Al aplicar la fórmula de la distancia, la distancia de P al foco F es

$$d(P, F) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2}.$$

De acuerdo con la definición de la parábola, $d(P, F) = y + c$, es decir

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} = y + c.$$

Ambos lados se elevan al cuadrado y al simplificar se obtiene

$$x^2 + (y - c)^2 = (y + c)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2 \qquad (1)$$

es decir,

$$x^2 = 4cy.$$

La ecuación (1) se conoce como la **forma normal** de la ecuación de una parábola con foco en $(0, c)$, directriz $y = -c$, $c > 0$ y vértice en $(0, 0)$. La gráfica de cualquier parábola con la forma normal (1) es simétrica con respecto al eje y.

La ecuación (1) no depende de la hipótesis $c > 0$. Sin embargo, la dirección hacia la que se abre la parábola sí depende del signo de c. En forma específica, si $c > 0$, la parábola se abre *hacia arriba*, como en la figura 11.1.3; si $c < 0$, la parábola se abre *hacia abajo*.

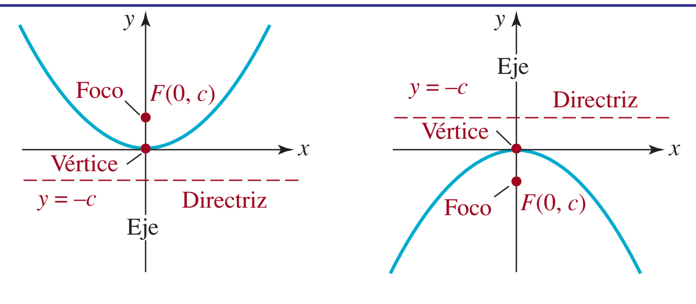
Si se supone que el foco de la parábola está en el eje x, en $F(c, 0)$, y que la ecuación de la directriz es $x = -c$, entonces el eje x es el eje de la parábola, y el vértice está en $(0, 0)$. Si $c > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $c < 0$, se abre hacia la izquierda. En cualquier caso, la **forma normal** de la ecuación es

$$y^2 = 4cx. \qquad (2)$$

La gráfica de cualquier parábola con la forma normal (2) es simétrica con respecto al eje x.

En las **FIGURAS 11.1.4** y **11.1.5** se presenta un resumen con toda esta información de las ecuaciones (1) y (2), respectivamente. El lector se sorprenderá al ver que en la figura 11.1.4*b*),

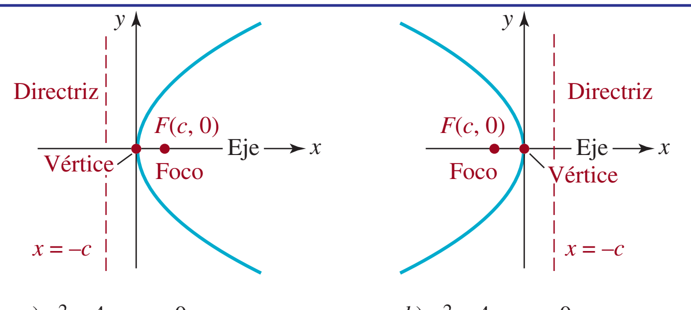
Resumen gráfico de la información de la forma normal (1)



a) $x^2 = 4cy$, $c > 0$ *b*) $x^2 = 4cy$, $c < 0$

FIGURA 11.1.4 Resumen gráfico de la información de la forma normal (1)

Resumen gráfico de la información de la forma normal (2)



a) $y^2 = 4cx$, $c > 0$ *b*) $y^2 = 4cx$, $c < 0$

FIGURA 11.1.5 Resumen gráfico de la información de la forma normal (2) la directriz sobre el eje x se identifica con $y = -c$, y el foco en el eje de las y negativas tiene coordenadas $F(0, c)$. Tenga en cuenta que en este caso, la hipótesis es que $c < 0$ y por consiguiente $-c > 0$. Una aclaración similar sucede con la figura 11.1.5*b*).

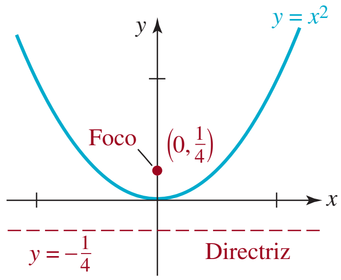


FIGURA 11.1.6 Gráfica de la ecuación del ejemplo 1

EJEMPLO 1 La parábola más simple

Ya habíamos visto la gráfica de $y = x^2$ en la sección 4.2. Al comparar esta ecuación con la (1) se ve que

$$x^2 = \overset{\overset{4c}{\downarrow}}{1} \cdot y$$

por lo que $4c = 1$, o sea que $c = \frac{1}{4}$. En consecuencia, la gráfica de $y = x^2$ es una parábola con vértice en el origen, foco en $(0, \frac{1}{4})$, y directriz $y = -\frac{1}{4}$. Estos detalles se indican en la gráfica de la **FIGURA 11.1.6**. ≡

Sugerencia para trazar la gráfica de las ecuaciones (1) y (2).

Si conocemos la forma parabólica básica, todo lo que necesitamos para saber cómo trazar una gráfica *preliminar* de las ecuaciones (1) y (2) es que la gráfica pasa por su vértice en $(0, 0)$, y la dirección hacia la que se abre la parábola. Para que la gráfica sea más exacta, conviene usar el número c determinado por la gráfica de la ecuación en la forma normal, para graficar dos puntos adicionales. Nótese que si se opta por $y = c$ en (1), entonces $x^2 = 4c^2$ implica que $x = \pm 2c$. Entonces los puntos $(2c, c)$ y $(-2c, c)$ están en la gráfica de $x^2 = 4cy$. De igual modo, la opción $x = c$ en (2) implica que $y = \pm 2c$ y entonces $(c, 2c)$ y $(c, -2c)$ son puntos de la gráfica de $y^2 = 4cx$. El *segmento de recta* que pasa por el foco y cuyos extremos están en $(2c, c)$ y $(-2c, c)$ cuando las ecuaciones están en su forma normal (1), o cuyos extremos están en $(c, 2c)$ y $(c, -2c)$ en el caso de ecuaciones con la forma normal (2), se llama **cuerda focal** o **diámetro**. Por ejemplo, en la figura 11.1.6, si se escoge $y = \frac{1}{4}$, entonces $x^2 = \frac{1}{4}$ implica que $x = \pm\frac{1}{2}$. Los extremos de la cuerda focal horizontal para $y = x^2$ son $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

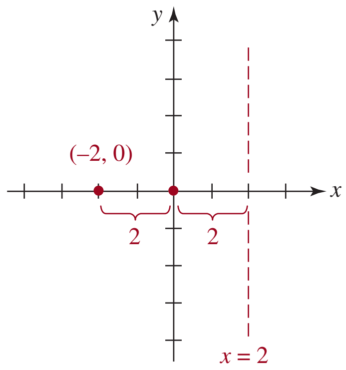


FIGURA 11.1.7 Directriz y foco del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Deducción de la ecuación de una parábola

Deduzca la ecuación, en su forma normal, de la parábola con directriz $x = 2$ y foco en el punto $(-2, 0)$. Haga la gráfica.

Solución En la **FIGURA 11.1.7** se han graficado la directriz y el foco. Por su ubicación se ve que la ecuación que buscamos tiene la forma $y^2 = 4cx$. Como $c = -2$, la parábola se abre hacia la izquierda, y así

$$y^2 = 4(-2)x \quad \text{o} \quad y^2 = -8x.$$

Como se mencionó en la explicación anterior a este ejemplo, si se sustituye $x = c$, o en este caso $x = -2$, en la ecuación $y^2 = -8x$, se pueden determinar dos puntos en su gráfica. De $y^2 = -8(-2) = 16$ se obtiene $y = \pm 4$. Como se ve en la **FIGURA 11.1.8**, la gráfica pasa por $(0, 0)$ y también por los extremos $(-2, -4)$ y $(-2, 4)$ de la cuerda focal. ≡

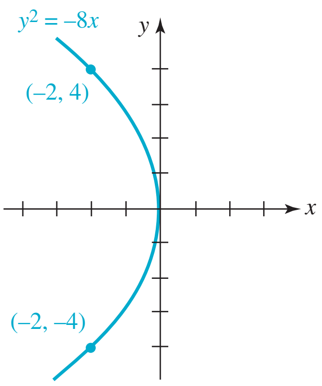


FIGURA 11.1.8 Gráfica de la parábola del ejemplo 2

Parábola con vértice en (h, k)

Supongamos que la parábola se traslada tanto horizontal como verticalmente, de modo que su vértice está en el punto (h, k), y su eje es la recta vertical $x = h$. La **forma normal** de la ecuación de la parábola es, entonces,

$$(x - h)^2 = 4c(y - k). \tag{3}$$

De igual modo, si su eje es la recta horizontal $y = k$, la forma normal de la ecuación de la parábola con vértice en (h, k) es

$$(y - k)^2 = 4c(x - h). \tag{4}$$

Las parábolas que definen estas ecuaciones tienen una forma idéntica a las parábolas definidas por las ecuaciones (1) y (2), porque las ecuaciones (3) y (4) representan transformaciones rígidas (traslaciones hacia arriba, hacia abajo, hacia la izquierda y hacia la derecha) de las gráficas de (1) y (2). Por ejemplo, la parábola

$$(x + 1)^2 = 8(y - 5)$$

tiene su vértice en $(-1, 5)$. Su gráfica es la gráfica de $x^2 = 8y$ desplazada horizontalmente una unidad hacia la izquierda, seguida de un desplazamiento vertical de cinco unidades.

Para cada una de las ecuaciones (1) y (2) o (3) y (4), la *distancia* del vértice al foco, así como la distancia del vértice a la directriz, es $|c|$.

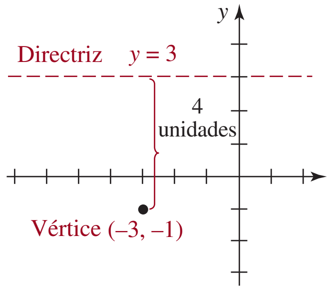


FIGURA 11.1.9 Vértice y directriz del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Deducción de la ecuación de una parábola

Deducir la ecuación, en su forma normal, de la parábola con vértice en $(-3, -1)$ y directriz $y = 3$.

Solución Comenzaremos graficando el vértice en $(-3, -1)$ y la directriz $y = 3$. En la **FIGURA 11.1.9** se puede ver que la parábola debe abrirse hacia abajo, y entonces la forma normal es la (3). Esto, aunado a la observación que el vértice está a 4 unidades abajo de la directriz, indica que la solución adecuada de $|c| = 4$ es $c = -4$. Al sustituir $h = -3$, $k = -1$ y $c = -4$ en la ecuación (3) da como resultado

$$[x - (-3)]^2 = 4(-4)[y - (-1)] \quad \text{o} \quad (x + 3)^2 = -16(y + 1). \qquad \equiv$$

EJEMPLO 4 Encontrar todo

Encontrar el vértice, foco, eje, directriz y gráfica de la parábola

$$y^2 - 4y - 8x - 28 = 0. \tag{5}$$

Solución Para escribir la ecuación en una de las formas normales, completaremos el cuadrado en y:

$$y^2 - 4y + 4 = 8x + 28 + 4 \quad \leftarrow \text{Se suma 4 en ambos lados.}$$
$$(y - 2)^2 = 8x + 32.$$

Así, la forma normal de la ecuación (5) es $(y - 2)^2 = 8(x - 4)$. Al comparar esta ecuación con la (4) se llega a la conclusión de que el vértice está en $(-4, 2)$ y que $4c = 8$, esto es $c = 2$. Entonces, la parábola se abre hacia la derecha. De $c = 2 > 0$, el foco está 2 unidades hacia la derecha del vértice en $(-4 + 2, 2)$, o sea $(-2, 2)$. La directriz es la recta vertical a 2 unidades hacia la izquierda del vértice, $x = -4 - 2$, o sea $x = -6$. Sabiendo que la parábola se abre hacia la derecha desde el punto $(-4, 2)$, también se ve que interseca los ejes coordenados. Para determinar la intersección con el eje x se hace que $y = 0$ en (5), y se ve de inmediato que $x = -\frac{28}{8} = -\frac{7}{2}$. La intersección con el eje x está en $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$. Para determinar la intersección con el eje y se hace que $x = 0$ en (5), y con la fórmula cuadrática se llega a $y = 2 \pm 4\sqrt{2}$, o sea $y \approx 7.66$ y $y \approx -3.66$. Las intersecciones con el eje y son $(0, 2 - 4\sqrt{2})$ y $(0, 2 + 4\sqrt{2})$. Al reunir toda esta información se obtiene la gráfica de la **FIGURA 11.1.10**. $\equiv$

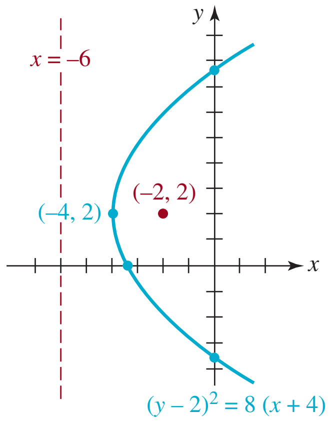
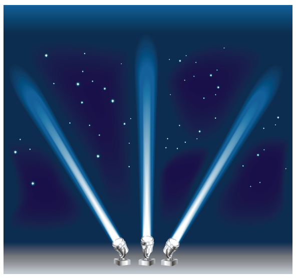


FIGURA 11.1.10 Gráfica de la ecuación del ejemplo 4

Aplicaciones de la parábola La parábola tiene muchas propiedades interesantes que la hacen adecuada para ciertas aplicaciones. Con frecuencia, las superficies reflectoras se diseñan para aprovechar una propiedad de reflexión de las parábolas. Esas superficies, llamadas **paraboloides**, son tridimensionales y se forman haciendo girar una parábola en torno a su

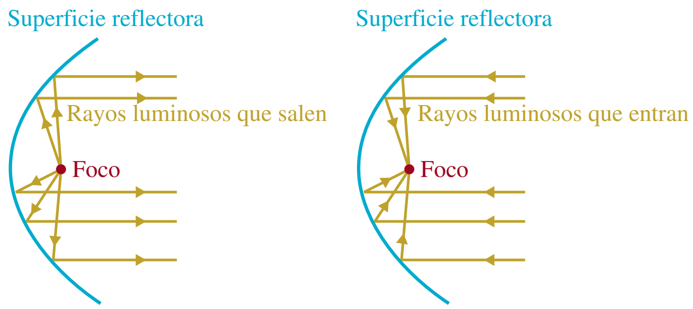


Reflectores

Telescopio reflector de 508 centímetros del observatorio del Monte Palomar

eje. Como se ve en la **FIGURA 11.1.11*a*)**, los rayos de luz (o las señales electromagnéticas) desde una fuente puntiforme ubicada en el foco de una superficie reflectora parabólica se reflejarán a lo largo de rectas paralelas al eje. Es el concepto para el diseño de faros buscadores, algunas linternas sordas y antenas satelitales. Al revés, si los rayos de luz que llegan son paralelos al eje de una parábola, serán reflejados en la superficie en rectas que pasen por el foco. Vea la figura 11.1.11*b*). Los rayos luminosos procedentes de un objeto lejano, como una galaxia, son esencialmente paralelos, por lo que, cuando entran a un telescopio reflector se reflejan en el espejo parabólico hacia el foco, donde en el caso normal hay una cámara para capturar la imagen durante algún tiempo. Una antena parabólica doméstica funciona con el mismo principio que el del telescopio reflector: la señal digital de un satélite de TV se capta en el foco del plato mediante un receptor.

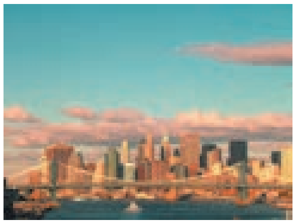
Antenas parabólicas de TV satelital



a) Los rayos emitidos en el foco son reflejados como rayos paralelos

b) Los rayos que entran se reflejan hacia el foco

FIGURA 11.1.11 Superficie reflectora parabólica

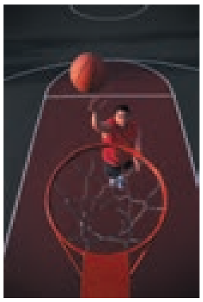


El Puente de Brooklyn es un puente colgante

También las parábolas son importantes en el diseño de puentes colgantes. Se puede demostrar que si el peso del puente está uniformemente distribuido sobre toda su longitud, un cable de soporte con forma de parábola puede soportar la carga.

La trayectoria de un proyectil lanzado oblicuamente, que puede ser un balón de basquetbol arrojado desde la línea de tiro libre, describirá un arco parabólico.

Se ha observado que los atunes, cuyas presas son peces más pequeños, nadan en cardúmenes de 10 a 20 ordenados aproximadamente en forma parabólica. Una explicación factible de este hecho es que los peces más pequeños atrapados por el cardumen de atunes tratarán de escapar "reflejándose" afuera de la parábola. El resultado es que se concentran en el foco y son presa fácil de los atunes (**FIGURA 11.1.12**).



El balón describe un arco parabólico

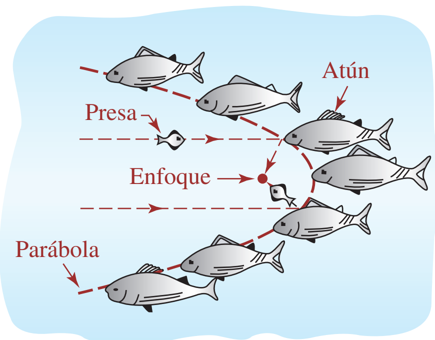


FIGURA 11.1.12 Atunes cazando en un arco parabólico

11.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-27.

En los problemas 1 a 24, determine el vértice, foco, directriz y eje de la parábola respectiva. Haga una gráfica de la parábola.

1. $y^2 = 4x$
2. $y^2 = \frac{7}{2}x$
3. $y^2 = -\frac{4}{3}x$
4. $y^2 = -10x$
5. $x^2 = -16y$
6. $x^2 = \frac{1}{10}y$
7. $x^2 = 28y$
8. $x^2 = -64y$
9. $(y - 1)^2 = 16x$
10. $(y + 3)^2 = -8(x + 2)$
11. $(x + 5)^2 = -4(y + 1)$
12. $(x - 2)^2 + y = 0$
13. $y^2 + 12y - 4x + 16 = 0$
14. $x^2 + 6x + y + 11 = 0$
15. $x^2 + 5x - \frac{1}{4}y + 6 = 0$
16. $x^2 - 2x - 4y + 17 = 0$
17. $y^2 - 8y + 2x + 10 = 0$
18. $y^2 - 4y - 4x + 3 = 0$
19. $4x^2 = 2y$
20. $3(y - 1)^2 = 9x$
21. $-2x^2 + 12x - 8y - 18 = 0$
22. $4y^2 + 16y - 6x - 2 = 0$
23. $6y^2 - 12y - 24x - 42 = 0$
24. $3x^2 + 30x - 8y + 75 = 0$

En los problemas 25 a 44, deduzca una ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones indicadas.

25. Foco en $(0, 7)$, directriz $y = -7$
26. Foco en $(0, -5)$, directriz $y = 5$
27. Foco en $(-4, 0)$, directriz $x = 4$
28. Foco en $(\frac{3}{2}, 0)$, directriz $x = -\frac{3}{2}$
29. Foco en $(\frac{5}{2}, 0)$, vértice $(0, 0)$
30. Foco en $(0, -10)$, vértice en $(0, 0)$
31. Foco en $(2, 3)$, directriz $y = -3$
32. Foco en $(1, -7)$, directriz $x = -5$
33. Foco en $(-1, 4)$, directriz $x = 5$
34. Foco en $(-2, 0)$, directriz $y = \frac{3}{2}$
35. Foco en $(1, 5)$, vértice $(1, -3)$
36. Foco en $(-2, 3)$, vértice en $(-2, 5)$
37. Foco en $(8, -3)$, vértice $(0, -3)$
38. Foco en $(1, 2)$, vértice en $(7, 2)$
39. Vértice en $(0, 0)$, directriz $y = -\frac{7}{4}$
40. Vértice en $(0, 0)$, directriz $x = 6$
41. Vértice en $(5, 1)$, directriz $y = 7$
42. Vértice en $(-1, 4)$, directriz $x = 0$
43. Vértice en $(0, 0)$, pasa por $(-2, 8)$, eje a lo largo del eje y
44. Vértice en $(0, 0)$, pasa por $(1, \frac{1}{4})$, eje a lo largo del eje x

En los problemas 45 a 48, calcule las intersecciones con los ejes coordenados de la parábola respectiva.

45. $(y + 4)^2 = 4(x + 1)$
46. $(x - 1)^2 = -2(y - 1)$
47. $x^2 + 2y - 18 = 0$
48. $x^2 - 8y - x + 15 = 0$

Aplicaciones diversas

49. **Candileja** Una candileja grande se diseña de tal modo que una sección transversal por su eje es una parábola, y la fuente luminosa está en el foco. Calcule la posición de la fuente luminosa, si la candileja tiene 4 pies de diámetro en la abertura, y 2 pies de profundidad.
50. **Telescopio reflector** Un telescopio reflector tiene un espejo parabólico de 20 pies de diámetro en la parte supe-

rior y 4 pies de profundidad en el centro. ¿Dónde se debe colocar el ocular?

51. **Rayo de luz** Suponga que un rayo de luz emana del foco de la parábola $y^2 = 4x$ y llega a la parábola en el punto $(1, -2)$. ¿Cuál es la ecuación del rayo reflejado?

52. **Puente colgante** Suponga que dos torres de un puente colgante están a 350 pies de distancia, y que el vértice del cable parabólico es tangente al asfalto en el punto medio entre las torres. Si el cable está 1 pie arriba del asfalto en un punto a 20 pies del vértice, calcule la altura de las torres sobre el asfalto.

53. **Otro puente colgante** Dos torres de 75 pies de alto, de un puente colgante con un cable parabólico, están a 250 pies de distancia. El vértice de la parábola es tangente al asfalto en el punto medio entre las torres. Calcule la altura del cable, sobre el asfalto, en un punto a 50 pies de una de las torres.

54. **Tubo de alcantarillado** Suponga que el agua que sale por el extremo de un tubo horizontal describe un arco parabólico con su vértice en el extremo del tubo. Este tubo está a 20 metros sobre el suelo. En un punto a 2 metros abajo del extremo del tubo, la distancia horizontal del agua a una vertical que pase por el extremo del tubo es de 4 m. Vea la **FIGURA 11.1.13**. ¿Dónde el agua toca el suelo?

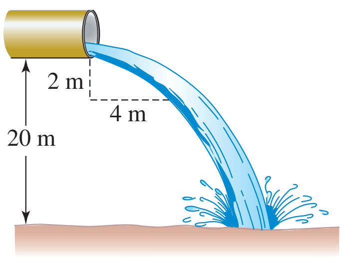


FIGURA 11.1.13 Tubo del problema 54

55. **Diana** Un lanzador de dardos suelta un dardo a 5 pies sobre el suelo. El dardo se arroja horizontalmente y sigue una trayectoria parabólica. Llega al suelo a $10\sqrt{10}$ pies del lanzador. A una distancia de 10 pies del lanzador, ¿a qué altura debe colocarse la diana para que el dardo le acierte?

56. **Trayectoria balística** La posición vertical de un proyectil se determina mediante la ecuación $y = -16t^2$, y la posición horizontal con $x = 40t$, para $t \geq 0$. Elimine t de las ecuaciones para demostrar que la trayectoria del proyectil es un arco parabólico. Grafique la trayectoria del proyectil.

