Solución Observe en el lado derecho de la igualdad que 8 puede escribirse como una potencia de 2, es decir, $8 = 2^3$. Además, por *iv*) de las leyes de los exponentes presentadas en el teorema 7.1.1,

$$8^{x+1} = (\underbrace{2^3)^{x+1}}_{\text{multiplicar exponentes}} = 2^{3x+3}.$$

Por consiguiente, la ecuación es lo mismo que

$$2^{x-3} = 2^{3x+3}.$$

Se desprende de la propiedad uno a uno de (2) que los exponentes son iguales, es decir, $x - 3 = 3x + 3$. Al despejar x obtenemos $2x = -6$ o $x = -3$. Lo invitamos a sustituir x por -3 en la ecuación original para comprobar esta respuesta. ≡

EJEMPLO 4 Usar la propiedad uno a uno (2)

Resuelva $7^{2(x+1)} = 343$ para x.

Solución Si tomamos en cuenta que $343 = 7^3$, tendremos la misma base en ambos lados de la igualdad:

$$7^{2(x+1)} = 7^3.$$

Por tanto, por (2), podemos igualar los exponentes y despejar x:

$$\begin{aligned} 2(x+1) &= 3 \\ 2x + 2 &= 3 \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 5 Usar la propiedad uno a uno (3)

Resuelva $\ln 2 + \ln(4x - 1) = \ln(2x + 5)$ para x.

Solución Por *i*) de las leyes de los logaritmos del teorema 7.2.1, el lado izquierdo de la ecuación se puede escribir así:

$$\ln 2 + \ln(4x - 1) = \ln 2(4x - 1) = \ln(8x - 2).$$

Así pues, la ecuación original es

$$\ln(8x - 2) = \ln(2x + 5).$$

Puesto que los dos logaritmos de la misma base son iguales, de inmediato se desprende de la propiedad uno a uno de (3) que

$$8x - 2 = 2x + 5 \quad \text{o} \quad 6x = 7 \quad \text{o} \quad x = \frac{6}{7}.$$

≡

En las ecuaciones logarítmicas, en especial las del tipo del ejemplo 5, debe acostumbrarse a sustituir su respuesta en la ecuación original para comprobarla. Es posible que una ecuación logarítmica tenga una **solución extraña**.

EJEMPLO 6 Una solución extraña

Resuelva $\log_2 x - \log_2(x - 2) = 3$.

Solución Para empezar, nos basamos de nuevo en que la suma de los logaritmos del lado izquierdo de la ecuación es igual al logaritmo de un producto:

$$\log_2 x(x - 2) = 3.$$

Con $b = 2$, usamos (1) para reescribir la última ecuación en la forma exponencial equivalente:

$$x(x - 2) = 2^3.$$

Por cálculos algebraicos comunes y corrientes, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= 8 \\ x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ (x - 4)(x + 2) &= 0. \end{aligned}$$

Por la última ecuación concluimos que $x = 4$ o $x = -2$. Sin embargo, debemos descartar $x = -2$ como solución. En otras palabras, el número $x = -2$ es una solución extraña porque, al sustituirlo en la ecuación original, el primer término $\log_2(-2)$ es indefinido. Por tanto, la única solución de la ecuación dada es $x = 4$.

Comprobación

$$\begin{aligned} \log_2 4 + \log_2 2 &= \log_2 2^2 + \log_2 2 \\ &= \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3. \end{aligned}$$

≡

Cuando empleemos la frase "obtenga el logaritmo de ambos lados de una igualdad" lo que hacemos en realidad es usar la propiedad que si M y N son dos números positivos tales que $M = N$, entonces $\log_b M = \log_b N$.

EJEMPLO 7 Obtener el logaritmo natural de ambos lados (miembros)

Resuelva $e^{2x} = 3^{x-4}$.

Solución En virtud de que las bases de la expresión exponencial de cada lado de la igualdad son diferentes, una forma de proceder consiste en obtener el logaritmo natural (también se puede usar el logaritmo común) de ambos lados. Por la igualdad

$$\ln e^{2x} = \ln 3^{x-4}$$

y *iii*) de las leyes de los logaritmos del teorema 7.2.1, obtenemos

$$2x \ln e = (x - 4)\ln 3.$$

A continuación usamos $\ln e = 1$ y la ley distributiva para que la última ecuación se convierta en

$$2x = x\ln 3 - 4\ln 3.$$

Reunimos los términos que incluyen el símbolo x en un lado de la igualdad y obtenemos

$$\overbrace{2x - x\ln 3}^{\text{factorizar } x \text{ en estos términos}} = -4\ln 3 \quad \text{o} \quad (2 - \ln 3)x = -4\ln 3 \quad \text{o} \quad x = \frac{-4\ln 3}{2 - \ln 3}.$$

Lo exhortamos a comprobar que $x \approx -4.8752$.

