicio, se le pedirá comprobar los incisos *ii*) a *v*) del teorema 14.3.2 para matrices de segundo orden (véanse los problemas 31 a 34 de los ejercicios 14.3).

EJEMPLO 6 Aplicación del teorema 14.3.2

Sin desarrollar se deduce inmediatamente del teorema 14.3.2*i*) que

$$\begin{array}{r} \\ \text{fila de ceros} \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

EJEMPLO 7 Aplicación del teorema 14.3.2

Se deduce del teorema 14.3.2*ii*) que

intercambiando estas dos columnas

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se obtiene un signo menos}}}{-}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & 7 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

intercambiando la primera y la tercera columnas. ≡

EJEMPLO 8 Aplicación del teorema 14.3.2

Factorizando 2 de cada entrada de la primera fila, se desprende del teorema 14.3.2*iii*) que

2 es un factor común de la primera fila

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$ ≡

EJEMPLO 9 Aplicación del teorema 14.3.2

Puesto que la primera y la segunda columnas son iguales, se deduce del teorema 14.3.2*iv*) que

$$\begin{array}{c} \text{las columnas son iguales} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & 6 \\ 7 & 7 & -5 \end{vmatrix} = 0. \end{array}$$

≡

Como se muestra en el ejemplo que sigue, usando el teorema 14.3.2*v*) se puede simplificar la evaluación de un determinante.

EJEMPLO 10 Aplicación del teorema 14.3.2

Evalúe el determinante de la matriz de 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Solución Usamos el teorema 14.3.2*v*) para obtener una matriz con el mismo determinante que tiene una fila (o columna) con sólo una entrada diferente de cero. Para evitar fracciones, es mejor usar una fila (o columna) que contenga el elemento 1 o -1, si es posible. Así, usaremos la primera fila para introducir ceros en la primera columna como sigue: multiplicamos la primera fila por 2, le sumamos el resultado a la segunda y obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 10 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ahora multiplicamos la primera fila por -3 y sumamos el resultado a la tercera fila para obtener

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 10 \\ 0 & -11 & -13 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Desarrollando (8) por la primera columna encontramos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 10 \\ 0 & -11 & -13 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ -11 & -13 \end{vmatrix} = 19.$$

Del teorema 14.3.2*v*) se deduce que el valor del determinante de la matriz dada en (7) tiene el mismo valor; es decir, $\det A = 19$.

≡

14.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-36.

En los problemas 1 a 4, encuentre el menor y el cofactor de cada elemento de la matriz dada.

1. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

En los problemas 5 a 18, evalúe el determinante de la matriz dada. En el problema 10, suponga que los números a y b no son cero.

5. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 6 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -6 & 8 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{bmatrix}$

En los problemas 19 a 26, indique por qué la igualdad es verdadera sin calcular los determinantes dados.

19. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 8 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

22. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ -4 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 8 & 1 \\ -5 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0$

26. $\begin{vmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

En los problemas 27 a 30, use el teorema 14.3.2*v*) para introducir ceros, como en el ejemplo 10, antes de hallar el determinante dado.

27. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 4 & 2 \\ -9 & 6 & -2 & 18 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$

En los problemas 31 a 34, compruebe la identidad dada desarrollando cada determinante.

31. $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$

34. $\begin{vmatrix} a & b \\ ka + c & kb + d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

35. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b).$$

36. Compruebe que la ecuación matricial de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En los problemas 37 a 40, encuentre los valores de λ para los cuales $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Estos números se llaman *valores característicos* (o *valores propios*) de la matriz A.

37. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

40. $A = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

41. Sin desarrollar, explique por qué

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b + c & a + c & a + b \end{vmatrix} = 0.$$

42. Compruebe que $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ para las matrices de 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

En los problemas 43 a 48, obtenga el valor de cada determinado a partir de

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3.$$

43. $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$

44. $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$

45. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

46. $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ 4a_{31} & 4a_{32} & 4a_{33} \end{vmatrix}$

47. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -2a_{31} & -2a_{32} & -2a_{33} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{vmatrix}$

48. $\begin{vmatrix} a_{11} - 5a_{21} & a_{12} - 5a_{22} & a_{13} - 5a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

En los problemas 49 y 50, despeje x.

49. $\begin{vmatrix} x & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 7$

50. $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & x & 1 \\ -1 & x & 2 \end{vmatrix} = 0$

Para la discusión

51. Sin desarrollar el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ bc & ac & ab \end{bmatrix},$$

donde a, b y c son constantes diferentes de cero, explique por qué $\det A = 0$.