57. **Ancho focal** El ancho focal de una parábola es la longitud de su cuerda focal; esto es, es el segmento de recta que pasa por el foco perpendicular al eje, con sus extremos en la parábola (**FIGURA 11.1.14**).

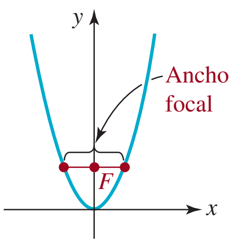


FIGURA 11.1.14 Ancho focal en el problema 57

a) Calcule el ancho focal de la parábola $x^2 = 8y$.
b) Demuestre que el ancho focal de la parábola $x^2 = 4cy$ y $y^2 = 4cx$ es $4|c|$.

58. **Órbita parabólica** La órbita de un cometa es una parábola con el Sol en el foco. Cuando el cometa está a 50 000 000 km del Sol, la línea del cometa al Sol es perpendicular al eje de la parábola. Use el resultado del problema 57*b*) para escribir una ecuación de la trayectoria del cometa. (Un cometa con órbita parabólica no regresa al sistema solar.)

≡ Para la discusión

59. **Superficies reflectoras** Suponga que dos superficies reflectoras parabólicas están una frente a otra (con sus focos en un eje común). Todo sonido emitido en un foco se reflejará en las parábolas y se concentrará en el otro foco. La **FIGURA 11.1.15** muestra las trayectorias de dos ondas sonoras típicas. Con la definición de parábola de la página 482, demuestre que todas las ondas sonoras recorrerán la misma distancia. [*Nota:* este resultado es importante por la siguiente razón: si las ondas sonoras recorrieran trayectorias de distintas longitudes, llegarían al segundo foco en tiempos distintos. El resultado sería interferencia, y no un sonido nítido.]

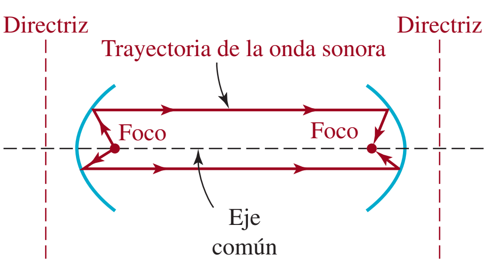


FIGURA 11.1.15 Superficies reflectoras parabólicas del problema 59

60. El punto más cercano al foco es el vértice. ¿Cómo se puede demostrar este enunciado? Ponga en práctica sus ideas.

61. En el caso del cometa del problema 58, use el resultado del problema 60 para determinar la distancia más corta entre el Sol y el cometa.

11.2 La elipse

■ **Introducción** Esta figura es frecuente en astronomía. Por ejemplo, las órbitas de los planetas en torno al Sol son elípticas, y el Sol está en un foco. De igual manera, los satélites de comunicaciones, el telescopio espacial Hubble y la estación espacial internacional giran en torno a la Tierra en órbitas elípticas, con la Tierra en un foco. En esta sección se definirá la elipse y se estudiarán algunas de sus propiedades y aplicaciones.

Definición 11.2.1 Elipse

Una **elipse** es el conjunto de puntos $P(x, y)$ en un plano, tales que la suma de las distancias de P a dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. Los puntos fijos F_1 y F_2 se llaman **focos**. El punto medio del segmento de recta que une a los puntos F_1 y F_2 se llama **centro** de la elipse.

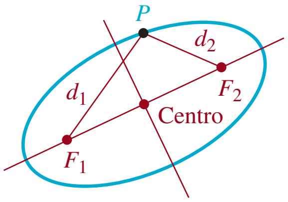


FIGURA 11.2.1 Una elipse

Como se ve en la **FIGURA 11.2.1**, si P es un punto en la elipse y $d_1 = d(F_1, P)$ y $d_2 = d(F_2, P)$ son las distancias de los focos a P, entonces, de acuerdo con la definición anterior,

$$d_1 + d_2 = k, \tag{1}$$

en donde $k > 0$ es una constante.

En nivel práctico, la ecuación (1) sugiere una forma de trazar una elipse. La **FIGURA 11.2.2** muestra que si se fija un hilo de longitud k a dos clavos en una hoja de papel, se puede trazar una elipse recargando un lápiz en el hilo y moviéndolo en tal forma que el hilo permanezca tenso.

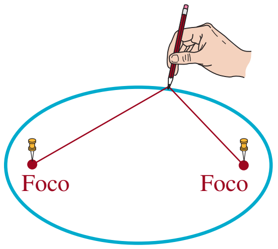


FIGURA 11.2.2 Método para trazar una elipse

■ **Elipse con centro en (0, 0)** Ahora deduciremos la ecuación de la elipse. Por comodidad algebraica, definiremos $k = 2a > 0$ y colocaremos los focos en el eje x, en las coordenadas $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, como muestra la **FIGURA 11.2.3**. Entonces, de acuerdo con (1),

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

o sea

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \tag{2}$$

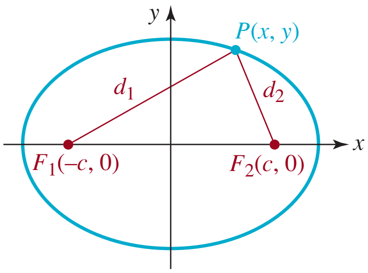


FIGURA 11.2.3 Elipse con centro en (0, 0) y focos en el eje x

Ambos lados de la segunda ecuación en (2) se elevan al cuadrado y se simplifica:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Se eleva al cuadrado por segunda vez, y entonces

$$a^2[(x - c)^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

o sea

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{3}$$

En la figura 11.2.3 se ve que los puntos F_1, F_2 y P forman un triángulo. Como la suma de las longitudes de dos lados cualquiera en un triángulo es mayor que la longitud del otro lado, se debe cumplir que $2a > 2c$, o $a > c$. Por tanto, $a^2 - c^2 > 0$. Cuando se iguala $b^2 = a^2 - c^2$, la ecuación (3) se transforma en $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Esta última ecuación se divide entre a^2b^2 y se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

La ecuación (4) se llama **forma normal** de la ecuación de una elipse con centro en (0, 0) y focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, donde c se define por $b^2 = a^2 - c^2$, y $a > b > 0$.

Si los focos están en el eje y, al repetir el análisis anterior se llega a

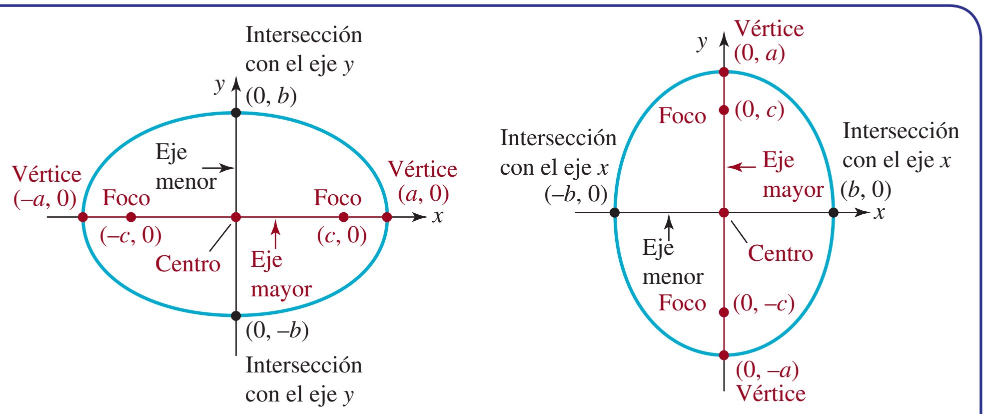
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{5}$$

La ecuación (5) es la llamada **forma normal** de la ecuación de una elipse con centro en (0, 0) y focos en $(0, -c)$ y $(0, c)$, donde c se define por $b^2 = a^2 - c^2$, y $a > b > 0$.

Ejes mayor y menor El **eje mayor** de una elipse es el segmento de recta que pasa por su centro, que contiene a los focos y cuyos extremos están en la elipse. En el caso de una elipse cuya ecuación es la (4), el eje mayor es horizontal, mientras que en el de la (5) el eje mayor es vertical. El segmento de recta que pasa por el centro, es perpendicular al eje mayor, y cuyos extremos están en la elipse, se llama **eje menor**. Los dos extremos del eje mayor se llaman **vértices**. En la ecuación (4), los vértices están en la intersección con el eje x. Si $y = 0$ en (4), el resultado es $x = \pm a$. Entonces los vértices están en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. En la ecuación (5), los vértices son las intersecciones con el eje y $(0, -a)$ y $(0, a)$. En la ecuación (4) los extremos de los ejes menores son $(0, -b)$ y $(0, b)$; en la ecuación (5), los extremos están en $(-b, 0)$ y $(b, 0)$. En las ecuaciones (4) o (5), la **longitud del eje mayor** es $a - (-a) = 2a$; la longitud del eje menor es $2b$. Como $a > b$, el eje mayor de una elipse siempre es más largo que su eje menor.

En la **FIGURA 11.2.4** se muestra un resumen de toda la información de las ecuaciones (4) y (5).

Resumen gráfico de la información de las formas normales (4) y (5)



a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a > b$ b) $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1, a > b$

FIGURA 11.2.4 Resumen de la información de las formas normales (4) y (5)

EJEMPLO 1 Vértices y focos

Determinar los vértices y los focos de la elipse cuya ecuación es $3x^2 + y^2 = 9$. Hacer la gráfica.

Solución Ambos lados de esta igualdad se dividen entre 27, y se ve que la forma normal de la ecuación es

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Como $9 > 3$, se identifica esta ecuación con la (5). De $a^2 = 9$ y $b^2 = 3$, se ve que $a = 3$ y $b = \sqrt{3}$. El eje mayor es vertical con extremos en $(0, -3)$ y $(0, 3)$. El eje menor es horizontal y sus extremos están en $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$. Claro está que también los vértices son las intersecciones de la elipse con el eje y, y los extremos del eje menor son las intersecciones con el eje x. Ahora, para determinar la ubicación de los focos, se usa

$b^2 = a^2 - c^2$ o $c^2 = a^2 - b^2$, para escribir $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Sustituyendo $a = 3$, $b = \sqrt{3}$, se obtiene $c = \sqrt{9 - 3} = \sqrt{6}$. Por consiguiente, los focos están en el eje y, en $(0, -\sqrt{6})$ y $(0, \sqrt{6})$. La gráfica se muestra en la **FIGURA 11.2.5**. ≡

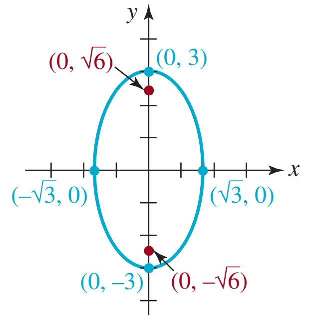


FIGURA 11.2.5 Elipse del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Deducción de la ecuación de una elipse

Deducir una ecuación de la elipse que tiene un foco en (2, 0) y corta el eje x en (5, 0).

Solución Como el foco del dato está en el eje x, se puede deducir una ecuación en la forma normal (4). Así, $c = 2$, $a = 5$, $a^2 = 25$ y $b^2 = a^2 - c^2$, es decir, $b^2 = 5^2 - 2^2 = 21$. La ecuación que se busca es

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1. \qquad ≡$$

Elipse con centro en (h, k) Cuando el centro está en (h, k), la **forma normal** de la ecuación de la elipse puede ser

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

o bien

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1. \tag{7}$$

Las elipses definidas por estas ecuaciones tienen forma idéntica a las definidas por las ecuaciones (4) y (5), ya que las ecuaciones (6) y (7) representan transformaciones rígidas de las gráficas de (4) y (5). Por ejemplo, la elipse

$$\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y + 3)^2}{16} = 1$$

tiene su centro en $(1, -3)$. Su gráfica es la de $x^2/9 + y^2/16 = 1$, trasladada horizontalmente una unidad hacia la derecha, y después por una traslación vertical de tres unidades hacia abajo.

No se aconseja memorizar las fórmulas de los vértices y los focos de una elipse con centro en (h, k). Todo es igual que antes: a, b y c son positivos y $a > b$, $a > c$. El lector puede ubicar vértices, focos y extremos del eje menor sabiendo que a es la distancia del centro a un vértice, b es la distancia del centro a un extremo del eje menor y c es la distancia del centro a un foco. También, el número c aún está definido por la ecuación $b^2 = a^2 - c^2$.

EJEMPLO 3 Elipse con centro en (h, k)

Ubicar los vértices y los focos de la elipse $4x^2 + 16y^2 - 8x - 96y + 84 = 0$. Hacer la gráfica.

Solución Para escribir esta ecuación en una de las formas normales (6) o (7), se deben completar los cuadrados en x y en y. Recuérdese que, para completar un cuadrado, los coeficientes de los términos cuadráticos x^2 y y^2 deben ser 1. Para hacerlo, se saca a 4 como factor común de x^2 y x, y a 16 como factor común de y^2 y y:

$$4(x^2 - 2x \quad) + 16(y^2 - 6y \quad) = -84.$$

Entonces, de acuerdo con

$$\overbrace{4(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 - 6y + 9) = -84 + 4 \cdot 1 + 16 \cdot 9}^{\text{se suman } 4 \cdot 1 \text{ y } 16 \cdot 9 \text{ a ambos lados}}$$

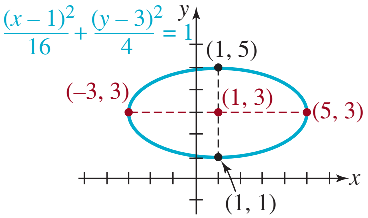


FIGURA 11.2.6 Elipse del ejemplo 3

se obtiene

$$4(x-1)^2 + 16(y-3)^2 = 64$$

es decir,

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1. \tag{8}$$

En la ecuación (8) se ve que el centro de la elipse está en (1, 3). Como la última ecuación tiene la forma normal (6), se identifica $a^2 = 16$, o sea $a = 4$, y $b^2 = 4$, o $b = 2$. El eje mayor es horizontal y está en la recta horizontal $y = 3$ que pasa por (1, 3). Es el segmento de recta que se muestra en rojo e interrumpido en la **FIGURA 11.2.6**. Midiendo $a = 4$ unidades hacia la izquierda y después a la derecha del centro, a lo largo de la recta $y = 3$, llegamos a los vértices $(-3, 3)$ y $(5, 3)$. Si medimos $b = 2$ unidades tanto hacia abajo como hacia arriba de la recta vertical $x = 1$, que pasa por el centro, llegamos a los extremos del eje menor (1, 1) y (1, 5). El eje menor se muestra en negro e interrumpido en la figura 11.2.6. Como $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$, $c = 2\sqrt{3}$. Por último, si medimos $c = 2\sqrt{3}$ unidades hacia la izquierda y hacia la derecha del centro, a lo largo de $y = 3$, llegamos a los focos en $(1 - 2\sqrt{3}, 3)$ y $(1 + 2\sqrt{3}, 3)$. ≡

EJEMPLO 4 Deducción de la ecuación de una elipse

Deducir la ecuación de la elipse que tiene su centro en $(2, -1)$, cuyo eje mayor vertical mide 6 y su eje menor 3.

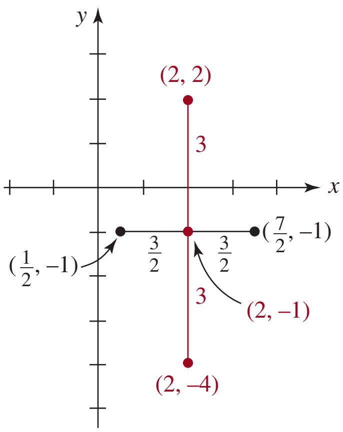


FIGURA 11.2.7 Interpretación gráfica de los datos del ejemplo 4

Solución La longitud del eje mayor es $2a = 6$, y entonces $a = 3$. De igual modo, la longitud del eje menor es $2b = 3$, por lo que $b = \frac{3}{2}$. Al trazar el centro y los ejes se ve en la **FIGURA 11.2.7** que los vértices están en (2, 2) y en $(2, -4)$, y que los extremos del eje menor están en $(\frac{1}{2}, -1)$ y $(\frac{7}{2}, -1)$. Como el eje mayor es vertical, la ecuación normal de esta elipse es

$$\frac{(x-2)^2}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{(y-(-1))^2}{3^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{(x-2)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$ ≡

Excentricidad

Relacionado con cada sección cónica hay un número e llamado **excentricidad**. La excentricidad de una elipse se define mediante

$$e = \frac{c}{a},$$

donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Como $0 < \sqrt{a^2 - b^2} < a$, la excentricidad de una elipse satisface $0 < e < 1$.

EJEMPLO 5 Regreso al ejemplo 3

Determinar la excentricidad de la elipse en el ejemplo 3.

Solución Al resolver el ejemplo 3 se vio que $a = 4$ y $c = 2\sqrt{3}$. Por consiguiente, la excentricidad de esta elipse es $e = (2\sqrt{3})/4 = \sqrt{3}/2 \approx 0.87$. ≡

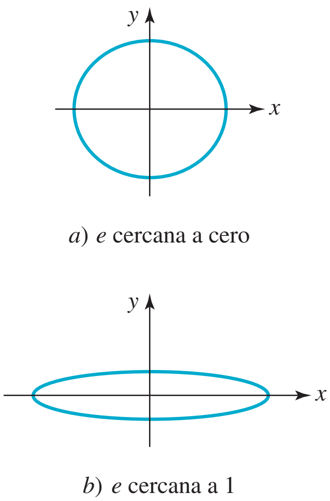


FIGURA 11.2.8 Efecto de la excentricidad sobre la forma de una elipse

La excentricidad es un indicador de la forma de una elipse. Cuando $e \approx 0$, esto es, cuando e es cercana a cero, la elipse es casi circular, y cuando $e \approx 1$, la elipse es aplanada, alargada o *elongada*. Para verlo, observe que si e es cercana a 0, entonces, de acuerdo con $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 0$, y en consecuencia $a \approx b$. Como se puede ver en las ecuaciones normales (4) y (5), eso quiere decir que la forma de la elipse es cercana a un círculo. También, como c es la distancia del centro de la elipse a un foco, los dos focos están cercanos entre sí, y cerca del centro. Véase la **FIGURA 11.2.8*a***). Por otra parte, si $e \approx 1$ o

$\sqrt{a^2 - b^2}/a \approx 1$, entonces $c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx a$ y entonces $b \approx 0$. También, $c \approx a$ quiere decir que los focos están alejados; cada foco está cerca de un vértice. Por consiguiente, la elipse es alargada, como se ve en la figura 11.2.8*b*).

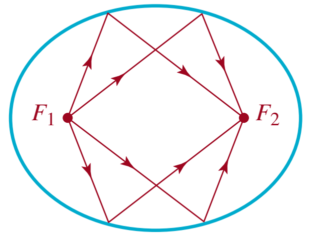


FIGURA 11.2.9 Propiedad reflectora de una elipse

Aplicaciones de la elipse Las elipses tienen una propiedad reflectora análoga a la que se describió en la sección 11.1 en el caso de la parábola. Se puede demostrar que si una fuente luminosa o sonora se coloca en un foco de una elipse, todos sus rayos u ondas se reflejarán en la superficie de la elipse y llegarán al otro foco. Véase la **FIGURA 11.2.9**. Por ejemplo, si se construye una mesa de *pool* en forma de una elipse con una buchaca en un foco, cualquier tiro que se origine en el otro foco nunca fallará en entrar a ella. De igual modo, si un techo es elíptico y sus dos focos están en (o cerca del) el piso, cualquier susurro en un foco se oirá en el otro. Algunas "galerías de susurros" famosas son el Vestíbulo de las Estatuas del Capitolio, en Washington, D. C., el Tabernáculo de Mormón, en Salt Lake City, y la Catedral de San Pablo, en Londres.

Vestíbulo de las Estatuas, Washington, DC

Usando su ley de la gravitación universal, Isaac Newton demostró por primera vez la primera ley de Kepler del movimiento planetario. La órbita de cada planeta alrededor del Sol es una elipse con el Sol en uno de sus focos.

EJEMPLO 6 Excentricidad de la órbita terrestre

La distancia de la Tierra al Sol en su perihelio (cuando más se acerca al Sol) es, aproximadamente, de 9.16×10^7 millas, y en su afelio (la máxima distancia de la Tierra al Sol) es de 9.46×10^7 millas, aproximadamente. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita de la Tierra?

Solución Supondremos que la órbita de la Tierra es como la que muestra la **FIGURA 11.2.10**. En esa figura se ve que

$$a - c = 9.16 \times 10^7$$
$$a + c = 9.46 \times 10^7.$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se obtiene $a = 9.31 \times 10^7$ y $c = 0.15 \times 10^7$. Entonces, la excentricidad $e = c/a$, es

$$e = \frac{0.15 \times 10^7}{9.31 \times 10^7} \approx 0.016. \qquad \equiv$$

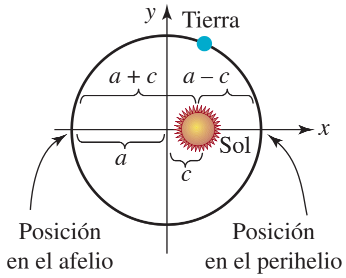


FIGURA 11.2.10 Interpretación gráfica de los datos del ejemplo 6

Las órbitas de siete de los planetas tienen excentricidades menores que 0.1, y por consiguiente, no se alejan de ser circulares. Mercurio y Plutón son las excepciones. Por ejemplo, la órbita de Plutón tiene 0.25 de excentricidad. Muchos de los asteroides y cometas tienen órbitas muy excéntricas. La órbita del asteroide Hidalgo es una de las más excéntricas, con $e = 0.66$. Otro caso notable es la órbita del cometa Halley. Véase el problema 43 de los ejercicios 11.2.

11.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-28.

En los problemas 1 a 20, determine el centro, focos, vértices y extremos del eje menor, así como la excentricidad de la elipse. Haga una gráfica de la elipse.

1. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

2. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

3. $x^2 + \dfrac{y^2}{16} = 1$

4. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{10} = 1$

5. $9x^2 + 16y^2 = 144$

6. $2x^2 + y^2 = 4$

7. $9x^2 + 4y^2 = 36$

8. $x^2 + 4y^2 = 4$

9. $\dfrac{(x-1)^2}{49} + \dfrac{(y-3)^2}{36} = 1$

10. $\dfrac{(x+1)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{36} = 1$

11. $(x+5)^2 + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$

12. $\dfrac{(x-3)^2}{64} + \dfrac{(y+4)^2}{81} = 1$

13. $4x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 4$

14. $36(x+2)^2 + (y+4)^2 = 72$

15. $5(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 45$

16. $6(x-2)^2 + 8y^2 = 48$

17. $25x^2 + 9y^2 - 100x + 18y - 116 = 0$

18. $9x^2 + 5y^2 + 18x - 10y - 31 = 0$

19. $x^2 + 3y^2 + 18y + 18 = 0$

20. $12x^2 + 4y^2 - 24x - 4y + 1 = 0$

En los problemas 21 a 40, deduzca la ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones indicadas.