≡

EJEMPLO 8 Usar la fórmula cuadrática

Resuelva $5^x - 5^{-x} = 2$.

Solución En vista de que $5^{-x} = 1/5^x$, la ecuación es

$$5^x - \frac{1}{5^x} = 2.$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por 5^x y obtenemos

$$(5^x)^2 - 1 = 2(5^x) \qquad \text{o} \qquad (5^x)^2 - 2(5^x) - 1 = 0.$$

Si $X = 5^x$, entonces la ecuación anterior puede interpretarse como una ecuación cuadrática $X^2 - 2X - 1 = 0$. Usamos la fórmula cuadrática para resolver X y obtenemos:

$$X = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \quad \text{o} \quad 5^x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Como $1 - \sqrt{2}$ es un número negativo, no existen soluciones reales de $5^x = 1 - \sqrt{2}$ y, por tanto,

$$5^x = 1 + \sqrt{2}. \tag{4}$$

Ahora obtenemos los logaritmos naturales de ambos lados de la igualdad para obtener

$$\begin{aligned} \ln 5^x &= \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \\ x \ln 5 &= \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \\ x &= \frac{\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)}{\ln 5}. \end{aligned} \tag{5}$$

Usando la tecla $\boxed{\ln}$ de una calculadora, el resultado de la división es $x \approx 0.548$. ≡

Cambio de base En (4) del ejemplo 8, se desprende de (1) que una solución perfectamente válida de la ecuación $5^x - 5^{-x} = 2$ es $x = \log_5(1 + \sqrt{2})$. Sin embargo, desde el punto de vista del cálculo (es decir, expresando x como un número), esta última respuesta no es deseable porque ninguna calculadora tiene una función logarítmica de base 5. No obstante, si igualamos $x = \log_5(1 + \sqrt{2})$ con el resultado de (5), descubriremos que el logaritmo de base 5 puede expresarse en función del logaritmo natural:

$$\log_5\left(1 + \sqrt{2}\right) = \frac{\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)}{\ln 5}. \tag{6}$$

El resultado de (6) es sólo un caso especial de un resultado más general conocido como la **fórmula de cambio de base**.

Teorema 7.3.1 Fórmula de cambio de base

Si $a \neq 1$, $b \neq 1$, y M son números positivos, entonces

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}. \tag{7}$$

Comprobación Si $y = \log_a M$, entonces, por (1), $a^y = M$. Entonces,

$$\begin{aligned} \log_b a^y &= \log_b M \\ y \log_b a &= \log_b M && \leftarrow \text{por } iii) \text{ del teorema 7.2.1} \\ y &= \frac{\log_b M}{\log_b a} && \leftarrow \text{suponiendo que } y = \log_a M \\ \log_a M &= \frac{\log_b M}{\log_b a}. \end{aligned}$$

≡

Para obtener el valor numérico del logaritmo con una calculadora, por lo general se elige $b = 10$ o $b = e$ en (7):

$$\log_a M = \frac{\log_{10} M}{\log_{10} a} \quad \text{o} \quad \log_a M = \frac{\ln M}{\ln a}. \tag{8}$$

EJEMPLO 9 Cambio de base

Obtenga el valor numérico de $\log_2 50$.

Solución Podemos usar cualquiera de las dos fórmulas de (8). Si elegimos la primera fórmula de (8) con $M = 50$ y $a = 2$, tenemos

$$\log_2 50 = \frac{\log_{10} 50}{\log_{10} 2}.$$

Usamos la tecla $\boxed{\log}$ para calcular los dos logaritmos comunes y luego los dividimos para obtener la aproximación

$$\log_2 50 \approx 5.6439.$$

Por otra parte, la segunda fórmula de (8) da el mismo resultado:

$$\log_2 50 = \frac{\ln 50}{\ln 2} \approx 5.6439.$$

≡

Para comprobar la respuesta del ejemplo 9 en una calculadora, usamos la tecla $\boxed{y^x}$. Compruebe que $2^{5.6439} \approx 50$.