52. Sea A una matriz cuadrada y A^T su transpuesta. Responda: ¿hay alguna relación entre $\det A$ y $\det A^T$?

14.4 Inversa de una matriz

Introducción En álgebra común, cada número real a diferente de cero tiene un inverso multiplicativo b tal que

$$ab = ba = 1$$

donde el número 1 es la identidad multiplicativa. El número b es el *recíproco* del número a, es decir, $a^{-1} = 1/a$. Del mismo modo, una matriz A puede tener un inverso multiplicativo, pero como veremos en la explicación que sigue, A debe ser de un cierto tipo de matriz *cuadrada.*

Inverso multiplicativo Si A es una matriz de $n \times n$ y existe una matriz B de $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n, \tag{1}$$

decimos que B es el **inverso multiplicativo** o, simplemente, el **inverso** de A. El inverso multiplicativo de A se escribe $B = A^{-1}$. A diferencia de lo que ocurre en el sistema de los números reales, nótese que el símbolo A^{-1} *no* denota el recíproco de A, esto es, A^{-1} no es $1/A$. En la teoría de matrices $1/A$ no está definido. Se dice que una matriz cuadrada que tiene un inverso multiplicativo es **no singular** o **invertible**. Cuando una matriz cuadrada A no tiene inverso, se dice que es **singular** o **no invertible**.

EJEMPLO 1 Inverso de una matriz

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Puesto que $AB = BA = I_2$, concluimos de (1) que la matriz A es no singular y que el inverso A^{-1} de la matriz A es la matriz B dada. ≡

Determinación del inverso A^{-1}: método 1 Podemos encontrar el inverso de una matriz no singular por medio de dos métodos. El primero que consideraremos usa determinantes. Empezamos con el caso especial donde A es una matriz de 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Para que una matriz de 2×2

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

sea el inverso de A, debemos tener

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por la multiplicación y la igualdad de matrices, encontramos que b_{11} y b_{21} deben satisfacer el sistema lineal

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

mientras que b_{12} y b_{22} deben satisfacer

$$\begin{cases} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Resolviendo estos dos sistemas de ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad b_{12} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ b_{21} &= \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad b_{12} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Una inspección de las expresiones en (4) revela que el denominador de cada fracción es el valor del determinante de la matriz A, es decir

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Por tanto,
$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det A} & \dfrac{-a_{12}}{\det A} \\ \dfrac{-a_{21}}{\det A} & \dfrac{a_{11}}{\det A} \end{bmatrix}.$$

Este resultado conduce al teorema siguiente.

Teorema 14.4.1 Inversa de una matriz de 2×2

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Si $\det A \neq 0$, entonces el inverso multiplicativo de A es la matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

De la deducción que precede al teorema 14.4.1, hemos demostrado que $AA^{-1} = I_2$. Dejamos como ejercicio (véase el problema 34 de los ejercicios 14.4) comprobar que $A^{-1}A = I_2$, donde A^{-1} está dado por (5).

EJEMPLO 2 Aplicación de (5)

Encuentre A^{-1} para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}.$$

Solución Primero, calculemos el determinante de la matriz:

$$\det A = (3)(-4) - (2)(-7) = 2.$$

Con las identificaciones $a_{11} = 3$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = -7$ y $a_{22} = -4$, observamos en (5) del teorema 14.4.1 que el inverso de la matriz A es

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}. \equiv$$

El teorema 14.4.1 es un caso especial del teorema siguiente, el cual establecemos sin demostración. Antes de leer el teorema 14.4.2, lo invitamos a revisar la definición 14.1.3 sobre la *transpuesta* de una matriz.

Teorema 14.4.2 Inversa de una matriz de $n \times n$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{n\times n}.$$

Si $\det A \neq 0$, entonces el inverso multiplicativo de A es la matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T, \tag{6}$$

donde A_{ij} es el cofactor de la entrada a_{ij} de A.

