9.6 Ecuaciones trigonométricas

Introducción En la sección 9.4 examinamos identidades, que son ecuaciones que contienen funciones trigonométricas que se satisfacen con todos los valores de la variable para la cual están definidos ambos lados de la igualdad. En esta sección examinaremos **ecuaciones trigonométricas condicionales**, esto es, ecuaciones que sólo son válidas para ciertos valores de la variable. Describiremos técnicas para determinar los valores de la variable (si es que los hay) que satisfagan la ecuación.

Comenzaremos examinando el problema de determinar todos los números reales x que satisfacen $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/2$. Como indica la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ de la **FIGURA 9.6.1**, existe una cantidad infinita de soluciones de esta ecuación:

$$\ldots, -\frac{7\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{9\pi}{4}, \quad \frac{17\pi}{4}, \ldots \tag{1}$$

y

$$\ldots, -\frac{5\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{11\pi}{4}, \quad \frac{19\pi}{4}, \ldots. \tag{2}$$

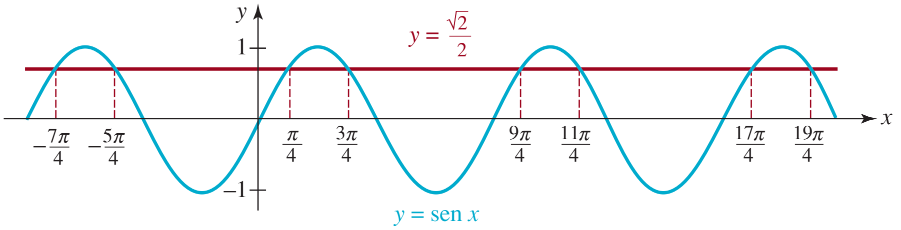


FIGURA 9.6.1 Gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \sqrt{2}/2$

Observe que en cada lista de (1) y (2), cada solución se puede obtener sumando $2\pi = 8\pi/4$ a la solución anterior. Eso es una consecuencia de la periodicidad de la función seno. Es común que las ecuaciones trigonométricas tengan una cantidad infinita de soluciones, por la periodicidad de las funciones trigonométricas. En general, para obtener soluciones de una ecuación como $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/2$, lo más cómodo es usar un círculo unitario y ángulos de referencia, y no una gráfica de la función trigonométrica. Ilustraremos este método en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Uso del círculo unitario

Determinar todos los números reales x que satisfagan $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/2$.

Solución Si $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/2$, el ángulo de referencia de x es $\pi/4$ radianes. Ya que el valor de $\operatorname{sen} x$ es positivo, el lado terminal del ángulo x está en el primero o en el segundo cuadrantes. Así, como se ve en la **FIGURA 9.6.2**, las únicas soluciones entre 0 y 2π son

$$x = \frac{\pi}{4} \qquad \text{o} \qquad x = \frac{3\pi}{4}.$$

Como la función seno es periódica con periodo 2π, todas las soluciones restantes se pueden obtener sumando múltiplos enteros de 2π a estas soluciones:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \qquad \text{o} \qquad x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \tag{3}$$

donde n es un entero. Los números que ve en (1) y (2) corresponden, respectivamente, a $n = -1$, $n = 0$, $n = 1$ y $n = 2$ en la primera y la segunda fórmulas en (3). ≡

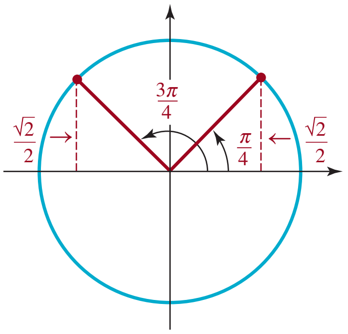


FIGURA 9.6.2 Círculo unitario del ejemplo 1

Cuando uno se encuentra con una ecuación más complicada, como

$$4\operatorname{sen}^2 x - 8\operatorname{sen} x + 3 = 0,$$

el método básico es despejar una sola función trigonométrica (en este caso sería sen x) con métodos similares a los que se usan para resolver ecuaciones algebraicas.

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación trigonométrica mediante factorización

Determinar todas las soluciones de $4\,\mathrm{sen}^2 x - 8\,\mathrm{sen}\,x + 3 = 0$.

Solución Primero, se observa que se trata de una ecuación cuadrática en sen x, y que se factoriza como sigue

$$(2\,\mathrm{sen}\,x - 3)(2\,\mathrm{sen}\,x - 1) = 0.$$

Esto implica que

$$\mathrm{sen}\,x = \frac{3}{2} \qquad \text{o} \qquad \mathrm{sen}\,x = \frac{1}{2}.$$

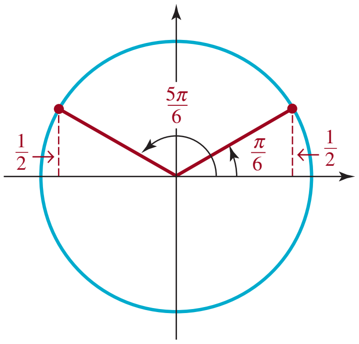


FIGURA 9.6.3 Círculo unitario del ejemplo 2

La primera ecuación no tiene solución, porque $|\mathrm{sen}\,x| \le 1$. Como se ve en la **FIGURA 9.6.3**, los dos ángulos entre 0 y 2π para los cuales sen x es igual a $\frac{1}{2}$ son

$$x = \frac{\pi}{6} \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{6}.$$

Por consiguiente, debido a la periodicidad de la función seno, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,$$

donde n es un entero. ≡

EJEMPLO 3 Verificación de soluciones perdidas

Determinar todas las soluciones de

$$\mathrm{sen}\,x = \cos x. \tag{4}$$

Solución Para trabajar con una sola función trigonométrica, se dividen ambos lados de la ecuación entre cos x, para obtener

$$\tan x = 1. \tag{5}$$

cos $0 = 1$, cos $\pi = -1$, cos $2\pi = 1$, cos $3\pi = -1$, etc. En general, cos $n\pi = (-1)^n$, donde n es un entero.

La ecuación (5) es equivalente a (4) *siempre y cuando* cos $x \neq 0$. Se observa que si cos $x = 0$, entonces, de acuerdo con (4) de la sección 9.2, $x = (2n + 1)\pi/2 = \pi/2 + n\pi$, donde n es un entero. Según la fórmula de suma del seno,

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \overset{\substack{\text{Vea (7) en la sección 9.4}\\ \downarrow}}{=} \mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\overset{\substack{(-1)^n\\ \downarrow}}{\cos n\pi} + \cos\frac{\pi}{2}\overset{\substack{0\\ \downarrow}}{\mathrm{sen}\,n\pi} = (-1)^n \neq 0,$$

estos valores de x no satisfacen la ecuación original. Entonces, debemos determinar *todas* las soluciones de (4), resolviendo la ecuación (5).

Ahora bien, $\tan x = 1$ implica que el ángulo de referencia de x sea $\pi/4$ radianes. Ya que $\tan x = 1 > 0$, el lado terminal del ángulo de x radianes puede estar en el primer cuadrante o en el tercero, como se ve en la **FIGURA 9.6.4**. Entonces, las soluciones son

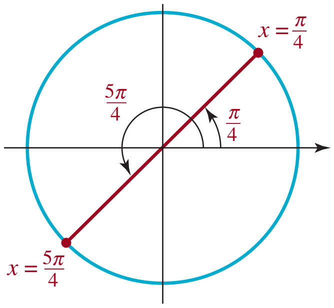


FIGURA 9.6.4 Círculo unitario del ejemplo 3

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi,$$

donde n es un entero. En la figura 9.6.4 se puede ver que estos dos conjuntos de números se pueden expresar en forma más compacta como sigue:

Esto es consecuencia de que tan x sea periódica con periodo π.

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi,$$

donde n es un entero. ≡

Pérdida de soluciones Al resolver una ecuación, si se divide entre una expresión que contenga una variable, se pueden perder algunas soluciones de la ecuación original. Por ejemplo, un error común en álgebra, al resolver ecuaciones como $x^2 = x$ es dividir entre x, para obtener $x = 1$. Pero si se escribe $x^2 = x$ en la forma $x^2 - x = 0$, o $x(x - 1) = 0$, se ve que de hecho $x = 0$ o $x = 1$. Para evitar perder alguna solución se deben determinar los valores que hacen que la expresión sea cero, y comprobar si son soluciones de la ecuación original. En el ejemplo 3, nótese que cuando se dividió entre cos x, se tuvo cuidado de comprobar que no se perdieran soluciones.

Cuando sea posible, es preferible dividir entre una expresión variable. Como se ilustró con la ecuación algebraica $x^2 = x$, esto se puede hacer con frecuencia reuniendo todos los términos distintos de cero en un lado de la ecuación, para entonces factorizar (algo que no pudimos hacer en el ejemplo 3). El ejemplo 4 ilustra esta técnica.

EJEMPLO 4 Solución de una ecuación trigonométrica factorizando

Resolver
$$2\,\text{sen}\,x\cos^2 x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x. \tag{6}$$

Solución Para evitar dividir entre cos x, esta ecuación se escribe como sigue:

$$2\,\text{sen}\,x\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0$$

y se factoriza:
$$\cos x\left(2\,\text{sen}\,x\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Entonces, ya sea

$$\cos x = 0 \qquad \text{o} \qquad 2\,\text{sen}\,x\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Como el coseno es cero para todos los múltiplos impares de $\pi/2$, las soluciones de $\cos x = 0$ son

$$x = (2n + 1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

donde n es un entero.

En la segunda ecuación sustituiremos 2 sen x cos x por sen $2x$, de la fórmula de ángulo doble del seno, y se obtiene una ecuación con una sola función trigonométrica:

Vea (15) en la sección 9.4.

$$\text{sen}\,2x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \text{sen}\,2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Entonces, el ángulo de referencia de $2x$ es $\pi/3$. Como el seno es negativo, el ángulo $2x$ debe estar en el tercero o en el cuarto cuadrantes. Como muestra la **FIGURA 9.6.5**,

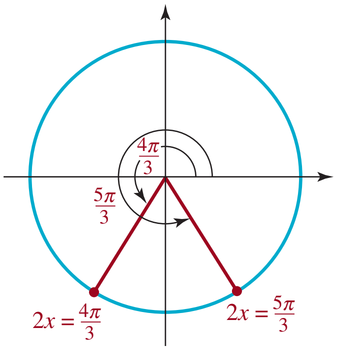


FIGURA 9.6.5 Círculo unitario del ejemplo 4

$$2x = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \qquad \text{o} \qquad 2x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi.$$

Se divide entre 2 y resulta

$$x = \frac{2\pi}{3} + n\pi \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + n\pi.$$

Por consiguiente, todas las soluciones de (6) son

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \qquad x = \frac{2\pi}{3} + n\pi, \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + n\pi,$$

donde n es un entero. ≡

En el ejemplo 4, si hubiéramos simplificado la ecuación dividiendo entre cos x y no hubiéramos comprobado si los valores de x para los cuales cos $x = 0$ satisfacen la ecuación (6), hubiéramos perdido las soluciones $x = \pi/2 + n\pi$, donde n es un entero.

EJEMPLO 5 Uso de una identidad trigonométrica

Resolver $3\cos^2 x - \cos 2x = 1$.

Solución Se observa que la ecuación contiene el coseno de x y el coseno de $2x$. En consecuencia, usaremos la fórmula de ángulo doble del coseno, en la forma

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \qquad \leftarrow \text{Vea (16) de la sección 9.4.}$$

para reemplazar la ecuación por una ecuación equivalente que sólo contenga cos x. Se ve que

$$3\cos^2 x - (2\cos^2 x - 1) = 1 \quad \text{se transforma en} \quad \cos^2 x = 0.$$

Por lo anterior, cos $x = 0$, y las soluciones son

$$x = (2n + 1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

donde n es un entero. ≡

Hasta ahora, en esta sección hemos considerado que la variable de la ecuación trigonométrica representa un número real, o bien un ángulo medido en radianes. Si la variable representa un ángulo expresado en grados, la técnica para resolverla es la misma.

EJEMPLO 6 Ecuación cuando el ángulo está en grados

Resolver $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$, donde θ es un ángulo expresado en grados.

Solución Como $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$, el ángulo de referencia de 2θ es 60° y el ángulo 2θ debe estar en el segundo o tercer cuadrantes. La **FIGURA 9.6.6** muestra que $2\theta = 120°$, o $2\theta = 240°$. Todo ángulo que sea coterminal con uno de esos ángulos también satisfará $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$. Estos ángulos se obtienen sumando cualquier múltiplo entero de 360° a 120° o a 240°.

$$2\theta = 120° + 360°n \qquad \text{o} \qquad 2\theta = 240° + 360°n,$$

donde n es un entero. Este renglón se divide entre 2 y quedan

$$\theta = 60° + 180°n \qquad \text{o} \qquad \theta = 120° + 180°n.$$ ≡

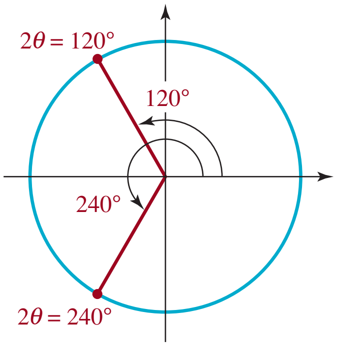


FIGURA 9.6.6 Círculo unitario del ejemplo 6

Soluciones extrañas En el ejemplo siguiente se ve que al elevar al cuadrado una ecuación se pueden introducir soluciones extrañas. En otras palabras, la ecuación resultante después de elevar al cuadrado puede *no* ser equivalente a la original.

EJEMPLO 7 Raíces extrañas

Determinar todas las soluciones de $1 + \tan\alpha = \sec\alpha$, donde α es un ángulo expresado en grados.

Solución La ecuación no se factoriza, pero veremos que si se elevan ambos lados al cuadrado se puede aplicar una identidad fundamental para obtener una ecuación que contenga una sola función trigonométrica.

$$\begin{aligned}(1 + \tan\alpha)^2 &= (\sec\alpha)^2\\ 1 + 2\tan\alpha + \tan^2\alpha &= \sec^2\alpha \qquad \leftarrow \text{Vea (2) de la sección 9.4.}\\ 1 + 2\tan\alpha + \tan^2\alpha &= 1 + \tan^2\alpha\\ 2\tan\alpha &= 0\\ \tan\alpha &= 0.\end{aligned}$$

Los valores de α en $[0°, 360°)$ para los cuales $\tan\alpha = 0$ son

$$\alpha = 0° \qquad \text{y} \qquad \alpha = 180°.$$

Como se elevó al cuadrado cada lado de la ecuación original se pueden haber introducido soluciones adicionales. Por ello es importante comprobar todas las soluciones en la ecuación original. Si se sustituye $\alpha = 0°$ en $1 + \tan\alpha = \sec\alpha$, se obtiene la declaración *cierta* $1 + 0 = 1$. Pero después de sustituir $\alpha = 180°$ se obtiene la declaración *falsa* $1 + 0 = -1$. Por lo anterior, 180° es una solución adicional no válida, y $\alpha = 0°$ es la única solución en el intervalo $[0°, 360°)$. Entonces, todas las soluciones de la ecuación son

$$\alpha = 0° + 360°n = 360°n,$$

donde n es un entero. Para $n \neq 0$, son los ángulos que son coterminales con 0°. ≡

Recuerde, de la sección 5.1, que la determinación de las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función $y = f(x)$ equivale a resolver la ecuación $f(x) = 0$. En el siguiente ejemplo se usa lo anterior.

EJEMPLO 8 Intersecciones de una gráfica

Determine las primeras tres intersecciones con el eje x de la gráfica de $f(x) = \text{sen}\, 2x \cos x$ en el eje de las x positivas.

Solución Se debe resolver $f(x) = 0$; esto es, $\text{sen}\, 2x \cos x = 0$. Se ve que o bien $\text{sen}\, 2x = 0$, o $\cos x = 0$.

De $\text{sen}\, 2x = 0$ se obtiene $2x = n\pi$, donde n es un entero; es decir, $x = n\pi/2$, donde n es un entero. De $\cos x = 0$ se obtiene $x = \pi/2 + n\pi$, donde n es un entero. Entonces, para $n = 2$, $x = n\pi/2$ da $x = \pi$, mientras que para $n = 0$ y $n = 1$, $x = \pi/2 + n\pi$ da $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$. Así, las primeras tres intersecciones con el eje x en el eje de las x positivas están en $(\pi/2, 0)$, $(\pi, 0)$ y $(3\pi/2, 0)$. ≡

Uso de funciones inversas Hasta ahora, todas las ecuaciones trigonométricas han tenido soluciones que estaban relacionadas por ángulos de referencia con los ángulos especiales 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ o $\pi/2$. Si éste no es ese caso, en la siguiente sección veremos cómo usar funciones trigonométricas inversas y una calculadora para determinar las soluciones.

EJEMPLO 9 Resolución de ecuaciones usando funciones inversas

Encuentre las soluciones de $4\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución Reconocemos que se trata de una ecuación cuadrática en $\cos x$. En vista de que el lado izquierdo de la ecuación no se puede factorizar tal como está, aplicamos la fórmula cuadrática para obtener

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{8}.$$

En este momento podemos descartar el valor $(3 + \sqrt{41})/8 \approx 1.18$, porque cos x no puede ser mayor que 1. A continuación usamos la función coseno inversa (y la ayuda de una calculadora) para resolver la ecuación restante:

$$\cos x = \frac{3 - \sqrt{41}}{8} \quad \text{que implica que} \quad x = \cos^{-1}\left(\frac{3 - \sqrt{41}}{8}\right) \approx 2.01. \quad \equiv$$

Por supuesto, en el ejemplo 9, si hubiéramos intentado calcular $\cos^{-1}[(3 + \sqrt{41})/8]$ con una calculadora, habríamos recibido un mensaje de error.

9.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-24.

En los problemas 1 a 6 determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica, si x representa un ángulo expresado en radianes.

1. $\operatorname{sen} x = \sqrt{3}/2$

2. $\cos x = -\sqrt{2}/2$

3. $\sec x = \sqrt{2}$

4. $\tan x = -1$

5. $\cot x = -\sqrt{3}$

6. $\cos x = 2$

En los problemas 7 a 12 determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica correspondiente, si x representa un número real.

7. $\cos x = -1$

8. $2 \operatorname{sen} x = -1$

9. $\tan x = 0$

10. $\sqrt{3} \sec x = 2$

11. $-\csc x = 1$

12. $\sqrt{3} \cot x = 1$

En los problemas 13 a 18, determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica respectiva si θ representa un ángulo expresado en grados.

13. $\csc \theta = 2\sqrt{3}/3$

14. $2 \operatorname{sen} \theta = \sqrt{2}$

15. $1 + \cot \theta = 0$

16. $\sqrt{3} \operatorname{sen} \theta = \cos \theta$

17. $\sec \theta = -2$

18. $2 \cos \theta + \sqrt{2} = 0$

En los problemas 19 a 46 determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica respectiva si x es un número real, y θ es un ángulo expresado en grados.

19. $\cos^2 x - 1 = 0$

20. $2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

21. $3 \sec^2 x = \sec x$

22. $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1) \tan x - \sqrt{3} = 0$

23. $2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta - 2 = 0$

24. $2 \operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen} \theta - 1 = 0$

25. $\cot^2 \theta + \cot \theta = 0$

26. $2 \operatorname{sen}^2 \theta + (2 - \sqrt{3}) \operatorname{sen} \theta - \sqrt{3} = 0$

27. $\cos 2x = -1$

28. $\sec 2x = 2$

29. $2 \operatorname{sen} 3\theta = 1$

30. $\tan 4\theta = -1$

31. $\cot (x/2) = 1$

32. $\csc (\theta/3) = -1$

33. $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$

34. $\cos 2x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

35. $\cos 2\theta = \operatorname{sen} \theta$

36. $\operatorname{sen} 2\theta + 2 \operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta = 2$

37. $\operatorname{sen}^4 x - 2 \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$

38. $\tan^4 \theta - 2 \sec^2 \theta + 3 = 0$

39. $\sec x \operatorname{sen}^2 x = \tan x$

40. $\dfrac{1 + \cos\theta}{\cos\theta} = 2$

41. $1 + \cot \theta = \csc \theta$

42. $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$

43. $\sqrt{\dfrac{1 + 2\,\text{sen}\,x}{2}} = 1$

44. $\text{sen}\,x + \sqrt{\text{sen}\,x} = 0$

45. $\cos\theta - \sqrt{\cos\theta} = 0$

46. $\cos\theta\sqrt{1 + \tan^2\theta} = 1$

En los problemas 47 a 54, determine las tres primeras intersecciones con el eje x de la gráfica de la función, en el eje de las x positivas.

47. $f(x) = -5\ \text{sen}\ (3x + \pi)$

48. $f(x) = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

49. $f(x) = 2 - \sec\dfrac{\pi}{2}x$

50. $f(x) = 1 + \cos \pi x$

51. $f(x) = \text{sen}\ x + \tan x$

52. $f(x) = 1 - 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

53. $f(x) = \text{sen}\ x - \text{sen}\ 2x$

54. $f(x) = \cos x + \cos 3x$ [*Pista:* escriba $3x = x + 2x$].

En los problemas 55 a 58 haga la gráfica y determine si la ecuación tiene soluciones.

55. $\tan x = x$. [*Pista:* grafique $y = \tan x$ y $y = x$ en el mismo conjunto de ejes].

56. $\text{sen}\ x = x$

57. $\cot x - x = 0$

58. $\cos x + x + 1 = 0$

En los problemas 59 a 64, use una función trigonométrica inversa para obtener las soluciones de la ecuación dada en el intervalo indicado. Redondee las respuestas a dos decimales.

59. $20\cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \qquad [0, \pi]$

60. $3\,\text{sen}^2 x - 8\,\text{sen}\ x + 4 = 0, \qquad [-\pi/2, \pi/2]$

61. $\tan^2 x + \tan x - 1 = 0, \qquad (-\pi/2, \pi/2)$

62. $3\,\text{sen}\ 2x + \cos x = 0, \qquad [-\pi/2, \pi/2]$

63. $5\cos^3 x - 3\cos^2 x - \cos x = 0, \quad [0, \pi]$

64. $\tan^4 x - 3\tan^2 x + 1 = 0, \qquad (-\pi/2, \pi/2)$

Aplicaciones diversas

65. Triángulo isósceles En el problema 59 de los ejercicios 9.4, el área del triángulo isósceles cuyo vértice tiene ángulo θ, como se ve en la figura 9.4.4, es $A = \frac{1}{2}x^2\,\text{sen}\,\theta$. Si la longitud x es 4 ¿con qué valor de θ el área del triángulo será 4?

66. Movimiento circular Un objeto describe una trayectoria circular centrada en el origen, con velocidad angular constante. La coordenada y del objeto, en cualquier momento a los t segundos, es $y = 8\cos(\pi t - \pi/12)$. ¿En qué momento(s) cruza el objeto al eje x?