EJEMPLO 10 Cambio de base

Obtenga el valor de x en el dominio de $f(x) = 6^x$ en el cual $f(x) = 73$.

Solución Debemos encontrar una solución de la ecuación $6^x = 73$. Una forma de proceder consiste en reescribir la expresión exponencial como una expresión logarítmica equivalente:

$$x = \log_6 73.$$

Entonces, con la identificación $a = 6$, se desprende de la segunda ecuación de (8) y la ayuda de una calculadora que

$$x = \log_6 73 = \frac{\ln 73}{\ln 6} \approx 2.3946.$$

Debe comprobar que $f(2.3946) = 6^{2.3946} \approx 73$.

≡

7.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-19.

En los problema 1 a 20, resuelva la ecuación exponencial dada.

1. $5^{x-2} = 1$

2. $3^x = 27^{x2}$

3. $10^{-2x} = \dfrac{1}{10\,000}$

4. $27^x = \dfrac{9^{2x-1}}{3^x}$

5. $e^{5x-2} = 30$

6. $\left(\dfrac{1}{e}\right)^x = e^3$

7. $2^x \cdot 3^x = 36$

8. $\dfrac{4^x}{3^x} = \dfrac{9}{16}$

9. $2^{x^2} = 8^{2x-3}$

10. $\frac{1}{4}(10^{-2x}) = 25(10^x)$

11. $5 - 10^{2x} = 0$

12. $7^{-x} = 9$

13. $3^{2(x-1)} = 7^2$

14. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+2} = 8(2^{x-1})^3$

15. $\dfrac{1}{3} = (2^{|x|-2} - 1)^{-1}$

16. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9^{1-2x}$

17. $5^{|x|-1} = 25$

18. $(e^2)^{x^2} - \dfrac{1}{e^{5x+3}} = 0$

19. $4^x = 5^{2x+1}$

20. $3^{x+4} = 2^{x-16}$

En los problemas 21 a 40, resuelva la ecuación logarítmica dada.

21. $\log_3 5x = \log_3 160$

22. $\ln(10 + x) = \ln(3 + 4x)$

23. $\ln x = \ln 5 + \ln 9$

24. $3 \log_8 x = \log_8 36 + \log_8 12 - \log_8 2$

25. $\log_{10} \dfrac{1}{x^2} = 2$

26. $\log_3 \sqrt{x^2 + 17} = 2$

27. $\log_2(\log_3 x) = 2$

28. $\log_5 |1 - x| = 1$

29. $\log_3 81^x - \log_3 3^{2x} = 3$

30. $\dfrac{\log_2 8^x}{\log_2 \frac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

31. $\log_{10} x = 1 + \log_{10} \sqrt{x}$

32. $\log_2(x - 3) - \log_2(2x + 1) = -\log_2 4$

33. $\log_2 x + \log_2(10 - x) = 4$

34. $\log_8 x + \log_8 x^2 = 1$

35. $\log_6 2x - \log_6(x + 1) = 0$

36. $\log_{10} 54 - \log_{10} 2 = 2\log_{10} x - \log_{10} \sqrt{x}$

37. $\log_9 \sqrt{10x + 5} - \dfrac{1}{2} = \log_9 \sqrt{x + 1}$

38. $\log_{10} x^2 + \log_{10} x^3 + \log_{10} x^4 - \log_{10} x^5 = \log_{10} 16$

39. $\ln 3 + \ln(2x - 1) = \ln 4 + \ln(x + 1)$

40. $\ln(x + 3) + \ln(x - 4) - \ln x = \ln 3$

En los problemas 41 a 50, factorice o use la fórmula cuadrática para resolver la ecuación dada.

41. $(5^x)^2 - 26(5^x) + 25 = 0$

42. $64^x - 10(8^x) + 16 = 0$

43. $\log_4 x^2 = (\log_4 x)^2$

44. $(\log_{10} x)^2 + \log_{10} x = 2$

45. $(5^x)^2 - 2(5^x) - 1 = 0$

46. $2^{2x} - 12(2^x) + 35 = 0$

47. $(\ln x)^2 + \ln x = 2$

48. $(\log_{10} 2x)^2 = \log_{10}(2x)^2$

49. $2^x + 2^{-x} = 2$

50. $10^{2x} - 103(10^x) + 300 = 0$

En los problemas 51 a 56, encuentre las intersecciones con x en la gráfica de la función dada.