La transpuesta de la matriz de cofactores

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

dada en (6) se llama **adjunta** de la matriz A y se denota por adj A. En la matriz adjunta dada en (6), es importante notar que las entradas a_{ij} de la matriz A se sustituyen por sus correspondientes cofactores A_{ij} y *después* se obtiene la transpuesta de dicha matriz. El inverso en (6) puede escribirse así:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj}\,A.$$

EJEMPLO 3 Aplicación de (6)

Encuentre A^{-1} para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Solución El determinante de A es $\det A = -86$. Ahora, para cada entrada de A el correspondiente cofactor es

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -18, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -12, \; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -26, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -16, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6, \; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Así, por (6) del teorema 14.4.2, la inversa de A es $-\frac{1}{86}$ veces la matriz adjunta de A:

$$A^{-1} = -\frac{1}{86}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{86}\begin{bmatrix} -18 & 4 & -15 \\ -12 & -26 & -10 \\ -16 & -6 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$= -\frac{1}{86}\overbrace{\begin{bmatrix} -18 & -12 & -16 \\ 4 & -26 & -6 \\ -15 & -10 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{esta adj } A} = \begin{bmatrix} \frac{18}{86} & \frac{12}{86} & \frac{16}{86} \\ -\frac{4}{86} & \frac{26}{86} & \frac{6}{86} \\ \frac{15}{86} & \frac{10}{86} & -\frac{1}{86} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{43} & \frac{6}{43} & \frac{8}{43} \\ -\frac{2}{43} & \frac{13}{43} & \frac{3}{43} \\ \frac{15}{86} & \frac{5}{43} & -\frac{1}{86} \end{bmatrix}. \equiv$$

En los teoremas 14.4.1 y 14.4.2 vimos que podíamos calcular A^{-1} siempre que $\det A \neq 0$. Recíprocamente, si A^{-1} existe, entonces puede demostrarse que $\det A \neq 0$. Concluimos que

- *Una matriz A de $n \times n$ es no singular si y sólo si* $\det A \neq 0$. (7)

EJEMPLO 4 Aplicación de (7)

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

no tiene inversa, puesto que $\det A = 8 - 8 = 0$. Así, por (7), A es una matriz singular. $\equiv$

Es evidente que el uso de (6) llega a ser tedioso para matrices de orden $n > 3$. Por ejemplo, para una matriz de 4×4 debemos, primero, calcular *dieciséis* determinantes de orden 3. Un método más eficiente para encontrar el inverso multiplicativo de una matriz usa operaciones elementales entre las filas de la matriz.

Determinación de la inversa A^{-1}: método 2 Para *cualquier* matriz A, las **operaciones elementales entre filas** en A se definen como las tres transformaciones siguientes de A.

i) Intercambiar cualquier par de filas.
ii) Multiplicar cualquier fila por una constante k diferente de cero.
iii) Sumar un múltiplo constante diferente de cero de una fila a otra.

Semejante a la notación que usamos en la sección 13.1 para representar operaciones en *ecuaciones* de un sistema de ecuaciones lineales, empleamos las abreviaturas siguientes para las operaciones elementales entre *filas*. El símbolo R representa la palabra *fila* (por el inglés *row*):

$R_i \leftrightarrow R_j$: intercambie la fila i-ésima con la fila j-ésima.
kR_i: multiplique la fila i-ésima por k.
$kR_i + R_j$: multiplique la fila i-ésima por k y sume el resultado a la fila j-ésima.

Exponemos sin demostración:

- *La secuencia de operaciones elementales entre filas que transforman una matriz A de orden $n \times n$ en la identidad multiplicativa I_n es la misma secuencia de operaciones elementales entre filas que transforma I_n en A^{-1}.*

Formando la matriz de $n \times 2n$, que consta de las entradas de A a la izquierda de una barra vertical y las entradas de I_n a la derecha de la barra vertical,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \tag{8}$$

entonces aplicamos una secuencia de operaciones entre filas en (8) hasta que la transformemos en la nueva matriz:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right],$$

donde la matriz a la izquierda de la barra vertical es ahora I_n. La inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Este procedimiento se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Uso de operaciones elementales entre filas

Use operaciones elementales entre filas para encontrar A^{-1} para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Solución Empezamos por formar la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La idea es transformar la matriz a la izquierda de la línea vertical en la matriz I_2. Ahora,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] &\xrightarrow{R_{12}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ &\xrightarrow{-2R_1+R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 1 & -2 \end{array}\right] \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{9}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right] \\ &\xrightarrow{-6R_2+R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Puesto que I_2 ahora aparece a la izquierda de la línea vertical, concluimos que la matriz a la derecha de esta línea es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}.$$