67. Número de Mach Use el problema 57 de los ejercicios 9.4 para determinar el ángulo del vértice del cono, de las ondas sonoras provocadas por un avión que vuele a Mach 2.

68. Corriente alterna Un generador eléctrico produce una corriente alterna de 60 ciclos, definida por $I(t) = 30\ \text{sen}\ 120\,\pi\left(t - \frac{7}{36}\right)$, donde $I(t)$ es la corriente en amperes a los t segundos. Calcule el valor positivo más pequeño de t para el cual la corriente es de 15 amperes.

69. Circuitos eléctricos Si se aplica un voltaje definido por $V = V_0\ \text{sen}\,(\omega t + \alpha)$ a un circuito en serie, se produce una corriente alterna. Si $V_0 = 110$ volts, $\omega = 120\pi$ radianes por segundo y $\alpha = -\pi/6$, ¿cuándo el voltaje es igual a cero?

70. Refracción de la luz Un rayo de luz pasa de un medio (como el aire) a otro (como un cristal). Sean ϕ el ángulo de incidencia y θ el ángulo de refracción. Como se ve en la **FIGURA 9.6.7**, esos ángulos se miden respecto de una línea vertical. De acuerdo con la **ley de Snell**, hay una c constante, que depende de los dos medios, tal que $\dfrac{\text{sen}\,\phi}{\text{sen}\,\theta} = c$. Suponga que cuando la luz pasa de aire a un cristal, $c = 1.437$. Calcule ϕ y θ tales que el ángulo de incidencia sea el doble del ángulo de refracción.

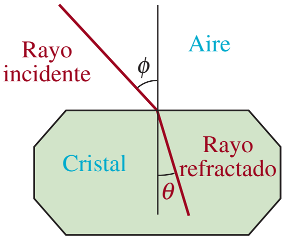


FIGURA 9.6.7 Rayos de luz en el problema 70

71. Capa de nieve Con base en datos recolectados entre 1966 y 1980, la superficie de la capa de nieve S en el hemisferio norte, medida en millones de kilómetros cuadrados, se puede modelar por la función

$$S(w) = 25 + 21\cos\left(\tfrac{1}{26}\pi(w - 5)\right),$$

donde w es la cantidad de semanas después del 1 de enero.

a) ¿Cuánta capa de nieve indica esta fórmula para mediados de abril? (Redondee w al entero más cercano.)

b) ¿En qué semana la capa nevada será mínima, según la fórmula?

c) ¿En qué mes se encuentra esa semana?

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

- Funciones circulares:
  - círculo unitario
  - ángulo central
  - ángulo de referencia
- Funciones periódicas:
  - periodo de seno
  - periodo de coseno
  - periodo de tangente
  - periodo de cotangente
  - periodo de secante
  - periodo de cosecante
- Gráficas de funciones trigonométricas:
  - ciclo
  - amplitud
  - diferencia de fase
- Identidades:
  - pitagórica
  - impares y pares
- Fórmulas especiales:
  - adición
  - sustracción
  - ángulo doble
  - medio ángulo
- Funciones trigonométricas inversas:
  - arcoseno
  - arcocoseno
  - arcotangente
- Gráficas de funciones trigonométricas inversas:
  - arcoseno
  - arcocoseno
  - arcotangente
- Ecuaciones trigonométricas

CAPÍTULO 9 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-25.

A. Verdadero/Falso

En los problemas 1 a 20 conteste verdadero o falso.

1. Si $\tan t = \frac{3}{4}$, entonces sen $t = 3$ y cos $t = 4$. ______

2. En un triángulo rectángulo, si sen $\theta = \frac{11}{61}$, entonces cot $\theta = \frac{60}{11}$. ________

3. $\sec(-\pi) = \csc\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. __________

4. No hay ángulo t tal que sec $t = \frac{1}{2}$. __________

5. sen $(2\pi - t) = -$sen t. __________

6. $1 + \sec^2\theta = \tan^2\theta$. __________

7. $(-2, 0)$ es una intersección en x de la gráfica $y = 3$ sen $(\pi x/2)$.

8. $(2\pi/3, -1/\sqrt{3})$ es un punto de la gráfica de $y = \cot x$. ________

9. El contradominio de la función $y = \csc x$ es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. _________

10. La gráfica de $y = \csc x$ no cruza el eje y. ________

11. La línea $x = \pi/2$ es una asíntota vertical de la gráfica de $y = \tan x$. _________

12. Si $\tan(x + 2\pi) = 0.3$, entonces $\tan x = 0.3$.

13. Para la función $f(x) = -2$ sen x, el rango está definido por $-2 \le y \le 2$.

14. sen $20x = 2$ sen $10x \cos 10x$.

15. La gráfica de $y =$ sen $(2x - \pi/3)$ es la gráfica de $y =$ sen $2x$ desplazada $\pi/3$ unidades hacia la derecha. __________

16. Las gráficas $y = 3$ sen $(-2x)$ y $y = -3\cos(2x - \pi/2)$ son iguales.

17. Como $\tan(5\pi/4) = 1$, entonces $\arctan(1) = 5\pi/4$. ______ __________

18. $\tan 8\pi = \tan 9\pi$ ________.

19. La función $f(x) =$ arcoseno x no es periódica ________.

20. arcsen $\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$. _________

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 14, llene los espacios en blanco.

1. Si sen $u = \frac{3}{5}$, $0 < u < \pi/2$ y $\cos v = 1/\sqrt{5}$, $3\pi/2 < v < 2\pi$, entonces $\cos(u + v) =$ ________.

2. La intersección con el eje y en la gráfica de la función $y = 2\sec(x + \pi)$ es ________.

3. El periodo de la función $y = 2$ sen $\frac{\pi}{3}x$ es _________.

4. La primera asíntota vertical de la gráfica de $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ a la derecha del eje y es ________.

5. La diferencia de fase en la gráfica de $y = 5 \cos (3x - 4\pi)$ es ________.

6. Si sen $t = \frac{1}{6}$, entonces $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) =$ ___________.

7. La amplitud de $y = -10 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ es _______.

8. $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{4}\right) =$ _______.

9. El valor exacto de $\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{5}\right) =$ _______.

10. El periodo de la función $y = \tan 4x$ es _________.

11. La quinta intersección en x en el eje x positivo de la gráfica de la función $y =$ sen πx es __________.

12. Si $P(t) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ es un punto en el círculo unitario, entonces sen $2t =$ ________.

13. Si $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}$, donde $3\pi/2 < x < 2\pi$, entonces los valores exactos de sen $\frac{x}{2} =$ ________, $\cos\frac{x}{2} =$ ________, sen $2x$ = ________, y $\cos 2x =$ _________.

14. Por los resultados del problema 13, tenemos que $\tan\frac{x}{2} =$ __________ y $\tan 2x =$ ___________.

≡ C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 a 4, represente gráficamente las funciones dadas. Indique la amplitud, el periodo y la diferencia de fase donde corresponda.

1. $y = 5(1 + \text{sen } x)$

2. $y = -\frac{4}{3}\cos x$

3. $y = 10\cos\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right)$

4. $y = -4\cos\left(\frac{1}{4}x - \pi\right)$

En los problemas 5 a 10 determine todas las t en el intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfagan la ecuación.

5. $\cos t \text{ sen } t - \cos t + \text{sen } t - 1 = 0$

6. $\cos t - \text{sen } t = 0$

7. $4 \text{ sen}^2 t - 1 = 0$

8. $\text{sen } t = 2 \tan t$

9. $\text{sen } t + \cos t = 1$

10. $\tan t - 3 \cot t = 2$

En los problemas 11 y 12, obtenga las soluciones de la ecuación dada en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Redondee las soluciones a dos decimales.

11. $3 \cos 2x + \text{sen } x = 0$

12. $\tan^4 x + \tan^2 x - 1 = 0$

En los problemas 13 a 20, calcule el valor indicado sin usar calculadora.

13. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

14. arcsen (-1)

15. $\cot\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)$

16. $\cos\left(\text{arcsen } \frac{2}{5}\right)$

17. $\text{sen}^{-1}(\text{sen } \pi)$

18. $\cos(\arccos 0.42)$

19. $\text{sen}\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$

20. $\arctan(\cos \pi)$

En los problemas 21 y 22 escriba la expresión como expresión algebraica en x.

21. $\text{sen}(\arccos x)$

22. $\sec(\tan^{-1} x)$

En los problemas 23 a 26, dé dos ejemplos de la función trigonométrica indicada tal que cada una tenga las propiedades dadas.

23. Función seno con periodo 4 y amplitud 6.

24. Función coseno con periodo π, amplitud 4 y diferencia de fase $\frac{1}{2}$.

25. Función seno con periodo $\pi/2$, amplitud 3 y diferencia de fase $\pi/4$.

26. Función tangente cuya gráfica completa un ciclo en el intervalo $(-\pi/8, \pi/8)$.

En los problemas 27 a 30, la gráfica correspondiente se puede interpretar como una transformación rígida/no rígida de la gráfica de $y =$ sen x o de la gráfica de $y = \cos x$. Deduzca la ecuación de la gráfica, usando la función seno. A continuación deduzca la ecuación de la misma gráfica, esta vez mediante la función coseno.

27.

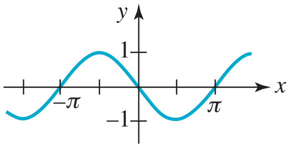


FIGURA 9.R.1 Gráfica del problema 27

28.

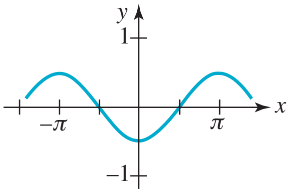


FIGURA 9.R.2 Gráfica del problema 28

29.

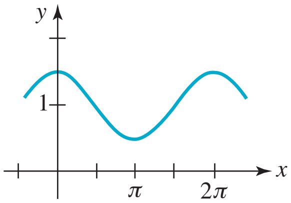


FIGURA 9.R.3 Gráfica del problema 29

30.

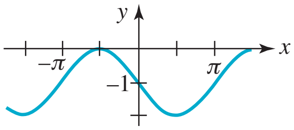
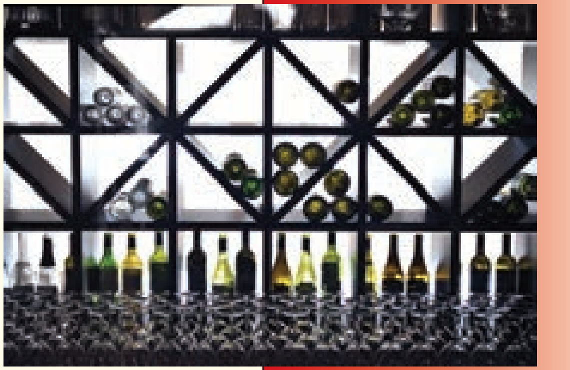


FIGURA 9.R.4 Gráfica del problema 30

APLICACIONES DE TRIGONOMETRÍA

10

En este capítulo



La repisa de vinos que se muestra en la fotografía está construida a partir de triángulos rectángulos.

Un poco de historia La trigonometría se desarrolló a partir de los esfuerzos realizados en la antigüedad para impulsar el estudio de la astronomía y pronosticar la trayectoria y posición de los cuerpos celestes, así como para mejorar la precisión en la navegación y el cálculo del tiempo y los calendarios.

Una gran parte del trabajo matemático realizado en el siglo XVIII fue producto de la necesidad de describir ciertos fenómenos físicos. Por ejemplo, ¿qué forma tiene una vela bajo la presión del viento? ¿Qué forma tiene una cuerda elástica que vibra (por ejemplo, una cuerda de violín o guitarra), pero está fija en ambos extremos? Las respuestas a estas preguntas con frecuencia requieren el uso de funciones trigonométricas.

El alemán **Ernst Florens Chladni** (1756-1827), físico, especialista en matemáticas aplicadas y músico, inventó una técnica interesante para estudiar la vibración de placas elásticas. Después de espolvorear arena sobre superficies parecidas a un tambor, pasaba un arco de violín por los bordes para hacerlas vibrar. La Academia Francesa de Ciencias ofreció un premio a la mejor descripción matemática de este fenómeno. En 1816 **Marie-Sophie Germain** (1776-1831), matemática francesa casi autodidacta, ganó el premio de la Academia de París con su ensayo sobre elasticidad.

En este capítulo pondremos en uso las funciones trigonométricas desarrolladas en los dos últimos capítulos para resolver diversos problemas y aplicaciones matemáticas.

10.1 Resolución de triángulos rectángulos

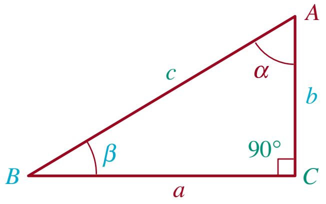


FIGURA 10.1.1 Identificación normal de un triángulo rectángulo

Introducción Las aplicaciones de la trigonometría de triángulos rectángulos en campos como topografía y navegación implican **resolver triángulos rectángulos**. La expresión "resolver un triángulo" quiere decir que se desea determinar la longitud de cada lado y la medida de cada ángulo del triángulo. Se puede resolver cualquier triángulo rectángulo si se conocen dos lados o un ángulo agudo y un lado. Como se verá en los ejemplos que siguen, una parte esencial del proceso de solución es trazar e identificar el triángulo. Nuestra práctica general para identificar un triángulo será la que se muestra en la **FIGURA 10.1.1**. Los tres vértices se denominarán A, B y C, donde C es el vértice del ángulo recto. Representaremos los ángulos en A y B por α y β, y las longitudes de los lados opuestos a esos ángulos por a y b, respectivamente. La longitud del lado opuesto al ángulo recto en C se denomina c.

EJEMPLO 1 Solución de un triángulo rectángulo

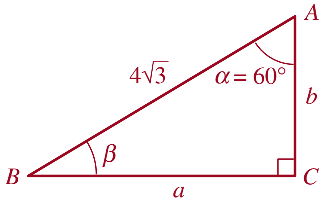


FIGURA 10.1.2 Triángulo rectángulo del ejemplo 1

Resolver el triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $4\sqrt{3}$ y uno de sus ángulos es de 60°.

Solución Primero se hace un esquema del triángulo y se identifica como se ve en la **FIGURA 10.1.2**. Se desea determinar a, b y β. Puesto que α y β son ángulos complementarios, $\alpha + \beta = 90°$, y

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 60° = 30°.$$

La longitud de la hipotenusa es, a saber, hip $= 4\sqrt{3}$. Para determinar a, la longitud del lado opuesto al ángulo $\alpha = 60°$, se escoge la función seno. De sen α = op/hip,

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{a}{4\sqrt{3}} \qquad \text{o} \qquad a = 4\sqrt{3}\operatorname{sen} 60°.$$

Como sen $60° = \sqrt{3}/2$, entonces

$$a = 4\sqrt{3}\operatorname{sen} 60° = 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6.$$

Por último, para determinar la longitud b del lado adyacente al ángulo de 60° seleccionamos la función coseno. De cos α = ady/hip se obtiene

$$\cos 60° = \frac{b}{4\sqrt{3}}, \qquad \text{o sea} \qquad b = 4\sqrt{3}\cos 60°.$$

Como cos $60° = \frac{1}{2}$, entonces

$$b = 4\sqrt{3}\cos 60° = 4\sqrt{3}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}.$$ ≡

En el ejemplo 1, una vez determinado a se podría haber calculado b usando el teorema de Pitágoras, o la función tangente. En general suele haber varias maneras de resolver un triángulo.

Uso de calculadora Si en un problema intervienen ángulos que no sean de 30°, 45° o 60°, se obtienen aproximaciones a los valores de las funciones trigonométricas que se buscan con una calculadora. En el resto de este capítulo, cuando se use una aproximación, redondearemos los resultados finales a la centésima, a menos que en el problema se pida otra cosa.

Para aprovechar bien la exactitud de la calculadora, guarde los valores calculados de las funciones trigonométricas para cálculos posteriores. Si, por otra parte, se escribe una versión redondeada de un valor en la pantalla, y después se teclea en la calculadora, puede ser que disminuya la exactitud del resultado final.

Algunas calculadoras tienen una tecla rotulada **stor** o **sto**.

En muchas aplicaciones podemos determinar el valor de una de las funciones trigonométricas, por ejemplo, sen θ, y deseamos obtener θ. Para ello, usamos las funciones trigonométricas inversas y una calculadora. Recuerde que las funciones trigonométricas inversas se denotan con sen^{-1} o arcoseno, $\cos^{-1}$ o arcocoseno, $\tan^{-1}$ o arcotangente, y así sucesivamente. Las calculadoras científicas tienen teclas rotuladas $\boxed{\text{sen}^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ y $\boxed{\tan^{-1}}$, o $\boxed{\text{arcsen}}$, $\boxed{\text{arccos}}$ y $\boxed{\text{arctan}}$. (Consulte el manual de su calculadora si necesita más explicaciones.)

En las calculadoras científicas de HP, se utiliza la notación asen, acos y atan.

EJEMPLO 2 Obtención de θ

Use una calculadora para obtener un ángulo agudo θ medido en ***a***) grados y ***b***) radianes en los cuales $\cos\theta = 0.5$.

Solución ***a***) Primero debemos poner la calculadora en el modo de grados. Introducimos 0.5 y en seguida oprimimos la tecla correspondiente. El resultado es 60. Por tanto, $\theta = 60°$.
b) Con la calculadora en el modo de radianes, introducimos 0.5 y luego oprimimos la misma tecla; 1.0471976 aparece en la pantalla. Así, para $\cos\theta = 0.5$, $\theta \approx 1.0471976$. Tenga en cuenta que 1.0471976 es una aproximación decimal de $\pi/3$. ≡

EJEMPLO 3 Solución de un triángulo rectángulo

Resolver el triángulo rectángulo con catetos de longitud 4 y 5.

Solución Después de trazar e identificar el triángulo como se ve en la **FIGURA 10.1.3**, se deben calcular c, α y β. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, la hipotenusa c es

$$c = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \approx 6.40.$$

Para determinar β usaremos $\tan\beta = \text{op/ady}$. (Si se opta por trabajar con las cantidades dadas se evitan los errores debidos a las aproximaciones anteriores.) Entonces,

$$\tan\beta = \tfrac{4}{5} = 0.8.$$

En una calculadora en modo grado, se determina $\beta \approx 38.66°$. Como $\alpha = 90° - \beta$ se obtiene $\alpha \approx 51.34°$. ≡

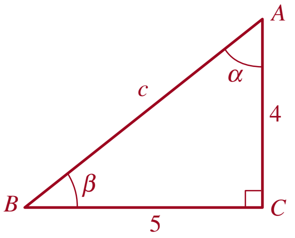


FIGURA 10.1.3 Triángulo rectángulo del ejemplo 3

10.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-25.

En los problemas 1 a 12, calcule las incógnitas indicadas. Cada problema se refiere al triángulo de la **FIGURA 10.1.4**.

1. $a = 4, \beta = 27°;\quad b, c$

2. $c = 10, \beta = 49°;\quad a, b$

3. $b = 8, \beta = 34.33°;\quad a, c$

4. $c = 25, \alpha = 50°;\quad a, b$

5. $b = 1.5, c = 3;\quad \alpha, \beta, a$

6. $a = 5, b = 2;\quad \alpha, \beta, c$

7. $a = 4, b = 10;\quad \alpha, \beta, c$

8. $b = 4, \alpha = 58°;\quad a, c$

9. $a = 9, c = 12;\quad \alpha, \beta, b$

10. $b = 3, c = 6;\quad \alpha, \beta, a$

11. $b = 20, \alpha = 23°,\quad a, c$

12. $a = 11, \alpha = 33.5°,\quad b, c$

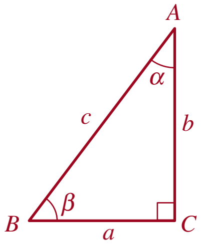


FIGURA 10.1.4 Triángulo de los problemas 1 a 12

≡ Para la discusión

13. ***a***) Un n-gono es un polígono regular de n lados inscrito en un círculo; el polígono está formado por n puntos situados a la misma distancia uno de otro en el círculo. Suponga que el polígono que se ilustra en la figura 10.1.5 representa un polígono regular inscrito en un círculo de radio r. Use la trigonometría del triángulo rectángulo para demostrar que el área $A(n)$ del polígono está dada por:

$$A(n) = \frac{n}{2}r^2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

b) Calcule A_{100}, A_{500} y $A_{1\,000}$.

c) Explique: ¿se aproxima $A(n)$ a un número como $n \to \infty$?

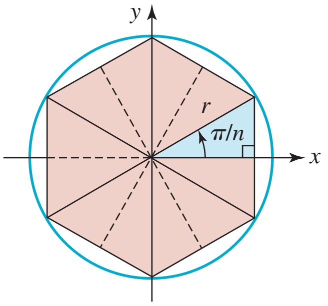


FIGURA 10.1.5 Polígono inscrito para el problema 13

10.2 Aplicaciones del triángulo rectángulo

Introducción La trigonometría del triángulo rectángulo sirve para resolver muchos problemas prácticos, en particular los que se relacionan con longitudes, alturas y distancias.

EJEMPLO 1 Cálculo de la altura de un árbol

Una cometa queda atorada en las ramas de la copa de un árbol. Si el hilo de 90 pies de la cometa forma un ángulo de 22° con el suelo, estime la altura del árbol, calculando la distancia de la cometa al suelo.

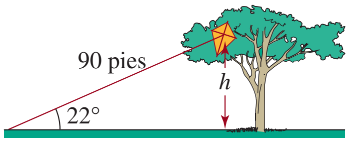


FIGURA 10.2.1 Árbol del ejemplo 1

Solución Sea h la altura de la cometa. En la **FIGURA 10.2.1** se ve que

$$\frac{h}{90} = \text{sen}\,22° \qquad \text{y así} \qquad h = 90\,\text{sen}\,22° \approx 33.71 \text{ pies}$$

≡

EJEMPLO 2 Longitud del corte de una sierra

Un carpintero corta el extremo de una tabla de 4 pulgadas, formando un bisel de 25° con respecto a la vertical, comenzando en un punto a $1\frac{1}{2}$ pulgadas del extremo de la tabla. Calcular las longitudes del corte diagonal y del lado restante. Vea la **FIGURA 10.2.2**.