51. $f(x) = e^{x+4} - e$

52. $f(x) = 1 - \frac{1}{5}(0.1)^x$

53. $f(x) = 4^{x-1} - 3$

54. $f(x) = -3^{2x} + 5$

55. $f(x) = x^3 8^x + 5x^2 8^x + 6x 8^x$

56. $f(x) = \dfrac{2^x - 6 + 2^{3-x}}{x + 2}$

En los problemas 57 a 62, trace la gráfica de las funciones dadas. Determine las coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección en las gráficas.

57. $f(x) = 4e^x, \quad g(x) = 3^{-x}$

58. $f(x) = 2^x, \quad g(x) = 3 - 2^x$

59. $f(x) = 3^{x^2}, \quad g(x) = 2(3^x)$

60. $f(x) = \dfrac{1}{3} \cdot 2^{x^2}, \quad g(x) = 2^{x^2} - 1$

61. $f(x) = \log_{10} \dfrac{10}{x}, \quad g(x) = \log_{10} x$

62. $f(x) = \log_{10} \dfrac{x}{2}, \quad g(x) = \log_2 x$

En los problemas 63 a 66, resuelva la ecuación dada.

63. $x^{\ln x} = e^9$

64. $x^{\log_{10} x} = \dfrac{1\,000}{x^2}$

65. $\log_x 81 = 2$

66. $\log_5 125^x = -2$

En los problemas 67 y 68, use el logaritmo natural para obtener x en el dominio de la función dada, en la cual f asume el valor indicado.

67. $f(x) = 6^x; f(x) = 51$

68. $f(x) = (\frac{1}{2})^x; f(x) = 7$

Para la discusión

69. Explique: ¿cómo encontraría las intersecciones con x en la gráfica de la función $f(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$?

70. Una curiosidad En realidad, el logaritmo obtenido por John Napier fue

$$10^7 \log_{1/e}\left(\frac{x}{10^7}\right).$$

Exprese este logaritmo en términos del logaritmo natural.

7.4 Modelos exponenciales y logarítmicos

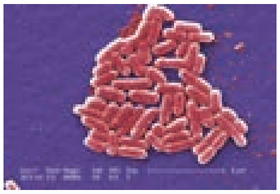
Introducción En esta sección se examinarán algunos **modelos matemáticos**. Hablando con generalidad, un modelo matemático es una descripción matemática de algo que se llama *sistema*. Para construir un modelo matemático se comienza con un conjunto de hipótesis razonables acerca del sistema que se esté tratando de describir. En estas hipótesis se incluyen todas las leyes empíricas que sean aplicables al sistema. El resultado final podría ser una descripción tan simple como lo es una función.

Modelos exponenciales En ciencias físicas aparece con frecuencia la expresión exponencial Ce^{kt}, donde C y k son constantes de modelos matemáticos de sistemas que cambian con el tiempo t. En consecuencia, los modelos matemáticos se suelen usar para predecir un estado futuro de un sistema. Por ejemplo, se usan modelos matemáticos extremadamente complicados para pronosticar el tiempo en diversas regiones de un país durante, por ejemplo, la semana próxima.

Crecimiento demográfico En un modelo de una población en crecimiento, se supone que la *tasa* de crecimiento de la población es proporcional a la *cantidad presente* en el momento t. Si $P(t)$ representa la población, es decir, el número o la cantidad presente cuando el tiempo es t, entonces, con ayuda del cálculo, se puede demostrar que esta hipótesis determina que

$$P(t) = P_0 e^{kt}, k > 0, \tag{1}$$

en donde t es el tiempo y P_0 y k son constantes. La función (1) se usa para describir el crecimiento de poblaciones de bacterias, animales pequeños y, en algunos casos raros, de los humanos. Si $t = 0$, se obtiene $P(0) = P_0$, por lo que a P_0 se le llama **población inicial**. La constante $k > 0$ se llama **constante de crecimiento** o **tasa de crecimiento**. Como e^{kt}, $k > 0$ es una función creciente en el intervalo $[0, \infty)$, el modelo de (1) describe un crecimiento no inhibido.