Este resultado puede comprobarse mediante el método anterior o por multiplicación. Al escoger el segundo procedimiento, vemos que AA^{-1} y A^{-1} son, a su vez:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} - \frac{3}{9} & -\frac{2}{3} + \frac{6}{9} \\ \frac{2}{3} - \frac{6}{9} & -\frac{1}{3} + \frac{12}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} - \frac{1}{3} & \frac{6}{3} - \frac{6}{3} \\ -\frac{2}{9} + \frac{2}{9} & -\frac{3}{9} + \frac{12}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

≡

EJEMPLO 6 Reconsideración del ejemplo 3

Use operaciones elementales entre filas para encontrar A^{-1} para la matriz del ejemplo 3.

Solución Tenemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + R_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-5R_1 + R_3} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -26 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_2 + R_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 16 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -26 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-10R_2 + R_3} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 16 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -86 & -15 & -10 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{86}R_3} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 16 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{86} & \frac{10}{86} & -\frac{1}{86} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-6R_3 + R_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 16 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{86} & \frac{26}{86} & \frac{6}{86} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{86} & \frac{10}{86} & -\frac{1}{86} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-16R_3 + R_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{18}{86} & \frac{12}{86} & \frac{16}{86} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{86} & \frac{26}{86} & \frac{6}{86} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{86} & \frac{10}{86} & -\frac{1}{86} \end{array}\right]$$

Como antes, vemos que,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{18}{86} & \frac{12}{86} & \frac{16}{86} \\ -\frac{4}{86} & \frac{26}{86} & \frac{6}{86} \\ \frac{15}{86} & \frac{10}{86} & -\frac{1}{86} \end{bmatrix} = \frac{1}{86}\begin{bmatrix} 18 & 12 & 16 \\ -4 & 26 & 6 \\ 15 & 10 & -1 \end{bmatrix}.$$

≡

En conclusión, notamos que si una matriz A de orden $n \times n$ *no puede* transformarse en la identidad multiplicativa I_n por medio de operaciones elementales entre filas, entonces A es necesariamente singular. Si, en algún punto de la aplicación de las operaciones elementales entre filas hallamos una fila de ceros en la matriz a la izquierda de la línea vertical, entonces la matriz A es singular. Por ejemplo, de

$$\left[\begin{array}{rr|rr} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1+R_2} \left[\begin{array}{rr|rr} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

vemos que ahora es imposible, usando sólo operaciones entre filas, obtener I_2 a la izquierda de la línea vertical. Así, la matriz de 2×2

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

es singular.

14.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-37.

En los problemas 1 y 2, compruebe que la matriz B es la inversa de la matriz A.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

En los problemas 3 a 14, use el método 1 expuesto en esta sección para encontrar el inverso multiplicativo, si lo hay, de la matriz dada. Suponga que todas las variables son distintas de cero.

3. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} a & a \\ -a & a \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \\ 2 & 1 & 8 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -4 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

En los problemas 15 a 26, use el método 2 presentado en esta sección para hallar el inverso multiplicativo, si lo hay, de la matriz dada.

15. $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 8 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

27. Si $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, ¿cuál es A?

28. Encuentre el inverso de $A = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$.

En los problemas 29 y 30 suponga que $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Compruebe la propiedad dada de la inversa calculando los miembros izquierdo y derecho de la igualdad dada.

29. $(A^{-1})^{-1} = A$

30. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Para la discusión

31. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

donde $a_{ii} \neq 0$, con $i = 1, 2, \ldots, n$. Encuentre A^{-1}.

32. Use el resultado del problema 31 para encontrar A^{-1} de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

33. Sea $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, encuentre x y y.

34. Si A^{-1} está dado por (5), compruebe que $A^{-1}A = I_2$.

35. A, B y C son matrices de $n \times n$, donde A es no singular. Explique: ¿cómo demostraría que si $AB = AC$, entonces $B = C$?

36. En el problema 29 vimos que $(A^{-1})^{-1} = A$ para una matriz de 2×2 no singular. Este resultado es verdadero para toda matriz de $n \times n$ no singular. ¿Cómo demostraría este resultado general?

37. En el problema 30, vimos que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ para dos matrices de 2×2 no singulares. Este resultado es verdadero para dos matrices de $n \times n$ no singulares cualesquiera. ¿Cómo demostraría este resultado general?