21. Vértices en $(\pm 5, 0)$, focos en $(\pm 3, 0)$

22. Vértices en $(\pm 9, 0)$, focos en $(\pm 2, 0)$

23. Vértices en $(0, \pm 3)$, focos en $(0, \pm 1)$

24. Vértices en $(0, \pm 7)$, focos en $(0, \pm 3)$

25. Vértices en $(0, \pm 3)$, extremos del eje menor en $(\pm 1, 0)$

26. Vértices en $(\pm 4, 0)$, extremos del eje menor en $(0, \pm 2)$

27. Vértices en $(-3, -3)$, $(5, -3)$, extremos del eje menor en $(1, -1)$, $(1, -5)$

28. Vértices en $(1, -6)$, $(1, 2)$, extremos del eje menor en $(-2, -2)$, $(4, -2)$

29. Un foco en $(0, -2)$, centro en el origen $b = 3$

30. Un foco en $(1, 0)$, centro en el origen $a = 3$

31. Focos en $(\pm\sqrt{2}, 0)$, longitud del eje menor 6

32. Focos en $(0, \pm\sqrt{5})$, longitud del eje mayor 16

33. Focos en $(0, \pm 3)$, pasa por $(-1, 2\sqrt{2})$

34. Vértices en $(\pm 5, 0)$, pasa por $(\sqrt{5}, 4)$

35. Vértices en $(\pm 4, 1)$, pasa por $(2\sqrt{3}, 2)$

36. Centro en $(1, -1)$, un foco en $(1, 1)$, $a = 5$

37. Centro en $(1, 3)$, un foco en $(1, 0)$, un vértice en $(1, -1)$

38. Centro en $(5, -7)$, longitud del eje mayor vertical 8, longitud del eje menor 6

39. Extremos del eje menor en $(0, 5)$, $(0, -1)$, un foco en $(6, 2)$

40. Extremos del eje mayor en $(2, 4)$, $(13, 4)$, un foco en $(4, 4)$

41. La órbita de Mercurio es una elipse con el Sol en uno de sus focos. La longitud del eje mayor de esta órbita es de 72 millones de millas, y la longitud del eje menor es de 70.4 millones de millas. ¿Cuál es la distancia mínima (perihelio) entre Mercurio y el Sol? ¿Cuál es la distancia máxima (afelio)?

42. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita de Mercurio, con los datos del problema 41?

43. La órbita del cometa Halley es una elipse cuyo eje mayor tiene 3.34×10^9 millas de longitud, y cuyo eje menor tiene 8.5×10^8 millas de longitud. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita del cometa?

44. Un satélite gira en torno a la Tierra en una órbita elíptica, con el centro de la Tierra en uno de sus focos. Tiene una altitud mínima de 200 millas y una altitud máxima de 1 000 millas sobre la superficie de la Tierra. Si el radio de la Tierra es de 4 000 millas, ¿cuál es la ecuación de su órbita?

Aplicaciones diversas

45. **Arco** Un arco semielíptico tiene su eje mayor vertical. La base del arco tiene 10 pies de ancho, y la parte más alta está a 15 pies sobre el suelo. Calcule la altura del arco sobre el punto en la base del arco que está a 3 pies del centro.

46. **Diseño de engranajes** Un engranaje elíptico gira en torno a su centro, y se mantiene siempre engranado con un engranaje circular que tiene libertad de movimiento horizontal. Vea la **FIGURA 11.2.11**. Si el origen del sistema coordenado xy se coloca en el centro de la elipse, la ecuación de la elipse en su posición actual es $3x^2 + 9y^2 = 24$. El diámetro del engranaje circular es igual a la longitud del eje menor del engranaje elíptico. Si las unidades son centímetros, ¿qué distancia se mueve horizontalmente el centro del engranaje circular durante la rotación, desde el paso de un vértice del engranaje elíptico hasta el siguiente?

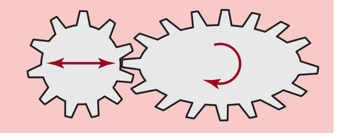


FIGURA 11.2.11 Engranajes elíptico y circular del problema 46

47. Carpintería Un carpintero desea cortar en forma elíptica una mesa de café, de una pieza rectangular de madera, de 4 pies por 3 pies, usando toda la longitud y el ancho disponibles. Si la elipse se debe trazar usando el método del cordón y el clavo que se ilustra en la figura 11.2.2, ¿qué longitud debe tener el cordón y dónde deben ponerse los clavos?

48. Diseño de un parque Un parque de Washington, DC, llamado La Elipse, está limitado por una vereda elíptica cuyo eje mayor tiene 458 m de longitud, mientras que su eje menor mide 390 m. Calcule la distancia entre los focos de esta elipse.

49. Galería de los murmullos Suponga que se construye un recinto sobre una base elíptica plana, haciendo girar 180° una semielipse en torno a su eje mayor. Entonces, por la propiedad de reflexión de la elipse, todo lo que se susurre en un foco se oirá claramente en el otro foco. Si la altura del recinto es de 16 pies y la longitud es de 40 pies, calcule la ubicación de los puestos de susurro y escucha.

50. Ancho focal El ancho focal de la elipse es la longitud de una cuerda focal, es decir, un segmento de recta perpendicular al eje mayor que pasa por un foco y con sus extremos en la elipse (**FIGURA 11.2.12**).

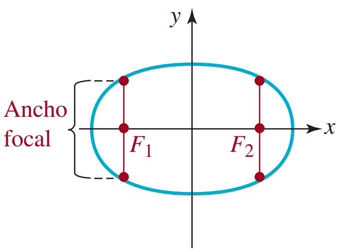


FIGURA 11.2.12 Ancho focal del problema 50

a) Calcule el ancho focal de la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$.

b) Demuestre que en general, el ancho focal de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es $2b^2/a$.

51. Deduzca una ecuación de la elipse cuyos focos están en (0, 2) y (8, 6), y la suma fija de las distancias $2a = 12$. [*Pista:* en este caso, el eje mayor no es horizontal ni vertical; por consiguiente, no se aplica alguna de las formas normales de esta sección. Use la definición de la elipse].

52. Proceda como en el problema 51 y deduzca la ecuación de la elipse cuyos focos están en $(-1, -3)$ y $(-5, 7)$, y la suma fija de distancias $2a = 20$.

≡ Para la discusión

53. La gráfica de la elipse $x^2/4 + (y - 1)^2/9 = 1$ se desplaza 4 unidades hacia la derecha. ¿Dónde están el centro, los focos, los vértices y los extremos del eje menor en la gráfica desplazada?

54. La gráfica de la elipse $(x - 1)^2/9 + (y - 4)^2 = 1$ se desplaza 5 unidades hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba. ¿Dónde están el centro, los focos, los vértices y los extremos del eje menor en la gráfica desplazada?

55. En ingeniería, con frecuencia se expresa la excentricidad de una elipse sólo en función de a y b. Demuestre que $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$.

11.3 La hipérbola

■ Introducción La definición de la hipérbola es básicamente igual que la definición de la elipse, y la única excepción es que la palabra *suma* se cambia a la palabra *diferencia*.

Definición 11.3.1 Hipérbola

Una **hipérbola** es el conjunto de puntos $P(x, y)$ en el plano, tal que la diferencia de las distancias entre P y dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. Los puntos fijos F_1 y F_2 se llaman **focos**. El punto medio del segmento de la recta que une los puntos F_1 y F_2 se llama **centro**.

Como se ve en la **FIGURA 11.3.1**, una hipérbola consta de dos **ramas**. Si P es un punto de la hipérbola, entonces

$$|d_1 - d_2| = k, \tag{1}$$

en donde $d_1 = d(F_1, P)$ y $d_2 = d(F_2, P)$.

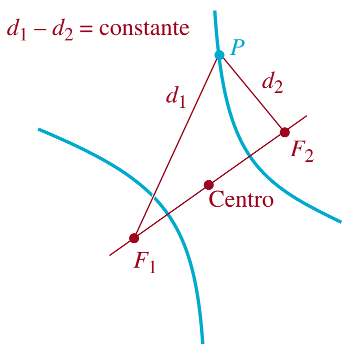


FIGURA 11.3.1 Una hipérbola

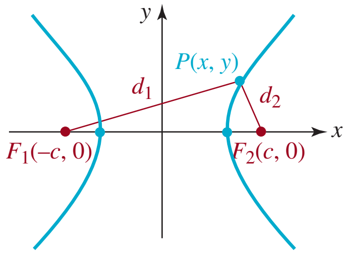


FIGURA 11.3.2 Hipérbola con centro en (0, 0) y focos en el eje x

■ Hipérbola con centro en (0, 0)

Procediendo como en la elipse, se colocan los focos en el eje x, en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, como se ve en la **FIGURA 11.3.2** y definimos que la constante k sea igual a $2a$, por comodidad algebraica. Entonces, de acuerdo con (1),

$$d_1 - d_2 = \pm 2a. \tag{2}$$

Como se traza en la figura 11.3.2, P está en la rama derecha de la hipérbola, y por consiguiente $d_1 - d_2 = 2a > 0$. Si P está en la rama izquierda, entonces la diferencia es $-2a$. Si (2) se escribe en la forma

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

o

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

se eleva al cuadrado, se simplifica y se eleva de nuevo al cuadrado:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

$$\pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = cx - a^2$$

$$a^2[(x - c)^2 + y^2] = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \tag{3}$$

De acuerdo con la figura 11.3.2, se ve que la desigualdad del triángulo da como resultado

$$d_1 < d_2 + 2c \quad \text{y} \quad d_2 < d_1 + 2c,$$

o

$$d_1 - d_2 < 2c \quad \text{y} \quad d_2 - d_1 < 2c.$$

Usando $d_1 - d_2 = \pm 2a$, las dos desigualdades implican que $2a < 2c$, o $a < c$. En virtud de que $c > a > 0$, $c^2 - a^2$ es una constante positiva. Si se hace que $b^2 = c^2 - a^2$, la ecuación (3) se transforma en $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ o bien, después de dividir entre a^2b^2,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

La ecuación (4) se llama **forma normal** de la ecuación de una hipérbola con centro en (0, 0) y focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, y c se define por $b^2 = c^2 - a^2$.

Cuando los focos están en el eje y, una repetición de las operaciones algebraicas anteriores conduce a

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

La ecuación (5) es la **forma normal** de la ecuación de una hipérbola centrada en (0, 0) con focos en $(0, -c)$ y $(0, c)$. Aquí, de nuevo, $c > a$ y $b^2 = c^2 - a^2$.

Precaución.

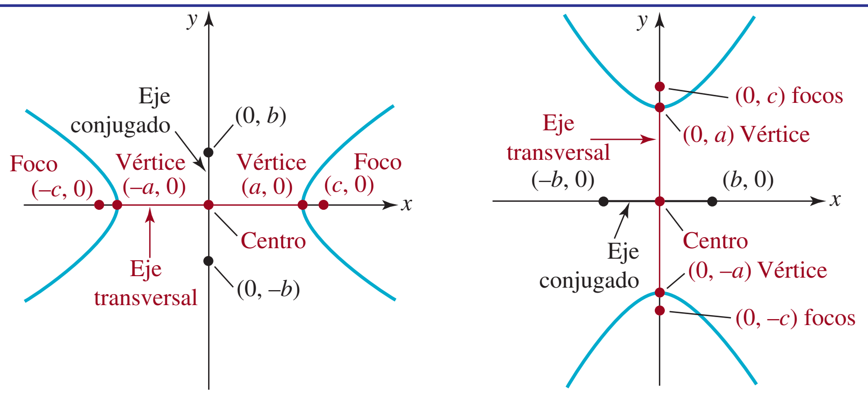
En el caso de la hipérbola, a diferencia de la elipse, téngase en cuenta, en (4) y (5), que no hay relación entre los tamaños relativos de a y b; más bien a^2 siempre es el denominador del *término positivo* y las intersecciones con los ejes coordenados *siempre* tienen $\pm a$ como una coordenada.

■ Ejes transversal y conjugado

El segmento de recta con los extremos en la hipérbola, y que está en la línea que pasa por los focos, se llama **eje transversal**; sus extremos se llaman **vértices** de la hipérbola. En la hipérbola que se describe con la ecuación (4), el eje transversal está en el eje x. Por consiguiente, las coordenadas de los vértices son las de las intersecciones con el eje x. Si se hace que $y = 0$ se obtiene $x^2/a^2 = 1$, es decir, $x = \pm a$. Así, como se ve en la **FIGURA 11.3.3*a***), los vértices están en $(-a, 0)$ y en $(a, 0)$; la **longitud del eje transversal** es $2a$. Nótese que si se hace que $y = 0$ en (4), se obtiene $-y^2/b^2 = 1$, o sea $y^2 = -b^2$, que no tiene soluciones reales. Entonces, la gráfica de cualquier ecuación en esa forma no tiene intersecciones con el eje y. Sin embargo, los números $\pm b$ son importantes. El segmento de recta que pasa por el centro de la hipérbola y es perpendicular al eje transversal, cuyos extremos están en $(0, -b)$ y $(0, b)$ se llama **eje conjugado**. En forma parecida, la gráfica de una ecuación, en la forma normal (5), no tiene intersecciones con el eje x. En el caso de (5) el eje conjugado es el segmento de recta cuyos extremos están en $(-b, 0)$ y $(b, 0)$.

La información de las ecuaciones (4) y (5) se resume en la figura 11.3.3.

Resumen gráfico de la información de las formas normales (4) y (5)



a) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *b*) $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

FIGURA 11.3.3 Resumen de la información de las formas normales (4) y (5)

Asíntotas Toda hipérbola posee un par de asíntotas oblicuas, que pasan por su centro. Esas asíntotas indican el comportamiento en los extremos, y como tales son una ayuda invaluable para trazar la gráfica de una hipérbola. Si de (4) se despeja a y en función de x se llega a

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Cuando $x \to -\infty$ o $x \to \infty$, entonces $a^2/x^2 \to 0$, por lo que $\sqrt{1 - a^2/x^2} \to 1$. Por consiguiente, para grandes valores de $|x|$, los puntos en la gráfica de la hipérbola se acercan a los puntos en las rectas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x. \tag{6}$$

Con un análisis parecido se ve que las asíntotas oblicuas de (5) son

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{a}{b}x. \tag{7}$$

Cada par de asíntotas se interseca en el origen, que es el centro de la hipérbola. También obsérvese, en la **FIGURA 11.3.4*a*)**, que las asíntotas sólo son las *diagonales prolongadas* de un rectángulo de $2a$ de ancho (la longitud del eje transversal) y $2b$ de altura (la longitud del eje conjugado); en la figura 11.3.4*b*) las asíntotas son las diagonales prolongadas de un rectángulo de $2b$ de ancho y $2a$ de altura. Este rectángulo se denomina **rectángulo auxiliar**.

Recomendamos al lector que *no* memorice las ecuaciones (6) y (7). Hay un método fácil para obtener las asíntotas de una hipérbola. Por ejemplo, como $y = \pm(b/a)x$ equivale a

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

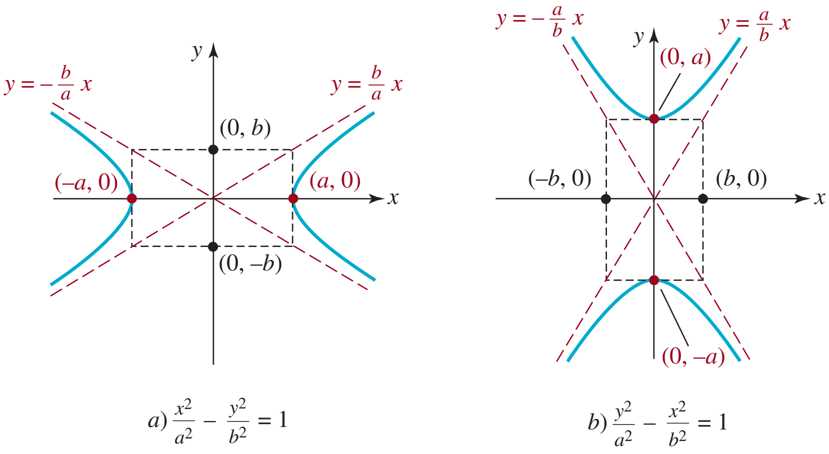


FIGURA 11.3.4 Hipérbolas (4) y (5) con las asíntotas oblicuas (en rojo) como las diagonales prolongadas de los rectángulos auxiliares (en negro).

las asíntotas de la hipérbola (4) se obtienen con una sola ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{8}$$

Note que (8) se factoriza como la diferencia de dos cuadrados:

Éste es un método nemotécnico. No tiene importancia geométrica.

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Al igualar cada factor a cero y despejar y se obtiene la ecuación de una asíntota. El lector ni siquiera debe memorizar la ecuación (8), porque sólo es el lado izquierdo de la forma normal de la ecuación de una hipérbola, presentada en (4). De igual forma, para obtener las asíntotas en (5) sólo sustituya 1 por 0 en la forma normal, factorice $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 0$ y despeje y.

EJEMPLO 1 Hipérbola centrada en (0, 0)

Determinar la ubicación de vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 25y^2 = 225$. Trazar la gráfica.

Solución Primero se lleva la ecuación a su forma normal, dividiendo entre 225:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1. \tag{9}$$

En esta ecuación se observa que $a^2 = 25$ y $b^2 = 9$, y entonces $a = 5$ y $b = 3$. Por tanto, los vértices están en $(-5, 0)$ y $(5, 0)$. Como $b^2 = c^2 - a^2$ implica que $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $c^2 = 34$, y por ende los focos están en $(-\sqrt{34}, 0)$ y $(\sqrt{34}, 0)$. Para determinar las asíntotas oblicuas se usa la forma normal (9), sustituyendo 1 por 0:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 0 \qquad \text{se factoriza como} \qquad \left(\frac{x}{5} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{5} + \frac{y}{3}\right) = 0.$$

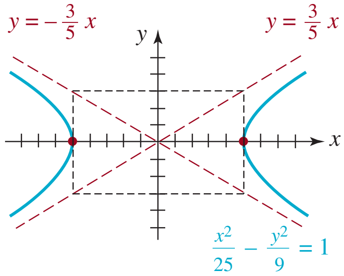


FIGURA 11.3.5 Hipérbola del ejemplo 1

Se iguala cada factor a cero y se despeja y; así se obtienen las asíntotas $y = \pm 3x/5$. Se grafican los vértices, y las dos rectas que pasan por el origen. Ambas ramas de la hipérbola deben acercarse arbitrariamente a las asíntotas cuando $x \to \pm\infty$ (**FIGURA 11.3.5**). ≡

EJEMPLO 2 Determinación de la ecuación de una hipérbola

Determine la ecuación de la hipérbola cuyos vértices están en $(0, -4)$, $(0, 4)$ y sus asíntotas son $y = -\frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x$.

Solución El centro de la hipérbola está en $(0, 0)$. Eso se ve porque las asíntotas se cortan en el origen. Además, los vértices están en el eje y y están a 4 unidades a cada lado del origen. Entonces, la ecuación que se busca tiene la forma (5). De acuerdo con (7), para la figura 11.3.4b), las asíntotas deben ser de la forma $y = \pm(a/b)x$, y entonces $a/b = 1/2$. Con los vértices indicados, se identifica que $a = 4$, y entonces

$$\frac{4}{b} = \frac{1}{2} \quad \text{implica que} \quad b = 8.$$

Entonces, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{8^2} = 1 \quad \text{o sea} \quad \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{64} = 1. \qquad \equiv$$

Hipérbola con centro en (h, k) Cuando el centro de la hipérbola está en (h, k), los análogos de la **forma normal** de las ecuaciones (4) y (5) son, respectivamente,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1. \tag{11}$$

Como en (4) y en (5), los números a^2, b^2 y c^2 se relacionan por $b^2 = c^2 - a^2$.

El lector puede ubicar vértices y focos aprovechando que a es la distancia del centro a un vértice, y c es la distancia del centro a un foco. Las asíntotas inclinadas de (10) se obtienen factorizando

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$$

en la forma

$$\left(\frac{x-h}{a} - \frac{y-k}{b}\right)\left(\frac{x-h}{a} + \frac{y-k}{b}\right) = 0.$$

De igual modo, las asíntotas de (11) se obtienen factorizando

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0,$$

igualando cada factor a cero y despejando y en función de x. Para comprobar su trabajo, recuerde que (h, k) debe ser un punto que esté en cada asíntota.

EJEMPLO 3 Hipérbola centrada en (h, k)

Halle el centro, vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$. Trazar la gráfica.

Solución Antes de completar cuadrados en x y y, sacaremos a 4 como factor común de los dos términos en x, y a -1 de los dos términos en y, para que el primer coeficiente de cada expresión sea 1. De esta forma,

$$\begin{aligned}
4(x^2 - 2x \quad) + (-1)(y^2 + 4y \quad) &= 4 \\
4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) &= 4 + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \\
4(x-1)^2 - (y+2)^2 &= 4 \\
\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} &= 1.
\end{aligned}$$

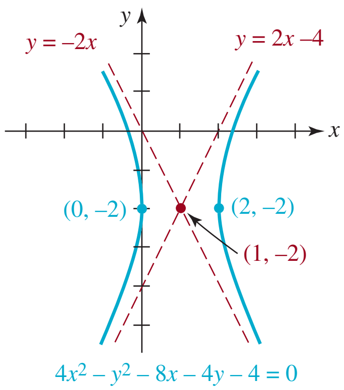


FIGURA 11.3.6 Hipérbola del ejemplo 3

Ahora se ve que el centro está en $(1, -2)$. Como el término en x de la forma normal tiene coeficiente positivo, el eje transversal es horizontal y está en la recta $y = -2$, y se identifican $a = 1$ y $b = 2$. Los vértices están 1 unidad hacia la izquierda y hacia la derecha del centro; están en $(0, -2)$ y $(2, -2)$ respectivamente. De $b^2 = c^2 - a^2$:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 4 = 5,$$

y así $c = \sqrt{5}$. Por consiguiente, los focos están a $\sqrt{5}$ unidades a la izquierda y a la derecha del centro que está en $(1, -2)$ en $(1 - \sqrt{5}, -2)$ y en $(1 + \sqrt{5}, -2)$.

Para determinar las asíntotas se despeja y:

$$\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} = 0 \quad \text{o sea} \quad \left(x - 1 - \frac{y+2}{2}\right)\left(x - 1 + \frac{y+2}{2}\right) = 0.$$

A partir de $y + 2 = \pm 2(x - 1)$ se advierte que las ecuaciones de las asíntotas son $y = -2x$ y $y = 2x - 4$. Observe que si se sustituye $x = 1$, ambas ecuaciones dan $y = -2$, lo que quiere decir que las dos líneas pasan por el centro. A continuación se localiza el centro, se grafican los vértices y las asíntotas. Como se ve en la **FIGURA 11.3.6**, la gráfica de la hipérbola pasa por los vértices y se acerca cada vez más a las asíntotas cuando $x \to \pm\infty$. ≡

EJEMPLO 4 Ecuación de una hipérbola

Halle la ecuación de una hipérbola cuyo centro está en $(2, -3)$, que pasa por el punto $(4, 1)$ y que tiene un vértice en $(2, 0)$.