Bacterias *E. coli*

EJEMPLO 1 Crecimiento bacteriano

Se sabe que el tiempo de duplicación* de bacterias *E. coli* que residen en el intestino grueso de las personas saludables, tan sólo es de 20 minutos. Usar el modelo de crecimiento exponencial (1) para calcular la cantidad de bacterias de *E. coli* en un cultivo, después de 6 horas.

Solución Se usarán horas como unidad de tiempo, y entonces 20 min $= \frac{1}{3}$h. Como no se especifica la cantidad inicial de *E. coli* en el cultivo, sólo representaremos por P_0 el tama-

* El tiempo de duplicación en biología a veces se conoce como **tiempo de generación**.

ño inicial del cultivo. Entonces, usando (1), una interpretación de la primera frase en este ejemplo, en forma de función, es $P(\frac{1}{3}) = 2P_0$. Eso quiere decir que $P_0e^{k/3} = 2P_0$, o bien que $e^{k/3} = 2$. Al despejar k de esta última ecuación se obtiene la constante de crecimiento

$$\frac{k}{3} = \ln 2 \quad \text{o} \quad k = 3\ln 2 \approx 2.0794.$$

Cuando deba resolver problemas como éste, asegúrese de guardar el valor de k en la memoria de su calculadora.

Así, un modelo del tamaño del cultivo después de 6 horas es $P(t) = P_0e^{2.0794t}$. Si $t = 6$, entonces $P(6) = P_0e^{2.0794(6)} \approx 262\,144P_0$. Dicho de otra manera, si el cultivo sólo consiste en *una* bacteria cuando $t = 0$ (entonces $P_0 = 1$), el modelo indica que habrá 262 144 bacterias 6 horas después. ≡

A principios del siglo XIX, el clérigo y economista inglés Thomas R. Malthus usó el modelo de crecimiento (1) para pronosticar la población en el mundo. Para valores específicos de P_0 y k, sucedió que los valores de la función $P(t)$ eran en realidad aproximaciones razonables a la población mundial durante cierto periodo del siglo XIX. Como $P(t)$ es una función creciente, Malthus predijo que el crecimiento futuro de la población rebasaría la capacidad mundial de producción de alimentos. En consecuencia, también predijo que habría guerras y hambruna mundiales. Era Malthus más pesimista que vidente, y no pudo prever que los suministros alimenticios mundiales crecerían al paso de la mayor población, a causa de progresos simultáneos en ciencias y tecnologías.

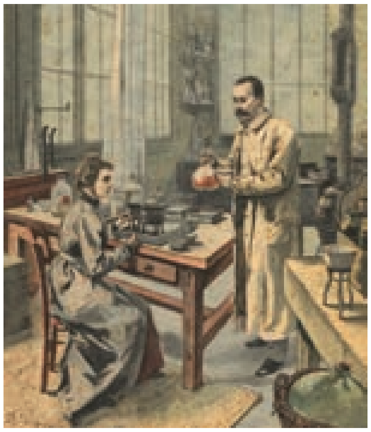
Thomas R. Malthus (1776-1834)

En 1840, **P. F. Verhulst**, matemático y biólogo belga, propuso un modelo más realista para poblaciones humanas en países pequeños. La llamada **función logística**

$$P(t) = \frac{K}{1 + ce^{rt}}, \quad r < 0, \tag{2}$$

en donde K, c y r son constantes, ha demostrado, a través de los años, ser un modelo exacto de crecimiento para poblaciones de protozoarios, bacterias, moscas de fruta o animales confinados a espacios limitados. En contraste con el crecimiento desenfrenado del modo malthusiano (1), (2) muestra crecimiento acotado. Más específicamente, la población predicha por (2) no aumentará más allá del número K, llamado **capacidad límite** o **de soporte** del sistema. Para $r < 0$, $e^{rt} \to 0$ y $P(t) \to K$ cuando $t \to \infty$. Se pide al lector que grafique un caso especial de (2), en el problema 7 de los ejercicios 7.4.

Decaimiento radiactivo El elemento 88, mejor conocido como **radio**, es radiactivo. Eso quiere decir que un átomo de radio **decae**, o se desintegra, espontáneamente, emitiendo radiación en forma de partículas alfa, partículas beta y rayos gamma. Cuando un átomo se desintegra de esta forma, su núcleo se transforma en un núcleo de otro elemento. El núcleo del átomo de radio se transforma en el núcleo de un átomo de radón, un gas radiactivo inodoro e incoloro, pero muy peligroso, que suele originarse en el suelo. Como puede penetrar un piso sellado de concreto, con frecuencia se acumula en sótanos de algunos hogares nuevos y con mucho aislamiento. Algunas organizaciones médicas han afirmado que el radón es la segunda causa principal del cáncer del pulmón.