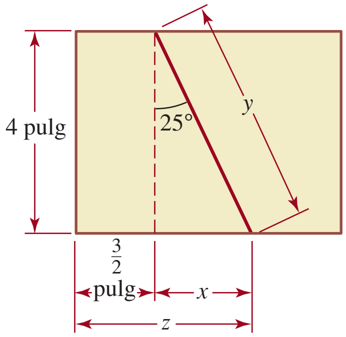


FIGURA 10.2.2 Corte a sierra del ejemplo 2

Solución Sean x, y y z las dimensiones (desconocidas), como se ve en la figura 10.2.2. Entonces, de acuerdo con la definición de la función tangente,

$$\tan 25° = \frac{x}{4} \qquad \text{así que, entonces} \qquad x = 4\tan 25° \approx 1.87 \text{ pulg.}$$

Para calcular y se observa que

$$\cos 25° = \frac{4}{y} \qquad \text{así que} \qquad y = \frac{4}{\cos 25°} \approx 4.41 \text{ pulg.}$$

Ya que $z = \frac{3}{2} + x$ y $x \approx 1.87$ pulg., se ve que $z \approx 1.5 + 1.87 \approx 3.37$ pulg. ≡

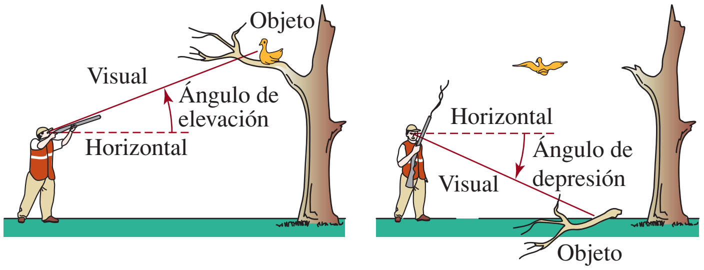


FIGURA 10.2.3 Ángulos de elevación y depresión

Ángulos de elevación y de depresión El ángulo entre la visual del observador a un objeto, y la horizontal, tiene un nombre especial. En el caso de la **FIGURA 10.2.3**, si la visual es hacia un objeto arriba de la horizontal, el ángulo se llama ángulo de nivel, y en el caso general se llama **ángulo de elevación**, mientras que si la visual es hacia un objeto abajo de la horizontal, el ángulo se llama **ángulo de depresión**.

EJEMPLO 3 Uso de los ángulos de elevación

Un topógrafo usa un instrumento llamado teodolito para medir el ángulo de elevación entre el nivel del piso y la cumbre de una montaña. En un punto, se mide un ángulo de elevación de 41°. Medio kilómetro más lejos de la base de la montaña, el ángulo de elevación medido es de 37°. ¿Qué altura tiene la montaña?

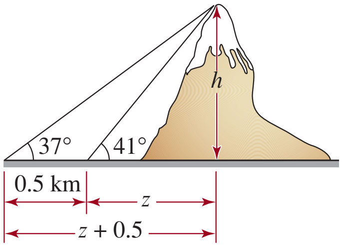


FIGURA 10.2.4 Montaña del ejemplo 3

Solución Sea h la altura de la montaña. La **FIGURA 10.2.4** muestra que hay dos triángulos rectángulos que comparten un lado común, h; entonces, se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas, h y z:

$$\frac{h}{z+0.5} = \tan 37° \qquad \text{y} \qquad \frac{h}{z} = \tan 41°.$$

De ambas ecuaciones se despeja h y se obtiene

$$h = (z + 0.5)\tan 37° \qquad \text{y} \qquad h = z\tan 41°.$$

Se igualan los dos últimos resultados, y se llega a una ecuación con la que podemos determinar la distancia z:

$$(z + 0.5)\tan 37° = z\tan 41°.$$

Al despejar z se ve que

$$z = \frac{-0.5\tan 37°}{\tan 37° - \tan 41°}.$$

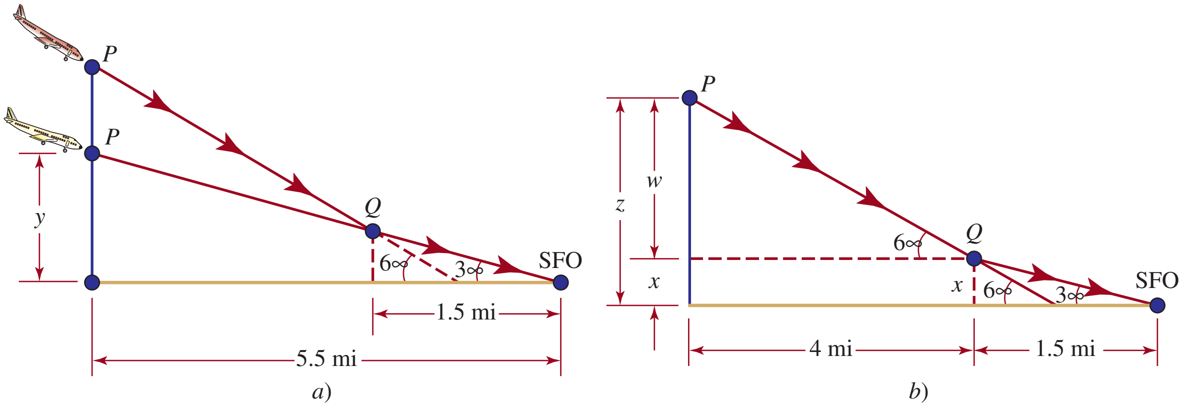
Ahora se puede calcular h con $h = z\tan 41°$.

$$h = \frac{-0.5\tan 37° \tan 41°}{\tan 37° - \tan 41°} \approx 2.83 \text{ km}. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 4 Trayectoria de planeo

Casi todos los aviones realizan su aproximación final al Aeropuerto Internacional de San Francisco (SFO) en una trayectoria de planeo de 3° desde un punto situado a 5.5 millas del campo aéreo. Hace algunos años, la Administración Federal de Aviación de Estados Unidos experimentó con una aproximación computarizada en dos partes, en la que el avión se aproximaba a la pista de aterrizaje en una trayectoria de planeo de 6° desde un punto situado a 5.5 millas de distancia y luego cambiaba a una trayectoria de planeo de 3° cuando se hallaba a 1.5 millas del punto de aterrizaje. El propósito de esta aproximación experimental era reducir el ruido de los aviones en las zonas residenciales alejadas del centro de la ciudad. Compare la altura de un avión P' que realiza la aproximación acostumbrada de 3° con la altura de un avión P que realiza la aproximación experimental cuando los dos aviones se encuentran a 5.5 millas del aeropuerto.

Solución Para efectos de ilustración, se han exagerado los ángulos y distancias que aparecen en la figura 10.2.5.



a) *b*)

FIGURA 10.2.5 Trayectorias de planeo del ejemplo 4

Primero, suponga que y es la altura del avión P' en la aproximación habitual cuando se encuentra a 5.5 millas del aeropuerto. Como vemos en la figura 10.2.5*a*),

$$\frac{y}{5.5} = \tan 3^\circ \qquad \text{o} \qquad y = 5.5 \tan 3^\circ.$$

Debido a que las distancias del aeropuerto se miden en millas, convertimos y a pies:

$$y = 5.5(5\ 280)\tan 3^\circ \text{ pies} \approx 1\ 522 \text{ pies}$$

Ahora suponga que z es la altura del avión P en la aproximación experimental cuando se encuentra a 5.5 millas de distancia del aeropuerto. Como se muestra en la figura 10.2.5*b*), $z = x + w$, por lo que usamos dos triángulos rectángulos para obtener

$$\frac{x}{1.5} = \tan 3^\circ \qquad \text{o} \qquad x = 1.5 \tan 3^\circ.$$

y

$$\frac{w}{4} = \tan 6^\circ \qquad \text{o} \qquad w = 4 \tan 6^\circ.$$

Por tanto, la altura aproximada del avión P en un punto que queda a 5.5 millas de distancia del aeropuerto es

$$\begin{aligned} z &= x + w \\ &= 1.5 \tan 3^\circ + 4 \tan 6^\circ \\ &= 1.5(5\ 280)\tan 3^\circ + 4(5\ 280)\tan 6^\circ \approx 2\ 635 \text{ pies}. \end{aligned}$$

En otras palabras, el avión P se encuentra aproximadamente 1 113 pies más alto que el avión P'. ≡

■ Palabras en funciones La sección 5.7 se dedicó a establecer o construir funciones que describimos o expresamos en palabras. Como se recalcó en esa sección, se trata de una tarea a la que seguramente tendrá que enfrentarse en un curso de cálculo. Nuestro ejemplo final ilustra un procedimiento recomendado para dibujar una figura y marcar las cantidades que nos interesan con las variables apropiadas.

EJEMPLO 5 Funciones que requieren trigonometría

Un avión que vuela a 2 millas de altitud se acerca a una estación de radar, como muestra la **FIGURA 10.2.6**.

a) Expresar la distancia d entre el avión y la estación de radar en función del ángulo de elevación θ.

b) Expresar el ángulo de elevación θ del avión en función de la separación horizontal x entre el avión y la estación de radar.

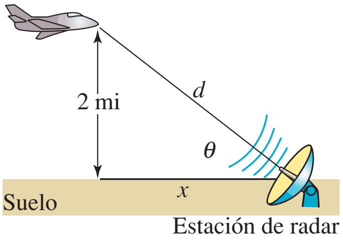


FIGURA 10.2.6 Avión del ejemplo 5

Solución Como se ve en la figura 10.2.6, θ es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo.

a) Se pueden relacionar la distancia d y el ángulo θ con sen $\theta = 2/d$. Se despeja d y resulta

$$d(\theta) = \frac{2}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \text{o sea} \qquad d(\theta) = 2\csc\theta,$$

donde $0° < \theta \leq 90°$.

b) La separación horizontal x y θ se relacionan con $\tan\theta = 2/x$. Se aprovecha la función tangente inversa para despejar θ:

$$\theta(x) = \tan^{-1}\frac{2}{x},$$

donde $0 < x < \infty$. ≡

10.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-25.

1. Un edificio proyecta una sombra de 20 m de longitud. Si el ángulo de la punta de la sombra a un punto en la parte alta del edificio es de 69° ¿qué altura tiene el edificio?

2. Dos árboles están en las orillas opuestas de un río, como se ve en la **FIGURA 10.2.7**. Se mide una línea de referencia de 100 pies del árbol T_1 y de esa posición se mide un ángulo β a T_2, que resulta de 29.7°. Si la línea de referencia es perpendicular al segmento de recta entre T_1 y T_2, calcule la distancia entre los dos árboles.

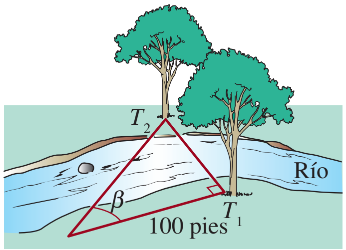


FIGURA 10.2.7 Árboles y río del problema 2

3. Una torre de 50 pies está a la orilla de un río. El ángulo de elevación entre la orilla opuesta y la punta de la torre es de 37°. ¿Qué anchura tiene el río?

4. Un topógrafo usa un geodímetro para medir la distancia, en línea recta, desde un punto en el suelo hasta la cumbre de una montaña. Con la información de la **FIGURA 10.2.8** calcule la altura de la montaña.

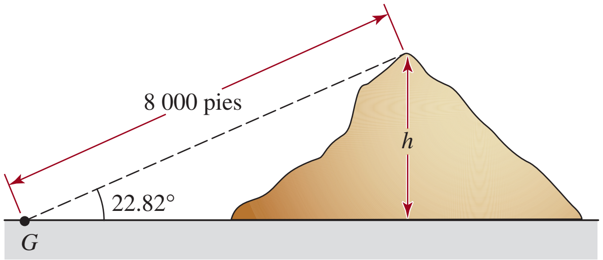


FIGURA 10.2.8 Montaña del problema 4

5. Un observador en la azotea del edificio A mide un ángulo de depresión de 27° entre la horizontal y la base del edificio B. El ángulo de elevación del mismo punto en la azotea a la azotea del segundo edificio es de 41.42°. ¿Cuál es la altura del edificio B, si la altura del edificio A es de 150 pies? Suponga que los edificios A y B están sobre el mismo plano horizontal.

6. Calcule la altura h de una montaña, con la información de la **FIGURA 10.2.9**.

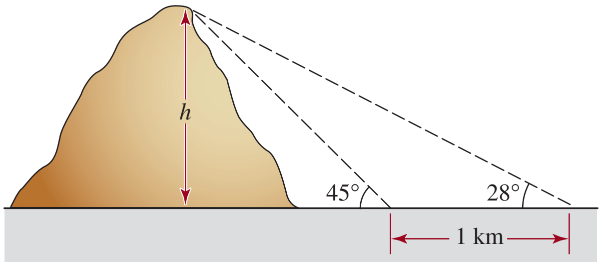


FIGURA 10.2.9 Montaña del problema 6

7. La parte superior de una escalera de 20 pies está recargada contra la orilla del techo de una casa. Si el ángulo de inclinación de la escalera con respecto a la horizontal es de 51°, ¿cuál es la altura aproximada de la casa, y cuál es la distancia del pie de la escalera a la base de la casa?

8. Un avión vuela horizontalmente a 25 000 pies de altura, y se acerca a una estación de radar, ubicada sobre una montaña de 2 000 pies de altura. En determinado momento, el ángulo entre el plato de radar que apunta hacia el avión y la horizontal es de 57°. ¿Cuál es la distancia en línea recta, en millas, entre el avión y la estación de radar en ese instante?

9. Un tramo recto de carretera de 5 millas sube a una montaña de 4 000 pies de altura. Determine el ángulo que forma la carretera con la horizontal.

10. Las dimensiones de una caja se ven en la **FIGURA 10.2.10**. Calcule la longitud de la diagonal entre las esquinas P y Q. ¿Cuál es el ángulo θ que forma la diagonal con la orilla inferior de la caja?

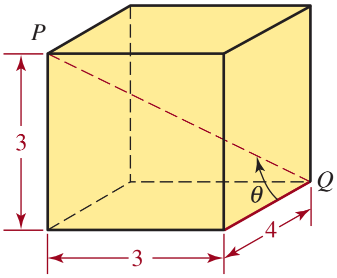


FIGURA 10.2.10 Caja del problema 10

11. Unos observadores en dos pueblos A y B, a cada lado de una montaña de 12 000 pies de altura, miden los ángulos de elevación entre el suelo y la cumbre de la montaña. Vea la **FIGURA 10.2.11**. Suponiendo que los pueblos y la cumbre de la montaña están en el mismo plano vertical, calcule la distancia entre ellos.

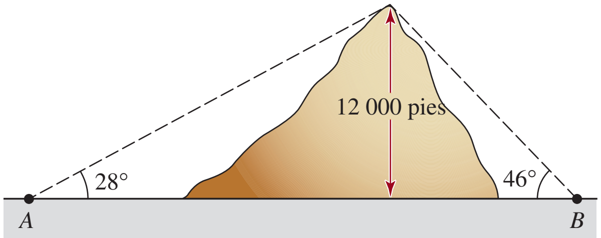
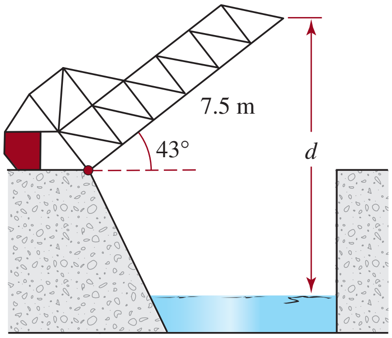
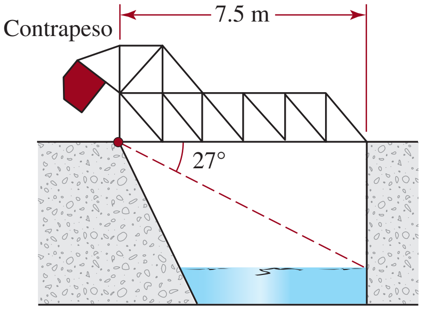


FIGURA 10.2.11 Montaña del problema 11

12. Un puente levadizo* mide 7.5 m de orilla a orilla, y cuando se abre por completo forma un ángulo de 43° con la horizontal. Véase la **FIGURA 10.2.12*a*)**. Cuando el puente se cierra, el ángulo de depresión de la orilla a un punto en la superficie del agua bajo el extremo opuesto es de 27°. Vea la figura 10.2.12*b*). Cuando el puente está totalmente abierto, ¿cuál es la distancia d entre el punto más alto del puente y el agua?



a) Puente abierto



b) Puente cerrado

FIGURA 10.2.12 Puente levadizo del problema 12

13. Una bandera está en la orilla de un acantilado de 50 pies de altura, en la orilla de un río de 40 pies de ancho. Vea la **FIGURA 10.2.13**. Un observador en la orilla opuesta del río mide un ángulo de 9° entre su visual a la punta del asta y su visual a la base del asta. Calcule la altura del asta.

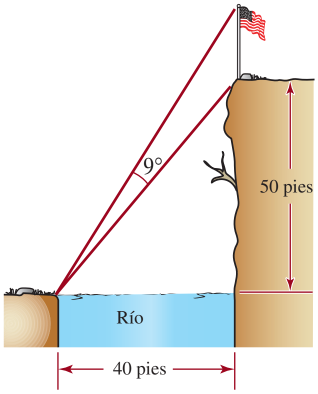
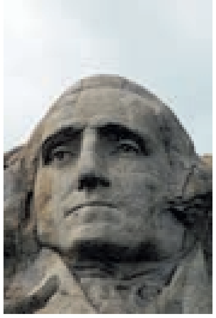


FIGURA 10.2.13 Asta de bandera del problema 13

---

* El puente levadizo de la figura 10.2.12, donde el claro está balanceado continuamente por un contrapeso, se llama puente *basculante*.

14. Desde un mirador a 1 000 pies de la base del monte Rushmore, el ángulo de elevación a la coronilla de la cabeza esculpida de George Washington mide 80.05°, mientras que el ángulo de elevación hasta la punta del mentón es de 79.946°. Calcule la altura de la cabeza de George Washington.



Busto de George
Washington en el
monte Rushmore

15. La longitud de un avión Boeing 747 es de 231 pies. ¿Cuál es la altura del avión, si abarca un ángulo de 2° cuando está directamente arriba de un observador en el suelo? Véase la **FIGURA 10.2.14**.

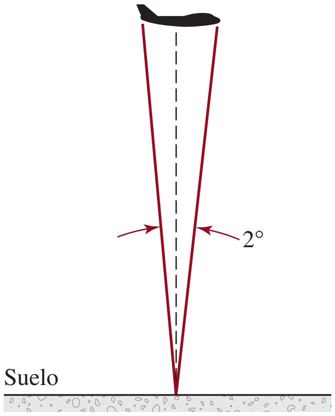


FIGURA 10.2.14 Avión del problema 15

16. La altura del estilo de un gnomon (reloj de Sol) es de 4 pulgadas. Cuando su sombra mide 6 pulgadas, ¿cuál es el ángulo de elevación del Sol?

Reloj de sol

17. Un radar meteorológico puede medir el ángulo de elevación a la parte superior de una tempestad de rayos, y también su distancia (la distancia horizontal a la tempestad). Si la distancia a una tempestad es de 90 km y el ángulo de elevación es de 4°, ¿puede un avión de pasajeros subir 10 km para volar sobre la tempestad?

18. El cielo de nubes es la altitud mínima que tiene la base de las nubes. En los aeropuertos, el cielo de nubes debe tener la altura suficiente para que los despegues y los aterrizajes sean seguros. Por la noche, se lo puede determinar iluminando la base de ellas, con un faro apuntado verticalmente hacia arriba. Si un observador está a 1 km del faro, y el ángulo de elevación a la base de la nube iluminada es de 8°, calcule el cielo de nubes. Véase la **FIGURA 10.2.15**. (Durante el día, los cielos de nubes suelen estimarse a la vista. Sin embargo, si se requiere un valor exacto, se infla un globo para que suba a una velocidad constante conocida. A continuación se suelta y se toma el tiempo hasta que desaparece en la nube. El cielo de nubes se determina multiplicando la velocidad por el tiempo de ascenso; para este cálculo no se requiere trigonometría.)

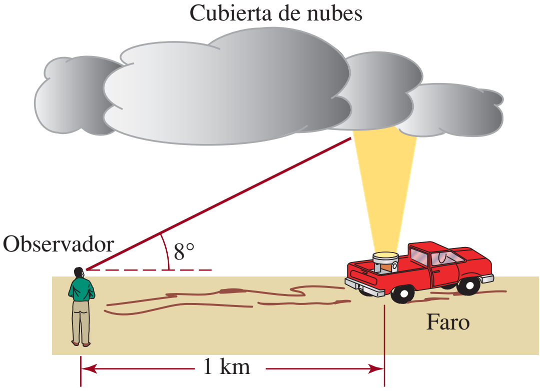


FIGURA 10.2.15 Faro para el problema 18

19. Si suponemos que la Tierra es una esfera, demuestre que $C_\theta = C_e \cos\theta$, donde C_θ es la circunferencia del paralelo de latitud en el ángulo de latitud θ y C_e es la circunferencia de la Tierra en el ecuador. Véase la **FIGURA 10.2.16**. [*Pista:* $R\cos\theta = r$].

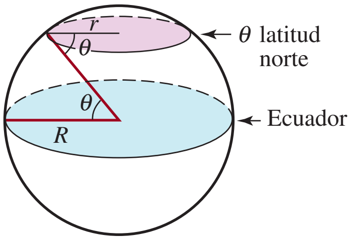


FIGURA 10.2.16 Tierra del problema 19

20. Con el problema 19, y sabiendo que el radio R de la Tierra es de 6 400 km, calcule:

a) La circunferencia del Círculo Ártico, que está a 66°33′ N (66.55° N) de latitud.

b) La distancia "alrededor del mundo" a la latitud de 58°40′ N (58.67° N).

21. La distancia entre la Tierra y la Luna varía mientras ésta gira alrededor de nuestro planeta. En determinado momento se mide el ángulo de **paralaje geocéntrico** que se ve en la **FIGURA 10.2.17**, y resulta de 1°. Calcule, redondeando a las 100 millas, la distancia entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna en ese instante. Suponga que el radio de la Tierra es de 3 963 millas.

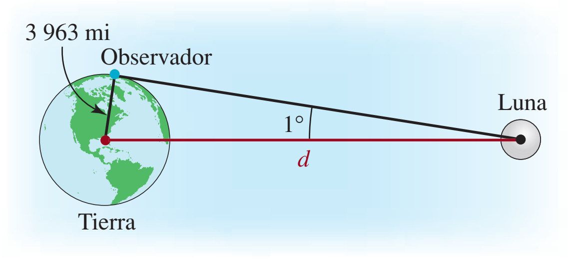


FIGURA 10.2.17 Ángulo del problema 21

22. La longitud final de un flujo de lava volcánica parece decrecer a medida que aumenta la altura de un cráter adventicio por donde sale. Un estudio empírico del monte Etna indica que la longitud final L del flujo de lava, en función de la elevación h, es

$$L = 23 - 0.0053h,$$

Monte Etna

donde L está en kilómetros y h en metros. Suponga que un pueblo siciliano está a 750 m de altura en una pendiente de 10°, directamente abajo de un cráter adventicio que está a 2 500 m. Véase la **FIGURA 10.2.18**. De acuerdo con la fórmula, ¿a qué distancia se acercará el flujo de lava al pueblo?