38. Sea A una matriz de 2×2 para la cual $\det A \neq 0$. Demuestre que $\det A^{-1} = 1/\det A$. Este resultado es verdadero para toda matriz de $n \times n$ no singular.

14.5 Sistemas lineales: matrices aumentadas

Introducción En el ejemplo 2 de la sección 13.1 resolvimos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ 4x - 2y - z = -4 \\ 2x - y + 3z = 19 \end{cases} \tag{1}$$

encontrando el sistema equivalente en forma triangular:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ \qquad y + \frac{1}{2}z = -1 \\ \qquad\qquad z = 6. \end{cases} \tag{2}$$

El sistema (2) se obtuvo del (1) por medio de una serie de operaciones que cambiaron los coeficientes de las variables y las constantes del miembro derecho de cada ecuación. En todo este procedimiento, las variables actuaron como “marcadores de posición”. Por tanto, estos cálculos pueden simplificarse ejecutando operaciones entre las filas de la matriz:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 19 \end{array}\right]. \tag{3}$$

Matrices aumentadas La matriz en (3) se llama **matriz aumentada** del sistema (1) y está formada por la **matriz de coeficientes**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

aumentada por la adición de una columna cuyas entradas son los términos constantes del sistema. La línea vertical en una matriz aumentada permite distinguir los coeficientes de las variables del sistema de los términos constantes de éste.

Cuando las operaciones de eliminación presentadas en la sección 13.1 se aplican al sistema de ecuaciones obtenemos un sistema equivalente. Tales operaciones de eliminación son análogas a las operaciones elementales entre filas que vimos en la sección precedente. Cuando las **operaciones elementales entre filas** se aplican a la matriz aumentada, el resultado es la matriz aumentada de un sistema equivalente. Por ello, se dice que la matriz original y la matriz resultante son **equivalentes por filas**. El procedimiento para realizar operaciones elementales entre filas en una matriz a fin de obtener una matriz equivalente por filas se llama **reducción por filas**.

Eliminación gaussiana Para resolver un sistema como (1) usando una matriz aumentada se emplea la **eliminación gaussiana** o la **eliminación de Gauss-Jordan**. En la eliminación gaussiana se reduce por filas la matriz aumentada del sistema hasta llegar a una matriz aumentada equivalente en **forma escalonada por filas**.

Definición 14.5.1 Forma escalonada por filas

Una matriz está en **forma escalonada por filas** cuando:

i) En la primera entrada de cada fila diferente de cero está el número 1.
ii) En las filas consecutivas diferentes de cero, la primera entrada 1 de la fila más baja aparece a la derecha del 1 de la fila más alta.
iii) Las filas donde las entradas son todas cero aparecen en la base de la matriz.

EJEMPLO 1 Forma escalonada

Las dos matrices aumentadas

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

tienen forma escalonada, mientras que la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{viola } i) \\ \leftarrow \text{viola } iii) \\ \leftarrow \text{viola } ii) \end{array}$$

no tiene forma escalonada ≡

Como vemos en el ejemplo 1, la forma escalonada por filas de una matriz aumentada tiene aproximadamente *forma triangular* con entradas cero debajo de una diagonal cuyos elementos son todos 1.

Para reducir una matriz aumentada a la forma escalonada por filas ejecutamos las mismas operaciones elementales entre filas que estudiamos en la sección 14.4:

$R_i \leftrightarrow R_j$: se intercambia la i-ésima fila con la j-ésima fila.
kR_i: se multiplica la i-ésima fila por una constante k.
$kR_i + R_j$: se multiplica la i-ésima fila por k y el resultado se suma a la j-ésima ecuación.

EJEMPLO 2 Reconsideración del sistema 1

Resuelva el sistema (1) usando el método de eliminación gaussiana.

Solución Empezamos usando la primera fila para introducir ceros debajo del 1 de la primera columna

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 19 \end{array}\right] \xrightarrow{-4R_1+R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -10 & -5 & 20 \\ 2 & -1 & 3 & 19 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_1+R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -10 & -5 & 20 \\ 0 & -5 & 1 & 31 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2+R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -10 & -5 & -20 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 21 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{10}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 21 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{7}R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right].$$

Puesto que la última matriz aumentada tiene forma escalonada por filas [y corresponde al sistema (2)], hemos resuelto en realidad el sistema original. La última fila de la matriz implica que $z = 6$. Las variables restantes se determinan por **sustitución hacia atrás**. Sustituyendo $z = 6$ en la ecuación correspondiente a la segunda fila de la matriz se obtiene $y = -5$. Finalmente, sustituyendo $y = -5$ y $z = 6$ en la ecuación correspondiente a la primera fila se obtiene $x = -2$. Por tanto, la solución es $x = -2$, $y = -5$, $z = 6$. ≡