Madame Curie (1867-1934), descubridora del radio

Si se supone que la tasa de decaimiento de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad que queda, o que está presente cuando el tiempo es t, entonces se llega básicamente al mismo modelo que en (1). La diferencia importante es que $k < 0$. Si $A(t)$ representa la cantidad de sustancia que queda cuando el tiempo es t, entonces

$$A(t) = A_0e^{kt}, \; k < 0, \tag{3}$$

en donde A_0 es la cantidad inicial de la sustancia presente; esto es, $A(0) = A_0$. La constante $k < 0$ en (3) se llama **constante de decaimiento** o **tasa de decaimiento**.

EJEMPLO 2 Desintegración del radio

Supongamos que inicialmente se tienen a la mano 20 gramos de radio. A los t años, la cantidad que queda se modela con la función $A(t) = 20e^{-0.000418t}$. Calcular la cantidad de radio que queda pasados 100 años. ¿Qué porcentaje de los 20 gramos originales ha decaído en 100 años?

Solución Usando calculadora se ve que 100 años después quedan

$$A(100) = 20e^{-0.000418(100)} \approx 19.18 \text{ g.}$$

Por lo que sólo

$$\frac{20 - 19.18}{20} \times 100\% = 4.1\%$$

han decaído, de los 20 gramos iniciales. ≡

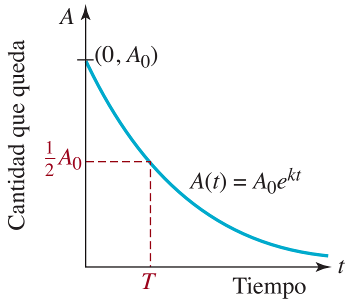


FIGURA 7.4.1 El tiempo T es la vida media

■ **Vida media** La vida media de una sustancia radiactiva es el tiempo T que tarda en desintegrarse la mitad de determinada cantidad de ese elemento, para transformarse en otro elemento. Vea la **FIGURA 7.4.1**. La vida media es una medida de la estabilidad de un elemento, esto es, mientras más corta sea la vida media, el elemento es más inestable. Por ejemplo, la vida media del elemento estroncio 90, ^{90}Sr, que es muy radiactivo y se produce en las explosiones nucleares, es de 29 días, mientras que la vida media del isótopo de uranio, ^{238}U, es de 4 560 000 años. La vida media del californio, ^{244}Cf, que fue descubierto en 1950, sólo es de 45 minutos. El polonio, ^{213}Po, tiene una vida media de 0.000001 segundos.

EJEMPLO 3 Vida media del radio

Usar el modelo exponencial del ejemplo 2 para determinar la vida media del radio.

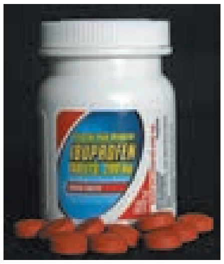
Solución Si $A(t) = 20e^{-0.000418t}$, entonces se debe calcular el tiempo T en el cual

$$A(T) = \overbrace{\tfrac{1}{2}}^{\text{la mitad de la cantidad inicial}}(20) = 10.$$

A partir de $20e^{-0.000418T} = 10$, se obtiene $e^{-0.000418T} = \frac{1}{2}$. Esta última ecuación se pasa a la forma logarítmica $-0.000418T = \ln\frac{1}{2}$, y se puede despejar T:

$$T = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0.000418} \approx 1\,660 \text{ años.}$$ ≡

Al leer con cuidado el ejemplo 3 vemos que la cantidad inicial presente no tiene influencia en el cálculo real de la vida media. Como la solución de $A(T) = A_0e^{-0.000418T} = \frac{1}{2}A_0$ conduce a $e^{-0.000418T} = \frac{1}{2}$, se ve que T es independiente de A_0. Entonces, la vida media de 1 gramo, 20 gramos o 10 000 gramos de radio es igual. Se necesitan unos 1 660 años para que la mitad de *cualquier* cantidad dada de radio se transforme en radón.