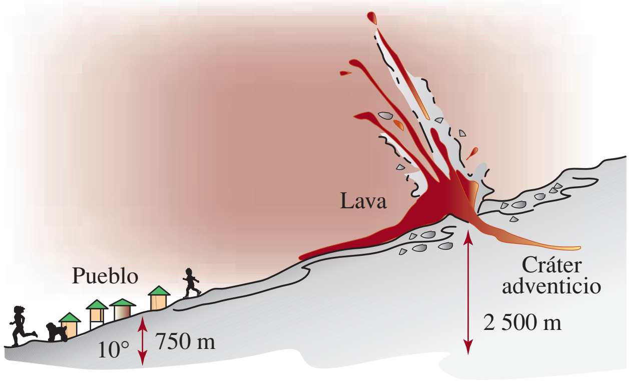


FIGURA 10.2.18 Flujo de lava del problema 22

23. Como se ve en la **FIGURA 10.2.19**, dos estaciones rastreadoras S_1 y S_2 avistan un globo meteorológico entre ellas, con los ángulos respectivos de elevación α y β. Exprese la altura h del globo en función de α y β, y la distancia c entre las estaciones rastreadoras. Suponga que esas estaciones y el globo están en el mismo plano vertical.

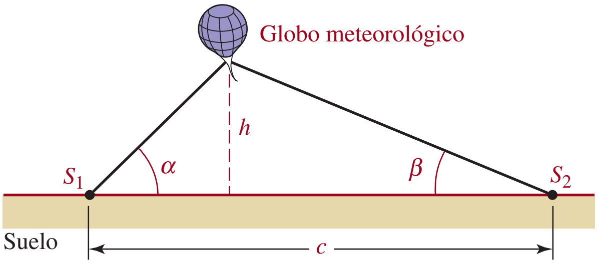


FIGURA 10.2.19 Globo meteorológico del problema 23

24. Un coche en una carrera de "cajas de jabón" rueda cuesta abajo. Con la información de la **FIGURA 10.2.20** calcule la distancia total $d_1 + d_2$ que recorre la caja de jabón.

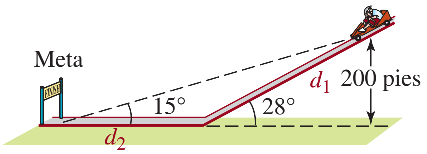


FIGURA 10.2.20 Cajas de jabón del problema 24

25. Obtenga la altura y el área del trapecio isósceles que se ilustra en la **FIGURA 10.2.21**.

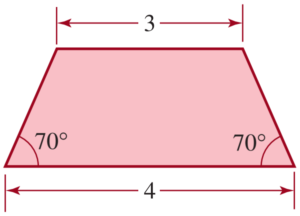


FIGURA 10.2.21 Trapecio del problema 25

26. Considere el rectángulo azul circunscrito alrededor del rectángulo rojo en la **FIGURA 10.2.22**. Con la ayuda de cálculo, se puede demostrar que el área del rectángulo azul es más grande cuando $\theta = \pi/4$. Calcule esta área en términos de a y b.

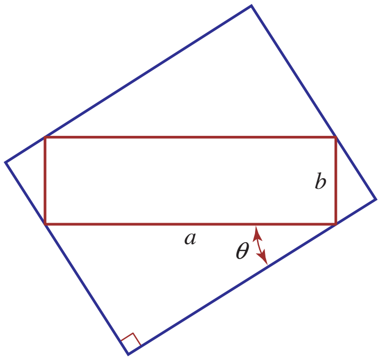


FIGURA 10.2.22 Rectángulos del problema 26

En los problemas 27 a 30, proceda como en el ejemplo 5 y traduzca las palabras a una función adecuada.

27. Un telescopio rastreador, que está a 1.25 km del punto de lanzamiento de un cohete, da seguimiento a un cohete que asciende verticalmente. Exprese la altura h del cohete en función del ángulo de elevación θ.

28. Un faro está a media milla frente a la costa, e ilumina un punto P de la costa. Exprese la distancia d del faro hasta el punto iluminado P en función del ángulo θ, como se ve en la **FIGURA 10.2.23**.

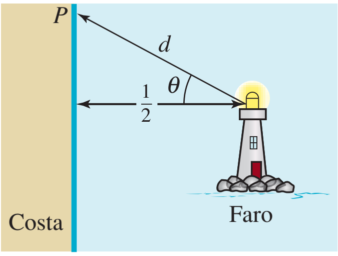


FIGURA 10.2.23 Faro del problema 28

29. Una estatua se coloca sobre un pedestal, como se ve en la **FIGURA 10.2.24**. Exprese el ángulo de la visual θ en función de la distancia x al pedestal.

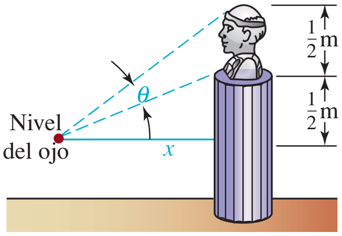


FIGURA 10.2.24 Ángulos de la visual del problema 29

30. Una mujer en una isla desea llegar a un punto R, sobre una costa recta, desde un punto P en la isla. El punto P está a 9 millas de la costa y a 15 millas del punto R. Vea la **FIGURA 10.2.25**. Si la mujer rema en un bote a 3 mi/h hacia un punto Q en tierra y después camina el resto sobre la costa, a 5 mi/h, exprese el tiempo total que tarda la mujer en llegar al punto R, en función del ángulo indicado θ. [*Pista:* distancia = velocidad × tiempo].

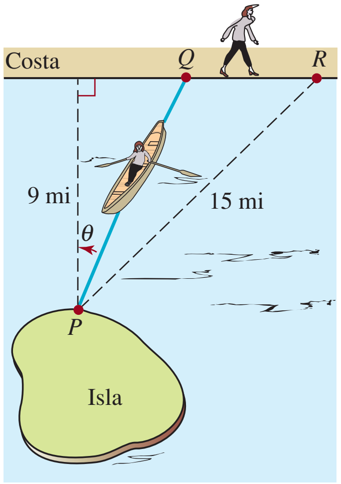


FIGURA 10.2.25 Mujer remando a la costa, problema 30

10.3 Ley de los senos

Introducción En la sección 10.1 se explicó cómo resolver triángulos rectángulos. En esta sección describiremos dos técnicas para resolver triángulos en general.

Ley de los senos Examine el triángulo ABC de la **FIGURA 10.3.1**, cuyos ángulos son α, β y γ, y sus lados opuestos correspondientes son BC, AC y AB. Si se conoce la longitud de un lado y otras dos partes del triángulo, se pueden determinar las tres partes que restan. Una forma de hacerlo es con la **ley de los senos**.

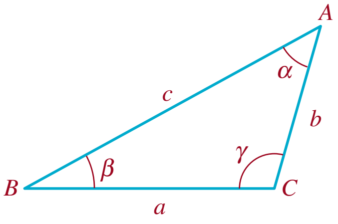


FIGURA 10.3.1 Triángulo general

Teorema 10.3.1 **Ley de los senos**

Supongamos que los ángulos α, β y γ, y los lados opuestos de longitud a, b y c son como se muestran en la figura 10.3.1. Entonces

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}. \qquad (1)$$

COMPROBACIÓN

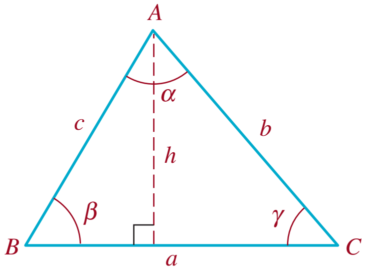


FIGURA 10.3.2 Triángulo agudo

Aunque la ley de los senos es válida para cualquier triángulo, sólo la deduciremos aquí para triángulos acutángulos o agudos, esto es, en los que los tres ángulos, α, β y γ son menores de 90°. Como se ve en la **FIGURA 10.3.2**, sea h la altura desde el vértice A al lado BC. Como la altura es perpendicular a la base BC, determina dos triángulos rectángulos. En consecuencia, se puede escribir

$$\frac{h}{c} = \operatorname{sen}\beta \qquad \text{y} \qquad \frac{h}{b} = \operatorname{sen}\gamma. \tag{2}$$

Así, las ecuaciones (2) se transforman en

$$h = c\operatorname{sen}\beta \qquad \text{y} \qquad h = b\operatorname{sen}\gamma. \tag{3}$$

Se igualan las dos expresiones en (3), lo que da c sen $\beta = b$ sen γ, por lo que

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}. \tag{4}$$

Si se usa la altura desde el vértice C hasta el lado AB de la misma forma, entonces

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}. \tag{5}$$

Al combinar (4) y (5) se llega al resultado que se muestra en (1). ≡

EJEMPLO 1 Determinación de las partes de un triángulo

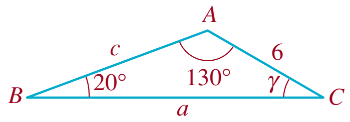


FIGURA 10.3.3 Triángulo del ejemplo 1

Calcular las partes restantes del triángulo de la **FIGURA 10.3.3**.

Solución Sean $\beta = 20°$, $\alpha = 30°$ y $b = 6$. La suma de los ángulos de un triángulo es 180°; entonces, $\gamma = 180° - 20° - 130° = 30°$. De acuerdo con (1),

$$\frac{\operatorname{sen}130°}{a} = \frac{\operatorname{sen}20°}{6} = \frac{\operatorname{sen}30°}{c}. \tag{6}$$

Usaremos la primera igualdad de (6) para despejar a:

$$a = 6\frac{\operatorname{sen}130°}{\operatorname{sen}20°} \approx 13.44.$$

Con la segunda igualdad de (6) se obtiene c:

$$c = 6\frac{\operatorname{sen}30°}{\operatorname{sen}20°} \approx 8.77.$$ ≡

EJEMPLO 2 Altura de un edificio

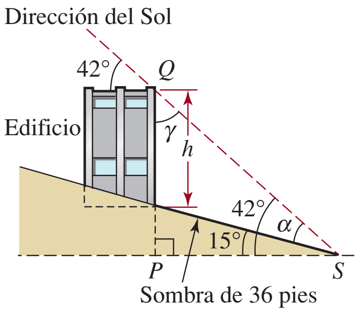


FIGURA 10.3.4 Triángulo QPS del ejemplo 2

Un edificio está al lado de una colina que baja formando un ángulo de 15°. El Sol está sobre la colina, y desde el edificio tiene un ángulo de elevación de 42°. Calcular la altura del edificio, si su sombra mide 36 pies de longitud.

Solución Sea h la altura del edificio sobre la pendiente, con lo cual se forma un triángulo rectángulo QPS como se ve en la **FIGURA 10.3.4**. Ahora bien, $\alpha + 15° = 42°$, por tanto, $\alpha = 27°$. Como $\triangle QPS$ es triángulo rectángulo, $\gamma = 90° - 42° = 48°$. Por la ley de los senos (1),

$$\frac{\operatorname{sen}27°}{h} = \frac{\operatorname{sen}48°}{36} \qquad \text{así que} \qquad h = 36\frac{\operatorname{sen}27°}{\operatorname{sen}48°} \approx 21.99 \text{ pies}.$$ ≡

En los ejemplos 1 y 2, donde los datos fueron *dos ángulos y un lado*, cada triángulo tuvo una solución única. Sin embargo, puede ser que no siempre sea así, cuando los datos de los triángulos sean *dos lados y un ángulo opuesto a uno de esos lados*. El siguiente ejemplo ilustra este caso.

EJEMPLO 3 Dos triángulos

Calcule las partes restantes del triángulo con $\beta = 50°$, $b = 5$ y $c = 6$.

Solución Por la ley de los senos,

$$\frac{\operatorname{sen} 50°}{5} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{6} \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen} \gamma = \frac{6}{5} \operatorname{sen} 50° \approx 0.9193.$$

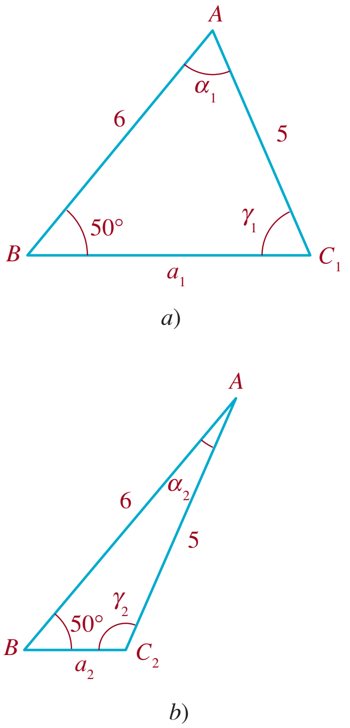
Con una calculadora puesta en modo grados, se obtiene el resultado $\gamma \approx 66.82°$. Llegados aquí es esencial recordar que la función seno también es positiva para ángulos en el segundo cuadrante. En otras palabras, hay otro ángulo que satisface $0° \leq \gamma \leq 180°$ y para el cual $\operatorname{sen} \gamma \approx 0.9193$. Si se usa 66.82° como ángulo de referencia, se ve que el ángulo del segundo cuadrante es $180° - 66.82° = 113.18°$. Por consiguiente, las dos posibilidades de γ son $\gamma_1 \approx 66.82°$ y $\gamma_2 \approx 113.18°$. Así, como se ve en la **FIGURA 10.3.5**, hay dos triángulos posibles, ABC_1 y ABC_2, que satisfacen las tres condiciones de los datos.

A fin de terminar la solución del triángulo ABC_1 (figura 10.3.5*a*), primero se determina $\alpha_1 = 180° - \gamma_1 - \beta \approx 63.18°$. Para calcular el lado opuesto a este ángulo se usa

$$\frac{\operatorname{sen} 63.18°}{a_1} = \frac{\operatorname{sen} 50°}{5} \qquad \text{que da como resultado} \qquad a_1 = 5\left(\frac{\operatorname{sen} 63.18°}{\operatorname{sen} 50°}\right) \approx 5.83$$

Para completar la solución del triángulo ABC_2 (figura 10.3.5*b*), se determina $\alpha_2 = 180° - \gamma_2 - \beta \approx 16.82°$. Entonces, de

$$\frac{\operatorname{sen} 16.82°}{a_2} = \frac{\operatorname{sen} 50°}{5} \qquad \text{se ve que} \qquad a_2 = 5\left(\frac{\operatorname{sen} 16.82°}{\operatorname{sen} 50°}\right) \approx 1.89. \qquad \equiv$$



a)

b)

FIGURA 10.3.5 Triángulos del ejemplo 3

Caso ambiguo Cuando se resuelven triángulos, al caso en el que los datos son dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos se le llama **caso ambiguo**. Acabamos de ver, en el ejemplo 3, que los datos dados pueden determinar dos triángulos diferentes. En el caso ambiguo pueden surgir otras complicaciones. Por ejemplo, suponga que se especifican la longitud de los lados AB y AC (esto es, los lados c y b), y el ángulo β del triángulo ABC. Como se ve en la **FIGURA 10.3.6**, se traza el ángulo β y se marca el lado AB con longitud c, para localizar los vértices A y B. El tercer vértice, C, está en la base, y se traza un arco de círculo con radio b (la longitud de AC) con centro en A. Como se ve en la **FIGURA 10.3.7**, hay cuatro resultados posibles en esta construcción:

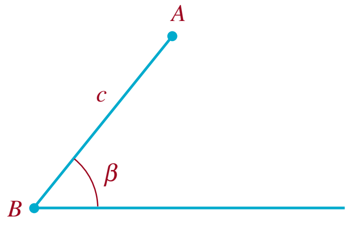
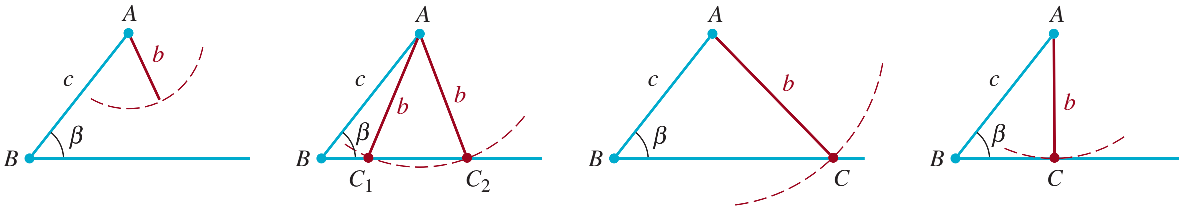


FIGURA 10.3.6 Base horizontal, ángulo β y lado AB

- El arco no interseca la base y no se forma un triángulo.
- El arco interseca la base en dos puntos distintos, C_1 y C_2, y se forman dos triángulos (como en el ejemplo 3).



a) No se forma triángulo *b*) Dos triángulos *c*) Un solo triángulo *d*) Triángulo rectángulo

FIGURA 10.3.7 Posibilidades de solución del caso ambiguo en la ley de los senos

- El arco interseca la base en un punto, y se forma un triángulo.
- El arco es tangente a la base, y se forma un solo triángulo rectángulo.

EJEMPLO 4 Determinación de las partes de un triángulo

Calcular las partes restantes de un triángulo con $\beta = 40^\circ$, $b = 5$ y $c = 9$.

Solución De acuerdo con la ley de los senos (1),

$$\frac{\operatorname{sen} 40^\circ}{5} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{9} \qquad \text{y así} \qquad \operatorname{sen}\gamma = \frac{9}{5}\operatorname{sen} 40^\circ \approx 1.1570.$$

Ya que el seno de cualquier triángulo debe estar entre -1 y 1, entonces sen $\gamma \approx 1.1570$ es imposible. Eso quiere decir que el triángulo no tiene solución; el lado b no tiene la longitud suficiente para llegar a la base. Es el caso que se ilustra en la figura 10.3.7*a*). ≡

10.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-25.

En los problemas 1 a 10, use la ley de los senos para resolver el triángulo.

En los problemas 1 a 16, vea la figura 10.3.1.

1. $\alpha = 80^\circ, \beta = 20^\circ, b = 7$

2. $\alpha = 60^\circ, \beta = 15^\circ, c = 30$

3. $\beta = 37^\circ, \gamma = 51^\circ, a = 5$

4. $\alpha = 30^\circ, \gamma = 75^\circ, a = 6$

5. $\beta = 72^\circ, b = 12, c = 6$

6. $\alpha = 120^\circ, a = 9, c = 4$

7. $\gamma = 62^\circ, b = 7, c = 4$

8. $\beta = 110^\circ, \gamma = 25^\circ, a = 14$

9. $\gamma = 15^\circ, a = 8, c = 5$

10. $\alpha = 55^\circ, a = 20, c = 18$

11. $\gamma = 150^\circ, b = 7, c = 5$

12. $\alpha = 35^\circ, a = 9, b = 12$

13. $\beta = 30^\circ, a = 10, b = 7$

14. $\alpha = 140^\circ, \gamma = 20^\circ, c = 12$

15. $\alpha = 20^\circ, a = 8, c = 27$

16. $\alpha = 75^\circ, \gamma = 45^\circ, b = 8$

≡ Aplicaciones diversas

17. Longitud de una alberca Una cuerda de 10 pies que hay para medir la longitud entre dos puntos, A y B, en los extremos opuestos de una alberca en forma de riñón, no es lo bastante larga. Se encuentra un tercer punto C tal que la distancia de A a C es de 10 pies. Se determina que el ángulo ACB es de 115°, y que el ángulo ABC es de 35°. Calcule la distancia de A a B. Vea la **FIGURA 10.3.8**.

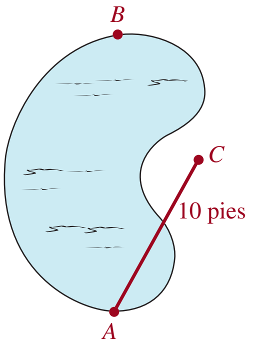


FIGURA 10.3.8 Alberca del problema 17

18. Ancho de un río Dos puntos, A y B, están en las orillas opuestas de un río. Otro punto, C, está en la misma orilla del río que B, a una distancia de 230 pies de él. Si el ángulo ABC es de 105° y el ángulo ACB es de 20°, calcule la distancia de A a B a través del río.

19. Longitud de un poste de teléfono Un poste de teléfono forma un ángulo de 82° con la horizontal. Como se ve en la **FIGURA 10.3.9**, el ángulo de elevación del Sol es de 76°. Calcule la longitud del poste telefónico, si su sombra mide 3.5 m (suponga que la inclinación del poste se aleja del Sol, y está en el mismo plano que el poste y el Sol).

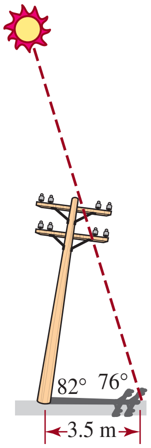


FIGURA 10.3.9 Poste telefónico del problema 19

20. Desnivelado Un hombre de 5 pies 9 pulgadas de estatura está parado en una acera que baja en ángulo constante. Un poste de alumbrado vertical, directamente atrás de él, forma una sombra de 25 pies de longitud. El ángulo de depresión desde la parte superior del hombre hasta la inclinación de su sombra es de 31°. Calcule el ángulo α, que se indica en la **FIGURA 10.3.10**, que forma la acera con la horizontal.

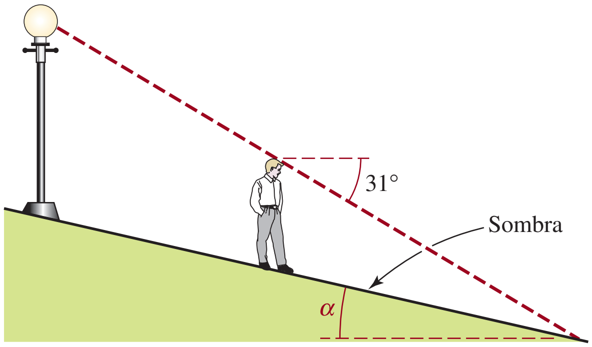


FIGURA 10.3.10 Acera con pendiente del problema 20

21. ¿Altura? Si el señor del problema 20 está a 20 pies del poste de alumbrado, pendiente abajo por la acera, calcule la altura de la lámpara sobre la acera.

22. Avión con altitud Los ángulos de elevación hacia un avión se miden desde la parte superior y la base de un edificio que tiene 20 m de altura. El ángulo desde la azotea es de 38°, y desde la base es de 40°. Calcule la altitud del avión.

23. Ángulo de golpeo La distancia del tee al green de un determinado hoyo de golf es de 370 yardas. Un golfista realiza su primer golpe y coloca la pelota a 210 yardas del hoyo. Desde el punto donde se encuentra la pelota, el golfista mide un ángulo de 160° entre el tee y el green. Obtenga el ángulo de golpeo desde el tee medido desde la línea punteada que va del tee al green y que se muestra en la **FIGURA 10.3.11**.