Solución Ya que la distancia del centro a un vértice es a, entonces $a = 3$. De acuerdo con la ubicación del centro y el vértice, el eje transversal debe ser vertical y estar en la recta $x = 2$. Por consiguiente, la ecuación de la hipérbola debe tener la forma (11):

$$\frac{(y+3)^2}{3^2} - \frac{(x-2)^2}{b^2} = 1, \tag{12}$$

en donde se debe determinar b^2. Como el punto $(4, 1)$ está en la gráfica, en la hipérbola sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (12). De

$$\frac{(1+3)^2}{3^2} - \frac{(4-2)^2}{b^2} = 1$$

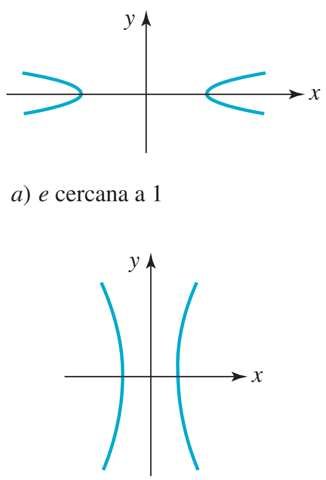
$$\frac{16}{9} - \frac{4}{b^2} = 1$$

$$\frac{7}{9} = \frac{4}{b^2}$$

se ve que $b^2 = \frac{36}{7}$. La conclusión es que la ecuación que se busca es

$$\frac{(y+3)^2}{3^2} - \frac{(x-2)^2}{\frac{36}{7}} = 1.$$

≡



b) e mucho mayor que 1

FIGURA 11.3.7 Efecto de la excentricidad sobre la forma de una hipérbola

Excentricidad

Como la elipse, la ecuación que define la **excentricidad** de una hipérbola es $e = c/a$. Excepto en este caso, el número c se define como $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ya que $0 < a < \sqrt{a^2 + b^2}$, la excentricidad de una elipse satisface $e > 1$. Como en el caso de la elipse, la magnitud de la excentricidad de una hipérbola es indicador de su forma. La **FIGURA 11.3.7** muestra ejemplos de dos casos extremos: $e \approx 1$ y e mucho mayor que 1.

EJEMPLO 5 Excentricidad de una hipérbola

Calcule la excentricidad de la hipérbola $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{36} = 1$.

Solución Se identifican $a^2 = 2$ y $b^2 = 36$, y con ello se obtiene $c^2 = 2 + 36 = 38$. Entonces, la excentricidad de la hipérbola indicada es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{2}} = \sqrt{19} \approx 4.4.$$

La conclusión es que la hipérbola tiene sus ramas que se abren mucho, como en la figura 11.3.7*b*). ≡

Aplicaciones de la hipérbola La hipérbola tiene varias aplicaciones importantes en técnicas de sondeo. En particular, varios sistemas de navegación usan hipérbolas, como se describirá a continuación. Dos radiotransmisores fijos a distancia conocida entre sí transmiten señales sincronizadas. La diferencia entre los tiempos de recepción por parte de un navegante determina la diferencia $2a$ entre las distancias del navegante a los dos transmisores. Con esta información, el navegante se ubica en algún lugar de la hipérbola cuyos focos están en los transmisores, y la diferencia fija en las distancias a los focos es igual a $2a$. Usando dos conjuntos de señales obtenidas a partir de una sola estación maestra, apareadas con cada una de dos segundas estaciones, el sistema de navegación LORAN, de largo alcance, localiza un barco o un avión en la intersección de dos hipérbolas (**FIGURA 11.3.8**).

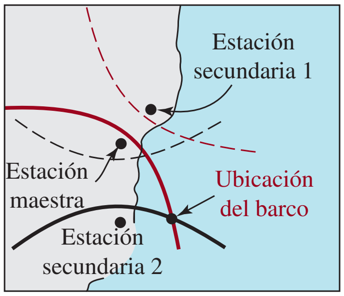


FIGURA 11.3.8 Concepto del LORAN

En el siguiente ejemplo se ilustra el uso de una hipérbola en otro caso que implica técnicas de sondeo.

EJEMPLO 6 Localización de una gran explosión

Dos observadores ubicados en los puntos A y B oyen el sonido de una explosión de dinamita en momentos distintos. Debido a que saben que la velocidad aproximada del sonido es de 1 100 pies/s o 335 m/s, determinan que la explosión sucedió a 1 000 metros más cerca del punto A que del punto B. Si A y B están a 2 600 metros de distancia, demostrar que el lugar de la explosión está en la rama de una hipérbola. Encuentre una ecuación de esa hipérbola.

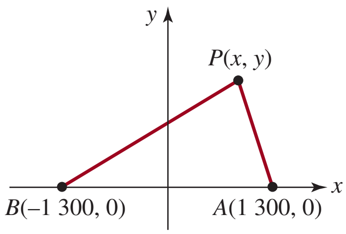


FIGURA 11.3.9 Gráfica del ejemplo 6

Solución En la **FIGURA 11.3.9** se han colocado los puntos A y B en el eje x, en $(1\,300, 0)$ y $(-1\,300, 0)$, respectivamente. Si $P(x, y)$ indica el lugar de la explosión, entonces

$$d(P, B) - d(P, A) = 1\,000.$$

De acuerdo con la definición de la hipérbola en la página 495, y la deducción que le sigue, se ve que ésta es la ecuación de la rama derecha de una hipérbola, con la diferencia de distancias fijas $2a = 1\,000$ y $c = 1\,300$. Entonces, la ecuación tiene la forma

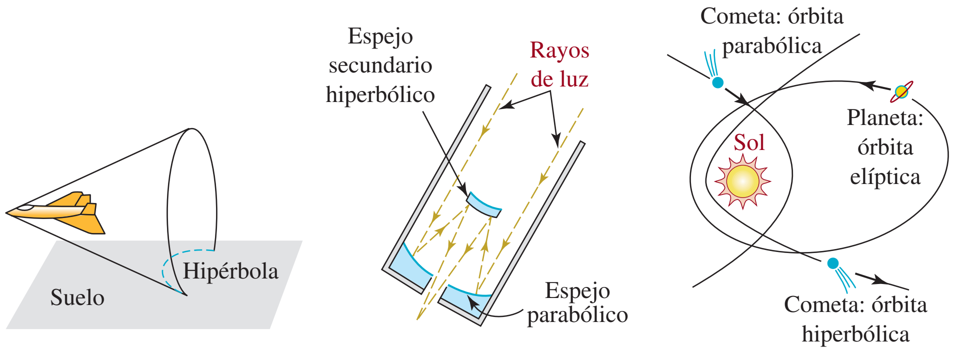
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ donde } x \geq 0,$$

o bien, después de despejar x,

$$x = a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Con $a = 500$ y $c = 1\,300$, $b^2 = (1\,300)^2 - (500)^2 = (1\,200)^2$. Al sustituir en la ecuación anterior se obtiene

$$x = 500\sqrt{1 + \frac{y^2}{(1\,200)^2}} \quad \text{o} \quad x = \frac{5}{12}\sqrt{(1\,200)^2 + y^2}.$$ ≡



a) Huella sónica *b*) Telescopio Cassegrain *c*) Órbitas en torno al Sol

FIGURA 11.3.10 Aplicaciones de las hipérbolas

Para determinar el lugar exacto de la explosión del ejemplo 6 se necesitaría otro observador, que oyera la explosión en un tercer punto *C*. Conociendo el tiempo entre cuando este observador oye la explosión y cuando la oye el observador *A*, se determina una segunda hipérbola. El punto de la detonación es un punto de intersección de las dos hipérbolas.

Hay muchas otras aplicaciones de la hipérbola. Como se ve en la **FIGURA 11.3.10*a*)**, un avión que vuele a velocidad supersónica, paralelo al nivel del suelo, deja una "huella" sónica hiperbólica en el suelo. Al igual que la parábola y la elipse, también la hipérbola posee una propiedad reflectora. El telescopio reflector Cassegrain que muestra la figura 11.3.10*b*) usa un espejo secundario hiperbólico para reflejar un rayo de luz a través de un agujero, que pasa a un ocular (o cámara) detrás del espejo parabólico principal. En esta construcción de telescopio se aprovecha que un rayo de luz dirigido a lo largo de una línea que pasa por un foco de un espejo hiperbólico se refleja en una línea que pasa por el otro foco.

En el universo, las órbitas de objetos pueden ser parabólicas, elípticas o hiperbólicas. Cuando un objeto pasa cerca del Sol (o de un planeta) no necesariamente es capturado por el campo gravitacional del objeto mayor. En ciertas condiciones, toma una cantidad fraccionaria de energía orbital de ese cuerpo mucho mayor, y el "efecto de onda" que resulta hace que la órbita sea hiperbólica, al pasar el Sol [figura 11.3.10*c*)].

11.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-29.

En los problemas 1 a 20, localice centro, focos y vértices y determine las asíntotas y la excentricidad de las hipérbolas. Trace la gráfica de la hipérbola.

1. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

2. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

3. $\dfrac{y^2}{64} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

4. $\dfrac{y^2}{6} - 4x^2 = 1$

5. $4x^2 - 16y^2 = 64$

6. $5x^2 - 5y^2 = 25$

7. $y^2 - 5x^2 = 20$

8. $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$

9. $\dfrac{(x-5)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{49} = 1$

10. $\dfrac{(x+2)^2}{10} - \dfrac{(y+4)^2}{25} = 1$

11. $\dfrac{(y-4)^2}{36} - x^2 = 1$

12. $\dfrac{(y-\frac{1}{4})^2}{4} - \dfrac{(x+3)^2}{9} = 1$

13. $25(x-3)^2 - 5(y-1)^2 = 125$

14. $10(x+1)^2 - 2(y-\frac{1}{2})^2 = 100$

15. $8(x + 4)^2 - 5(y - 7)^2 + 40 = 0$

16. $9(x - 1)^2 - 81(y - 2)^2 = 9$

17. $5x^2 - 6y^2 - 20x + 12y - 16 = 0$

18. $16x^2 - 25y^2 - 256x - 150y + 399 = 0$

19. $4x^2 - y^2 - 8x + 6y - 4 = 0$

20. $2y^2 - 9x^2 - 18x + 20y + 5 = 0$

En los problemas 21 a 44 deduzca una ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones indicadas.

21. Focos en $(\pm5, 0)$, $a = 3$

22. Focos en $(\pm10, 0)$, $b = 2$

23. Focos en $(0, \pm4)$, un vértice en $(0, -2)$

24. Focos en $(0, \pm3)$, un vértice en $(0, -\frac{3}{2})$

25. Focos en $(\pm4, 0)$, longitud del eje transversal 6

26. Focos en $(0, \pm7)$, longitud del eje transversal 10

27. Centro en $(0, 0)$, un vértice en $(0, \frac{5}{2})$, un foco en $(0, -3)$

28. Centro en $(0, 0)$, un vértice en $(7, 0)$, un foco en $(9, 0)$

29. Centro en $(0, 0)$, un vértice en $(-2, 0)$, un foco en $(-3, 0)$

30. Centro en $(0, 0)$, un vértice en $(1, 0)$, un foco en $(5, 0)$

31. Vértices en $(0, \pm8)$, asíntotas $y = \pm2x$

32. Focos en $(0, \pm3)$, asíntotas $y = \pm\frac{3}{2}x$

33. Vértices en $(\pm2, 0)$, asíntotas $y = \pm\frac{4}{3}x$

34. Focos en $(\pm5, 0)$, asíntotas $y = \pm\frac{3}{5}x$

35. Centro en $(1, -3)$, un foco en $(1, -6)$ y un vértice en $(1, -5)$

36. Centro en $(2, 3)$, un foco en $(0, 3)$ y un vértice en $(3, 3)$

37. Focos en $(-4, 2)$, $(2, 2)$, un vértice en $(-3, 2)$

38. Vértices en $(2, 5)$, $(2, -1)$, un foco en $(2, 7)$

39. Vértices en $(\pm2, 0)$, pasa por $(2\sqrt{3}, 4)$

40. Vértices en $(0, \pm3)$, pasa por $(\frac{16}{5}, 5)$

41. Centro en $(-1, 3)$, un vértice en $(-1, 4)$, pasa por $(-5, 3, +\sqrt{5})$

42. Centro en $(3, -5)$, un vértice en $(3, -2)$, pasa por $(1, -1)$

43. Centro en $(2, 4)$, un vértice en $(2, 5)$ y una asíntotas $2y - x - 6 = 0$

44. Excentricidad $\sqrt{10}$, extremos del eje conjugado en $(-5, 4)$, $(-5, 10)$

45. Tres puntos están ubicados en $A(-10, 16)$, $B(-2, 0)$ y $C(2, 0)$; las unidades son kilómetros. Se sabe que un cañón está emplazado en el segmento de recta entre A y C, y mediante técnicas de sondeo se determina que el cañón está 2 km más cerca de B que de C. Determine el punto donde está emplazado el cañón.

46. Se puede demostrar que un rayo de luz que emana de un foco de una hipérbola se reflejará a lo largo de la línea que pasa por el foco opuesto (**FIGURA 11.3.11**). Un rayo de luz que viene del foco izquierdo de la hipérbola $x^2/16 - y^2/20 = 1$ llega a la hipérbola en el punto $(-6, -5)$. Deduzca la ecuación del rayo reflejado.

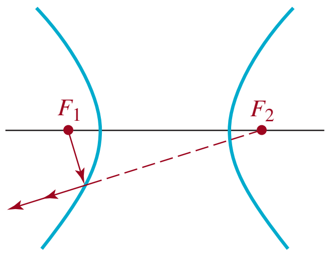


FIGURA 11.3.11 Propiedad reflectora en el problema 46

47. Halle la ecuación de una hipérbola con sus focos en $(0, -2)$ y $(8, 4)$, y con diferencia fija de distancias $2a = 8$. [*Pista:* vea el problema 51 en los ejercicios 11.2].

48. El **ancho focal** de una hipérbola es la longitud de su cuerda focal, esto es, un segmento de recta perpendicular a la línea que contiene al eje transversal que pasa por un foco, con los extremos en la hipérbola (**FIGURA 11.3.12**).

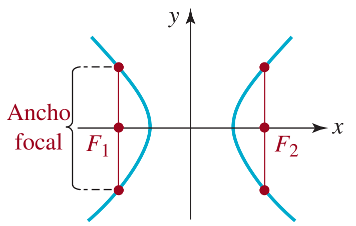


FIGURA 11.3.12 Ancho focal del problema 48

a) Halle el ancho focal de la hipérbola $x^2/4 - y^2/9 = 1$.
b) Demuestre que, en general, el ancho focal de la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ es $2b^2/a$.

Para la discusión

49. **Búsqueda de submarinos** Dos detectores de sonar están a la distancia d entre sí. Suponga que un sonido (como el siseo de un submarino) se oye en los dos detectores con

una demora de tiempo h. Véase la **FIGURA 11.3.13**. Suponga que el sonido viaja en línea recta hacia los dos detectores, a la velocidad v.

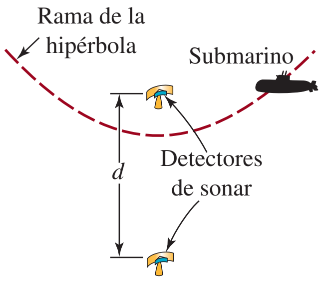


FIGURA 11.3.13 Detectores sónicos del problema 49

a) Explique por qué h no puede ser mayor que d/v.

b) Explique por qué, para valores dados de d, v y h, puede determinarse que la fuente sonora está en una rama de una hipérbola. [*Pista:* ¿dónde cree que estén los focos?]

c) Halle la ecuación de la hipérbola del inciso *b*), suponiendo que los detectores se encuentran en los puntos $(0, d/2)$ y $(0, -d/2)$. Exprese el resultado en la forma normal $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$.

50. Se dice que las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

son **conjugadas** entre sí.

a) Determine la ecuación de la hipérbola conjugada de

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

b) Describa cómo se relacionan las gráficas de las hipérbolas conjugadas.

51. Una **hipérbola rectangular** es una en la cual las asíntotas son perpendiculares.

a) Demuestre que $y^2 - x^2 + 5y + 3x = 1$ es una hipérbola rectangular.

b) ¿Cuál(es) de las hipérbolas de los problemas 1 a 20 son rectangulares?

11.4 Rotación de ejes

Introducción En la introducción de la sección 11.1 señalamos que las ecuaciones de las secciones cónicas son casos especiales de la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

Cuando $B = 0$, obtenemos las formas estándares de las ecuaciones de los círculos, parábolas, elipses e hipérbolas estudiados en las secciones anteriores a partir de ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2}$$

al completar el cuadrado. Puesto que cada forma estándar es una ecuación de segundo grado, debemos tener que $A \neq 0$ o $C \neq 0$ en (2).

Además de las secciones cónicas conocidas, la ecuación (1) también puede representar la intersección de dos rectas, una recta, un solo punto, dos rectas paralelas o ninguna gráfica en absoluto. Éstos se conocen como **casos degenerados** de la ecuación (1) (véanse los problemas 29 y 31 en los ejercicios 11.4).

Cuando $B \neq 0$, como veremos en la explicación siguiente, es posible eliminar el término xy de la ecuación (1) por medio de una **rotación de ejes**. En otras palabras, siempre es posible seleccionar el ángulo de rotación θ para que toda ecuación de la forma (1) pueda transformarse en una ecuación en x' y y' sin término $x'y'$:

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{3}$$

Procediendo como haríamos en la ecuación (2), podemos transformar (3) en forma estándar, lo que nos permite identificar la sección cónica y trazar la gráfica correspondiente en el plano de coordenadas $x'y'$.

■ **Rotación de ejes** Comenzamos con un sistema de coordenadas xy con origen O y giramos los ejes x y y alrededor de O a lo largo de un ángulo θ, como se muestra en la **FIGURA 11.4.1**. En la posición que ocupan después de la rotación, denotamos los ejes x y y con los símbolos x' y y', respectivamente. De este modo, cualquier punto P en el plano tiene dos conjuntos de coordenadas: (x, y) en términos del sistema original de coordenadas xy, y (x', y') en función del sistema de coordenadas $x'y'$. Es un ejercicio de trigonometría muy sencillo demostrar que las coordenadas xy de P pueden convertirse en las nuevas coordenadas $x'y'$ por

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta \\ y' &= -x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{4}$$

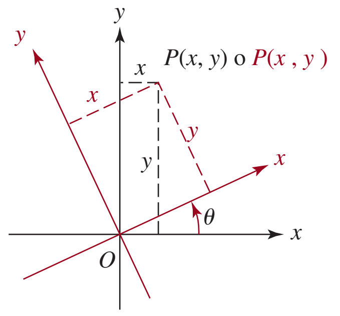


FIGURA 11.4.1 .

A la inversa, si resolvemos (4) para x y y, obtenemos un conjunto de ecuaciones que nos permiten convertir las coordenadas $x'y'$ de P en coordenadas xy:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta \\ y &= x'\,\text{sen}\,\theta + y'\cos\theta. \end{aligned} \tag{5}$$

(véase el problema 32 de los ejercicios 11.4). De los dos conjuntos de **ecuaciones de rotación**, (4) y (5), el conjunto presentado en (5) es el más importante para nuestros propósitos.

EJEMPLO 1 Coordenadas

Suponga que el eje x gira en un ángulo de 60°. Obtenga ***a)*** las coordenadas $x'y'$ del punto cuyas coordenadas xy son (4, 4); ***b)*** las coordenadas xy del punto cuyas coordenadas $x'y'$ son (3, −5).

Solución ***a)*** El punto (4, 4) se indica con el punto negro en la **FIGURA 11.4.2**. Con $\theta = 60°$, $x = 4$ y $y = 4$, las ecuaciones en (4) dan

$$x' = 4\cos 60° + 4\,\text{sen}\,60° = 4\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}$$

$$y' = -4\,\text{sen}\,60° + 4\cos 60° = -4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\sqrt{3}.$$

Las coordenadas $x'y'$ de (4, 4) son $(2 + 2\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3})$, o aproximadamente (5.46, −1.46).
b) El punto (3, −5) se indica con el punto rojo en la figura 11.4.2. Con $\theta = 60°$, $x' = 3$ y $y' = -5$, las ecuaciones en (5) dan

$$x = 3\cos 60° - (-5)\,\text{sen}\,60° = 3\left(\frac{1}{2}\right) + 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3 + 5\sqrt{3}}{2}$$

$$y = 3\,\text{sen}\,60° + (-5)\cos 60° = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 5}{2}.$$

Por tanto, las coordenadas xy de (3, −5) son $(\frac{1}{2}(3 + 5\sqrt{3}), \frac{1}{2}(3\sqrt{3} - 5))$, o aproximadamente (5.83, 0.10). ≡

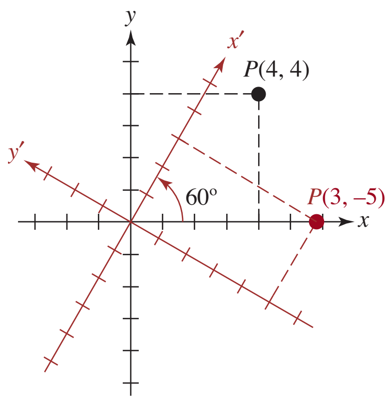


FIGURA 11.4.2 Rotación de ejes del ejemplo 1

Con las ecuaciones de rotación en (5) es posible determinar un ángulo de rotación θ tal que cualquier ecuación de la forma (1), donde $B \neq 0$, se puede transformar en una ecuación en x' y y' sin el término $x'y'$. Sustituyendo x y y en (1) por las ecuaciones en (5):

$$A(x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta)^2 + B(x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta)\,(x'\,\text{sen}\,\theta - y'\cos\theta) + C(x'\,\text{sen}\,\theta - y'\cos\theta)^2 + D(x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta) + E(x'\,\text{sen}\,\theta - y'\cos\theta) + F = 0$$

y simplificando, descubrimos que la ecuación resultante puede escribirse así:

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{6}$$

Los coeficientes A', B', C', D', E' y F' dependen de A, B, C, D, E y F y de sen θ, cos θ. En particular, el coeficiente del término $x'y'$ en (6) es:

$$B' = 2(C - A)\text{sen}\,\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)$$

Por tanto, para eliminar el término $x'y'$ en (6), seleccionamos cualquier ángulo θ, de modo que $B' = 0$, es decir,

$$2(C - A)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) = 0$$

Véanse (14) y (15) en la sección 9.4.

Por las fórmulas del doble ángulo de las funciones seno y coseno, la última ecuación es equivalente a

$$(C - A)\text{sen}\,2\theta + B\cos 2\theta = 0 \qquad \text{o} \qquad \cot 2\theta = \frac{A - C}{B}.$$

Hemos comprobado el siguiente resultado.

Teorema 11.4.1 Eliminación del término xy

El término xy se puede eliminar de la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $B \neq 0$, por medio de la rotación de ejes a través de un ángulo θ que satisface

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}. \tag{7}$$

Aunque la ecuación (7) tiene un número infinito de soluciones, basta tomar una solución tal que $0° < \theta < 90°$. Esta inecuación proviene de los tres casos:

- Si $\cot 2\theta = 0$, entonces $2\theta = 90°$ y, por tanto, $\theta = 45°$.
- Si $\cot 2\theta > 0$, entonces tomamos $0° < 2\theta < 90°$ o $0° < \theta < 45°$.
- Si $\cot 2\theta < 0$, entonces $90° < 2\theta < 180°$ o $45° < \theta < 90°$.