En el ejemplo 2, nótese que repetimos, en orden, las operaciones elementales entre filas correspondientes a las que realizamos en las ecuaciones cuando resolvimos este sistema por eliminación (véase ejemplo 2 de la sección 13.1). Así, no estamos haciendo nada nuevo aquí. Simplemente hemos suprimido las variables y los signos de igualdad de las ecuaciones y estamos contando con el formato de la matriz para mantener las cosas en orden.

EJEMPLO 3 Uso de la eliminación gaussiana

Aplique el método de eliminación gaussiana para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x + 5y + 6z = 7 \\ x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$$

Solución Formamos la matriz aumentada del sistema y aplicamos operaciones entre filas hasta obtener la forma escalonada por filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{-R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

La última matriz aumentada está en forma escalonada por filas y corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ \quad\; y + 2z = \frac{5}{4} \\ \qquad\quad z = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

De la última ecuación, vemos inmediatamente que $z = -\frac{1}{2}$. De la segunda ecuación, obtenemos $y + 2(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ o $y = \frac{9}{4}$. Finalmente, la primera ecuación nos da $x + \frac{9}{4} - 2(-\frac{1}{2}) = 2$ o $x = -\frac{5}{4}$. Por consiguiente, $x = -\frac{5}{4}$, $y = \frac{9}{4}$, $z = -\frac{1}{2}$ es la solución del sistema. ≡

EJEMPLO 4 Uso de la eliminación gaussiana

Aplique el método de eliminación gaussiana para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 6 \\ \;\;x + \;\;y - z = -2 \\ 4x - \;\;y - z = 2. \end{cases}$$

Solución Realizamos operaciones entre filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{-2R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{-4R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{-R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La última matriz es la matriz aumentada del sistema

$$\begin{cases} x + y - \phantom{\tfrac{3}{5}}z = 12 \\ \phantom{x + {}} y - \tfrac{3}{5}z = -2. \end{cases}$$

Despejando x y y en términos de z encontramos

$$\begin{cases} x = \tfrac{2}{5}z \\ y = \tfrac{3}{5}z - 2. \end{cases}$$

Así, el sistema dado es consistente, pero las ecuaciones son dependientes. Hay infinitas soluciones de los sistemas obtenidos asignando arbitrariamente valores reales a z. Si representamos z con α, las soluciones del sistema constan de todas las x, y y z que se definen por $x = -\frac{2}{5}\alpha$, $y = \frac{3}{5}\alpha - 2$, $z = \alpha$, respectivamente, donde α es cualquier número real. ≡

La técnica estudiada en esta sección también es aplicable a los sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas. En el ejemplo que sigue consideramos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

EJEMPLO 5 Uso de la eliminación gaussiana

Aplique la eliminación gaussiana para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 6 \\ 5x - y + 2z = -3. \end{cases}$$

Solución Tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 6 \\ 5 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{-5R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & -11 & 22 & -33 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{-\frac{1}{11}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right].$$

De la última matriz en forma escalonada por filas obtenemos

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 6 \\ y - 2z = 3. \end{cases}$$

Usando la segunda ecuación para eliminar y de la primera obtenemos

$$\begin{cases} x \phantom{{}+ y - 2z} = 0 \\ \phantom{x + {}} y - 2z = 3 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z + 3. \end{cases}$$

Como en el ejemplo 4, podemos asignar cualquier valor a z. Por tanto, las soluciones del sistema están definidas por $x = 0$, $y = 2\alpha + 3$, $z = \alpha$, donde α es cualquier número real. ≡

■ **Eliminación de Gauss-Jordan** En el método de eliminación de Gauss-Jordan, las operaciones elementales entre filas se continúan hasta obtener una matriz en la **forma escalonada reducida por filas**. Las matrices escalonadas reducidas por filas tienen las tres propiedades *i*) a *iii*) de la definición 14.5.1 y una adicional:

iv) Una columna que contiene 1 como primera entrada tiene ceros en todas las demás posiciones.