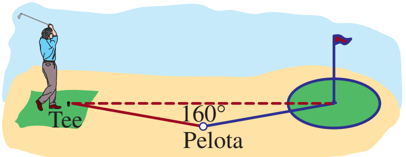


FIGURA 10.3.11 Ángulo de golpeo del problema 23

24. En el ejercicio anterior, ¿cuál es la distancia de la pelota al green?

10.4 Ley de los cosenos

■ Introducción Los triángulos para los que se conocen *tres lados* o *dos lados y el ángulo incluido* (esto es, el ángulo formado por los lados indicados) no se puede resolver en forma directa usando la ley de los senos. El método que describiremos a continuación se puede usar para resolver triángulos en estos dos casos.

■ Teorema de Pitágoras En un triángulo rectángulo, como el de la **FIGURA 10.4.1**, la longitud c de la hipotenusa se relaciona con las longitudes a y b de los otros dos lados, mediante el teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{1}$$

Esta última ecuación es un caso especial de una fórmula general para relacionar las longitudes de los lados de *cualquier* triángulo.

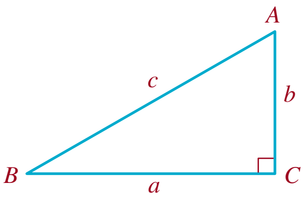


FIGURA 10.4.1 Triángulo rectángulo

Ley de los cosenos La generalización de (1) se llama **ley de los cosenos**. Como la ley de los senos (1) de la sección 10.3, la ley de los cosenos es válida para cualquier triángulo.

Teorema 10.4.1 Ley de los cosenos

Sean los ángulos α, β y γ, y los lados opuestos a ellos sean a, b y c, como se ve en la figura 10.3.1. Entonces

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned} \tag{2}$$

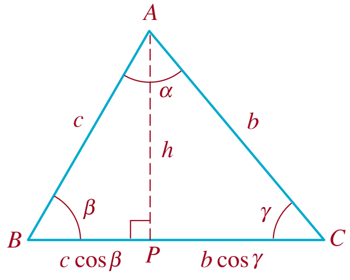


FIGURA 10.4.2 Triángulo acutángulo

Comprobacion Igual que (1), la ley de los cosenos es válida para cualquier triángulo. Pero por comodidad deduciremos las dos primeras ecuaciones de (2) usando el mismo triángulo acutángulo que el de la figura 10.3.2. Sin embargo, esta vez sea P el punto donde la altura desde el vértice A cruza al lado BC. Entonces, como tanto el $\triangle BPA$ y el $\triangle CPA$ de la **FIGURA 10.4.2** son triángulos rectángulos, de acuerdo con (1),

$$c^2 = h^2 + (c\cos\beta)^2 \tag{3}$$

y

$$b^2 = h^2 + (b\cos\gamma)^2. \tag{4}$$

Ahora, la longitud de BC es $a = c \cos \beta + b \cos \gamma$, por lo que

$$c\cos\beta = a - b\cos\gamma. \tag{5}$$

Además, según (4),

$$h^2 = b^2 - (b\cos\gamma)^2. \tag{6}$$

Las ecuaciones (5) y (6) se sustituyen en (3), y simplificando se llega a la tercera de las ecuaciones en (2):

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 - (b\cos\gamma)^2 + (a - b\cos\gamma)^2 \\ &= b^2 - b^2\cos^2\gamma + a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2\cos^2\gamma \end{aligned}$$

o

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{7}$$

Note que la ecuación (7) se reduce al teorema de Pitágoras (1) cuando $\gamma = 90°$.

De igual modo, si se usan $b \cos \gamma = a - c \cos \beta$, y $h^2 = c^2 - (c \cos \beta)^2$ para eliminar $b \cos \gamma$ y h^2 en (4), se obtiene la segunda de las ecuaciones en (2).

≡

EJEMPLO 1 Determinación de las partes de un triángulo

Calcular las partes restantes del triángulo que muestra la **FIGURA 10.4.3**.

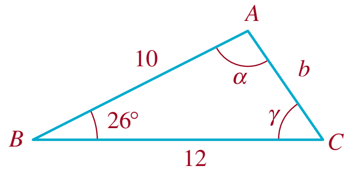


FIGURA 10.4.3 Triángulo del ejemplo 1

Solución Primero, si se llama b al lado desconocido y se identifican $a = 12$, $c = 10$ y $\beta = 26°$, entonces, de acuerdo con la segunda de las ecuaciones en (2),

$$b^2 = (12)^2 + (10)^2 - 2(12)(10)\cos 26°.$$

Por consiguiente, $b^2 \approx 28.2894$ y $b \approx 5.32$.

A continuación se aplica la ley de los cosenos para calcular los demás ángulos del triángulo de la figura 10.4.3. Si γ es el ángulo del vértice C, entonces la tercera de las ecuaciones (2) da como resultado

$$10^2 = 12^2 + (5.32)^2 - 2(12)(5.32)\cos\gamma \quad \text{o sea} \quad \cos\gamma \approx 0.5663.$$

Con ayuda de una calculadora se ve que $\gamma \approx 55.51°$. Nótese que como el coseno de un ángulo entre 90° y 180° es negativo, no hay necesidad de considerar dos posibilidades, como lo hicimos en el ejemplo 3 de la sección 10.3. Por último, el ángulo del vértice A es $\alpha = 180° - \beta - \gamma$, o sea $\alpha \approx 98.89°$. ≡

Observe, en el ejemplo 1, que después de determinado b, se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos. Entonces, se podía haber usado la ley de los senos para calcular el ángulo γ.

En el ejemplo que sigue describiremos el caso en el que los datos son las longitudes de los tres lados.

EJEMPLO 2 Determinación de los ángulos en un triángulo

Calcular los ángulos α, β y γ del triángulo que muestra la **FIGURA 10.4.4**.

Solución Aplicaremos la ley de los cosenos para calcular el ángulo opuesto al lado más largo:

$$9^2 = 6^2 + 7^2 - 2(6)(7)\cos\gamma \qquad \text{o sea} \qquad \cos\gamma = \tfrac{1}{21}.$$

Entonces, con una calculadora se comprueba que $\gamma \approx 87.27°$. Aunque podríamos usar la ley de los cosenos, optaremos por calcular β usando la ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{6} = \frac{\operatorname{sen} 87.27°}{9} \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{6}{9}\operatorname{sen} 87.27° \approx 0.6659.$$

Debido a que γ es el ángulo opuesto, el lado más largo es el ángulo más grande del triángulo, por lo que β debe ser un ángulo agudo. Así, sen $\beta \approx 0.6659$ da $\beta \approx 41.75°$. Por último, de $\alpha = 180° - \beta - \gamma$ determinamos $\alpha \approx 50.98°$. ≡

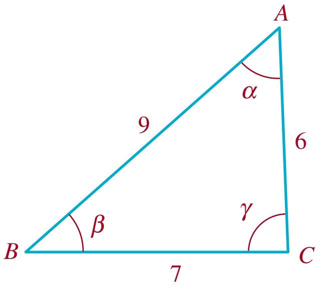
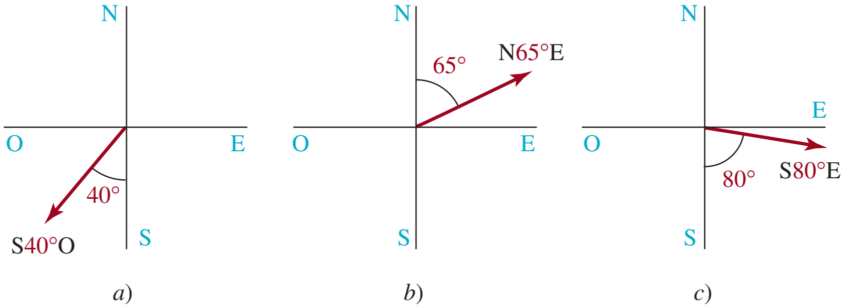


FIGURA 10.4.4 Triángulo del ejemplo 2

Rumbo En navegación se indican direcciones usando rumbos. Un **rumbo** (o curso, derrotero o trayectoria) designa el ángulo agudo que forma una línea con la línea norte-sur. Por ejemplo, la **FIGURA 10.4.5*a*)** ilustra un rumbo de S40°O, lo que quiere decir que es hacia los 40 grados al oeste del sur. Los rumbos en las figuras 10.4.5*b*) y 10.4.5*c*) son N65°E y S80°E, respectivamente.



a) *b*) *c*)

FIGURA 10.4.5 Tres ejemplo de rumbos

EJEMPLO 3 Rumbos de dos barcos

Dos barcos salen de un puerto a las 7:00 a.m. Uno viaja a 12 nudos (millas náuticas por hora) y el otro a 10 nudos. Si el barco más rápido mantiene un rumbo de N47°O y el rumbo del otro es S20°O, ¿cuál es su separación (redondeando a la milla náutica) a las 11:00 a.m. de ese día?

Solución El tiempo transcurrido es 4 horas; el barco más veloz ha recorrido $4 \cdot 12 = 48$ millas náuticas desde el puerto, y el más lento $4 \cdot 10 = 40$ millas náuticas. Con estas distancias y los rumbos indicados se puede trazar el triángulo (válido a las 11:00 a.m.) que muestra la **FIGURA 10.4.6**. En ese triángulo, c representa la distancia que separa a los barcos, y γ es el ángulo opuesto a ese lado. Como $47° + \gamma + 20° = 180°$, se ve que $\gamma = 113°$. Por último, por la ley de los cosenos,

$$c^2 = 48^2 + 40^2 - 2(48)(40)\cos 113°,$$

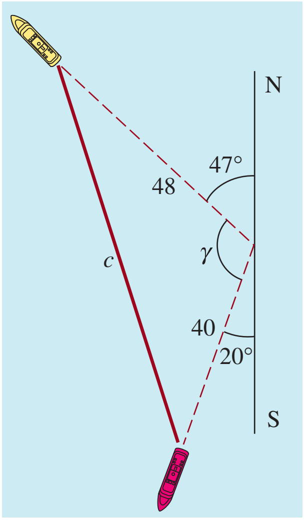
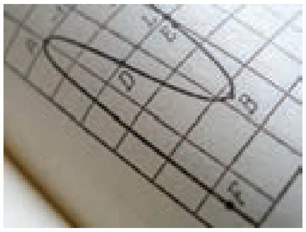


FIGURA 10.4.6 Barcos del ejemplo 3

el resultado es $c^2 \approx 5\,404.41$, y $c \approx 74.51$. Entonces, la distancia entre los barcos (a la milla náutica más cercana) es de 74 millas náuticas. ≡



Notas del aula

i) Un primer paso importante para resolver triángulos es determinar cuál de los tres métodos que hemos descrito se va a usar: trigonometría del triángulo rectángulo, la ley de los senos o la ley de los cosenos. La tabla que sigue describe las diversas clases de problemas e indica el método más apropiado para cada uno. El término *oblicuo* indica cualquier triángulo que no sea triángulo rectángulo.

Tipo de triángulo	Datos	Técnica
Rectángulo	Dos lados o un ángulo y un lado	Definiciones básicas de seno, coseno y tangente; teorema de Pitágoras
Oblicuo	Tres lados	Ley de los cosenos
Oblicuo	Dos lados y el ángulo incluido	Ley de los cosenos
Oblicuo	Dos ángulos y un lado	Ley de los senos
Oblicuo	Dos lados y un ángulo opuesto a uno de los lados	Ley de los senos (si el ángulo dado es agudo, es un caso ambiguo)

ii) A continuación presentamos algunos consejos adicionales para resolver triángulos.

- Con frecuencia, los alumnos usan la ley de los senos cuando se podría haber usado una función trigonométrica del triángulo rectángulo. El método más sencillo y más eficiente es este último.
- Cuando se dan los tres lados, verifique primero si la longitud del lado más largo es mayor o igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados. Si lo es, no puede haber solución alguna (aunque la información indique el uso de un método de ley de los cosenos). Esto se debe a que la distancia más corta entre dos puntos es la longitud del segmento de recta que los une.
- Si obtiene usted un valor mayor que 1 para el seno de un ángulo al aplicar la ley de los senos, el problema no tiene solución.
- En el caso ambiguo de la ley de los senos, al despejar el primer ángulo desconocido debe usted tener en cuenta *el ángulo agudo determinado con su calculadora y también su suplemento como soluciones posibles*. El suplemento será una solución si la suma del suplemento y el ángulo proporcionado del triángulo es menor que 180°.

10.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-25.

En los problemas 1 a 16 use la ley de los cosenos para resolver el triángulo.

◀ En los problemas 1 a 16, vea la figura 10.3.1.

1. $\gamma = 65°, a = 5, b = 8$

2. $\beta = 48°, a = 7, c = 6$

3. $a = 8, b = 10, c = 7$

4. $\gamma = 31.5°, a = 4, b = 8$

5. $\gamma = 97.33°, a = 3, b = 6$

6. $a = 7, b = 9, c = 4$

7. $a = 11, b = 9.5, c = 8.2$

8. $\alpha = 162°, b = 11, c = 8$

9. $a = 5, b = 7, c = 10$

10. $a = 6, b = 12, c = 7$

11. $a = 3, b = 4, c = 5$

12. $a = 5, b = 12, c = 13$

13. $a = 6, b = 8, c = 12$

14. $\beta = 130°, a = 4, c = 7$

15. $\alpha = 22°, b = 3, c = 9$

16. $\beta = 100°, a = 22.3, c = 16.1$

≡ Aplicaciones diversas

17. **¿Distancia?** Un barco navega 22 millas hacia el oeste, desde un puerto. Después navega hacia S62°O otras 15 millas náuticas. ¿A qué distancia está del puerto?

18. **¿A qué distancia?** Dos excursionistas salen de su campamento al mismo tiempo, con rumbos N42°O y S20°E, respectivamente. Si cada uno de ellos camina a un promedio de 5 km/h ¿a qué distancia están después de 1 hora?

19. **Rumbos** En el mapa de un excursionista, el punto *A* está a 2.5 pulg hacia el oeste del punto *B*, y el punto *C* está a 3.5 pulg de *B*, y a 4.2 pulg de *A*, respectivamente. Vea la **FIGURA 10.4.7**. Calcule ***a***) el rumbo de *A* a *C* y ***b***) el rumbo de *B* a *C*.

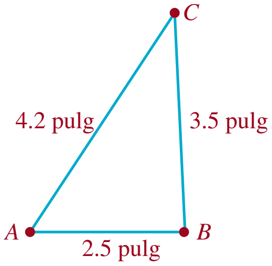


FIGURA 10.4.7 Triángulo del problema 19

20. **¿Cuánto tardan?** Dos barcos salen del puerto al mismo tiempo; uno va a 15 nudos y el otro a 12 nudos. Mantienen rumbos de S42°O y S10°E, respectivamente. Después de tres horas, el primer barco queda varado y de inmediato el segundo barco va en su ayuda.

- ***a***) ¿Cuánto tardará el segundo barco en llegar al primero, si viaja a 14 nudos?
- ***b***) ¿Qué rumbo tomará?

21. **Brazo robótico** Un brazo robótico bidimensional "sabe" dónde está, porque mantiene registro del ángulo α de su "hombro" y del ángulo β de su "codo". Como se ve en la **FIGURA 10.4.8** este brazo tiene un punto fijo de rotación en el origen. El ángulo del hombro se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del eje *x*, y el ángulo del codo se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj, desde el brazo hasta el antebrazo. Suponga que el brazo y el antebrazo tienen 2 de longitud, y que el ángulo β del codo no puede "dislocarse" más allá de 180°. Calcule los ángulos α y β que pongan la mano del robot en el punto (1, 2).

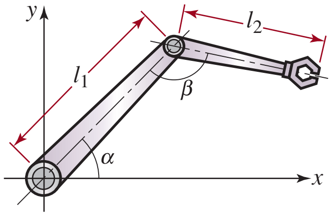


FIGURA 10.4.8 Brazo robótico del problema 21

22. **¿Hacia dónde?** Dos torres vigía están situadas en las cumbres de las montañas *A* y *B*, a 4 millas de distancia. Un equipo de bomberos en helicóptero está en un valle en el punto *C*, a 3 millas de *A* y a 2 millas de *B*. Usando la línea entre *A* y *B* como referencia, un vigía ve un incendio en un ángulo de 40° de la torre *A*, y a 82° de la torre *B*. Véase la **FIGURA 10.4.9**. ¿A qué ángulo, medido a partir de *CB*, debe volar el helicóptero para dirigirse hacia el incendio?

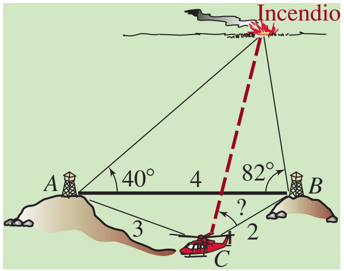


FIGURA 10.4.9 Incendio del problema 22

23. **Cometa** Para el cometa que se muestra en la **FIGURA 10.4.10**, use la ley de los cosenos para calcular las longitudes de las dos cañas que se requieren para los soportes diagonales.

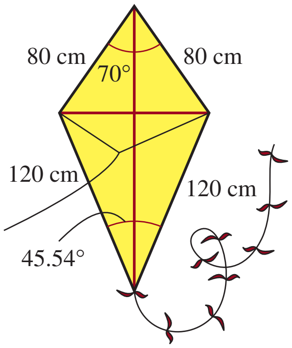


FIGURA 10.4.10 Cometa del problema 23

24. **Anchura de un cañón** Desde el suelo de un cañón se necesitan 62 pies de soga para alcanzar la cima de la pared del cañón y 86 pies para alcanzar la cima de la pared opuesta (**FIGURA 10.4.11**). Si las dos sogas forman un ángulo de 123°, ¿cuál es la distancia d desde la cima de una pared del cañón a la otra?

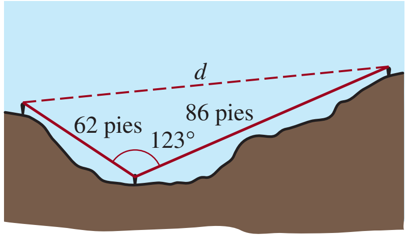


FIGURA 10.4.11 Cañón del problema 24

Para la discusión

25. **Fórmula de Herón** Use la ley de cosenos para derivar la fórmula de Herón*

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

del área de un triángulo con lados a, b, c, respectivamente, y $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

26. **Parcela de jardín** Use la fórmula de Herón del problema 25 para hallar el área de una parcela de jardín triangular si las longitudes de los tres lados son de 25, 32 y 41 m.

27. **Parcela de esquina** Halle el área de la parcela de esquina irregular que se muestra en la **FIGURA 10.4.12**. [*Pista:* divida la parcela en dos parcelas triangulares como se muestra y luego busque el área de cada triángulo. Use la fórmula de Herón del problema 25 para calcular el área del triángulo agudo].

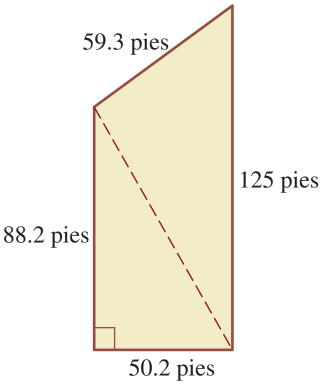


FIGURA 10.4.12 Parcela de esquina del problema 27

28. **Más área** Use la fórmula de Herón del problema 25 para encontrar el área de un triángulo con vértices ubicados en (3, 2), (−3, −6) y (0, 6) en un sistema de coordenadas rectangular.

29. **Hombre azul** El esfuerzo en subir un tramo de escalera depende en gran medida del ángulo de flexión de la rodilla delantera. Un modelo simplificado de un hombre palito que sube una escalera indica que la máxima flexión de la rodilla ocurre cuando la pierna trasera está estirada y las caderas están directamente encima del talón del pie delantero. Vea la **FIGURA 10.4.13**. Demuestre que

$$\cos\theta = \left(\frac{R}{a}\right)\sqrt{4 - \left(\frac{T}{a}\right)^2} + \frac{(T/a)^2 - (R/a)^2}{2} - 1,$$

donde θ es el ángulo de la articulación de la rodilla, $2a$ es el largo de la pierna, R es la subida de un solo escalón y T es el ancho de un escalón. [*Pista:* sea h la distancia vertical desde la cadera hasta el talón de la pierna delantera, como se muestra en la figura. Establezca dos ecuaciones que involucren a h: una aplicando el teorema de Pitágoras al ángulo recto cuya hipotenusa consiste en la pierna trasera de longitud $2a$, y la otra usando la ley de cosenos en el ángulo θ. Luego elimine h y resuelva cos θ].

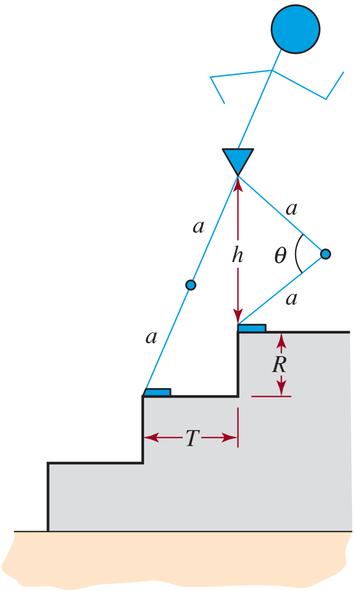


FIGURA 10.4.13 Hombre azul del problema 29

---

* Esta fórmula se llama así en honor de Herón, matemático griego, pero el mérito debería atribuirse en realidad a Arquímedes.

10.5 Movimiento armónico simple

Introducción Muchos objetos físicos vibran u oscilan en forma regular, moviéndose de aquí para allá a través de un intervalo de tiempo determinado. Algunos ejemplos son los péndulos de relojes, una masa sobre un resorte, las ondas sonoras, las cuerdas de una guitarra que se puntean, el corazón humano, la marea y la corriente alterna. En esta sección nos enfocaremos en los modelos matemáticos del movimiento oscilatorio no amortiguado de una masa sobre un resorte.

Antes de pasar a la discusión principal tenemos que abordar la gráfica de la suma de múltiplos constantes de cos Bx y sen Bx, es decir $y = c_1 \cos Bx + c_2 \operatorname{sen} Bx$, donde c_1 y c_2 son constantes.

Adición de dos funciones senoidales En la sección 9.2 hemos examinado las gráficas de curvas de senos y cosenos horizontalmente desplazadas. Resulta que cualquier combinación lineal de una función seno y una función coseno de la forma

$$y = c_1 \cos Bx + c_2 \operatorname{sen} Bx \tag{1}$$

donde c_1 y c_2 son ambas constantes, se puede expresar ya sea como una función seno desplazada $y = A \operatorname{sen}(Bx + \phi)$, $B > 0$, o como una función coseno desplazada $y = A \cos(Bx + \phi)$. Note que en (1) las funciones seno y coseno sen Bx y cos Bx tienen el mismo periodo $2\pi/B$.