EJEMPLO 2 Una ecuación $x'y'$

La ecuación sencilla $xy = 1$ se puede escribir en términos de x' y y' sin el producto xy. Cuando comparamos $xy = 1$ con la ecuación (1), nos damos cuenta de que $A = 0$, $C = 0$ y $B = 1$. Por tanto, (7) muestra que $\cot 2\theta = 0$. Con $\theta = 45°$, $\cos 45° = \text{sen}\,45° = \sqrt{2}/2$, las ecuaciones de rotación en (5) se convierten en

$$x = x'\cos 45° - y'\text{sen}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$
$$y = x'\text{sen}\,45° + y'\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Sustituyendo x y y por estas expresiones en $xy = 1$, obtenemos

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = 1$$

o

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1.$$

Reconocemos ésta como la ecuación estándar de una hipérbola con vértices en el eje x' en los puntos $x'y'$ $(\pm\sqrt{2}, 0)$. Las asíntotas de la hipérbola son $y' = x'$ y $y' = x'$ (que son simplemente los ejes originales x y y; **FIGURA 11.4.3**). ≡

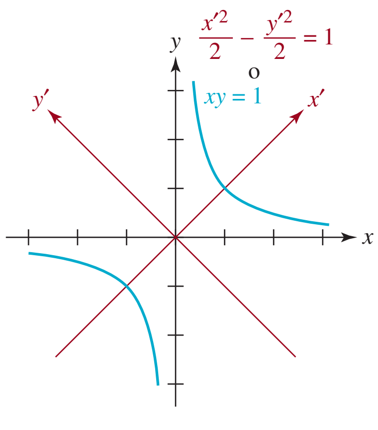


FIGURA 11.4.3 Rotación de ejes del ejemplo 2

De hecho no tenemos que determinar el valor de θ si simplemente deseamos obtener una ecuación $x'y'$ para identificar la sección cónica. Cuando $\cot 2\theta \neq 0$, es evidente que para usar (5) sólo necesitamos conocer tanto $\operatorname{sen}\theta$ como $\cos\theta$. Para ello, usamos el valor de $\cot 2\theta$ para hallar el valor de $\cos 2\theta$ y luego usar las fórmulas del medio ángulo

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \qquad \text{y} \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}. \tag{8}$$

Sin embargo, si deseamos trazar la sección cónica, entonces necesitamos obtener θ para determinar la posición de los ejes x' y y'. El siguiente ejemplo ilustra estas ideas.

EJEMPLO 3 Eliminación del término xy

Después de una rotación conveniente de ejes, identifique y trace la gráfica de

$$5x^2 + 3xy + y^2 = 44$$

Solución Con $A = 5$, $B = 3$ y $C = 1$, (7) muestra que el ángulo de rotación deseado satisface

$$\cot 2\theta = \frac{5-1}{3} = \frac{4}{3}. \tag{9}$$

Por la explicación posterior a (7), y como $\cot 2\theta$ es positivo, podemos elegir 2θ tal que $0 < \theta < 45°$. Por la identidad $1 + \cot^2 2\theta = \csc^2 2\theta$, obtenemos $\csc 2\theta = \frac{5}{3}$ y, por tanto, $2\theta = \frac{3}{5}$. Entonces, $\cot 2\theta = \cos 2\theta/\operatorname{sen} 2\theta = \frac{4}{3}$ produce $\cos 2\theta = \frac{4}{5}$. Ahora, por las fórmulas del medio ángulo en (8), obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \cos\theta &= \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Así, las ecuaciones en (5) se convierten en

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{\sqrt{10}}x' - \frac{1}{\sqrt{10}}y' = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' - y') \\ y &= \frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y' = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y'). \end{aligned}$$

Las sustituimos en la ecuación dada y tenemos

$$\begin{aligned} 5\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2(3x'-y')^2 + 3\frac{1}{\sqrt{10}}(3x'-y')\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(x'+3y') + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2(x'+3y')^2 &= 44 \\ \frac{5}{10}(9x'^2 - 6x'y' + y'^2) + \frac{3}{10}(3x'^2 + 8x'y' - 3y'^2) + \frac{1}{10}(x'^2 + 6x'y' + 9y'^2) &= 44 \\ 45x'^2 - 30x'y' + 5y'^2 + 9x'^2 + 24x'y' - 9y'^2 + x'^2 + 6x'y' + 9y'^2 &= 440. \end{aligned}$$

La última ecuación se simplifica a

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{88} = 1. \tag{11}$$

Reconocemos ésta como la ecuación normal de una elipse. Ahora, por (10), tenemos $\operatorname{sen}\theta = 1/\sqrt{10}$ y, por tanto, con la ayuda de una calculadora, obtenemos $\theta \approx 18.4°$. Este ángulo de rotación se muestra en la **FIGURA 11.4.4** y usamos los nuevos ejes para trazar la elipse. ≡

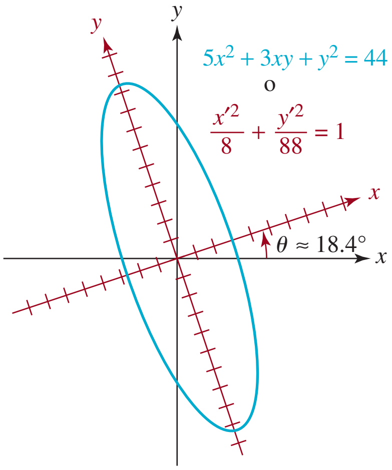


FIGURA 11.4.4 Rotación de ejes del ejemplo 3

No se deje engañar por los últimos dos ejemplos. Después de usar las ecuaciones de rotación en (5), la sección cónica puede no ser identificable de inmediato sin cierto trabajo adicional. Por ejemplo, después de una rotación apropiada de los ejes, la ecuación

$$11x^2 + 16\sqrt{2}xy + 19y^2 - 24\sqrt{3}x - 24\sqrt{6}y + 45 = 0 \tag{12}$$

se transforma en

$$9x'^2 - 24x' + y'^2 + 15 = 0$$

Después de completar el cuadrado en x', $(3x' - 4)^2 + y'^2 = 1$, reconocemos que la ecuación (12) define una elipse.

Identificación de secciones cónicas sin rotación Sólo por debatir, si simplemente quisiéramos identificar una sección cónica definida por una ecuación de la forma dada en (1), podríamos hacerlo examinando los coeficientes. Lo único que necesitamos calcular es el **discriminante** $B^2 - 4AC$ de la ecuación.

Teorema 11.4.2 Identificación de secciones cónicas

Excluyendo los casos degenerados, la gráfica de la ecuación de segundo grado (1) es

i) una **parábola** cuando $B^2 - 4AC = 0$
ii) una **elipse** cuando $B^2 - 4AC < 0$
iii) una **hipérbola** cuando $B^2 - 4AC > 0$

EJEMPLO 4 Identificación

Identifique la sección cónica definida por la ecuación dada.

a) $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 2x - 3y = 0$
b) $3x^2 - 5y^2 + 8x - y + 2 = 0$

Solución ***a***) Con $A = 9$, $B = 12$, $C = 4$, el discriminante

$$B^2 - 4AC = (12)^2 - 4(9)(4) = 144 - 144 = 0$$

indica que la ecuación define una parábola.

b) Con $A = 3$, $B = 0$, $C = -5$, el discriminante es

$$B^2 - 4AC = (0)^2 - 4(3)(-5) = 60 > 0$$

La ecuación define una hipérbola. ≡

11.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-29.

En los problemas 1 a 4, use (4) para hallar las coordenadas $x'y'$ del punto xy dado. Use el ángulo de rotación especificado θ.

1. $(6, 2)$, $\theta = 45°$

2. $(-2, 8)$, $\theta = 30°$

3. $(-1, -1)$, $\theta = 60°$

4. $(5, 3)$, $\theta = 15°$

En los problemas 5 a 10, use (5) para hallar las coordenadas xy del punto $x'y'$ dado. Use el ángulo de rotación especificado θ.

5. $(2, -8)$, $\theta = 30°$

6. $(-5, 7)$, $\theta = 45°$

7. $(0, 4)$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

8. $(3, 0), \theta = \dfrac{\pi}{3}$

9. $(4, 6), \theta = 15°$

10. $(1, 1), \theta = 75°$

En los problemas 11 a 16, use la rotación de ejes para eliminar el término xy en la ecuación dada. Identifique la sección cónica y la gráfica.

11. $x^2 + xy + y^2 = 4$

12. $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 5$

13. $x^2 - 2xy + y^2 = 8x + 8y$

14. $x^2 + 4xy = 16$

15. $x^2 + 4xy - 2y^2 - 6 = 0$

16. $x^2 + 4xy + 4y^2 = 16\sqrt{5}x - 8\sqrt{5}y$

En los problemas 17 a 20, use la rotación de ejes para eliminar el término xy en la ecuación dada. Identifique la sección cónica.

17. $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$

18. $-x^2 + 6\sqrt{3}xy + 5y^2 - 8\sqrt{3}x + 8y = 12$

19. $8x^2 - 8xy + 2y^2 + 10\sqrt{5}x = 5$

20. $x^2 - xy + y^2 - 4x - 4y = 20$

21. Dada la ecuación $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 2x - 2\sqrt{3}y = 0$,
    a) Por rotación de ejes muestre que la gráfica de la ecuación es una parábola.
    b) Obtenga las coordenadas $x'y'$ del foco. Use esta información para hallar las coordenadas xy del foco.
    c) Obtenga una ecuación de la directriz en términos de las coordenadas $x'y'$. Use esta información para hallar una ecuación de la directriz en términos de las coordenadas xy.

22. Dada la ecuación $13x^2 - 8xy + 7y^2 = 30$.
    a) Por rotación de ejes muestre que la gráfica de la ecuación es una elipse.
    b) Obtenga las coordenadas $x'y'$ de los focos. Use esta información para hallar las coordenadas xy de los focos.
    c) Obtenga las coordenadas xy de los vértices.

En los problemas 23 a 28, use el discriminante para determinar el tipo de gráfica sin dibujarla.

23. $x^2 - 3xy + y^2 = 5$

24. $2x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$

25. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6 = 0$

26. $x^2 + \sqrt{3}xy - \frac{1}{2}y^2 = 0$

27. $x^2 + xy + y^2 - x + 2y + 1 = 0$

28. $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y - 4 = 0$

Para la discusión

29. En (2), demuestre que si A y C tienen el mismo signo, entonces la gráfica de la ecuación es ya sea una elipse, un círculo o un punto, o no existe. Dé un ejemplo de cada tipo de ecuación.

30. En (2), demuestre que si A y C tienen signos opuestos, entonces la gráfica de la ecuación es ya sea una hipérbola o un par de líneas que se cortan. Dé un ejemplo de cada tipo de ecuación.

31. En (2), demuestre que si $A = 0$ o $C = 0$, la gráfica de la ecuación es ya sea una parábola, dos rectas paralelas, una recta, o no existe. Dé un ejemplo de cada tipo de ecuación.

32. *a*) Use la **FIGURA 11.4.5** para demostrar que

$$x = r\cos\phi,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\phi$$

y

$$x' = r\cos(\phi - \theta),\ y' = r\,\mathrm{sen}\,(\phi - \theta)$$

b) Use los resultados del inciso *a*) para obtener las ecuaciones de rotación en (4).
c) Use (4) para hallar las ecuaciones de rotación en (5).

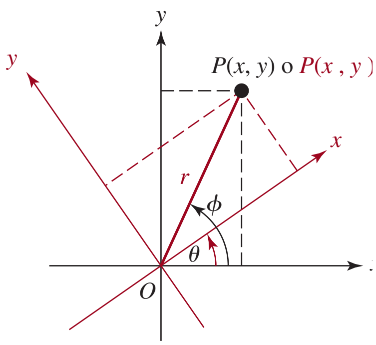


FIGURA 11.4.5 Rotación de ejes del problema 32

11.5 Ecuaciones paramétricas

Introducción Las ecuaciones rectangulares y las polares no son las únicas, y con frecuencia no las más convenientes, para describir curvas en el plano coordenado. En esta sección expondremos una forma distinta de representar una curva que es importante en muchas aplicaciones de cálculo. Veamos un ejemplo. El movimiento de una partícula a lo largo de una curva, en contraste con a lo largo de una recta, se llama *movimiento curvilíneo*. Si se supone que una pelota de golf es golpeada desde el suelo, perfectamente en línea recta (sin curva ni efecto) y que su trayectoria permanece en un plano de coordenadas como el que se ve en la **FIGURA 11.5.1**, entonces, con ayuda de la física y del cálculo se puede demostrar que sus coordenadas x y y, en el momento t, se definen por

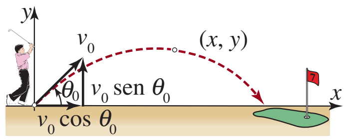


FIGURA 11.5.1 ¡Cuidado!

$$x = (v_0 \cos\theta_0)t, \qquad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t, \tag{1}$$

en donde θ_0 es el ángulo de lanzamiento, v_0 es la velocidad inicial y $g = 32$ pies/s^2 es la aceleración de la gravedad. Esas ecuaciones, que describen la posición de la pelota de golf en el plano coordenado cuando el tiempo es t, se llaman **ecuaciones paramétricas**. La tercera variable t en (1) se llama **parámetro** y se restringe a cierto intervalo $0 \leq t \leq T$, donde $t = 0$ define al origen $(0, 0)$ y $t = T$ es el momento en el que la pelota llega al suelo.

En general, una curva en un plano coordenado se puede *definir* en términos de ecuaciones paramétricas.

Definición 11.5.1 Curva plana

Una **curva plana**, o **curva en el plano**, es un conjunto C de pares ordenados $(f(t), g(t))$, donde f y g son funciones definidas en un intervalo común I. Las ecuaciones

$$x = f(t),\ y = g(t),\ \text{para } t \text{ en } I,$$

se llaman **ecuaciones paramétricas** de C. La variable t se llama **parámetro**.

También se acostumbra llamar **parametrización** de C a $x = f(t)$, $y = g(t)$ para t en I.

La **gráfica** de una curva plana C es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado que corresponden a los pares ordenados $(f(t), g(t))$. En adelante, llamaremos **curva** o **curva parametrizada** a una curva plana.

EJEMPLO 1 Gráfica de una curva paramétrica

Graficar la curva C que tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2, \qquad y = t^3, \qquad -1 \leq t \leq 2.$$

Solución Como se observa en la tabla de abajo, para cualquier elección de t en el intervalo $[-1, 2]$, se obtiene un solo par ordenado (x, y). Al unir los puntos con una curva se obtiene la gráfica de la **FIGURA 11.5.2**.

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4
y	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8

≡

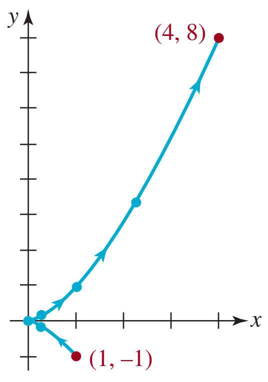


FIGURA 11.5.2 Curva del ejemplo 1

En el ejemplo 1, al pensar en términos de movimiento y t como tiempo, cuando aumenta t de -1 a 2, un punto P definido como (t^2, t^3) parte de $(1, -1)$, avanza subiendo por la rama inferior hasta el origen $(0, 0)$, pasa a la rama superior y por último se detiene en $(4, 8)$. En general, al graficar puntos correspondientes a *valores crecientes* del parámetro, la curva C es recorrida por $(f(t), g(t))$ en cierta *dirección* indicada por las flechas de la curva de la figura 11.5.2. A esta dirección se le llama **orientación** de la curva C.

No es necesario que un parámetro esté relacionado con el tiempo. Cuando el intervalo I dentro del cual f y g en (1) están definidos es un intervalo cerrado $[a, b]$, decimos que $(f(a), g(a))$ es el **punto inicial** de la curva C, y que $(f(b), g(b))$ es el **punto terminal**. En el ejemplo 1, el punto inicial es $(1, -1)$ y el punto terminal es $(4, 8)$. Si el punto terminal es el mismo que el punto inicial, esto es,

$$(f(a), g(a)) = (f(b), g(b))$$

entonces C es una **curva cerrada**. Si C es cerrada pero no se interseca consigo mismo se llama **curva cerrada simple**. En la **FIGURA 11.5.3**, A y B representan los puntos inicial y terminal, respectivamente.

a) Curva plana *b*) Curva cerrada simple *c*) Curva cerrada, pero no simple

FIGURA 11.5.3 Algunas curvas planas

El siguiente ejemplo ilustra una curva cerrada simple.

EJEMPLO 2 Parametrización de un círculo

Definir una parametrización del círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

Solución El círculo tiene centro en el origen y su radio es a. Si t representa el ángulo central, es decir, el ángulo con vértice en el origen y lado inicial coincidente con el eje x positivo, entonces, como se ve en la **FIGURA 11.5.4**, las ecuaciones

$$x = a\cos t, \qquad y = a\operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi \tag{2}$$

definen cada punto P en el círculo. Por ejemplo, cuando $t = 0$, se obtiene $x = a$ y $y = 0$; en otras palabras, el punto inicial es $(a, 0)$. El punto terminal corresponde a $t = 2\pi$, y también es $(a, 0)$. Como los puntos inicial y terminal son iguales, se demuestra lo que es obvio: que la curva C definida por las ecuaciones paramétricas (2) es una curva cerrada. Observe la orientación de C en la figura 11.5.4: cuando t aumenta de 0 a 2π, el punto P describe a C en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. ≡

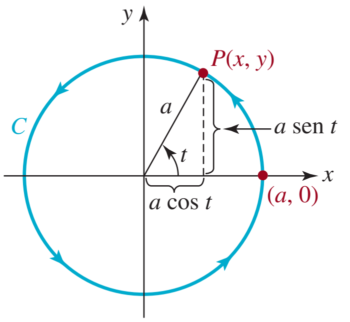


FIGURA 11.5.4 Círculo del ejemplo 2

En el ejemplo 2, el *semicírculo* superior $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \le y \le a$, se define en forma paramétrica restringiendo el intervalo del parámetro a $[0, \pi]$,

$$x = a\cos t, \qquad y = a\operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Observe que cuando $t = \pi$, el punto terminal es ahora $(-a, 0)$. Por otra parte, si se desean describir *dos* revoluciones completas en sentido contrario al de las manecillas del reloj en torno al círculo, de nuevo se modifica el intervalo del parámetro escribiendo

$$x = a\cos t, \qquad y = a\operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 4\pi.$$

Eliminación del parámetro Dado un conjunto de ecuaciones paramétricas, a veces se desea eliminar o simplificar el parámetro para obtener la ecuación rectangular de la curva. No hay un método bien definido para eliminar el parámetro; el método depende de las ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, para eliminar el parámetro en (2) tan sólo se elevan al cuadrado x y y y se suman las dos ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\operatorname{sen}^2 t \qquad \text{implica que} \qquad x^2 + y^2 = a^2$$

porque $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. En el ejemplo que sigue ilustramos un método de sustitución.

EJEMPLO 3 Eliminación del parámetro

a) De la primera ecuación en (1), podemos despejar t en términos de x, $t = x/(v_0\cos\theta_0)$. Esta expresión se sustituye en la segunda ecuación y entonces se obtiene

$$y = -\frac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}x^2 + (\tan\theta_0)x.$$

Ya que v_0, θ_0 y g son constantes, la última ecuación tiene la forma $y = ax^2 + bx$ y entonces, la trayectoria de todo proyectil lanzado con el ángulo $0 < \theta_0 < \pi/2$ es un arco parabólico.

b) En el ejemplo 1 se puede eliminar el parámetro despejando t de la segunda ecuación, en función de y para después sustituir en la primera ecuación. Se ve que

$$t = y^{1/3} \qquad \text{y así} \qquad x = (y^{1/3})^2 = y^{2/3}.$$

La curva de la figura 11.5.2 sólo es una parte de la gráfica de $x = y^{2/3}$. Para $-1 \le t \le 2$, se tiene que $-1 \le y \le 8$. Entonces, la ecuación rectangular de la curva del ejemplo 1 es $x = y^{2/3}$, $-1 \le y \le 8$. ≡

Una curva C puede tener muchas parametrizaciones diferentes.

Una curva C puede tener más de una parametrización. Por ejemplo, una parametrización alternativa del círculo del ejemplo 2 es

$$x = a\cos 2t, \qquad y = a\operatorname{sen} 2t, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Nótese que el intervalo del parámetro es ahora $[0, \pi]$. Se ve que cuando t aumenta de 0 a π, el nuevo ángulo $2t$ aumenta de 0 a 2π.

EJEMPLO 4 Parametrizaciones alternativas

a) Se tiene la curva C, cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t$, $y = 2t^2$, $-\infty < t < \infty$. Se puede eliminar el parámetro usando $t = x$, y sustituyendo en $y = 2t^2$. De ese modo se obtiene la ecuación rectangular $y = 2x^2$, en la que reconocemos una parábola. Además, como $-\infty < t < \infty$ equivale a $-\infty < x < \infty$, el punto $(t, 2t^2)$ describe la parábola completa $y = 2x^2$, $-\infty < x < \infty$.

b) Una parametrización alternativa de C se obtiene con $x = t^3/4$, $y = t^6/8$, $-\infty < t < \infty$. Si se usa $t^3 = 4x$ y se sustituye en $y = t^6/8$, o $y = (t^3 \cdot t^3)/8$ se obtiene $y = ((4x)^2/8) = 2x^2$. Además, $-\infty < t < \infty$ implica que $-\infty < t^3 < \infty$, y así $-\infty < x < \infty$. ≡

Note en el ejemplo 4 que un punto en C no necesita corresponder al mismo valor del parámetro en cada conjunto de ecuaciones paramétricas de C. Por ejemplo, se obtiene $(1, 2)$ para $t = 1$ en $x = t$, $y = 2t^2$, pero $t = \sqrt[3]{4}$ produce $(1, 2)$ en $x = t^3/4$, $y = t^6/8$.

EJEMPLO 5 Regreso al ejemplo 4

Proceda con precaución cuando elimine el parámetro.

Se debe tener cuidado al trabajar con ecuaciones paramétricas. Parecería que la eliminación del parámetro en $x = t^2$, $y = 2t^4$, $-\infty < t < \infty$ llegaría a la misma parábola $y = 2x^2$ que en el ejemplo 4. Sin embargo *no* es así, porque para todo valor de t que satisface $-\infty < t\ \infty$, tenemos que $t^2 \geq 0$ y entonces $x \geq 0$. En otras palabras, el último conjunto de ecuaciones es una representación paramétrica sólo de la rama derecha de la parábola, esto es, $y = 2x^2$, $0 \leq x < \infty$. ≡

EJEMPLO 6 Eliminación del parámetro

Se tiene la curva C, definida paramétricamente por

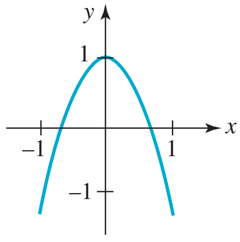
$$x = \operatorname{sen} t, \qquad y = \cos 2t, \qquad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Eliminar el parámetro y obtener una ecuación rectangular de C.

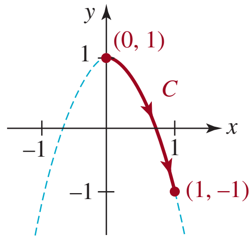
Solución Se aplica la fórmula de ángulo doble, $\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$, y se puede escribir que

$$\begin{aligned} y &= \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t \\ &= (1 - \operatorname{sen}^2 t) - \operatorname{sen}^2 t \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 t \qquad \leftarrow \text{sustituir } \operatorname{sen} t = x \\ &= 1 - 2x^2. \end{aligned}$$

Ahora la curva C descrita por las ecuaciones paramétricas no consiste en la parábola completa; esto es, $y = 1 - 2x^2$, $-\infty < x < \infty$. Véase la **FIGURA 11.5.5*a*)**. Para $0 \leq t \leq \pi/2$ sucede que $0 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$, y $-1 \leq \cos 2t \leq 1$. Eso quiere decir que C sólo es la porción de la parábola para la cual las coordenadas de un punto $P(x, y)$ satisfacen $0 \leq x \leq 1$ *y también* $-1 \leq y \leq 1$. La curva C, con su orientación, se ve en la figura 11.5.5*b*). Una ecuación rectangular de C es $y = 1 - 2x^2$, con el dominio restringido $0 \leq x \leq 1$. ≡



a) $y = 1 - 2x^2$

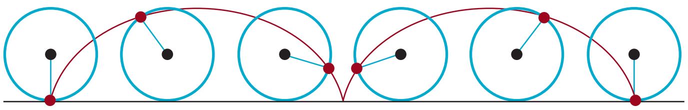


b) $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos 2t$, $0 \leq t \leq \pi/2$

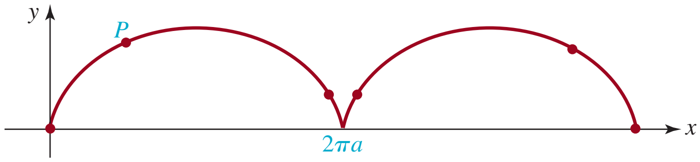
FIGURA 11.5.5 Curva C del ejemplo 6

Intersecciones Se obtienen las intersecciones con los ejes coordenados de una curva C sin determinar su ecuación rectangular. En el ejemplo 6 se puede determinar la intersección con el eje x encontrando el valor de t en el intervalo del parámetro para el cual $y = 0$. La ecuación $\cos 2t = 0$ da como resultado $2t = \pi/2$, así que $t = \pi/4$. El punto correspondiente donde C interseca el eje x es $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$. De igual manera, la intersección con el eje y de C se determina resolviendo $x = 0$. De $\operatorname{sen} t = 0$ se ve de inmediato que $t = 0$ y entonces la intersección con el eje y está en $(0, 1)$.