EJEMPLO 6 Forma escalonada reducida por filas

a) Las matrices aumentadas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{y} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

están en forma escalonada reducida por filas. Debe comprobar que se satisfagan los cuatro criterios de esta forma.

b) En el ejemplo 1 vimos que la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

tiene forma escalonada por filas. Sin embargo, la matriz aumentada no tiene forma escalonada reducida por filas porque las entradas restantes (indicadas en rojo) de las columnas que contienen 1 como primera entrada no son todas cero. ≡

Cabe señalar que en la eliminación gaussiana nos detenemos cuando hemos obtenido *una* matriz aumentada en forma escalonada por filas. En otras palabras, mediante secuencias diferentes de operaciones entre filas podemos llegar a distintas formas escalonadas por filas. Este método requiere después de la sustitución hacia atrás. En la eliminación de Gauss-Jordan terminamos cuando hemos obtenido *la* matriz aumentada en forma escalonada reducida por filas. Toda secuencia de operaciones entre filas producirá la misma matriz aumentada en forma escalonada reducida por filas. Este método no necesita sustitución hacia atrás; la solución del sistema será evidente por inspección de la última matriz. En términos de las ecuaciones del sistema original, nuestro objetivo es simplemente igualar a 1 el coeficiente de la primera variable de la primera ecuación* y luego usar múltiplos de esa ecuación para eliminar la variable de las demás ecuaciones. El proceso se repite con las otras variables.

EJEMPLO 7 Reconsideración del ejemplo 3

Cuando resolvimos el sistema del ejemplo 3,

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x + 5y + 6z = 7 \\ x + 3y + 3z = 4, \end{cases}$$

nos detuvimos al obtener una forma escalonada por filas. Ahora comenzaremos con la última matriz del ejemplo 3. Puesto que las primeras entradas de la segunda y la tercera filas son 1, debemos igualar a 0 las entradas restantes de la segunda y la tercera columnas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{operaciones entre filas}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \leftarrow \text{última matriz del ejemplo 3}$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[4R_3+R_1]{-2R_3+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

* Siempre podemos intercambiar ecuaciones, pero sólo si la primera ecuación contiene la variable x_1.

La última matriz tiene forma escalonada reducida por filas. Teniendo en cuenta lo que significa la matriz en términos de ecuaciones, de inmediato vemos que la solución es $x = -\frac{5}{4}$, $y = \frac{9}{4}$, $z = -\frac{1}{2}$. ≡

EJEMPLO 8 Sistema inconsistente

Use la eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x - y = -6 \\ 2x - 3y = 8. \end{cases}$$

Solución En el proceso de aplicar la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz del sistema nos detenemos en

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -6 \\ 2 & -3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{operaciones entre filas}} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{array}\right].$$

La tercera fila de la última matriz significa que $0x + 0y = 16$ (o $0 = 16$). Como no hay números x y y que puedan satisfacer esta ecuación, concluimos que el sistema no tiene solución, es decir, es inconsistente. ≡

EJEMPLO 9 Balanceo de una ecuación química

Balancee la ecuación química $C_2H_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$.

Solución Buscamos los enteros positivos x, y, z y w para que la ecuación balanceada sea

$$x\, C_2H_6 + y\, O_2 \rightarrow z\, CO_2 + w\, H_2O$$

Como el número de átomos de cada elemento debe ser igual en ambos lados de la última ecuación, obtenemos un sistema homogéneo de tres ecuaciones con cuatro variables:

carbono (C):	$2x = z$		$2x + 0y - z + 0w = 0$
hidrógeno (H):	$6x = 2w$	o	$6x + 0y + 0z - 2w = 0$
oxígeno (O):	$2y = 2z + w$		$0x + 2y - 2z - w = 0$

Puesto que el último sistema es homogéneo, debe ser consistente.

Véase la sección 13.1

Realizando operaciones elementales entre filas, obtenemos

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{operaciones entre filas}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right]$$

y, por tanto, una solución del sistema es $x = \frac{1}{3}\alpha$, $y = \frac{7}{6}\alpha$, $z = \frac{2}{3}\alpha$, $w = \alpha$. En este caso, α debe ser un entero positivo elegido de forma que x, y, z y w sean también enteros positivos. Para lograrlo, seleccionamos $\alpha = 6$. Esto da $x = 2$, $y = 7$, $z = 4$ y $w = 6$. Así, la ecuación balanceada es

$$2C_2H_6 + 7O_2 \rightarrow 4CO_2 + 6H_2O$$ ≡