EJEMPLO 1 Adición de un seno y un coseno

Grafique la función $y = \cos 2x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$.

Solución Con una herramienta de graficación hemos elaborado la **FIGURA 10.5.1** para cuatro ciclos de las gráficas de $y = \cos 2x$ (en rojo) y $y = -\sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$ (en verde). En la **FIGURA 10.5.2** es obvio que el periodo de la suma de estas dos funciones es π, el periodo común de cos $2x$ y sen $2x$. También es claro que la gráfica azul es una función seno (o coseno) horizontalmente desplazada. Aunque la figura 10.5.2 sugiere que la amplitud de la función $y = \cos 2x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$ es 2, el desplazamiento de fase exacto de la gráfica ciertamente *no* es evidente.

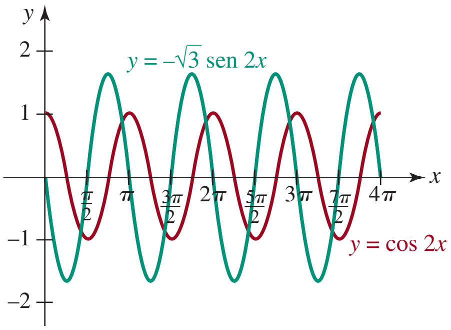


FIGURA 10.5.1 Gráficas superpuestas de $y = \cos 2x$ y $y = -\sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$ del ejemplo 1

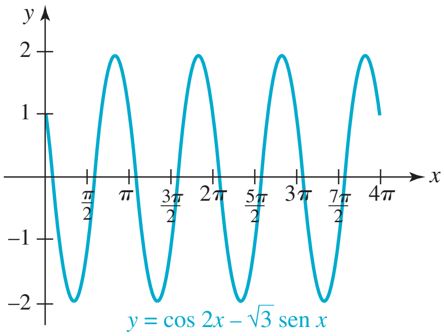


FIGURA 10.5.2 Gráfica de la suma $y = \cos 2x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$ del ejemplo 1 ≡

Reducción a una función seno Examinamos solamente la reducción de (1) a la forma $y = A \operatorname{sen}(Bx + \phi)$, $B > 0$.

La forma senoidal $y = A$ sen $(Bx + \phi)$ es un poco más fácil de usar que la forma cosenoidal $y = A \cos (Bx + \phi)$.

Teorema 10.5.1 **Reducción de (1) a (2)**

Para los números reales c_1, c_2, B y x,

$$c_1\cos Bx + c_2\operatorname{sen} Bx = A\operatorname{sen}(Bx + \phi), \tag{2}$$

donde A y ϕ están definidos por

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \tag{3}$$

y

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi &= \frac{c_1}{A} \\ \cos\phi &= \frac{c_2}{A} \end{aligned}\right\} \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}. \tag{4}$$

COMPROBACIÓN

Para comprobar (2) utilizamos la fórmula de suma (7) de la sección 9.4:

$$\begin{aligned} A\operatorname{sen}(Bx + \phi) &= A\operatorname{sen} Bx\cos\phi + A\cos Bx\operatorname{sen}\phi \\ &= (A\operatorname{sen}\phi)\cos Bx + (A\cos\phi)\operatorname{sen} Bx \\ &= c_1\cos Bx + c_2\operatorname{sen} Bx \end{aligned}$$

e identificamos A sen $\phi = c_1$, A cos $\phi = c_2$. Por lo tanto, sen $\phi = c_1/A = c_1/\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y $\cos\phi = c_2/A = c_2/\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. ≡

EJEMPLO 2 Ejemplo 1 revisitado

Exprese $y = \cos 2x - \sqrt{3}\operatorname{sen} 2x$ como una sola función seno.

Solución Mediante las identificaciones $c_1 = 1$, $c_2 = -\sqrt{3}$ y $B = 2$ tenemos, según (3) y (4),

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi &= \frac{1}{2} \\ \cos\phi &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \tan\phi = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Aunque $\tan\phi = -1/\sqrt{3}$, no podemos ciegamente suponer que $\phi = \tan^{-1}(-1/\sqrt{3})$. El ángulo que obtenemos para ϕ debe ser consistente con los signos algebraicos de sen ϕ y cos ϕ. Puesto que sen $\phi > 0$ y cos $\phi < 0$, el lado terminal del ángulo ϕ se encuentra en el segundo cuadrante. Pero visto que el rango de la función de tangente inversa es el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, $\tan^{-1}(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6$ es un cuarto ángulo de cuadrante. El ángulo correcto se encuentra utilizando el ángulo de referencia $\pi/6$ para $\tan^{-1}(-1/\sqrt{3})$ para encontrar el segundo ángulo de cuadrante

$$\phi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ radianes.}$$

Por tanto, $y = \cos 2x - \sqrt{3}\operatorname{sen} 2x$ se puede reescribir como

$$y = 2\operatorname{sen}\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{o} \quad y = 2\operatorname{sen} 2\left(x + \frac{5\pi}{12}\right).$$

Por ende la gráfica $y = \cos 2x - \sqrt{3}$ sen $2x$ es la gráfica de $y = 2$ sen $2x$, que tiene la amplitud 2, el periodo $2\pi/2 = \pi$, y es desplazado $5\pi/12$ unidades hacia la izquierda. ≡

Movimiento armónico simple Considere el movimiento de una masa que cuelga de un resorte como se muestra en la **FIGURA 10.5.3**. En la ausencia de fuerzas de fricción o amortiguación, se da un modelo matemático para el desplazamiento (o distancia dirigida) de la masa medida desde una posición que se llama **posición de equilibrio** mediante la función

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t. \tag{5}$$

Se dice que el movimiento oscilatorio modelado por la función (5) es un **movimiento armónico simple**.

Dicho más precisamente, tenemos la siguiente definición.

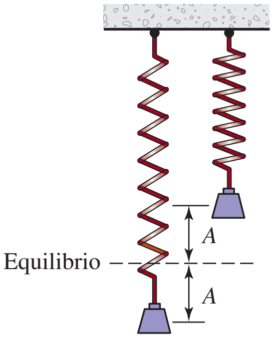


FIGURA 10.5.3 Un sistema de resorte-masa no amortiguado presenta un movimiento armónico simple

Definición 10.5.1 Movimiento armónico simple

Se dice que un punto que se mueve en una línea de coordenadas cuya posición en el momento t es dada por

$$y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \qquad \text{o} \qquad y(t) = A \cos(\omega t + \phi), \tag{6}$$

donde A, $\omega > 0$ y ϕ son constantes, presenta un **movimiento armónico simple**.

Casos especiales de las funciones trigonométricas (6) son $y(t) = A$ sen ωt, $y(t) = A$ cos ωt y $y(t) = c_1 \cos \omega t + c_1 \operatorname{sen} \omega t$.

Terminología Se dice que la función (5) es una **ecuación de movimiento** de la masa. También en (5), $\omega = \sqrt{k/m}$, donde k es la **constante de resorte** (un indicador de la rigidez del resorte), m es la **masa** sujetada al resorte (medida en unidades de masa o kilogramos), y_0 es el **desplazamiento inicial** de la masa (medido arriba o debajo de la posición de equilibrio), v_0 es la **velocidad inicial** de la masa, t es el **tiempo** medido en segundos y el **periodo** p del movimiento es $p = 2\pi/\omega$ segundos. El número $f = 1/p = 1/(2\pi/\omega) = \omega/2\pi$ se llama la **frecuencia** del movimiento. La frecuencia indica el número de ciclos completados por la gráfica por unidad de tiempo. Por ejemplo, si el periodo de (5) es $p = 2$ segundos, entonces sabemos que un ciclo de la función es completado en 2 segundos. La frecuencia $f = 1/p = \frac{1}{2}$ significa un medio segundo de un ciclo se completa en 1 segundo.

En el estudio del movimiento armónico simple es conveniente remodelar la ecuación de movimiento (5) como una sola expresión que implique únicamente la función seno:

$$y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi). \tag{7}$$

La reducción de (5) a la función seno (7) se puede realizar en exactamente la misma forma que se ilustra en el ejemplo 2. En esta situación hacemos las siguientes identificaciones entre (2) y (5):

$$c_1 = y_0, \quad c_2 = v_0/\omega, \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{y} \quad B = \omega.$$

EJEMPLO 3 La ecuación del movimiento

a) Halle la ecuación del movimiento armónico simple (5) para un sistema de resorte-masa si $m = \frac{1}{16}$ slugs, $y_0 = -\frac{2}{3}$ pie, $k = 4$ libra/pie y $v_0 = \frac{4}{3}$ pie/s

b) Busque el periodo y la frecuencia de movimiento.

Solución ***a***) Empezamos con la ecuación del movimiento armónico simple (5). Puesto que $k/m = 4/(\frac{1}{16}) = 64, \omega = \sqrt{k/m} = 8$ y $v_0/\omega = (\frac{4}{3})/8 = \frac{1}{6}$. Por tanto, (5) se vuelve

$$y(t) = -\tfrac{2}{3}\cos 8t + \tfrac{1}{6}\operatorname{sen} 8t. \tag{8}$$

b) El periodo de movimiento es $2\pi/8 = \pi/4$ segundos, la frecuencia es $4/\pi \approx 1.27$ ciclos por segundo. ≡

EJEMPLO 4 Continuación del ejemplo 3

Exprese la ecuación del movimiento (8) como una sola función seno (7).

Solución Mediante $c_1 = -\frac{2}{3}$, $c_2 = \frac{1}{6}$, encontramos que la amplitud de movimiento es

$$A = \sqrt{(-\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{1}{6})^2} = \tfrac{1}{6}\sqrt{17} \text{ pies.}$$

Luego, según

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi &= -\tfrac{2}{3}/\tfrac{\sqrt{17}}{6} < 0 \\ \cos\phi &= \tfrac{1}{6}/\tfrac{\sqrt{17}}{6} > 0 \end{aligned}\right\} \tan\phi = -4$$

podemos ver por los signos algebraicos sen $\phi < 0$ y cos $\phi > 0$ que el lado terminal del ángulo ϕ se encuentra en el cuarto cuadrante. Por consiguiente, el valor correcto, pero aproximado de ϕ es $\tan^{-1}(-4) = -1.3258$. La ecuación del movimiento es entonces $y(t) = \frac{1}{6}\sqrt{17}\operatorname{sen}(8t - 1.3258)$. Como se muestra en la **FIGURA 10.5.4**, la amplitud del movimiento es $A = \sqrt{17}/6 \approx 0.6872$. Puesto que suponemos que no hay resistencia al movimiento, una vez que el sistema de resorte-masa se pone en movimiento, el modelo indica que permanece en movimiento rebotando de un lado al otro entre su desplazamiento máximo $\sqrt{17}/6$ pies arriba de la posición de equilibrio y un mínimo de $-\sqrt{17}/6$ pies debajo de la posición de equilibrio.

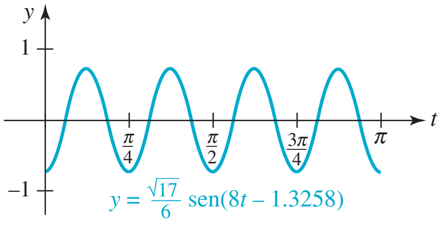


FIGURA 10.5.4 Gráfica de la ecuación de movimiento del ejemplo 4

Sólo en los dos casos $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, o $c_1 < 0$, $c_2 > 0$ podemos usar tan ϕ en (4) para escribir $\phi = \tan^{-1}(c_1/c_2)$. (¿Por qué?) De manera correspondiente, ϕ es un ángulo en el primer o en el cuarto cuadrante.

10.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

En los problemas 1 a 6, proceda igual que en el ejemplo 2 y reduzca las expresiones trigonométricas indicadas a la forma $y = A\operatorname{sen}(Bx + \phi)$. Esboce la gráfica y dé la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase.

1. $y = \cos\pi x - \operatorname{sen}\pi x$

2. $y = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}x - \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{2}x$

3. $y = \sqrt{3}\operatorname{sen}2x - \cos 2x$

4. $y = \sqrt{3}\cos 4x - \operatorname{sen}4x$

5. $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\operatorname{sen}x - \cos x)$

6. $y = \operatorname{sen}x + \cos x$

En los problemas 7 a 10, proceda como en los ejemplos 3 y 4 y utilice la información dada para expresar la ecuación del movimiento armónico simple (5) para un sistema de resorte-masa en la forma trigonométrica (7). Dé la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento.

7. $m = \frac{1}{4}$ slugs, $y_0 = \frac{1}{2}$ pie, $k = 1$ libra/pie y $v_0 = \frac{3}{2}$ pie/s

8. $m = 1.6$ slugs, $y_0 = -\frac{1}{3}$ pie, $k = 40$ libras/pie y $v_0 = -\frac{5}{4}$ pies/s

9. $m = 1$ slugs, $y_0 = -1$ pie, $k = 16$ libras/pie y $v_0 = -2$ pies/s

10. $m = 2$ slugs, $y_0 = -\frac{2}{3}$ pie, $k = 200$ libras/pie y $v_0 = 5$ pies/s

11. La ecuación del movimiento armónico simple de un sistema de resorte-masa es $y(t) = \frac{5}{2}\text{sen}(2t - \pi/3)$. Halle el desplazamiento inicial y_0 y la velocidad inicial v_0 de la masa. [*Pista:* utilice (5)].

12. Utilice la ecuación del movimiento armónico simple del sistema de resorte-masa dada en el problema 11 para hallar los tiempos para los que la masa pasa a través de la posición de equilibrio $y = 0$.

≡ Aplicaciones diversas

13. Circuitos eléctricos Bajo ciertas circunstancias la corriente $I(t)$ en un circuito eléctrico en el tiempo t está dada por $I(t) = I_0[\text{sen}(\omega t) + \theta)\cos\phi + \cos(\omega t + \theta)\text{sen}\phi]$. Exprese $I(t)$ como una sola función seno de la forma dada en (7). [*Pista:* revise la fórmula en (7) del teorema 9.4.3].

10.6 Forma trigonométrica de los números complejos

Se recomienda revisar la sección 3.4.

Introducción Un número complejo $z = a + bi$ queda determinado de forma única por un *par ordenado* de números reales (a, b). La primera y la segunda entradas de los pares ordenados corresponden, a su vez, a las partes real e imaginaria del número complejo. Por ejemplo, el par ordenado $(2, -3)$ corresponde al número complejo $z = 2 - 3i$. A la inversa, el número complejo $z = 2 - 3i$ determina el par ordenado $(2, -3)$. Los números 10, i, y $-5i$ son equivalentes a $(10, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, 5)$, respectivamente. Así, podemos relacionar un número complejo $z = a + bi$ con un *punto* (a, b) en un sistema de coordenadas rectangulares.

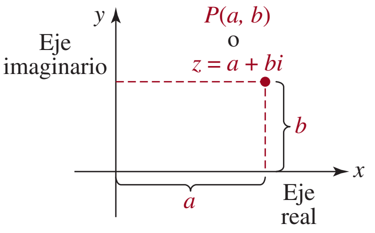


FIGURA 10.6.1 Plano complejo

Plano complejo Debido a la correspondencia entre un número complejo $z = a + bi$ y un punto, y sólo uno, $P(a, b)$ en un plano de coordenadas, usaremos los términos *número complejo* y *punto* indistintamente. El plano de coordenadas ilustrado en la **FIGURA 10.6.1** se llama **plano complejo**, o simplemente **plano *z***. El eje x u horizontal se denomina **eje real** porque cada punto en ese eje representa un número real. El eje y o vertical se conoce como **eje imaginario** porque los puntos de dicho eje representan números imaginarios puros.

EJEMPLO 1 Gráficas de números complejos

Grafique los números complejos

$$z_1 = 5 + 4i, z_2 = -2i, z_3 = -2 - 3i \quad \text{y} \quad z_4 = -4 + 2i.$$

Solución Identificamos los números complejos z_1, z_2, z_3, z_4 con los puntos $(5, 4)$, $(0, -2)$, $(-2, -3)$, $(-4, 2)$, respectivamente. Estos puntos son, a su vez, los puntos rojo, azul, verde y anaranjado en la **FIGURA 10.6.2**. ≡

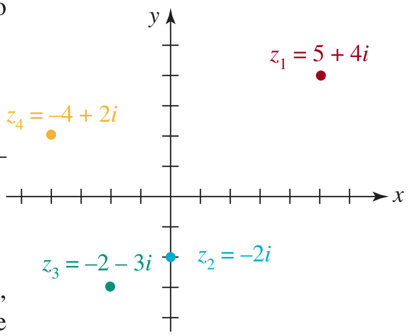


FIGURA 10.6.2 Los números complejos del ejemplo 1, interpretados como puntos

Forma trigonométrica Si $z = a + bi$ es un número complejo distinto de cero y $P(a, b)$ es su representación geométrica, como se ilustra en la **FIGURA 10.6.3**, la distancia de P al origen está dada por $\sqrt{a^2 + b^2}$. Esta distancia se denomina **módulo, magnitud** o **valor absoluto** de z y se denota con $|z|$:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{1}$$

Por ejemplo, si $z = i$, entonces $|i| \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1^2} = 1$; si $z = 3 - 4i$, entonces $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$. Por (4) de la sección 3.4, sabemos que si $\bar{z} = a - bi$ es el conjugado de $z = a + bi$, entonces $z\bar{z} = a^2 + b^2$. Por tanto, (1) también puede escribirse así:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

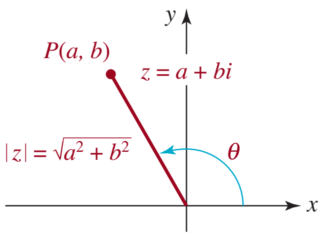


FIGURA 10.6.3 Módulo y argumento de un número complejo z

Si θ es el ángulo en posición estándar cuyo lado terminal pasa por $P(a, b)$ y $r = |z|$, entonces $\cos\theta = a/r$ y $\operatorname{sen}\theta = b/r$, de los cuales obtenemos $a = r\cos\theta$ y $b = r\operatorname{sen}\theta$. Si sustituimos a y b por estas expresiones en $z = a + bi$, obtendremos $a = a + bi = (r\cos\theta) + (r\operatorname{sen}\theta)i$ o

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta). \tag{2}$$

Decimos que (2) es la **forma trigonométrica**, o **forma polar** del número complejo z. El ángulo θ es el **argumento** de z y satisface $\tan\theta = b/a$. Sin embargo, θ no es necesariamente $\arctan(b/a)$ puesto que θ no está restringido al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ (véanse los ejemplos 2 y 3 a continuación). Además, el argumento θ *no está determinado de forma exclusiva,* en virtud de que $\cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi)$ y $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi)$ para cualquier entero k. Si $z = a + bi = 0$, entonces $a = b = 0$. En este caso, $r = 0$ y podemos tomar cualquier ángulo θ como argumento.

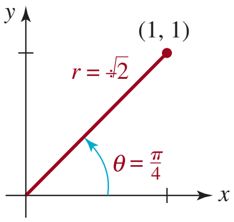


FIGURA 10.6.4 Número complejo del inciso *a*) del ejemplo 2

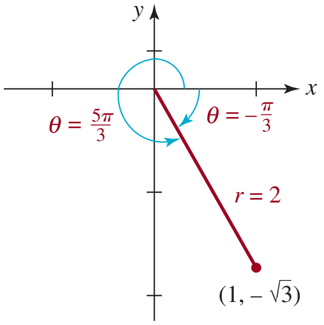


FIGURA 10.6.5 Número complejo del inciso *b*) del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Forma trigonométrica

Escriba los números complejos en forma trigonométrica: ***a***) $1 + i$; ***b***) $1 - \sqrt{3}i$.

Solución ***a***) Si identificamos $a = 1$ y $b = 1$, entonces el módulo de $1 + i$ es

$$r = |1 + i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}.$$

Debido a que $\tan\theta = b/a = 1$ y el punto $(1, 1)$ se sitúa en el primer cuadrante, podemos considerar que el argumento del número complejo es $\theta = \pi/4$, como se muestra en la **FIGURA 10.6.4**. Por tanto,

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$$

b) En este caso,

$$r = |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Por $\tan\theta = -\sqrt{3}/1 = -\sqrt{3}$ y el hecho de que $(1, -\sqrt{3})$ está situado en el cuarto cuadrante, tenemos que $\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \pi/3$, como se ilustra en la **FIGURA 10.6.5**. Por tanto,

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$ ≡

Siguiendo la convención, en el resto de esta exposición así como en los ejercicios 10.6, entenderemos que el argumento θ de un número complejo z es ya sea un ángulo medido en radianes en el intervalo $[0, 2\pi]$ o un ángulo medido en grados que satisface $0 \le \theta < 360°$.

Nota ▶

Por ejemplo, la respuesta del inciso *b*) del ejemplo 2 se puede escribir de esta otra forma:

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right).$$

El argumento de $1 - \sqrt{3}i$ que está situado dentro del intervalo $[0, 2\pi)$ es $\theta = 5\pi/3$, como se muestra en la **FIGURA 10.6.5**.

EJEMPLO 3 Forma trigonométrica

Exprese el número complejo

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$$

en la forma estándar $z = a + bi$.

Solución Con base en el concepto de ángulo de referencia que se explicó en la sección 9.1, tenemos que $\cos(7\pi/4) = \sqrt{2}/2$ y $\operatorname{sen}(7\pi/4) = -\sqrt{2}/2$. Por tanto,

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

o $z = 2 - 2i$. ≡

EJEMPLO 4 Forma trigonométrica

Obtenga la forma trigonométrica de $z = -4 + 5i$.

Solución El módulo de $z = -4 + 5i$ es

$$r = |-4 + 5i| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}.$$

Debido a que el punto $(-4, 5)$ está situado en el segundo cuadrante, debemos tener cuidado de ajustar el valor del ángulo obtenido de $\tan\theta = -\frac{5}{4}$ y usar una calculadora para que nuestra respuesta final sea un ángulo del segundo cuadrante (**FIGURA 10.6.6**). Un método consiste en usar la calculadora en modo de radianes para obtener el ángulo de referencia $\theta' = \tan^{-1}\frac{5}{4} \approx 0.8961$ radianes. Así pues, el ángulo deseado del segundo cuadrante es $\theta = \pi - \theta' \approx 2.2455$. Por tanto,

$$z \approx \sqrt{41}\,(\cos 2.2455 + i\operatorname{sen} 2.2455).$$

Por otra parte, la forma trigonométrica anterior también se puede escribir con un ángulo medido en grados. Con la calculadora en modo de grados, obtendríamos $\theta' \approx 51.34°$ y $\theta = 180° - \theta' \approx 128.66°$, de lo cual se deduce que

$$z \approx \sqrt{41}\,(\cos 128.66° + i\operatorname{sen} 128.66°).$$

≡

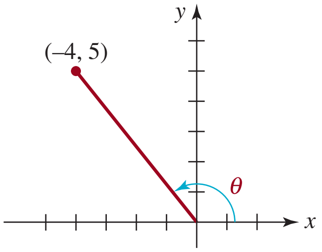


FIGURA 10.6.6 Número complejo del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Módulo y argumento de un producto

Obtenga el módulo y el argumento de z_1z_2, donde $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$.