Aplicaciones de las ecuaciones paramétricas En el siglo XVII, las curvas cicloidales fueron un tema de estudio difundido entre los matemáticos. Suponga que un punto $P(x, y)$ marcado en un círculo de radio a, está en el origen cuando su diámetro está a lo largo del eje y. Cuando el círculo rueda por el eje x, el punto P describe una curva C llamada **cicloide**. Véase la **FIGURA 11.5.6**.*



a) Círculo que rueda en el eje x



b) En el círculo, el punto P traza esta curva

FIGURA 11.5.6 La curva de rojo es un cicloide

* Se puede ver una animación del círculo rodante en http://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html.

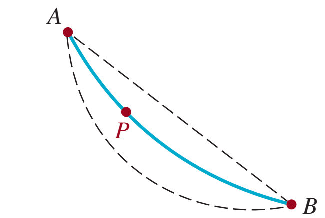


FIGURA 11.5.7 Cuenta deslizante

También en el siglo XVII se estudiaron extensamente dos problemas. Imagine un alambre flexible y sin fricción fijo en los puntos A y B, y una cuenta libre que resbala por el alambre a partir de P. Véase la **FIGURA 11.5.7**. ¿Hay alguna forma en particular del alambre para la cual, independientemente de dónde parta la cuenta, el tiempo para resbalar por el alambre hasta B sea el mismo? También, ¿cuál sería la forma del alambre para que la cuenta resbale de P a B en el tiempo más corto? Se demostró que las curvas llamadas **tautócrona** (igual tiempo) y **braquistócrona** (tiempo mínimo) son un medio arco de cicloide invertida.

EJEMPLO 7 Parametrización de una cicloide

Definir una parametrización de la cicloide de la figura 11.5.6*b*).

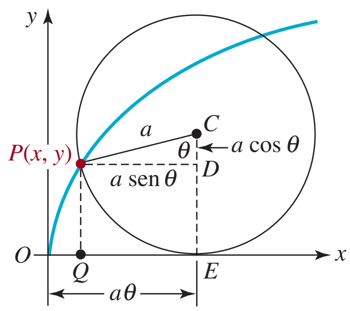


FIGURA 11.5.8. El ángulo θ es el parámetro para la cicloide

Solución Un círculo de radio a cuyo diámetro esté inicialmente a lo largo del eje y rueda por el eje x sin resbalar. Tomaremos como parámetro el ángulo θ (en radianes) que ha rodado por el círculo. El punto $P(x, y)$ comienza en el origen, que corresponde a $\theta = 0$. A medida que el círculo rueda el ángulo θ, su distancia al origen es el arco $PE = \overline{OE} = a\theta$. Entonces, se ve en la **FIGURA 11.5.8** que la intersección con el eje x de P es

$$x = \overline{OE} - \overline{QE} = a\theta - a\operatorname{sen}\theta.$$

Entonces, se ve que la ordenada y de P es

$$y = \overline{CE} - \overline{CD} = a - a\cos\theta.$$

Por lo anterior, las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$x = a\theta - a\operatorname{sen}\theta, \qquad y = a - a\cos\theta.$$

Como se ve en la figura 11.5.6*a*), un arco de una cicloide se genera por una rotación del círculo, y corresponde al intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ del parámetro. ≡

Parametrización de curvas rectangulares y polares Una curva C descrita por una función continua $y = f(x)$ siempre se puede parametrizar haciendo que $x = t$. Entonces, las ecuaciones paramétricas de C son

$$x = t, \qquad y = f(t). \tag{3}$$

EJEMPLO 8 Parametrización de una curva rectangular

Obtenga una parametrización de $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

Solución Si $x = t$, entonces una parametrización de la curva definida por f es

$$x = t, \quad y = \sqrt{t - 1}, \quad t \geq 1.$$

Solución alternativa Una curva puede tener muchas parametrizaciones. Si $x - 1 = t$, entonces otra parametrización de la curva definida por f es

$$x = t + 1, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \geq 0.$$ ≡

Notas del aula

En esta sección nos hemos concentrado en las **curvas planas**, que son curvas C definidas paramétricamente en dos dimensiones. En el cálculo de varias variables se verán curvas y superficies en tres dimensiones, que se definen mediante ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, una **curva en el espacio** C consiste en un conjunto de tripletas ordenadas $(f(t), g(t), h(t))$, donde f, g y h están definidas en un intervalo común. Las ecuaciones paramétricas de C son $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$. Por ejemplo, una **hélice circular** como la de la **FIGURA 11.5.9** es una curva en el espacio cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = a\cos t, \quad y = a\cos t, \quad z = bt, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Se pueden representar superficies en tres dimensiones con un conjunto de ecuaciones paramétricas que contengan *dos* parámetros, $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$. Por ejemplo, la **helicoide circular** de la **FIGURA 11.5.10** se presenta en el estudio de superficies mínimas, y se define con el conjunto de ecuaciones paramétricas parecido a las de (4):

$$x = u\cos v, \quad y = u\,\mathrm{sen}\, v, \quad z = bv,$$

en donde b es una constante. La helicoide circular tiene una hélice circular como contorno. El lector podría reconocer que la helicoide es el modelo de un gusano en maquinaria como excavadoras de agujeros, taladradora de hielo, transportadores de sólidos a granel, etcétera.

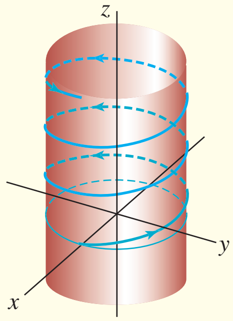


FIGURA 11.5.9 Hélice circular

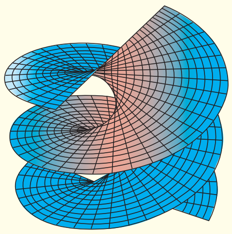
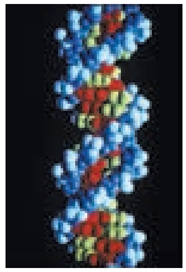
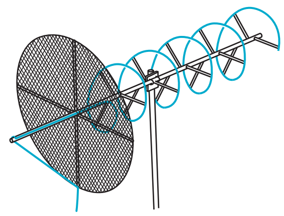


FIGURA 11.5.10 Helicoide circular



El ADN es una doble hélice



Antena helicoidal

11.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-30.

En los problemas 1 y 2 llene la tabla para el conjunto de ecuaciones paramétricas indicado. Determine las coordenadas de la intersección con los ejes x y y. Trace la curva e indique su orientación.

1. $x = t + 2, y = 3 + \frac{1}{2}t, \quad -\infty < t < \infty$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x							
y							

2. $x = 2t + 1, y = t^2 + t, \quad -\infty < t < \infty$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x							
y							

En los problemas 3 a 10, trace la curva que tenga el conjunto de ecuaciones paramétricas indicadas.

3. $x = t - 1, y = 2t - 1, \quad -1 \leq t \leq 5$

4. $x = t^2 - 1, y = 3t, \quad -2 \leq t \leq 3$

5. $x = \sqrt{t}, y = 5 - t, \quad t \geq 0$

6. $x = t^3 + 1, y = t^2 - 1, \quad -2 \leq t \leq 2$

7. $x = 3 \cos t, y = 5 \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

8. $x = 3 + 2 \operatorname{sen} t, y = 4 + \operatorname{sen} t, \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

9. $x = e^t, y = e^{3t}, \quad 0 \leq t \leq \ln 2$

10. $x = -e^t, y = e^{-t}, \quad t \geq 0$

En los problemas 11 a 18, elimine el parámetro del conjunto indicado de ecuaciones paramétricas, y obtenga una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica.

11. $x = t^2, y = t^4 + 3t^2 - 1$

12. $x = t^3 + t + 4, y = -2(t^3 + t)$

13. $x = \cos 2t, y = \operatorname{sen} t, \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

14. $x = e^t, y = \ln t, \quad t > 0$

15. $x = t^3, y = 3 \ln t, \quad t > 0$

16. $x = \tan t, y = \sec t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

17. $x = 4 \cos t, y = 2 \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

18. $x = -1 + \cos t, y = 2 + \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

En los problemas 19 a 24, indique gráficamente la diferencia entre las curvas indicadas.

19. $y = x$ y $x = \operatorname{sen} t, y = \operatorname{sen} t$

20. $y = x^2$ y $x = -\sqrt{t}, y = t$

21. $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ y $x = 2t, y = t^2 - 1, \quad -1 \leq t \leq 2$

22. $y = -x^2$, y $x = e^t, y = -e^{2t}, \quad t \geq 0$

23. $x^2 - y^2 = 1$ y $x = \cosh t, y = \operatorname{senh} t$ ← Vea (2) y (3) en la sección 7.5

24. $y = 2x - 2$ y $x = t^2 - 1, y = 2t^2 - 4$

En los problemas 25 a 28, indique gráficamente la diferencia entre las curvas dadas. Suponga que $a > 0$ y $b > 0$.

25. $x = a \cos t, y = a \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq \pi$
$x = a \operatorname{sen} t, y = a \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

26. $x = a \cos t, y = b \operatorname{sen} t, \quad a > b, \quad \pi \leq t \leq 2\pi$
$x = a \operatorname{sen} t, y = b \cos t, \quad a > b, \quad \pi \leq t \leq 2\pi$

27. $x = a \cos t, y = a \operatorname{sen} t, \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$
$x = a \cos 2t, y = a \operatorname{sen} 2t, \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

28. $x = a \cos\frac{t}{2}, y = a \operatorname{sen}\frac{t}{2}, \quad 0 \leq t \leq \pi$

$$x = a \cos\left(-\frac{t}{2}\right), y = a \operatorname{sen}\left(-\frac{t}{2}\right), \quad -\pi \leq t \leq 0$$

En los problemas 29 y 30, determine las intersecciones de las curvas con los ejes x y y.

29. $x = t^2 - 2t, y = t + 1, \quad -2 \leq t < 4$

30. $x = t^2 + t, y = t^2 + t - 6, \quad -5 \leq t < 5$

31. Demuestre que las ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad -\infty < t < \infty.$$

¿Qué representan esas ecuaciones cuando $0 \leq t \leq 1$?

32. ***a***) Use el resultado del problema 31 para deducir ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(-2, 5)$ y $(4, 8)$.
b) Elimine el parámetro del inciso *a*) para obtener la ecuación rectangular de la recta.
c) Encuentre las ecuaciones paramétricas del segmento de recta cuyo punto inicial es $(-2, 5)$ y punto terminal $(4, 8)$.

33. Un golfista famoso puede generar una velocidad aproximada de 130 mi/h o sea $v_0 = 190$ pies/s en la cabeza del palo. Si la pelota sale del suelo en el ángulo $\theta_0 = 45°$, use (1) para deducir ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la pelota. ¿Cuáles son las coordenadas de la pelota cuando $t = 2$ s?

34. Use las ecuaciones paramétricas que obtuvo en el problema 33 para determinar
a) cuánto tiempo dura la pelota en el aire,
b) su altura máxima y
c) la distancia horizontal que recorre la pelota.

35. Como se ve en la **FIGURA 11.5.11**, un pistón se fija, mediante una biela de longitud L, a un mecanismo de cigüeñal de radio r. Parametrice las coordenadas del punto P en función del ángulo ϕ que muestra la figura.

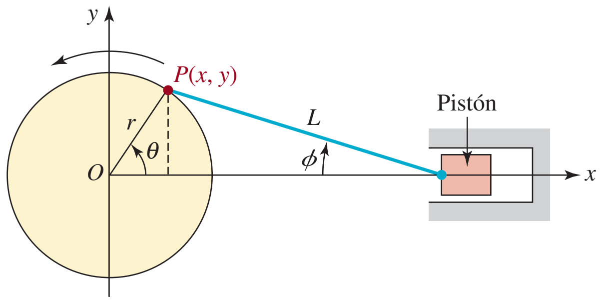


FIGURA 11.5.11 Mecanismo de cigüeñal del problema 35

36. Imagine un círculo de radio a, tangente al eje x en el origen. Sea B un punto en la recta horizontal $y = 2a$, y sea un segmento de recta OB que corte el círculo en el punto A. Como se ve en la **FIGURA 11.5.12**, la proyección de AB sobre la vertical define al segmento de recta BP. Use el ángulo θ de la figura como parámetro y deduzca las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por el punto P, cuando A varía alrededor del círculo. La curva, más históricamente famosa que útil, se llama **bruja de Agnesi**.*

≡ Problemas para calculadora o computadora

En los problemas 37 a 42 use una función de graficación para obtener la gráfica del conjunto de ecuaciones paramétricas indicadas.

37. $x = 4 \text{ sen } 2t,\ y = 2 \text{ sen } t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

38. $x = 6 \cos 3t,\ y = 4 \text{ sen } 2t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

39. $x = 6 \text{ sen } 4t,\ y = 4 \text{ sen } t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

40. $x = \cos t + t \text{ sen } t,\ y = \text{sen } t - t \cos t, \quad 0 \le t \le 3\pi$

41. $x = 4 \cos t - \cos 4t,\ y = 4 \text{ sen } t - \text{sen } 4t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

42. $x = \cos^3 t,\ y = \text{sen}^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

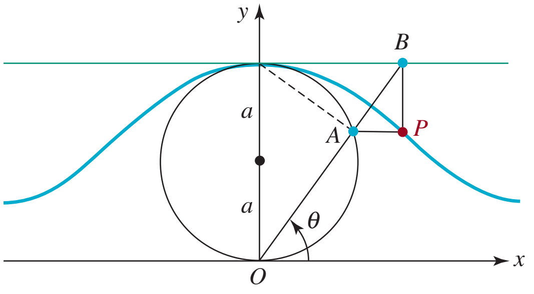


FIGURA 11.5.12 Bruja de Agnesi, del problema 36

* La curva no tiene nada que ver con brujas y duendes. Esta curva se llamó *versoria*, que en latín quiere decir cualquier clase de cuerda, y fue incluida en un texto de geometría analítica escrito por **Maria Agnesi**, matemática italiana, en 1748. Un traductor del texto confundió *versoria* con la palabra italiana *versiera*, que quiere decir *duende femenino*. En inglés, *duende femenino* se convirtió en *bruja*.

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Sección cónica
Parábola:
- foco
- directriz
- eje
- vértice

Elipse:
- focos
- centro
- eje mayor
- eje menor
- vértices

Hipérbola:
- focos
- centro
- brazos
- eje transversal
- vértices
- eje conjugado
- asíntotas

Excentricidad de una sección cónica
Forma normal de las ecuaciones
Rotación de ejes:
- ecuaciones de rotación

Discriminante
Curva plana
Ecuaciones paramétricas
Parámetro
Orientación de una curva
Curva cerrada
Curva cerrada simple
Eliminación del parámetro

CAPÍTULO 11 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-30.

≡ A. Verdadero/Falso

En los problemas 1 a 20 conteste verdadero o falso.

1. El eje de la parábola $x^2 = -4y$ es vertical. ________

2. Los focos de una elipse están situados en su gráfica. ________

3. La excentricidad de una parábola es $e = 0$. ________

4. El eje menor de una elipse biseca el eje mayor. ________

5. El punto $(-2, 5)$ está en la elipse $x^2/8 + y^2/50 = 1$. ________

6. Las gráficas de $y = x^2$ y $y^2 - x^2 = 1$ tienen cuando mucho dos puntos en común. ________

7. La excentricidad de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ es $\sqrt{2}$. ________

8. En una elipse, la longitud del eje mayor siempre es mayor que la del eje menor. _____

9. El vértice y el foco están en el eje de simetría de una parábola. ______

10. Las asíntotas de $(x-h)^2/a^2-(y-k)^2/b^2=1$ deben pasar por (h, k). _________

11. Una elipse con excentricidad $e=0.01$ es casi circular. ________

12. El eje transversal de la hipérbola $x^2/9-y^2/49=1$ es vertical. ______

13. Las dos hipérbolas $x^2-y^2/25=1$ y $y^2/25-x^2=1$ tienen el mismo par de asíntotas inclinadas. _______

14. La gráfica de la curva $x=t^2$, $y=t^4+1$, $-\infty<t<\infty$ es igual que la gráfica de $y=x^2+1$. ________

15. Si P es un punto en una parábola, la distancia perpendicular de P a la directriz es igual a la distancia de P al vértice. __________

16. La curva con ecuaciones paramétricas $x=1+\cos t$, $y=1+\operatorname{sen} t$, $0\le t\le 2\pi$, es un círculo de radio 1 centrado en $(1, 1)$.

17. La curva con ecuaciones paramétricas $x=e^t$, $y=e^t-5$, $-\infty<t<\infty$ es la misma que la gráfica de la ecuación rectangular $y=x-5$. ________

18. La curva con ecuaciones paramétricas $x=t^3-1$, $y=t^2+1$, $-\infty<t<\infty$ no tiene intersección con x. ________

19. La hipérbola $(x-1)^2-(y+1)^2=1$ no tiene intersecciones con y. ________

20. Los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas $x=\cos t$ y $y=\operatorname{sen} t$, $0\le t\le 2\pi$ y $x=\operatorname{sen} t$, $y=\cos t$, $0\le t\le 2\pi$ definen el mismo círculo. _______

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 20, llene los espacios en blanco.

1. La ecuación en la forma normal $y^2=4cx$ de una parábola con foco en $(5, 0)$ es______.

2. La ecuación en la forma normal $x^2=4cy$ de una parábola que pasa por $(2, 6)$ es______.

3. La ecuación rectangular de una parábola con foco en $(1, -3)$ y directriz $y=-7$ es _____.

4. La directriz y el vértice de una parábola son $x=-3$ y $(-1, -2)$, respectivamente. El foco de la parábola está en _________.

5. El foco y la directriz de una parábola son $(0, \frac{1}{4})$ y $y=-\frac{1}{4}$, respectivamente. El vértice de la parábola está en _______.

6. El vértice y el foco de la parábola $8(x+4)^2=y-2$ están en ________.

7. La excentricidad de una parábola es $e=$ _____.

8. El centro y los vértices de la elipse $\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y+5)^2}{4}=1$ están en ______.

9. El centro y los vértices de la hipérbola $y^2-\dfrac{(x+3)^2}{4}=1$ están en ________.

10. Las asíntotas oblicuas de la hipérbola $y^2-(x-1)^2=1$ son _________.

11. Las intersecciones con el eje y de la hipérbola $y^2-(x-1)^2=1$ están en _______.

12. La excentricidad de la hipérbola $x^2-y^2=1$ es ________.

13. Si la gráfica de una elipse es muy alargada, su excentricidad e es cercana a ____. (Escriba 0 o 1.)

14. El segmento de recta cuyos extremos tocan la hipérbola y que está situado en la recta que pasa por los focos se llama __________.

15. Las ecuacione $x=t+2$, $y=3+\frac{1}{2}t$, $-\infty<t<\infty$, son una representación paramétrica de un(a) ________.

16. El punto de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x=-4+2\cos t$, $y=2+\operatorname{sen} t$, $-\infty<t<\infty$, correspondiente a $t=5\pi/2$ está en ______.

17. Las intersecciones con el eje y de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x=t^2-4$, $y=t^3-3t$, $-\infty<t<\infty$ están en ________.

18. Puesto a que B^2-4AC _______ (llene el espacio con <0, $=0$, o >0), la sección cónica $3x^2-xy-y^2+1=0$ es una __________.

19. Las intersecciones con y de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x=t^2-4$, $y=t^3-3t$, $-\infty<t<\infty$, son ____________.

20. El centro de una hipérbola con asíntotas $y=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}$ y $y=\frac{5}{4}x+\frac{13}{2}$ es ____________.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 a 4, encuentre el vértice, foco, directriz y eje de la parábola dada. Trace la gráfica de la parábola.

1. $(y-3)^2=-8x$
2. $8(x+4)^2=y-2$
3. $x^2-2x+4y+1=0$
4. $y^2+10y+8x+41=0$

En los problemas 5 a 8, obtenga una ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

5. Foco $(1, 3)$, directriz $y=-7$.
6. Foco $(3, -1)$, vértice $(0, -1)$.
7. Vértice $(1, 2)$, eje vertical, pasa por $(4, 5)$.
8. Vértice $(-1, -4)$, directriz $x=2$.

En los problemas 9 a 12, obtenga el centro, los vértices y los focos de la elipse dada. Trace la gráfica de la elipse.

9. $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{(y+5)^2}{25} = 1$

10. $\dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y+5)^2}{4} = 1$

11. $4x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$

12. $5x^2 + 9y^2 - 20x + 54y + 56 = 0$

En los problemas 13 a 16, obtenga una ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones dadas.

13. Extremos del eje menor $(0, \pm 4)$, focos $(\pm 5, 0)$.

14. Focos $(2, -1 \pm \sqrt{2})$, un vértice $(2, -1 + \sqrt{6})$.

15. Vértices $(\pm 2, -2)$, pasa por $(1, -2 + \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

16. Centro $(2, 4)$, un foco $(2, 1)$, un vértice $(2, 0)$.

En los problemas 17 a 20, obtenga el centro, vértices, focos y asíntotas de la hipérbola dada. Trace la gráfica de la hipérbola.

17. $(x - 1)(x + 1) = y^2$

18. $y^2 - \dfrac{(x+3)^2}{4} = 1$

19. $9x^2 - y^2 - 54x - 2y + 71 = 0$

20. $16y^2 - 9x^2 - 64y - 80 = 0$

En los problemas 21 a 24, obtenga una ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas.

21. Centro $(0, 0)$, un vértice $(6, 0)$, un foco $(8, 0)$.

22. Focos $(2, \pm 3)$, un vértice $(2, -\frac{3}{2})$

23. Focos $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$.

24. Vértices $(-3, 2)$ y $(-3, 4)$, un foco $(-3, 3 + \sqrt{2})$.

En los problemas 25 y 26, ejecute la rotación de ejes que corresponda para que la ecuación $x'y'$ resultante no tenga el término $x'y'$. Trace la gráfica.

25. $xy = -8$.

26. $8x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$.

27. Obtenga una ecuación de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ cuando el centro se traslada al punto $(-5, 2)$.