Solución El producto es

$$z_1z_2 = 2i(1 + i) = -2 + 2i,$$

por tanto, el módulo es

$$r = |z_1z_2| = |-2 + 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Si identificamos $a = -2$ y $b = 2$, tenemos que $\tan\theta = -1$. Puesto que θ es un ángulo del segundo cuadrante, concluimos que el argumento de z_1z_2 es $\theta = 3\pi/4$ (**FIGURA 10.6.7**). ≡

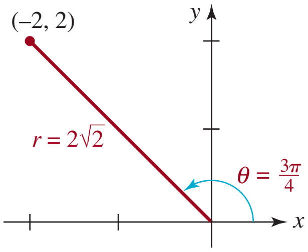


FIGURA 10.6.7 El producto del ejemplo 5

Multiplicación y división En el ejemplo 5 observe que el módulo $r = 2\sqrt{2}$ del producto z_1z_2 es el *producto* del módulo $r_1 = 2$ de z_1 y el módulo $r_2 = \sqrt{2}$ de z_2. Además, el argumento $\theta = 3\pi/4$ de z_1z_2 es la *suma* de los argumentos $\theta_1 = \pi/2$ y $\theta_2 = \pi/4$ de z_1 y z_2, respectivamente. Hemos ilustrado un caso particular del siguiente teorema, que describe cómo multiplicar y dividir números complejos cuando se escriben en forma trigonométrica.

Teorema 10.6.1 Producto y cociente

Si $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$, entonces

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \tag{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)], \quad r_2 \neq 0. \tag{4}$$

Comprobación: Comprobaremos sólo (4) del teorema 10.6.1; la comprobación de (3) es muy parecida. Si multiplicamos el numerador y el denominador de

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)}$$

por $\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\theta_2} \qquad \leftarrow \text{el denominador es igual a 1}\\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2).\end{aligned}$$

Hacemos la multiplicación y luego usamos las fórmulas de diferencia de la sección 9.4 y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}[\overbrace{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\text{sen}\,\theta_2)}^{\text{ver (5) del teorema 9.4.2}} + i\overbrace{(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\text{sen}\,\theta_2)}^{\text{ver (8) del teorema 9.4.3}}]\\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)].\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 6 Producto y cociente

Si $z_1 = 4(\cos 75° + i\,\text{sen}\,75°)$ y $z_2 = \frac{1}{2}(\cos 45° + i\,\text{sen}\,45°)$, obtenga ***a)*** z_1z_2 ***b)*** z_1/z_2. Exprese cada respuesta en la forma estándar $a + bi$.

Solución ***a)*** Por (3) del teorema 10.6.1, podemos escribir el producto así:

$$\begin{aligned}z_1z_2 &= \overbrace{4\cdot\frac{1}{2}}^{\substack{\text{multiplicar}\\ \text{módulos}}}[\cos(\overbrace{75° + 45°}^{\substack{\text{sumar}\\ \text{argumentos}}}) + i\,\text{sen}(75° + 45°)\\ &= 2[\cos 120° + i\,\text{sen}\,120°] = 2\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]\end{aligned}$$

y por tanto, $z_1z_2 = -1 + \sqrt{3}i$.

b) Ahora, por (4) del teorema 10.6.1, el cociente es

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \overbrace{\frac{4}{\frac{1}{2}}}^{\substack{\text{dividir}\\ \text{módulos}}}[\cos(\overbrace{75° - 45°}^{\substack{\text{restar}\\ \text{argumentos}}}) + i\,\text{sen}(75° - 45°)]\\ &= 8[\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°] = 8\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]\end{aligned}$$

o $z_1/z_2 = 4\sqrt{3} = 4\,i$.

≡

10.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

En los problemas 1 a 10, dibuje la gráfica de los números complejos dados y evalúe y grafique el número complejo indicado.

1. $z_1 = 2 + 5i$; $\bar{z}_1$

2. $z_1 = -8 - 4i$; $\frac{1}{4}\bar{z}_1$

3. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - 2i$; $z_1 + z_2$

4. $z_1 = 4i$, $z_2 = -4 + i$; $z_1 - z_2$

5. $z_1 = 6 - 3i$, $z_2 = -i$; $\bar{z}_1 + z_2$

6. $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = -1 + 2i$; $z_1 + \bar{z}_2$

7. $z_1 = -2i$, $z_2 = 1 - i$; $z_1 z_2$

8. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$; $z_1 z_2$

9. $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$; $\dfrac{z_1}{z_2}$

10. $z_1 = i$, $z_2 = 1 - i$; $\dfrac{z_1}{z_2}$

En los problemas 11 a 22, obtenga el módulo y un argumento del número complejo dado.

11. $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

12. $z = 4 + 3i$

13. $z = \sqrt{2} - 4i$

14. $z = -5 + 2i$

15. $z = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}i$

16. $z = -8 - 2i$

17. $z = 3 + 3i$

18. $z = -1 - i$

19. $z = \sqrt{3} + i$

20. $z = 2 - 2\sqrt{3}i$

21. $z = 2 - i$

22. $z = 4 + 8i$

En los problemas 23 a 32, escriba el número complejo dado en forma trigonométrica.

23. $z = -4i$

24. $z = 15i$

25. $z = 5\sqrt{3} + 5i$

26. $z = 3 + i$

27. $z = -2 + 5i$

28. $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

29. $z = 3 - 5i$

30. $z = -10 + 6i$

31. $z = -2 - 2i$

32. $z = 1 - i$

En los problemas 33 a 42, escriba el número complejo dado en la forma estándar $z = a + bi$. No use la calculadora.

33. $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

34. $z = 6\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$

35. $z = 10(\cos 210° + i\ \text{sen}\ 210°)$

36. $z = \sqrt{5}(\cos 420° + i\ \text{sen}\ 420°)$

37. $z = 2(\cos 30° + i\ \text{sen}\ 30°)$

38. $z = 7\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\,\text{sen}\dfrac{7\pi}{12}\right)$

39. $z = \cos\dfrac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\dfrac{5\pi}{3}$

40. $z = \dfrac{3}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{5\pi}{4}\right)$

41. $z = 4[\cos(\tan^{-1}2) + i\ \text{sen}(\tan^{-1}2)]$

42. $z = 20\left[\cos\left(\tan^{-1}\dfrac{3}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\tan^{-1}\dfrac{3}{5}\right)\right]$

En los problemas 43 a 48, obtenga $z_1 z_2$ y z_1/z_2 en forma trigonométrica; escriba primero z_1 y z_2 en forma trigonométrica.

43. $z_1 = 3i$, $z_2 = 6 + 6i$

44. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$

45. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$

46. $z_1 = 5i$, $z_2 = -10i$

47. $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 5 - 5i$

48. $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z_2 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} + \dfrac{5\sqrt{2}}{2}i$

En los problemas 49 a 52, obtenga z_1z_2 y z_1/z_2. Escriba la respuesta en la forma estándar $z = a + bi$.

49. $z_1 = \sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right),$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

50. $z_1 = 10\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right),\ z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

51. $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right),\ z_2 = 4\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{15\pi}{8}\right)$

52. $z_1 = \cos 57° + i \operatorname{sen} 57°,\ z_2 = 7(\cos 73° + i \operatorname{sen} 73°)$

10.7 Potencias y raíces de números complejos

■ Introducción La forma trigonométrica del producto z_1z_2 dado en (3) del teorema 10.6.1 de la sección anterior también proporciona un medio para calcular las *potencias* de un número complejo, es decir, z^n, donde n es un entero positivo. En esta sección también demostramos cómo obtener las raíces n-ésimas distintas de un número complejo z.

Para empezar, pondremos un ejemplo.

■ Potencias de un número complejo Suponga que $z = 1 + i$ y deseamos calcular z^3. Por supuesto, existen varias formas de hacerlo. Podemos ejecutar las multiplicaciones zz y $(zz)z$ usando las formas estándares de los números, o podemos tratar el número $z = 1 + i$ como un binomio y usar la expansión binomial

Véase *iii*) de la definición 3.4.2 en la página 140.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

con $a = 1$ y $b = i$. También podemos usar la forma trigonométrica

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$$

Con $z = z_1 = z_2$ en (3) del teorema 10.6.1, obtenemos el cuadrado de z:

$$\begin{aligned} z^2 = z \cdot z &= (\sqrt{2})(\sqrt{2})\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= (\sqrt{2})^2\left[\cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]. \end{aligned}$$

Entonces, (3) del teorema 10.6.1 también da

$$\begin{aligned} z^3 = z^2 \cdot z &= (\sqrt{2})^2(\sqrt{2})\left[\cos\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= (\sqrt{2})^3\left[\cos 3\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen} 3\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad (1) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Después de simplificar la última expresión obtenemos $z^3 = -2 + 2i$.

El resultado en (1),

$$z^3 = (\sqrt{2})^3\left[\cos 3\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen} 3\left(\frac{\pi}{4}\right)\right], \qquad (2)$$

ilustra un caso particular del siguiente teorema que lleva el nombre del matemático francés **Abraham DeMoivre** (1667-1754). La comprobación formal de este teorema no se puede proporcionar en este momento porque requiere inducción matemática, que se explica en la sección 15.4.

Teorema 10.7.1 Teorema de DeMoivre

Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ y n es un entero positivo, entonces

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta). \tag{3}$$

La inspección de (2) muestra que el resultado es el teorema de DeMoivre, con $z = 1 + i$, $r = \sqrt{2}$ y $\theta = \pi/4$ en azul, y $n = 3$ en rojo.

EJEMPLO 1 Potencia de un número complejo

Evalúe $(\sqrt{3} + i)^8$.

Solución Primero, el módulo de $\sqrt{3} + i$ es $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Así, por $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$, un argumento del número es $\theta = \pi/6$, puesto que $(\sqrt{3}, 1)$ está situado en el cuadrante I. Por tanto, por el teorema de DeMoivre,

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} + i)^8 &= 2^8\left[\cos 8\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\,8\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 256\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{4\pi}{3}\right)\\ &= 256\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -128 - 128\sqrt{3}i.\end{aligned}$$

≡

Raíces de un número complejo Recuerde que en la sección 2.4 vimos que -2 y 2 son las raíces cuadradas del número 4, porque $(-2)^2 = 4$ y $2^2 = 4$. En otras palabras, las dos raíces cuadradas de 4 son soluciones distintas de la ecuación $w^2 = 4$. De la misma forma decimos que $w = 3$ es una raíz cúbica de 27, puesto que $w^3 = 3^3 = 27$. En general, decimos que un número $w = a + bi$ es una **raíz *n*-ésima o de orden *n*** compleja de un número complejo z que no es cero si $w^n = (a + bi)^n = z$, donde n es un entero positivo. Por ejemplo, lo instamos a comprobar que $w_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ y $w_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ son las dos raíces cuadradas del número complejo $z = i$, porque $w_1^2 = i$ y $w_2^2 = i$. Véase también el problema 77 de los ejercicios 3.4.

Ahora demostraremos que existen exactamente n soluciones de la ecuación $w^n = z$. Sean ρ y ϕ el módulo y el argumento de w, respectivamente, de modo que $w = \rho(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi)$. Si w es una raíz n-ésima del número complejo $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, entonces $w^n = z$. El teorema de DeMoivre nos permite escribir la última ecuación así:

$$\rho(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi) = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta).$$

Cuando dos números complejos son iguales, sus módulos son necesariamente iguales. Por tanto, tenemos

$$\rho^n = r \qquad \text{o} \qquad \rho = r^{1/n}$$

y
$$\cos n\phi + i\,\text{sen}\,n\phi = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta.$$

Igualamos las partes real e imaginaria de esta ecuación para obtener

$$\cos n\phi = \cos\theta,\ \text{sen}\,n\phi = \text{sen}\,\theta,$$

de lo cual se desprende que $n\phi = \theta + 2k\pi$, o

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

donde k es cualquier entero. Como k asume los valores enteros sucesivos $0, 1, 2, \ldots, n - 1$, obtenemos n raíces distintas de z. Para $k \geq n$, los valores de $\text{sen}\,\phi$ y $\cos\phi$ repiten los valores obtenidos si $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Para entender cabalmente esto, suponga que $k = n + m$, donde $m = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces,

$$\phi = \frac{\theta + 2(n + m)\pi}{n} = \frac{\theta + 2m\pi}{n} + 2\pi.$$

En vista de que tanto el seno como el coseno tienen periodo de 2π, tenemos

$$\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right) \quad \text{y} \quad \cos\phi = \cos\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right),$$

y por tanto, no se obtienen nuevas raíces para $k \geq n$. Resumiendo estos resultados, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 10.7.2 Raíces complejas

Si $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ y n es un entero positivo, entonces n distintas raíces n-ésimas complejas de z están dadas por

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \tag{4}$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Denotaremos las n raíces por $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ que corresponden a $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, respectivamente, en (4).

EJEMPLO 2 Tres raíces cúbicas

Obtenga las tres raíces cúbicas de i.

Solución En la forma trigonométrica de i, $r = 1$ y $\theta = \pi/2$, de modo que

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}.$$

Con $n = 3$, tenemos, por (4) del teorema 10.7.2, que

$$w_k = 1^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Ahora, para

$$\begin{aligned}
k = 0, \quad w_0 &= \cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\
k = 1, \quad w_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \cos\frac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} \\
k = 2, \quad w_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \cos\frac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Así, en forma estándar, las tres raíces cúbicas de i son $w_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, $w_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ y $w_2 = -i$. ≡

Las tres raíces cúbicas de i obtenidas en el ejemplo 2 se representan gráficamente en la **FIGURA 10.7.1**. Hacemos notar que están espaciadas por igual alrededor de un círculo de radio 1 centrado en el origen. En general, las n raíces n-ésimas distintas de un número complejo z diferente de cero están espaciadas por igual en la circunferencia del círculo de radio $|z|^{1/n}$ con centro en el origen.

Como muestra el siguiente ejemplo, las raíces de un número complejo no tienen que ser números "compatibles" como los del ejemplo 2.

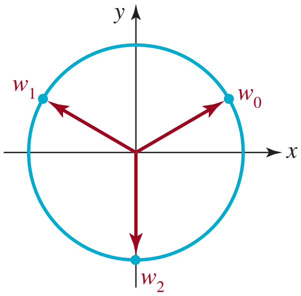


FIGURA 10.7.1 Tres raíces cúbicas de i en el ejemplo 2

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación

Resuelva la ecuación $z^4 = 1 + i$.

Solución Resolver esta ecuación es equivalente a obtener las cuatro raíces complejas de orden 4 del número $1 + i$. En este caso, el módulo y un argumento de $1 + i$ son, $r = \sqrt{2}$ y $\theta = \pi/4$, respectivamente. Por (4), con $n = 4$ y el símbolo z_k representando el papel de w_k, obtenemos

$$
\begin{aligned}
z_k &= (\sqrt{2})^{1/4}\left[\cos\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right)\right] \\
&= \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, 3, \\
k = 0, \quad z_0 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{16}\right) \\
k = 1, \quad z_1 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{9\pi}{16}\right) \\
k = 2, \quad z_2 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{17\pi}{16}\right) \\
k = 3, \quad z_3 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{25\pi}{16}\right).
\end{aligned}
$$

Con la ayuda de una calculadora obtenemos las formas estándares aproximadas,

$$
\begin{aligned}
z_0 &\approx 1.0696 + 0.2127i \\
z_1 &\approx -0.2127 + 1.0696i \\
z_2 &\approx -1.0696 - 0.2127i \\
z_3 &\approx 0.2127 - 1.0696i.
\end{aligned}
$$

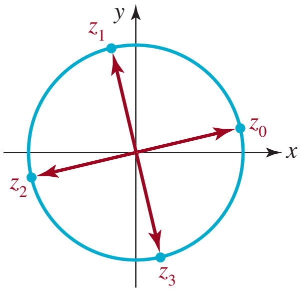


FIGURA 10.7.2 Cuatro raíces de cuarto orden de $1 + i$ del ejemplo 3

Como se muestra en la **FIGURA 10.7.2**, las cuatro raíces se sitúan en un círculo centrado en el origen, de radio $r = \sqrt[8]{2} \approx 1.09$, y están espaciadas a intervalos angulares iguales de $2\pi/4 = \pi/2$ radianes, comenzando con la raíz cuyo argumento es $\pi/16$. ≡

10.7 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

En los ejercicios 1-10 use el teorema de DeMoivre para obtener la potencia indicada. Escriba la respuesta en la forma estándar $z = a + bi$. Si es preciso, use una calculadora.

1. $\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{8}\right)^{24}$

2. $\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{10}\right)^{5}$

3. $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{16}\right)\right]^4$

4. $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{16}\right)\right]^4$

5. $[\sqrt{3}(\cos 21° + i\,\text{sen}\,21°]^{10}$

6. $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{24}\right)\right]^8$

7. $[\sqrt{5}(\cos 13.5° + i\,\text{sen}\,13.5°]^6$

8. $[2(\cos 67° + i\,\text{sen}\,67°]^3$

9. $[3.2(\cos 12° + i\,\text{sen}\,12°]^3$

10. $[\frac{1}{2}(\cos 24° + i\,\text{sen}\,24°]^3$

En los problemas 11 y 12, use (3) de esta sección y (4) de la sección 10.6 para simplificar el número complejo dado. Escriba su respuesta en la forma estándar $z = a + bi$.

11. $\dfrac{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{16}\right)\right]^{10}}{\left[4\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{8}\right)\right]^{3}}$

12. $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{9}\right)^{12}}{\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)\right]^{5}}$

En los problemas 13 a 24, use la forma trigonométrica de un número complejo junto con el teorema de DeMoivre para calcular la potencia dada. Escriba su respuesta en la forma estándar $z = a + b$.

13. i^{30}

14. $-i^{15}$

15. $(1 + i)^6$

16. $(1 - i)^9$

17. $(-2 + 2i)^4$

18. $(-4 - 4i)^3$

19. $(\sqrt{3} + i)^5$

20. $(-\sqrt{3} + i)^{10}$

21. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)^9$

22. $\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i\right)^8$

23. $(1 + 2i)^4$

24. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^{20}$

En los problemas 25 a 34, obtenga las raíces indicadas. Escriba su respuesta en la forma estándar $z = a + bi$.

25. Las tres raíces cúbicas de -8.

26. Las tres raíces cúbicas de 1.

27. Las cuatro raíces cuartas de i.

28. Las dos raíces cuadradas de i.

29. Las cuatro raíces cuartas de $-1 - \sqrt{3}i$.

30. Las dos raíces cuadradas de $-1 + \sqrt{3}i$.

31. Las dos raíces cuadradas de $1 + i$.

32. Las tres raíces cúbicas de $-2\sqrt{3} + 2i$.

33. Las seis raíces sextas de $64(\cos 54° + i\,\text{sen}\,54°)$.

34. Las dos raíces cuadradas de $81\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)$.

En los problemas 35 y 36, obtenga las raíces indicadas. Proceda como en el ejemplo 2 y dibuje la gráfica de estas raíces en un círculo apropiado.

35. Las seis raíces sextas de 1.

36. Las ocho raíces octavas de 1.

37. ¿Para cuáles enteros positivos n será $(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}i/2)^n$ igual a 1? ¿Igual a i? ¿Igual a $-\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}i/2$? ¿Igual a $\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}i/2$?

38. ***a)*** Compruebe que $(4 + 3i)^2 = 7 + 24i$.
b) Use la parte *a*) para obtener los dos valores de $(7 + 24i)^{1/2}$.

En los problemas 39 a 42, resuelva la ecuación dada. Escriba su respuesta en la forma estándar $z = a + bi$.

39. $z^4 + 1 = 0$

40. $x^3 - 125i = 0$

41. $x^2 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$

42. $z^2 - 8z + 18 = 8i$

Para la discusión

43. El teorema de DeMoivre implica que

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^2 = \cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta.$$

Use esta información para obtener las identidades trigonométricas de $\cos 2\theta$ y $\text{sen}\,2\theta$, multiplicando el lado izquierdo de la ecuación e igualando después las partes real e imaginaria.

44. Siga un procedimiento análogo al que se indicó en el problema 43 para obtener las identidades trigonométricas de $\cos 3\theta$ y $\text{sen}\,3\theta$.

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Resolución de un triángulo rectángulo
Ley de los senos:
    caso ambiguo
Ley de los cosenos
Rumbo
Movimiento armónico simple

Ecuación de movimiento:
    amplitud
    periodo
    frecuencia
Plano complejo
Eje imaginario
Eje real

Forma trigonométrica de un número complejo:
    módulo
    argumento
    producto
    cociente
Teorema de DeMoivre
Raíces de un número complejo

CAPÍTULO 10 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-27.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 6, responda verdadero o falso.

1. Si $w^5 = z$, entonces w es una raíz quinta de z. __________

2. El argumento de $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ es $5\pi/4$. __________

3. El número complejo $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ es una raíz cuadrada de i. __________

4. Si el módulo de un número complejo es $\sqrt{3}$, entonces el módulo de z^4 es 9. __________

5. $\operatorname{sen} t + \cos t = \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$. __________

6. El teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de los cosenos. __________

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 10, llene los espacios en blanco.

1. Para resolver un triángulo del cual se conocen dos ángulos y el lado opuesto a uno de estos ángulos, primero se usaría la ley de __________.

2. El caso ambiguo se refiere a resolver un triángulo cuando están dados __________.

3. Para resolver un triángulo del que se conocen dos lados y el ángulo incluido, primero se usaría la ley de __________.

4. En forma estándar, $z = 0.6(\cos 200° + i \operatorname{sen} 200°) =$ __________.

5. En forma trigonométrica, $z = -5 =$ __________.

6. Si $z_1 = \frac{1}{2}(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$ y $z_2 = 2(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$, entonces el argumento de $z_1 z_2$ es __________.

7. Para los números complejos del problema 6, la forma trigonométrica de z_1/z_2 es __________.

8. Para los números complejos del problema 6, la forma trigonométrica de z_1^4 es __________.

9. El módulo de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ es __________.

10. $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{483} =$ __________.

C. Ejercicios

En los problemas 1 a 4, resuelva el triángulo satisfaciendo las condiciones dadas.

1. $\alpha = 30°$, $\beta = 70°$, $b = 10$

2. $\gamma = 145°$, $a = 25$, $c = 20$

3. $\alpha = 51°$, $b = 20$, $c = 10$

4. $a = 4$, $b = 6$, $c = 3$

5. Un topógrafo está a 100 m de la base de un acantilado volado, y mide un ángulo de elevación de 28° desde su lugar hasta la parte superior del acantilado. Vea la **FIGURA 10.R.1**. Si el acantilado forma un ángulo de 65° con la horizontal, calcule su altura h.