28. Describa detalladamente las gráficas de las funciones dadas.

a) $f(x) = \sqrt{36 - 9x^2}$

b) $f(x) = -\sqrt{36 + 9x^2}$

29. Distancia de un satélite Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de Neptuno y el centro del planeta está situado en uno de los focos. Si la longitud del eje mayor de la órbita es de 2×10^9 m y la longitud del eje menor es de 6×10^8 m, obtenga la máxima distancia entre el satélite y el centro del planeta.

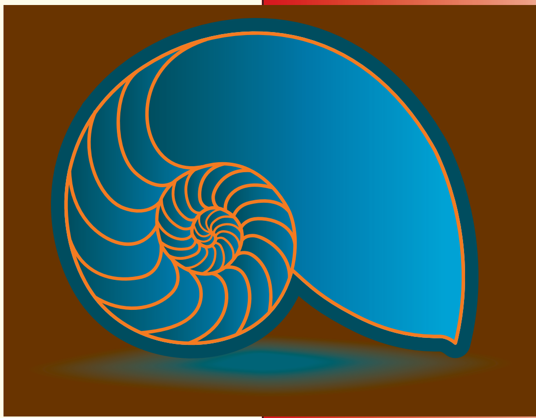
30. Un espejo parabólico tiene 7 cm de profundidad en su centro, y el diámetro es de 20 cm. Calcule la distancia del vértice al foco.

Espejo parabólico

COORDENADAS POLARES

12

En este capítulo



La vista transversal de un caracol muestra una aproximación de una curva llamada *espiral logarítmica*. Véase el problema 31 en los ejercicios 12.2.

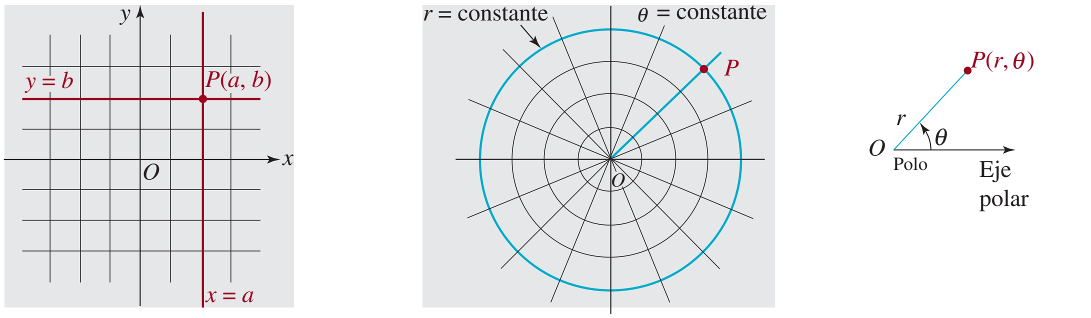
Un poco de historia El de coordenadas rectangulares o cartesianas es uno de los muchos sistemas de coordenadas que se han creado a través de los siglos para cumplir distintos propósitos. En aplicaciones matemáticas, un problema imposible de resolver con coordenadas rectangulares puede resolverse con un sistema de coordenadas diferentes. En este capítulo nuestra materia de estudio principal es el sistema de coordenadas polares: un sistema de coordenadas bidimensionales en el que los puntos se especifican por medio de la distancia respecto al origen y un ángulo medido desde el eje x positivo.

Aunque los rudimentos del concepto de coordenadas polares se remontan hasta los matemáticos griegos **Hiparco** (c. 190-120 a.C.) y **Arquímedes** (c. 287-212 a.C.), la introducción independiente de las coordenadas polares al acervo matemático del siglo XVII se atribuye a **Grégoire de Saint-Vincent** (1584-1667), sacerdote jesuita de origen belga, y a **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647), teólogo y matemático italiano. Sin embargo, fue el matemático italiano **Gregorio Fontana** (1735-1803) quien acuñó el término *coordenadas polares*. Este término apareció en inglés por primera vez en la traducción de 1816 que hizo el matemático inglés **George Peacock** (1791-1858) de la obra *Differential and Integral Calculus* escrita por el francés **Sylvestre François Lacroix** (1791-1858).

12.1 Coordenadas polares

Introducción Hasta ahora hemos usado el sistema de coordenadas rectangulares para especificar un punto P en el plano. Este sistema se puede considerar como una red de rectas horizontales y verticales. Las coordenadas (a, b) de un punto P se determinan por la intersección de dos rectas: una recta, $x = a$, es perpendicular a la recta horizontal de referencia llamada eje x, y la otra, $y = b$, es perpendicular a la recta vertical de referencia llamada eje y. Véase la **FIGURA 12.1.1*a*)**. Hay otro sistema para ubicar puntos en el plano, llamado **sistema de coordenadas polares**.

Terminología Para establecer un sistema de coordenadas polares se debe usar un sistema de círculos centrados en un punto O, llamado **polo** u origen, y líneas rectas o rayos, que emanen de O. Como eje de referencia se toma una semirrecta horizontal dirigida hacia la derecha del polo, que se llama **eje polar**. Si se especifica desde O una distancia dirigida (es decir, con signo) r, y un ángulo θ cuyo lado inicial sea el eje polar y cuyo lado terminal sea el rayo OP, el punto P quedará identificado por (r, θ). Se dice que el par ordenado (r, θ) son las **coordenadas polares** de P [figuras 12.1.1*b*) y 12.1.1*c*)].



a) Sistema de coordenadas rectangulares *b*) Sistema de coordenadas polares *c*) Coordenadas polares de P

FIGURA 12.1.1 Comparación de coordenadas rectangulares y polares de un punto P

Aunque la medida del ángulo θ puede expresarse en grados o en radianes, en cálculo se usan casi exclusivamente los radianes. En consecuencia, en las descripciones sólo se usarán medidas en radianes.

En el sistema de coordenadas polares adoptaremos las siguientes convenciones.

Definición 12.1.1 Convenciones sobre las coordenadas polares

i) Los ángulos $\theta > 0$ se miden en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del eje polar, mientras que los ángulos $\theta < 0$ se miden en sentido de las manecillas del reloj.

i) Para graficar un punto $(-r, \theta)$, donde $-r < 0$, se miden $|r|$ unidades a lo largo del rayo $\theta + \pi$.

iii) Las coordenadas del polo O son $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo.

EJEMPLO 1 Gráfica de puntos en coordenadas polares

Graficar los puntos cuyas coordenadas polares se indican.

***a*)** $(4, \pi/6)$ ***b*)** $(2, -\pi/4)$ ***c*)** $(-3, 3\pi/4)$

Solución

a) Se miden 4 unidades a lo largo del rayo $\pi/6$, como se ve en la **FIGURA 12.1.2*a*)**.

b) Se miden 2 unidades a lo largo del rayo $-\pi/4$. Observe la figura 12.1.2*b*).
c) Se miden 3 unidades a lo largo del rayo $3\pi/4 + \pi = 7\pi/4$. En forma equivalente, se pueden medir 3 unidades a lo largo del rayo $3\pi/4$ prolongado *hacia atrás*, es decir, que pasa por el polo. Observe con cuidado, en la figura 12.1.2*c*), que el punto $(-3, 3\pi/4)$ no está en el mismo cuadrante que el lado terminal del ángulo indicado.

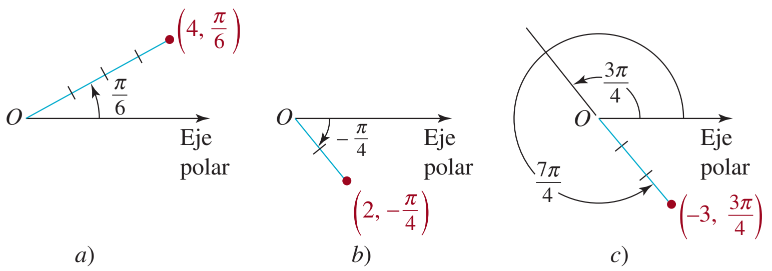


FIGURA 12.1.2 Puntos en coordenadas polares del ejemplo 1 ≡

En contraste con el sistema de coordenadas rectangulares, la descripción de un punto en coordenadas polares no es única. Es por una consecuencia inmediata de que

$$(r, \theta) \qquad \text{y} \qquad (r, \theta + 2n\pi), \text{ con } n \text{ un entero,}$$

son equivalentes. Para empeorar el problema, se pueden usar valores negativos de r.

EJEMPLO 2 Puntos equivalentes en coordenadas polares

Las coordenadas siguientes son algunas representaciones alternativas del punto $(2, \pi/6)$:

$$(2, 13\pi/6), \qquad (2, -11\pi/6), \qquad (-2, 7\pi/6), \qquad (-2, -5\pi/6).$$ ≡

Conversión de coordenadas polares en rectangulares Si se sobrepone un sistema de coordenadas rectangulares a un sistema de coordenadas polares, como se ve en la **FIGURA 12.1.3**, se puede convertir una descripción polar de un punto en coordenadas rectangulares mediante

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{1}$$

Estas fórmulas de conversión son válidas para todos los valores de r y θ en una representación polar equivalente de (r, θ).

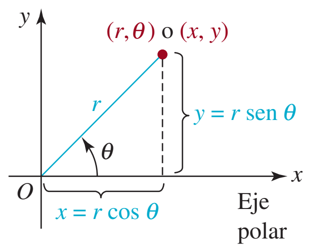


FIGURA 12.1.3 Relación entre coordenadas polares y rectangulares

EJEMPLO 3 De polares a rectangulares

Convertir $(2, \pi/6)$ en coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

Solución Con $r = 2$, $\theta = \pi/6$, y de acuerdo con (1),

$$x = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$y = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Por consiguiente, $(2, \pi/6)$ es equivalente a $(\sqrt{3}, 1)$ en coordenadas rectangulares. ≡

Conversión de coordenadas rectangulares en polares Debe ser evidente, por la figura 12.1.3, que x, y, r y θ también se relacionan por

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Las ecuaciones (2) se usan para convertir las coordenadas rectangulares (x, y) en coordenadas polares (r, θ).

EJEMPLO 4 De rectangulares a polares

Convertir $(-1, 1)$ de coordenadas rectangulares en coordenadas polares.

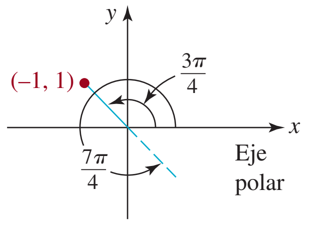


FIGURA 12.1.4 Punto del ejemplo 4

Solución Con $x = -1$, $y = 1$, y de acuerdo con (2),

$$r^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = -1.$$

Ahora, $r^2 = 2$, o sea $r = \pm\sqrt{2}$, y dos de los muchos ángulos que satisfacen $\tan\theta = -1$ son $3\pi/4$ y $7\pi/4$. En la **FIGURA 12.1.4** se ve que dos representaciones polares de $(-1, 1)$ son

$$(\sqrt{2}, 3\pi/4) \qquad \text{y} \qquad (-\sqrt{2}, 7\pi/4).$$ ≡

Obsérvese que en el ejemplo 4 no se puede hacer corresponder *cualquier* ángulo θ con *cualquier* valor r que satisfaga (2); esas soluciones también deben ser consistentes con (1). Como los puntos $(-\sqrt{2}, 3\pi/4)$ y $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$ están en el cuarto cuadrante, no son representaciones polares del punto $(-1, 1)$, que está en el segundo cuadrante.

Hay casos, en cálculo, en que una ecuación rectangular se debe expresar como ecuación polar $r = f(\theta)$. En el ejemplo que sigue se indica cómo hacerlo usando las fórmulas de conversión en (1).

EJEMPLO 5 Ecuación rectangular en ecuación polar

Determinar una ecuación polar que tenga la misma gráfica que el círculo $x^2 + y^2 = 8x$.

Solución Se sustituyen $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ en la ecuación indicada y se ve que

$$\begin{aligned} r^2\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^2\theta &= 8r\cos\theta \\ r^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) &= 8r\cos\theta \qquad \leftarrow \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1 \\ r(r - 8\cos\theta) &= 0. \end{aligned}$$

La última ecuación implica que

$$r = 0 \qquad \text{o} \qquad r = 8\cos\theta.$$

Ya que $r = 0$ sólo determina el origen O, se concluye que una ecuación polar del círculo es $r = 8\cos\theta$. Note que el círculo $x^2 + y^2 = 8x$ pasa por el origen, ya que $x = 0$ y $y = 0$ satisfacen la ecuación. En relación con la ecuación polar $r = 8\cos\theta$ del círculo, el origen o polo corresponde a las coordenadas polares $(0, \pi/2)$. ≡

EJEMPLO 6 Ecuación rectangular en ecuación polar

Halle una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la parábola $x^2 = 8(2 - y)$.

Solución Se sustituyen x y y en la ecuación indicada, por $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, y se despeja r en función de θ:

$$
\begin{aligned}
r^2\cos^2\theta &= 8(2 - r\,\mathrm{sen}\,\theta)\\
r^2(1 - \mathrm{sen}^2\theta) &= 16 - 8r\,\mathrm{sen}\,\theta\\
r^2 &= r^2\,\mathrm{sen}^2\theta - 8r\,\mathrm{sen}\,\theta + 16 \qquad \leftarrow \text{el lado derecho es un cuadrado perfecto}\\
r^2 &= (r\,\mathrm{sen}\,\theta - 4)^2\\
r &= \pm(r\,\mathrm{sen}\,\theta - 4).
\end{aligned}
$$

Al despejar r se obtienen dos ecuaciones,

$$r = \frac{4}{1 + \mathrm{sen}\,\theta} \quad \text{o} \quad r = \frac{-4}{1 - \mathrm{sen}\,\theta}.$$

Recordemos ahora que por la convención *ii*) de la definición 12.1.1 (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto. Usted debe verificar que si se sustituye (r, θ) por $(-r, \theta + \pi)$ en la segunda de estas dos ecuaciones, se puede obtener la primera. En otras palabras, las ecuaciones son equivalentes, y así podremos simplemente decir que la ecuación polar de la parábola es $r = 4/(1 + \mathrm{sen}\,\theta)$. ≡

EJEMPLO 7 Ecuación polar en ecuación rectangular

Encuentre la ecuación rectangular que presente la misma gráfica que la ecuación polar $r^2 = 9\cos 2\theta$.

Solución Primero, aplicaremos la identidad trigonométrica del coseno de un ángulo doble:

$$r^2 = 9(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta). \qquad \leftarrow \cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta$$

Entonces, de $r^2 = x^2 + y^2$, $\cos\theta = x/r$, $\mathrm{sen}\,\theta = y/r$, se obtiene

$$x^2 + y^2 = 9\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right) \quad \text{o} \quad (x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2).$$ ≡

La sección siguiente se dedicará a graficar ecuaciones polares.

12.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-31.

En los problemas 1 a 6 grafique el punto que tenga las coordenadas polares indicadas.

1. $(3, \pi)$

2. $(2, -\pi/2)$

3. $(-\frac{1}{2}, \pi/2)$

4. $(-1, \pi/6)$

5. $(-4, -\pi/6)$

6. $(\frac{2}{3}, 7\pi/4)$

En los problemas 7 a 12, determine coordenadas polares alternativas que satisfagan:

a) $r > 0, \theta < 0$
b) $r > 0, \theta > 2\pi$
c) $r < 0, \theta > 0$
d) $r < 0, \theta < 0$

de cada punto con las coordenadas polares indicadas.

7. $(2, 3\pi/4)$

8. $(5, \pi/2)$

9. $(4, \pi/3)$

10. $(3, \pi/4)$

11. $(1, \pi/6)$

12. $(3, 7\pi/6)$

En los problemas 13 a 18, determine las coordenadas rectangulares de cada punto cuyas coordenadas polares se indican.

13. $(\frac{1}{2}, 2\pi/3)$

14. $(-1, 7\pi/4)$

15. $(-6, -\pi/3)$

16. $(\sqrt{2}, 11\pi/6)$

17. $(4, 5\pi/4)$

18. $(-5, \pi/2)$

En los problemas 19 a 24 determine las coordenadas polares que satisfagan:

a) $r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$
b) $r < 0, -\pi < \theta \leq \pi$

de cada punto cuyas coordenadas rectangulares se indican.

19. $(-2, -2)$

20. $(0, -4)$

21. $(1, -\sqrt{3})$

22. $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$

23. $(7, 0)$

24. $(1, 2)$

En los problemas 25 a 30, dibuje la región en el plano que está formada por los puntos (r, θ) cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones dadas.

25. $2 \leq r < 4, 0 \leq \theta \leq \pi$

26. $2 < r \leq 4$

27. $0 \leq r \leq 2, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

28. $r \geq 0, \pi/4 < \theta < 3\pi/4$

29. $-1 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2$

30. $-2 \leq r < 4, \pi/3 < \theta < \pi$

En los problemas 31 a 40 halle una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación rectangular indicada.

31. $y = 5$

32. $x + 1 = 0$

33. $y = 7x$

34. $3x + 8y + 6 = 0$

35. $y^2 = -4x + 4$

36. $x^2 - 12y - 36 = 0$

37. $x^2 + y^2 = 36$

38. $x^2 - y^2 = 1$

39. $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$

40. $x^3 + y^3 - xy = 0$

En los problemas 41 a 52, obtenga la ecuación rectangular que tiene la misma gráfica que la ecuación polar dada.

41. $r = 2 \sec \theta$

42. $r \cos \theta = -4$

43. $r = 6 \operatorname{sen} 2\theta$

44. $2r = \tan \theta$

45. $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

46. $r^2 \cos 2\theta = 16$

47. $r + 5 \operatorname{sen} \theta = 0$

48. $r = 2 + \cos \theta$

49. $r = \dfrac{2}{1 + 3\cos\theta}$

50. $r(4 - \operatorname{sen} \theta) = 10$

51. $r = \dfrac{5}{3\cos\theta + 8\operatorname{sen}\theta}$

52. $r = 3 + 3 \sec \theta$

Para la discusión

53. ¿Cómo expresaría usted la distancia d entre dos puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) en términos de sus coordenadas polares?

54. Usted sabe cómo deducir una ecuación rectangular de una recta que pasa por dos puntos, en coordenadas rectangulares. ¿Cómo encontraría una ecuación polar de una recta que pase por dos puntos, cuyas coordenadas polares sean (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2)? Ponga en práctica sus ideas, deduciendo una ecuación polar de la recta que pasa por $(3, 3\pi/4)$ y $(1, \pi/4)$. Determine las coordenadas polares de las intersecciones de la recta con los ejes x y y.

55. En coordenadas rectangulares, las intersecciones con x de la gráfica de una función $y = f(x)$ se determinan con las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. En la sección siguiente trazaremos las gráficas de las ecuaciones polares $r = f(\theta)$. ¿Qué importancia tienen las soluciones de la ecuación $f(\theta) = 0$?

12.2 Gráficas de ecuaciones polares

Introducción La gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ es el conjunto de puntos P con *cuando menos* un conjunto de coordenadas polares que satisface la ecuación. Ya que lo más probable es que en el salón de clase no haya un retículo de coordenadas polares, para facilitar el trazo de gráficas y su descripción de una ecuación polar $r = f(\theta)$ como en la sección anterior, sobrepondremos un sistema de coordenadas rectangulares sobre el sistema de coordenadas polares.

Comenzaremos con algunas gráficas polares sencillas.

EJEMPLO 1 Círculo centrado en el origen

Grafique $r = 3$.

Solución Como no se especifica θ, el punto $(3, \theta)$ está en la gráfica de $r = 3$ para cualquier valor de θ, y está a 3 unidades del origen. En la **FIGURA 12.2.1** se ve que la gráfica es el círculo de radio 3, con centro en el origen.

También, de acuerdo con (2) de la sección 12.1, $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, por lo que $r = 3$ da como resultado la ecuación rectangular $x^2 + y^2 = 3^2$, que nos es familiar; es de un círculo de radio 3 centrado en el origen. ≡

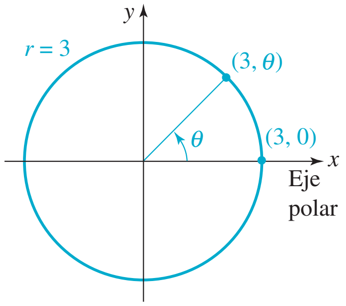


FIGURA 12.2.1 Círculo del ejemplo 1

■ **Círculos centrados en el origen** En general, si a es cualquier constante distinta de cero, la gráfica polar de

$$r = a \tag{1}$$

es un círculo de radio $|a|$ con centro en el origen.

EJEMPLO 2 Rayo que pasa por el origen

Grafique $\theta = \pi/4$.

Solución Como no se especifica r, el punto $(r, \pi/4)$ está en la gráfica para todo valor de r. Si $r > 0$, este punto está en la semirrecta, en el primer cuadrante; si $r < 0$, el punto está en la semirrecta del tercer cuadrante. Para $r = 0$, el punto $(0, \pi/4)$ es el polo u origen. Por consiguiente, la gráfica polar de $\theta = \pi/4$ es la recta que pasa por el origen y que forma un ángulo $\pi/4$ con el eje polar, o con el eje x positivo (**FIGURA 12.2.2**). ≡

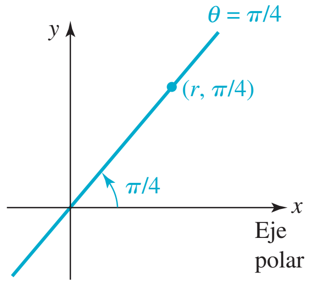


FIGURA 12.2.2 Recta del ejemplo 2

■ **Rectas que pasan por el origen** En general, si α es cualquier constante real distinta de cero, la gráfica polar de

$$\theta = \alpha \tag{2}$$

es una recta que pasa por el origen y forma un ángulo de α radianes con el eje polar.

EJEMPLO 3 Una espiral

Grafique $r = \theta$.

Solución A medida que crece $\theta \geq 0$, r aumenta y los puntos (r, θ) se arrollan en torno al polo en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. Eso se ilustra por la parte azul de la gráfica en la **FIGURA 12.2.3**. La parte roja de la gráfica se obtiene graficando puntos para $\theta < 0$. ≡

■ **Espirales** Muchas gráficas en coordenadas polares tienen nombres especiales. La gráfica del ejemplo 3 es un caso especial de

$$r = a\theta, \tag{3}$$

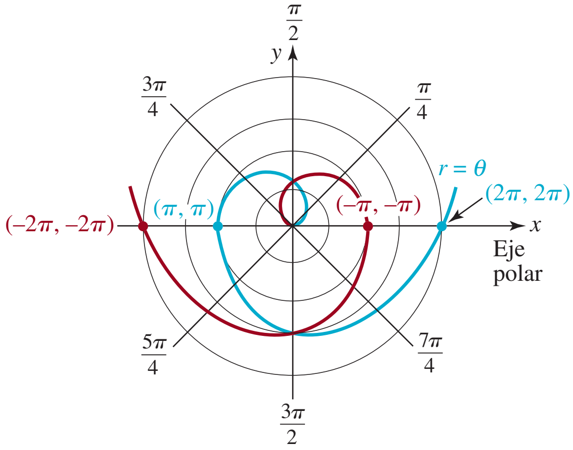
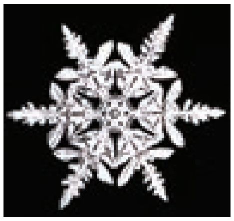


FIGURA 12.2.3 Gráfica de la ecuación del ejemplo 3

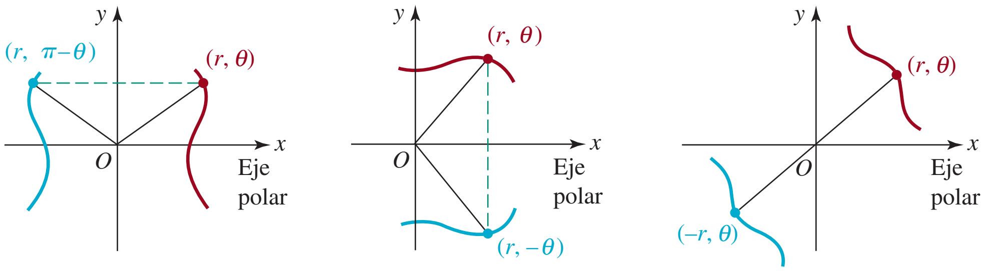
donde a es una constante. Una gráfica de esta ecuación se llama **espiral de Arquímedes**. Se pedirá al lector que grafique otros tipos de espirales, en los problemas 31 y 32 de los ejercicios 12.2.