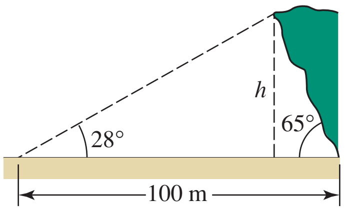


FIGURA 10.R.1 Acantilado del problema 5

6. Se lanza un cohete desde el nivel del piso, con un ángulo de elevación de 43°. Si el cohete hace blanco en un avión autómata que vuela a 20 000 pies de altura, calcule la distancia horizontal entre el sitio de lanzamiento y el punto directamente abajo del avión cuando es tocado. ¿Cuál es la distancia en línea recta entre el lugar de lanzamiento y el avión?

7. Un esquiador acuático sale de una rampa en un punto R, y aterriza en S. Vea la **FIGURA 10.R.2**. Un juez en el punto J mide un $\angle RJS$ de 47°. Si la distancia de la rampa al juez es de 110 pies, calcule la longitud del salto. Suponga que el $\angle SRJ$ es de 90°.

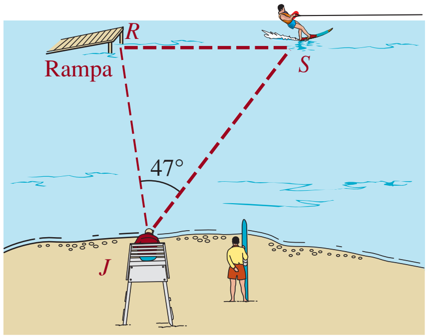


FIGURA 10.R.2 Esquiador acuático del problema 7

8. El ángulo entre dos lados de un paralelogramo es de 40°. Si las longitudes de los lados son 5 y 10 cm, calcule las longitudes de las dos diagonales.

9. Un satélite meteorológico en órbita sobre el ecuador terrestre, a una altura de $H = 36\,000$ km, localiza una tempestad eléctrica hacia el norte, en P, a un ángulo de $\theta = 6.5°$ con respecto a su vertical (la vertical del satélite). Vea la **FIGURA 10.R.3**.

a) Si el radio de la Tierra es aproximadamente $R = 6\,370$ km, calcule la latitud ϕ de la tempestad eléctrica.

b) Demuestre que los ángulos θ y ϕ se relacionan por medio de

$$\tan\theta = \frac{R\operatorname{sen}\phi}{H + R(1 - \cos\phi)}.$$

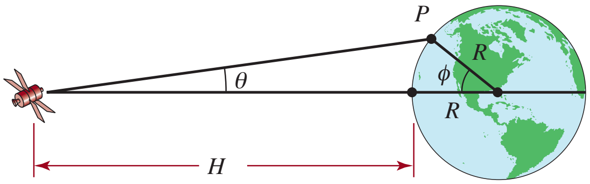


FIGURA 10.R.3 Satélite del problema 9

10. Se puede demostrar que un balón de basquetbol de diámetro d, que está llegando a la canasta formando un ángulo θ respecto a la horizontal, pasará por un aro de diámetro D, si $D \operatorname{sen}\theta > d$, donde $0° \leq \theta \leq 90°$. Véase la **FIGURA 10.R.4**. Si el balón tiene 24.6 cm de diámetro, y el diámetro del aro es de 45 cm, ¿entre qué intervalo de ángulos θ de llegada se producirá una canasta?

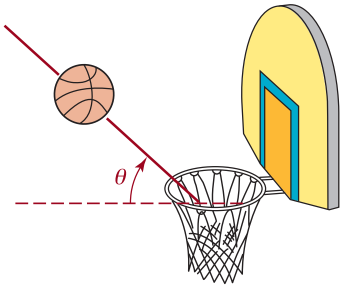


FIGURA 10.R.4 Canasta del problema 10

11. Cada uno de los 24 satélites NAVSTAR del sistema de posicionamiento global (GPS) describe una órbita alrededor de la Tierra a una altura $h = 20\,200$ km. Con esta red de satélites, un receptor GPS poco costoso, manual, puede determinar su posición sobre la superficie de la Tierra, con precisión de 10 m. Calcule la distancia máxima (en km) sobre la superficie de la Tierra que puede observarse desde un solo satélite GPS. Véase la **FIGURA 10.R.5**. Suponga que el radio de la Tierra es de 6 370 km. [*Pista:* calcule el ángulo central θ que abarca al arco s].

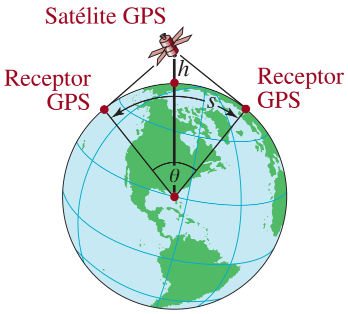


FIGURA 10.R.5 Satélite GPS del problema 11

12. Un avión vuela horizontalmente a 400 millas por hora, y sube en ángulo de 6° con respecto a la horizontal. Cuando pasa directamente arriba de un automóvil que va a 60 millas por hora, está a 2 millas arriba del vehículo. Suponiendo que el avión y el vehículo permanecen en el mismo plano vertical, calcule el ángulo de elevación desde el automóvil hasta el avión después de 30 minutos.

13. Una casa mide 45 pies del frente a la parte trasera. El techo mide 32 pies desde el frente de la casa hasta la cumbrera, y 18 pies desde la cumbrera a la parte trasera de la casa. Véase la **FIGURA 10.R.6**. Calcule los ángulos de elevación de las partes delantera y trasera del techo.

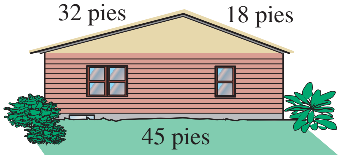


FIGURA 10.R.6 Casa del problema 13

14. El ángulo entre dos lados de un paralelogramo es de 40°. Si las longitudes de los lados son 5 y 10 cm, obtenga las longitudes de las dos diagonales.

En los problemas 15 a 22, traduzca las palabras a una función adecuada.

15. Un canal de agua de 20 pies de longitud tiene forma de triángulo isósceles, con lados de 4 pies de longitud. Vea la figura 5.7.19 en los ejercicios 5.7. Como se ve en la **FIGURA 10.R.7**, sea θ el ángulo entre la vertical y uno de los lados del canal. Exprese el volumen del canal en función de 2θ.

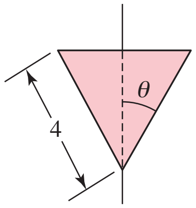


FIGURA 10.R.7 Sección transversal del canal del problema 15

16. Una persona conduce un automóvil y se acerca a un letrero, como se ve en la **FIGURA 10.R.8**. Sea θ su ángulo de visión de las orillas superior e inferior del letrero, y sea x su distancia horizontal (en pies) a ese letrero. Exprese a θ como función de x.

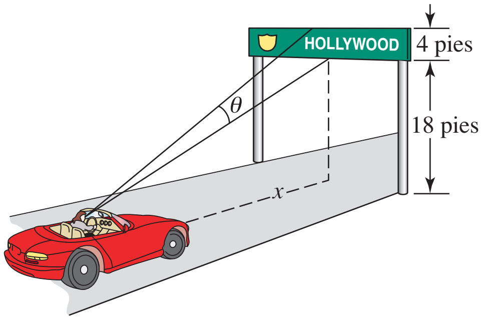


FIGURA 10.R.8 Letrero en la carretera para el problema 16

17. Como se ve en la **FIGURA 10.R.9**, una tabla está sostenida por un caballete, para que uno de sus extremos descanse en el piso y el otro contra un muro. Exprese la longitud de la tabla en función del ángulo θ indicado.

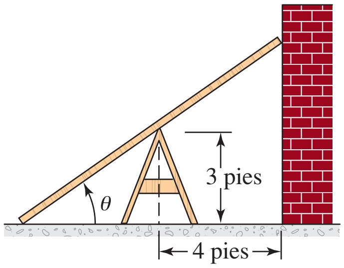


FIGURA 10.R.9 Tabla del problema 17

18. Un campesino desea cercar un pastizal en forma de triángulo usando 2 000 pies de cerca, que tiene a la mano. Véase la **FIGURA 10.R.10**. Demuestre que el área del pastizal es una función del ángulo θ indicado, como sigue:

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\cot\theta \cdot \left(\frac{2\,000}{1 + \cot\theta + \csc\theta}\right)^2.$$

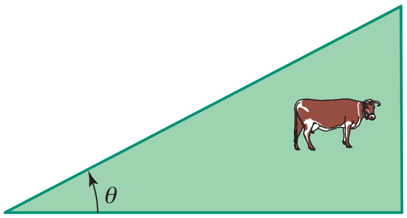


FIGURA 10.R.10 Pastizal del problema 18

19. Exprese el volumen de la caja de la **FIGURA 10.R.11** en función del ángulo θ, indicado.

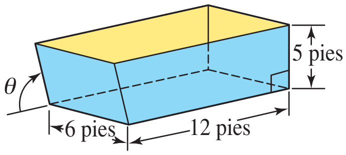


FIGURA 10.R.11 Caja del problema 19

20. Se dobla una esquina de una hoja de papel de 8.5 pulg × 11 pulg, hasta llegar a la orilla de la hoja, como se ve en la **FIGURA 10.R.12**. Exprese la longitud L del doblez en función del ángulo θ que indica la figura.

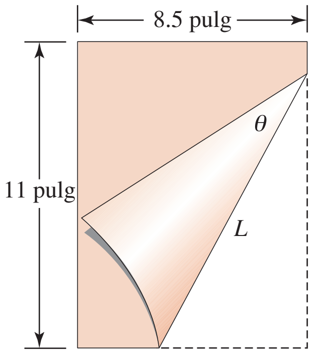


FIGURA 10.R.12 Papel doblado del problema 20

21. Se debe fabricar un canal con una lámina metálica de 30 cm de ancho, doblando 10 cm de sus orillas hacia arriba, en cada lado, para que éstos formen ángulos iguales ϕ con la vertical. Véase la **FIGURA 10.R.13**. Exprese el área transversal del canal en función del ángulo ϕ.

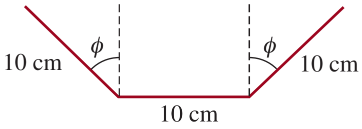


FIGURA 10.R.13 Canal del problema 21

22. Un tubo metálico debe transportarse horizontalmente para dar la vuelta a una esquina en ángulo recto, desde un corredor de 8 pies de ancho hasta otro de 6 pies de ancho. Véase la **FIGURA 10.R.14**. Exprese la longitud L del tubo en función del ángulo θ que indica la figura.

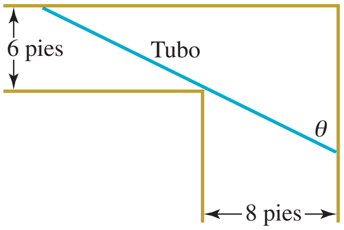


FIGURA 10.R.14 Tubo del problema 22

En los problemas 23 a 26, obtenga el módulo y el argumento del número complejo dado y escriba el número en forma trigonométrica.

23. $3 - 3i$

24. $\sqrt{3} - i$

25. $-2 + 3i$

26. $1 + 4i$

En los problemas 27 y 28, escriba el número complejo dado en la forma estándar $z = a + bi$.

27. $z = 4\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\dfrac{4\pi}{3}\right)$

28. $z = 2(\cos 330° + i \text{ sen } 330°)$

En los problemas 29 y 30, obtenga z_1z_2 y z_1/z_2 en forma trigonométrica, pero escriba primero z_1 y z_2 en forma trigonométrica.

29. $z_1 = -1 - i,\ z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

30. $z_1 = \sqrt{3} - i,\ z_2 = 2 - 2i$

En los problemas 31 y 32, use el teorema de DeMoivre para calcular la potencia.

31. $(-1 - i)^7$

32. $\left[4\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]^{10}$

En los problemas 33 y 34, obtenga las raíces indicadas.

33. Las cinco raíces quintas de 32.

34. Las tres raíces cúbicas de $-i$.

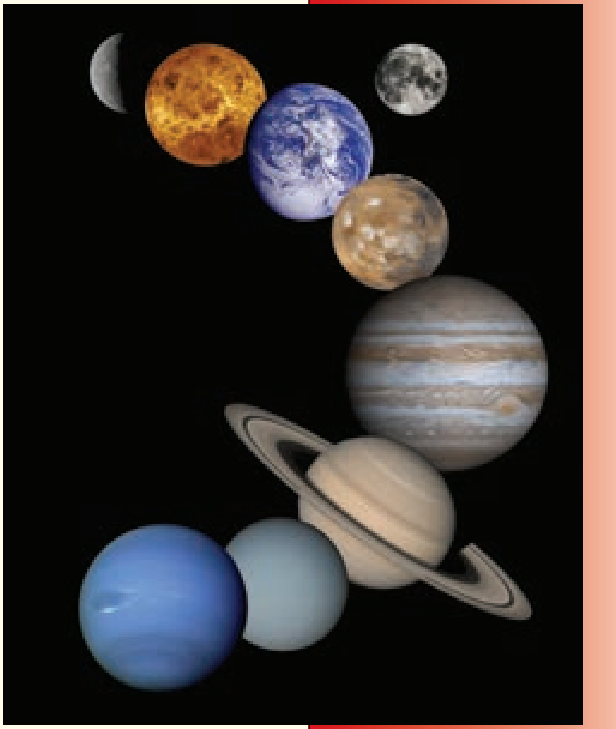
35. Factorice el polinomio $x^3 - 27i$.

36. ***a***) Compruebe que $(2 + 2i)^2 = 8i$.
b) Use el resultado del inciso *a*) para obtener todas las soluciones de la ecuación $z^2 = 8z + 16 = 8i$.

TEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

11

En este capítulo



Los planetas, asteroides y algunos cometas giran alrededor del Sol en órbitas elípticas.

Un poco de historia **Hipatia** fue la primera mujer en la historia de las matemáticas de la que tenemos amplios conocimientos. Nació en Alejandría (hacia el año 370 a.C.) y fue célebre como matemática, filósofa y profetisa. Su vida y muerte prematura a manos de una muchedumbre fanática se idealizaron en una novela romántica de 1853 escrita por Charles Kingsley (*Hypatia, or New Foes with Old Faces,* Chicago, W.B. Conkey, 1853). Entre sus obras destaca *Sobre las secciones cónicas de Apolonio,* que popularizó el trabajo de Apolonio sobre las curvas que pueden obtenerse cuando un plano corta un cono: el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola. Al llegar a su fin el periodo griego, el interés en las secciones cónicas desapareció y, después de Hipatia, el estudio de estas curvas quedó relegado al olvido durante más de mil años. En el siglo XVII, **Galileo Galilei** (1564-1642) demostró que cuando no hay resistencia del aire, la trayectoria que sigue un proyectil describe un arco parabólico. Más o menos al mismo tiempo, el astrónomo, astrólogo y matemático **Johannes Kepler** (1571-1630) planteó la hipótesis que las órbitas que describen los planetas alrededor del astro son elipses que tienen al Sol en uno de sus focos. Newton lo comprobó posteriormente usando los métodos del cálculo que recién se habían descubierto. Kepler también experimentó con las propiedades reflectantes de los espejos parabólicos; estas investigaciones aceleraron la invención de los telescopios reflectores. Los griegos tenían poco conocimiento de estas aplicaciones prácticas, pues estudiaron las secciones cónicas por su belleza y propiedades fascinantes.

En este capítulo examinamos tanto las propiedades antiguas como las aplicaciones modernas de estas curvas.

11.1 La parábola

Hipatia

Introducción **Hipatia** fue la primera mujer en la historia de las matemáticas de la que se conoce bastante. Nació en Alejandría, en 370 a.C., tuvo renombre como matemática y filósofa. Entre sus escritos se destaca *Sobre las cónicas de Apolonio*, que popularizó el trabajo de **Apolonio** (200 a.C.) sobre cónicas, que se pueden obtener cortando un cono doble invertido con un plano. Son el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola. Vea la **FIGURA 11.1.1**. Al cerrar el periodo griego, se desvaneció el interés en las cónicas; después de Hipatia, el estudio de esas curvas desapareció durante más de 1 000 años.

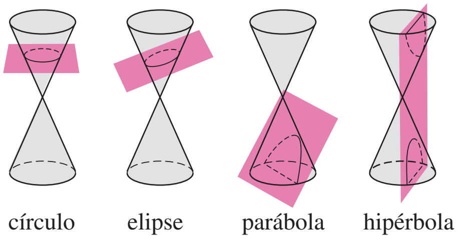


FIGURA 11.1.1 Secciones cónicas

Sistema solar

En el siglo XVII, Galileo demostró que en ausencia de resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil describe un arco parabólico. Más o menos por ese tiempo, Johannes Kepler supuso que las órbitas de los planetas en torno al Sol son elipses, y que el Sol está en uno de los focos. Después, Isaac Newton a través de los métodos del cálculo recién desarrollados verificó esta teoría. Kepler también experimentó con las propiedades reflectoras de los espejos parabólicos, investigaciones que aceleraron el desarrollo del telescopio reflector. Los griegos conocieron pocas de estas aplicaciones prácticas. Habían estudiado las cónicas por su belleza y por sus intrigantes propiedades. En las tres primeras secciones de este capítulo examinaremos tanto las propiedades antiguas como las aplicaciones modernas de estas curvas. Más que usar un cono, indicaremos cómo se definen la parábola, elipse e hipérbola mediante una distancia. Por medio de un sistema de coordenadas rectangulares y una fórmula para determinar la distancia obtendremos ecuaciones de las cónicas. Cada una de ellas estará en forma de una ecuación cuadrática de las variables x y y:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en donde A, B, C, D, E y F son constantes. En la sección 5.3, ya hemos estudiado el caso especial de $y = ax^2 + bx + c$, de la ecuación anterior.

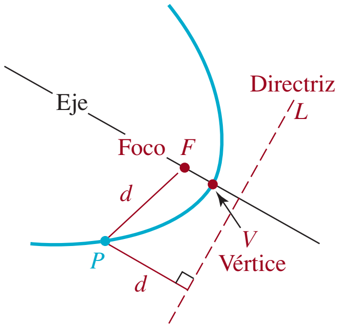


FIGURA 11.1.2 Una parábola

Definición 11.1.1 Parábola

Una **parábola** es el conjunto de puntos $P(x, y)$ en el plano que son equidistantes a una recta fija L, llamada **directriz**, y a un punto fijo F, llamado **foco**.

En la **FIGURA 11.1.2** se muestra una parábola. La recta que pasa por el foco perpendicular a la directriz se llama **eje** de la parábola. El punto de intersección de la parábola con el eje se llama **vértice** y se indica con V en la figura 11.1.2.

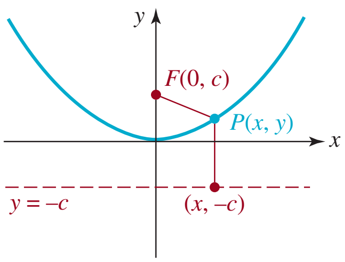


FIGURA 11.1.3 Parábola con vértice en (0, 0) y foco en el eje y

Parábola con vértice en (0, 0) Para describir analíticamente una parábola se usará un sistema de coordenadas rectangulares donde la directriz es una recta horizontal $y = -c$, en donde $c > 0$, y la ubicación del punto F sea $(0, c)$. Entonces se ve que el eje de la parábola está a lo largo del eje y, como muestra la **FIGURA 11.1.3**. El origen es necesariamente el vértice, porque está en el eje a c unidades tanto del foco como de la directriz. La distancia desde un punto $P(x, y)$ a la directriz es

$$y - (-c) = y + c.$$

Al aplicar la fórmula de la distancia, la distancia de P al foco F es

$$d(P, F) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2}.$$

De acuerdo con la definición de la parábola, $d(P, F) = y + c$, es decir

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} = y + c.$$

Ambos lados se elevan al cuadrado y al simplificar se obtiene

$$x^2 + (y - c)^2 = (y + c)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2 \qquad (1)$$

es decir,

$$x^2 = 4cy.$$

La ecuación (1) se conoce como la **forma normal** de la ecuación de una parábola con foco en $(0, c)$, directriz $y = -c$, $c > 0$ y vértice en $(0, 0)$. La gráfica de cualquier parábola con la forma normal (1) es simétrica con respecto al eje y.

La ecuación (1) no depende de la hipótesis $c > 0$. Sin embargo, la dirección hacia la que se abre la parábola sí depende del signo de c. En forma específica, si $c > 0$, la parábola se abre *hacia arriba*, como en la figura 11.1.3; si $c < 0$, la parábola se abre *hacia abajo*.

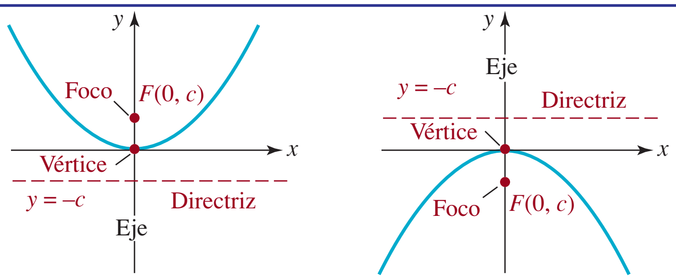
Si se supone que el foco de la parábola está en el eje x, en $F(c, 0)$, y que la ecuación de la directriz es $x = -c$, entonces el eje x es el eje de la parábola, y el vértice está en $(0, 0)$. Si $c > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $c < 0$, se abre hacia la izquierda. En cualquier caso, la **forma normal** de la ecuación es

$$y^2 = 4cx. \qquad (2)$$

La gráfica de cualquier parábola con la forma normal (2) es simétrica con respecto al eje x.

En las **FIGURAS 11.1.4** y **11.1.5** se presenta un resumen con toda esta información de las ecuaciones (1) y (2), respectivamente. El lector se sorprenderá al ver que en la figura 11.1.4*b*),

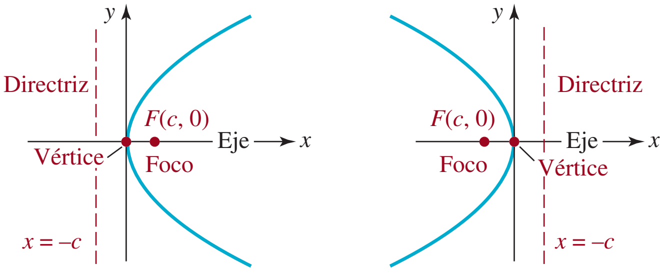
Resumen gráfico de la información de la forma normal (1)



a) $x^2 = 4cy$, $c > 0$ *b*) $x^2 = 4cy$, $c < 0$

FIGURA 11.1.4 Resumen gráfico de la información de la forma normal (1)

Resumen gráfico de la información de la forma normal (2)



a) $y^2 = 4cx$, $c > 0$ *b*) $y^2 = 4cx$, $c < 0$

FIGURA 11.1.5 Resumen gráfico de la información de la forma normal (2)