Además del trazo básico de puntos, con frecuencia se puede aprovechar la simetría para graficar una ecuación polar.



Simetrías de un cristal de nieve

■ Simetría Como se ve en la **FIGURA 12.2.4**, una gráfica polar puede tener tres tipos de simetría. Una gráfica polar es **simétrica con respecto al eje *y*** si siempre que (r, θ) es un punto de la gráfica, $(r, \pi - \theta)$ también lo sea. Una gráfica polar es **simétrica con respecto al eje *x*** si, siempre que (r, θ) es un punto de la gráfica, $(r, -\theta)$ también lo sea. Por último, una gráfica polar es **simétrica con respecto al origen** si, siempre que (r, θ) está en la gráfica, $(-r, \theta)$ también es un punto de ella. La **FIGURA 12.2.4** ilustra estos tres tipos de simetrías.



a) Simetría con respecto al eje *y*

b) Simetría con respecto al eje *x*

c) Simetría con respecto al origen

FIGURA 12.2.4 Simetrías de una gráfica polar

Existen las siguientes pruebas de las simetrías.

Teorema 12.2.1 Pruebas de simetría en coordenadas polares

La gráfica de una ecuación polar es:

i) **simétrica con respecto al eje *y***, si al sustituir (r, θ) por $(r, \pi - \theta)$ se obtiene la misma ecuación;

ii) **simétrica con respecto al eje *x*** si al sustituir (r, θ) por $(r, -\theta)$ se obtiene la misma ecuación;

iii) **simétrica con respecto al origen** si al sustituir (r, θ) por $(-r, \theta)$ se obtiene la misma ecuación.

Debido a que la descripción polar de un punto no es única, la gráfica de una ecuación polar podrá tener determinado tipo de simetría aun cuando falle su prueba respectiva. Por ejemplo, si al reemplazar (r, θ) por $(r, -\theta)$ no se llega a la ecuación polar original, puede ser que la gráfica de esa ecuación sí tenga simetría con respecto al eje x. En consecuencia, si una de las pruebas de reemplazo en *i*) - *iii*) del teorema 12.2.1 no produce la misma ecuación polar, sólo se puede decir que "no es concluyente".

En coordenadas rectangulares, la descripción de un punto es única. Por consiguiente, si en coordenadas rectangulares falla una prueba para determinado tipo de simetría, se puede decir en definitiva que la gráfica no posee esa simetría.

EJEMPLO 4 Gráfica de una ecuación polar

Grafique $r = 1 - \cos\theta$.

Solución Una forma de graficar esta ecuación consiste en trazar algunos puntos bien elegidos que correspondan a $0 \le \theta \le 2\pi$. Como se muestra en la tabla siguiente:

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r	0	0.29	1	1.71	2	1.71	1	0.29	0

a medida que θ avanza de $\theta = 0$ a $\pi/2$, r aumenta de $r = 0$ (el origen) a $r = 1$ [figura 12.2.5*a*)]. Conforme θ avanza de $\theta = \pi/2$ a $\theta = \pi$, r continúa aumentando de $r = 1$ a su máximo valor de $r = 2$ [figura 12.2.5*b*)]. Entonces, de $\theta = \pi$ a $\theta = 3\pi/2$, r empieza a disminuir de $r = 2$ a $r = 1$. De $\theta = 3\pi/2$ a $\theta = 2\pi$, r continúa disminuyendo y termina de nuevo en el origen $r = 0$ [figuras 12.2.5*c*) y 12.2.5*d*)].

Aprovechando la simetría, podríamos haber localizado simplemente puntos para $0 \le \theta \le \pi$. Por la identidad trigonométrica de la función coseno $\cos(-\theta) = \cos\theta$, se desprende de *ii*) del teorema 12.2.1 que la gráfica de $r = 1 - \cos\theta$ es simétrica respecto al eje x. Para obtener la gráfica completa de $r = 1 - \cos\theta$, reflejamos en el eje x la parte de la gráfica dada en la figura 12.2.5*b*). ≡

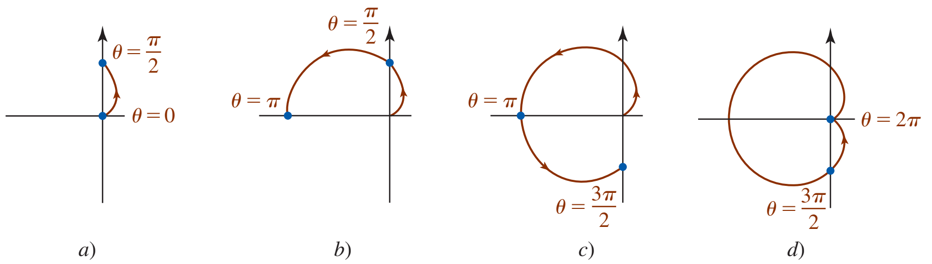


FIGURA 12.2.5 Gráfica de la ecuación del ejemplo 4

Cardioides La ecuación polar del ejemplo 4 forma parte de una familia de ecuaciones que tienen una gráfica "en forma de corazón", y que pasa por el origen. Una gráfica de cualquier ecuación polar que tenga la forma

$$r = a \pm a\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \pm a\cos\theta \tag{4}$$

se llama **cardioide**. La única diferencia en la gráfica de estas cuatro ecuaciones es su simetría con respecto al eje y ($r = a \pm a$ sen θ), o con respecto al eje x ($r = a \pm a\cos\theta$). Véase la **FIGURA 12.2.6**.

Si se conocen la forma básica y la orientación de una cardioide se puede obtener una gráfica rápida y fiel, ubicando en el plano los cuatro puntos que corresponden a $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$ y $\theta = 3\pi/2$.

Caracoles Las cardioides son casos especiales de curvas polares llamadas **caracoles**:

$$r = a \pm b\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \pm b\cos\theta. \tag{5}$$

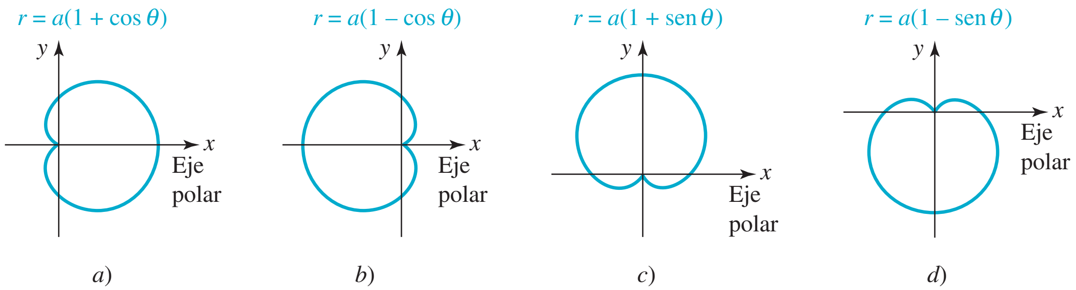
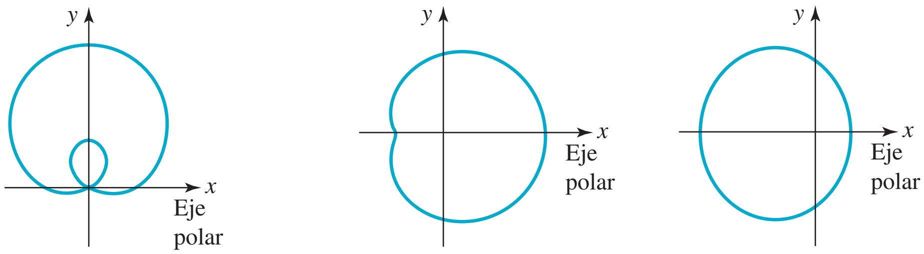


FIGURA 12.2.6 Cardioides

La forma de un caracol depende de las magnitudes relativas de a y b. Suponga que $a > 0$ y $b > 0$. Para $a/b < 1$, se obtiene un **caracol con bucle interno**, como se ve en la **FIGURA 12.2.7*a*)**. Cuando $a = b$, o lo que es lo mismo, cuando $a/b = 1$, se obtiene una **cardioide**. Para $1 < a/b < 2$, se obtiene un **caracol aplanado**, como el de la figura 12.2.7*b*). Cuando $a/b \geq 2$, la curva se llama **caracol convexo** [figura 12.2.7*c*)].



a) Caracol con bucle interno *b*) Caracol aplanado *c*) Caracol convexo

FIGURA 12.2.7 Tres clases de caracoles

EJEMPLO 5 Un caracol

La gráfica de $r = 3 - \operatorname{sen}\theta$ es un caracol convexo, puesto que $a = 3$, $b = 1$ y $a/b = 3 > 2$. ≡

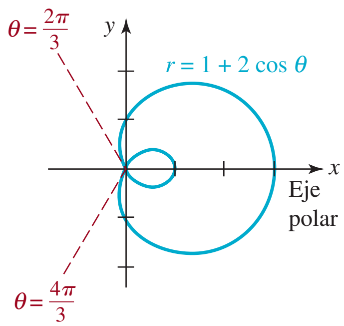


FIGURA 12.2.8 Gráfica de la ecuación del ejemplo 6

EJEMPLO 6 Un caracol

La gráfica de $r = 1 + 2\cos\theta$ es un caracol con bucle interno, porque $a = 1$, $b = 2$ y $a/b = \frac{1}{2} < 1$. Para $\theta \geq 0$, vea, en la **FIGURA 12.2.8**, que el caracol comienza en $\theta = 0$, o en $(3, 0)$. La gráfica atraviesa el eje y en $(1, \pi/2)$ y después entra al origen ($r = 0$) del primer ángulo en el cual $r = 0$ o $1 + 2\cos\theta = 0$, es decir, en $\cos\theta = -\frac{1}{2}$. Esto implica que $\theta = 2\pi/3$. En $\theta = \pi$, la curva pasa por $(-1, \pi)$. El resto de la gráfica se puede trazar aprovechando que es simétrica con respecto al eje x. ≡

EJEMPLO 7 Una rosa

Graficar $r = 2\cos 2\theta$.

Solución Ya que

$$\cos(-2\theta) = \cos 2\theta \qquad \text{y} \qquad \cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta$$

se llega a la conclusión, de acuerdo con *i*) y *ii*) de las pruebas de simetría, que la gráfica es simétrica con respecto a los ejes x y y. Reflexionando un momento, el lector se debería convencer de que sólo se debe considerar el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Si se usan los datos de la tabla siguiente, se verá que la parte interrumpida de la gráfica de la **FIGURA 12.2.9** es la que se completa por simetría. Esta gráfica se llama **curva de una rosa de cuatro pétalos**.

θ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
r	2	1.7	1	0	-1	-1.7	12

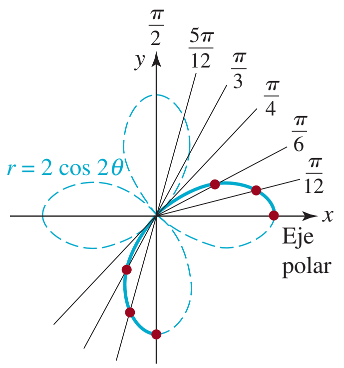


FIGURA 12.2.9 Gráfica de la ecuación del ejemplo 7

Curvas de rosas

En general, si n es un entero positivo, las gráficas de

$$r = a \text{ sen } n\theta \quad \text{o} \quad r = a \cos n\theta, \quad n \geq 2 \tag{6}$$

se llaman **curvas de rosas**, aunque, como se puede ver en la **FIGURA 12.2.10**, la curva se parece más a una margarita. Cuando n es impar, la cantidad de **pétalos** o **bucles** de la curva es n; si n es par, la curva tiene $2n$ pétalos. Para graficar una rosa se puede comenzar trazando un pétalo. Para empezar, primero se determina un ángulo θ para el cual r es uno máximo. Esto proporciona la línea central del pétalo. Después se determinan valores correspondientes de θ para los cuales la rosa curva entra al origen ($r = 0$). Para completar la gráfica se aprovecha que las líneas centrales de los pétalos están a la distancia de $2\pi/n$ radianes ($360/n$ grados) entre sí, si n es impar, y $2\pi/2n = \pi/n$ radianes ($180/n$ grados), si n es par. En la figura 12.2.10 se ha trazado la gráfica de $r = a$ sen 5θ, $a > 0$. La distancia entre las líneas de centro de los pétalos es $2\pi/5$ radianes (72°).

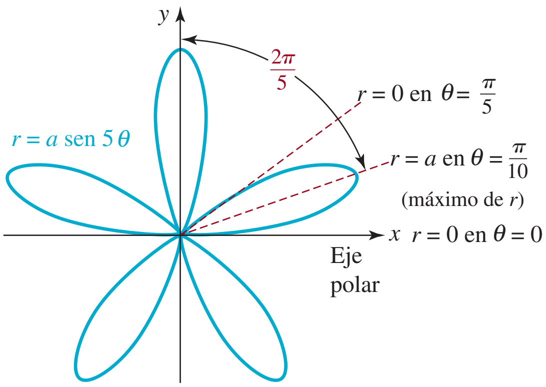


FIGURA 12.2.10 Curva de rosa

En el ejemplo 5 de la sección 12.1, vimos que la ecuación polar $r = 8 \cos \theta$ equivale a la ecuación $x^2 + y^2 = 8x$, en coordenadas rectangulares. Al completar el cuadrado en x, en esa ecuación, se ve que

$$(x - 4)^2 + y^2 = 16$$

es un círculo de radio 4 centrado en (4, 0) en el eje x. Ecuaciones polares como $r = 8 \cos \theta$ o $r = 8$ sen θ son círculos, y también son casos especiales de rosas curvas (**FIGURA 12.2.11**).

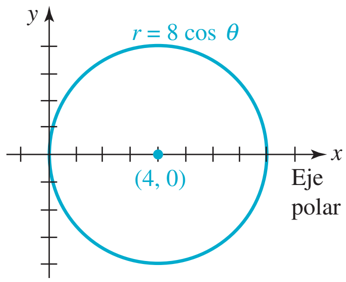


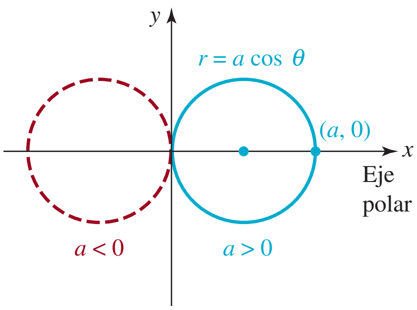
FIGURA 12.2.11 Gráfica de la ecuación $r = 8 \cos \theta$

Círculos con centro en un eje

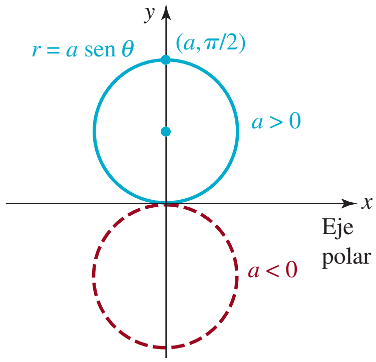
Cuando $n = 1$ en las ecuaciones (6), se obtiene

$$r = a \text{ sen } \theta \quad \text{o} \quad r = a \cos \theta, \tag{7}$$

que son ecuaciones polares de círculos que pasan por el origen y con diámetro $|a|$ y centro en $(a/2, 0)$ en el eje x ($r = a \cos \theta$) o con centro en $(0, a/2)$ en el eje y ($r = a$ sen θ). La **FIGURA 12.2.12** ilustra las gráficas de las ecuaciones (7) en casos en que $a > 0$ y $a < 0$.



a) Centros en el eje x



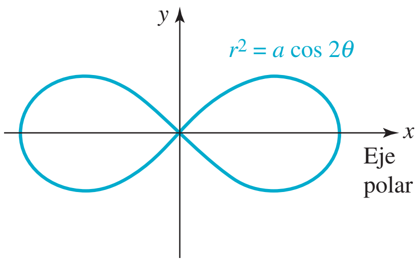
b) Centros en el eje y

FIGURA 11.2.12 Círculos que pasan por el origen con centros en un eje

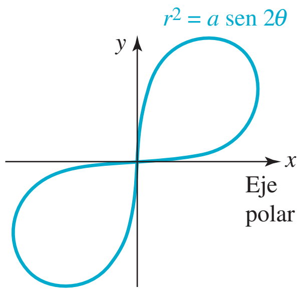
Lemniscatas Si n es un entero positivo, las gráficas de

$$r^2 = a\cos 2\theta \qquad \text{o} \qquad r^2 = a \operatorname{sen} 2\theta \tag{8}$$

en donde $a > 0$, se llaman **lemniscatas**. De acuerdo con *iii*) de las pruebas de simetría, se puede ver que las gráficas de las dos ecuaciones en (8) son simétricas con respecto al origen. Además, de acuerdo con *ii*) de las pruebas de simetría, la gráfica de $r^2 = a\cos 2\theta$ es simétrica con respecto al eje x. Las **FIGURAS 12.2.13*a*)** y 12.2.13*b*) muestran gráficas típicas de las ecuaciones $r^2 = a\cos 2\theta$ y $r^2 = a$ sen 2θ, respectivamente.



a)



b)

FIGURA 12.2.13 Lemniscatas

Puntos de intersección En coordenadas rectangulares se pueden determinar los puntos (x, y) donde se cortan las gráficas de dos funciones, $y = f(x)$ y $y = g(x)$, igualando los valores de y. Las soluciones reales de la ecuación $f(x) = g(x)$ corresponden a *todas* las intersecciones con el eje x de los puntos donde se cortan las gráficas. En contraste, pueden surgir problemas, en coordenadas polares, cuando se trate de aplicar el mismo método para determinar el lugar donde se intersecan las gráficas de dos ecuaciones polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$.

EJEMPLO 8 Círculos que se intersecan

La **FIGURA 12.2.14** muestra que los círculos $r =$ sen θ y $r = \cos\theta$ tienen dos puntos de intersección. Al igualar los valores de r, la ecuación sen $\theta = \cos\theta$ lleva a $\theta = \pi/4$. Si se sustituye este valor en cualquiera de las ecuaciones, se obtiene $r = \sqrt{2}/2$. En consecuencia sólo se ha determinado un punto polar $(\sqrt{2}/2, \pi/4)$ en donde las gráficas se cortan. En la figura se ve que también las gráficas se cortan en el origen. Pero aquí el problema es que el origen o polo está en $(0, \pi/2)$ en la gráfica de $r = \cos\theta$, pero está en $(0, 0)$ en la gráfica de $r =$ sen θ. Este caso es análogo al de las curvas que llegan al mismo punto en momentos diferentes. ≡

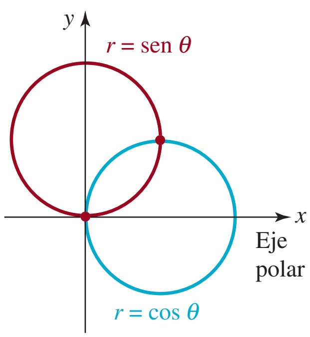


FIGURA 12.2.14 Círculos que se intersecan, del ejemplo 8

■ **Rotación de gráficas polares** En la sección 5.2 hemos visto que si $y = f(x)$ es la ecuación rectangular de una función, entonces las gráficas de $y = f(x - c)$ y $y = f(x + c)$, $c > 0$, se obtienen mediante el *desplazamiento* de la gráfica de f en forma horizontal c unidades hacia la derecha y la izquierda, respectivamente. En contraste, si $r = f(\theta)$ es una ecuación polar, entonces las gráficas de $r = f(\theta - \gamma)$ y $r = f(\theta + \gamma)$, con $\gamma > 0$, se pueden obtener mediante la *rotación* de la gráfica de f por una cantidad γ. En forma específica:

- La gráfica de $r = f(\theta - \gamma)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada *en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj* alrededor del origen por una cantidad γ.
- La gráfica de $r = f(\theta + \gamma)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada *en el sentido de las manecillas del reloj* alrededor del origen por una cantidad γ.

Por ejemplo, la gráfica de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$ se muestra en la figura 12.2.6*a*). La gráfica de $r = a(1 + \cos(\theta - \pi/2))$ es la gráfica de $r = a(1 + \cos\theta)$, rotada en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj alrededor del origen por una cantidad $\pi/2$. En consecuencia, su gráfica debe ser la que se da en la figura 12.2.6*c*). Esto tiene sentido, ya que la fórmula de diferencia del coseno da la ecuación

$$\begin{aligned} r = a[1 + \cos(\theta - \pi/2)] &= a[1 + \cos\theta\cos(\pi/2) + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\pi/2)] \\ &= a(1 + \operatorname{sen}\theta). \end{aligned}$$

◀ Véase la identidad en (5) de la sección 9.4.

De manera similar, si hace rotar $r = a(1 + \cos\theta)$ en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen por una cantidad π obtendrá la ecuación

$$r = a[1 + \cos(\theta + \pi)] = a[1 + \cos\theta\cos\pi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\pi] = a(1 - \cos\theta)$$

cuya gráfica se da en la figura 12.2.6*b*). Finalmente, dé otro vistazo a la figura 12.2.13. De

$$r^2 = a\cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = a\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = a\operatorname{sen} 2\theta$$

vemos que la gráfica de la lemniscata de la figura 12.2.13*b*) es la gráfica de la figura 12.2.13*a*) a la que se hizo rotar en sentido opuesto al de las manecillas del reloj alrededor del origen por una cantidad de $\pi/4$.

EJEMPLO 9 Gráficas polares rotadas

Graficar $r = 1 + 2\operatorname{sen}(\theta + \pi/4)$.

Solución La gráfica de la ecuación dada es la gráfica del caracol $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$ rotada en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de un origen por una cantidad de $\pi/4$. En la **FIGURA 12.2.15**, la gráfica azul es el de $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$ y la gráfica roja es la gráfica rotada. ≡

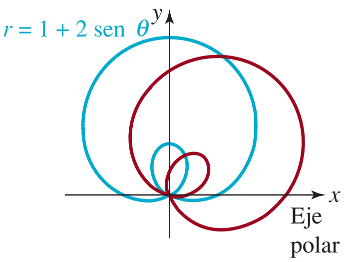


FIGURA 12.2.15 Gráficas de ecuaciones polares del ejemplo 9

Notas del aula

i) El ejemplo 8 ilustra una de varias dificultades frustrantes del trabajo en coordenadas polares:

Un punto se puede encontrar sobre la gráfica de una ecuación polar aunque sus coordenadas no satisfagan la ecuación.

Se deberá verificar que $(2, \pi/2)$ es una descripción polar alternativa del punto $(-2, 3\pi/2)$. Además, verifique que $(-2, 3\pi/2)$ es un punto sobre la gráfica de $r = 1 + 3\operatorname{sen}\theta$, lo que demuestra que las coordenadas satisfacen la ecuación. Sin embargo, observe que las coordenadas alternativas $(2, \pi/2)$ no lo hacen.