El ibuprofeno es un medicamento antiinflamatorio no esteroidal

También los medicamentos tienen vida media. En este caso, la vida media de una medicina es el tiempo T que transcurre para que el organismo elimine, por metabolismo o excreción, la mitad de la cantidad de medicamento tomada. Por ejemplo, los medicamentos antiinflamatorios no esteroidales (NSAID, de *nonsteroidal antiinflamatory drug*), como aspirina e ibuprofeno, que se toman para aliviar dolores constantes, tienen vida media relativamente corta, de algunas horas, y en consecuencia se deben tomar varias veces por día. El naproxén es un NSAID y tiene mayor vida media; suele administrarse una vez cada 12 horas. Véase el problema 31 de los ejercicios 7.4.

■ **Datación con carbono** La edad aproximada de fósiles de materia que alguna vez fue viviente se puede determinar con un método llamado **datación**, o **fechado con carbono**. El

^{14}C o carbono 14 es un isótopo radiactivo del carbono, que posiblemente se haya formado a una tasa constante en la atmósfera, por interacción de rayos cósmicos con nitrógeno 14. El método de fechado con carbono, inventado por el químico Willard Libby alrededor de 1950, se basa en que una planta o un animal absorbe ^{14}C por los procesos de respiración y alimentación, y cesa de absorberlo cuando muere. Como se verá en el ejemplo que sigue, el procedimiento de fechado con carbono se basa en el conocimiento de la vida media del ^{14}C, que es de unos 5 730 años. El carbono 14 decae y forma el nitrógeno 14 original.

Willard Libby (1908-1980)

Libby ganó el Premio Nobel de Química por sus trabajos; su método se ha usado hasta la fecha para fechar muebles de madera encontrados en las tumbas egipcias, los rollos del Mar Muerto, escritos en papiro y pieles animales, y el famoso Sudario de Turín, de lino, así como un ejemplar del Evangelio Gnóstico de Judas, recientemente descubierto y escrito en papiro.

El rollo de los Salmos

EJEMPLO 4 Datación de un fósil con carbono

Se analizó un hueso fósil y se determinó que contiene $\frac{1}{1\,000}$ de la cantidad inicial de ^{14}C que contenía el organismo cuando estaba vivo. Determinar la edad aproximada del fósil.

Solución Si la cantidad inicial era de A_0 gramos de ^{14}C en el organismo, entonces, t años después de su muerte, hay $A(t) = A_0e^{kt}$ gramos residuales. Cuando $t = 5\,730$, $A(5\,730) = \frac{1}{2}A_0$ y así $\frac{1}{2}A_0 = A_0e^{5\,730k}$. De esta última ecuación se despeja la constante k de decaimiento, y queda

$$e^{5\,730k} = \frac{1}{2} \quad \text{y así} \quad k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{5\,730} \approx -0.00012097.$$

Por consiguiente, un modelo de la cantidad de ^{14}C que queda es $A(t) = A_0e^{-0.00012097t}$. Con este modelo se debe despejar ahora t de $A(t) = \frac{1}{1\,000}A_0$:

$$A_0e^{-0.00012097t} = \frac{1}{1\,000}A_0 \quad \text{implica que} \quad t = \frac{\ln\frac{1}{1\,000}}{-0.00012097} \approx 57\,100 \text{ años.}$$ ≡

La edad determinada en este último ejemplo sale, en realidad, del límite de exactitud del método del carbono 14. Pasadas 9 vidas medias del isótopo, o sea unos 52 000 años, ha decaído aproximadamente 99.7% del carbono 14, y es casi imposible medirlo en un fósil.

Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton Suponga que un objeto o cuerpo se coloca dentro de un medio (aire, agua, etc.) que se mantiene a una temperatura constante T_m llamada **temperatura ambiente**. Si la temperatura inicial T_0 del cuerpo u objeto, en el momento de colocarlo en el medio, es mayor que la temperatura ambiente T_m, el cuerpo se enfriará. Por otra parte, si T_0 es menor que T_m, se calentará. Por ejemplo, en una oficina que se mantiene, por ejemplo a 70°F, una taza de café hirviente se enfriará, mientras que un vaso de agua helada se calentará. La hipótesis acostumbrada sobre el enfriamiento o el calentamiento es que la rapidez con la que se enfría o calienta un objeto es proporcional a la diferencia $T(t) - T_m$, donde $T(t)$ representa la temperatura del objeto en el tiempo t. En cualquier caso, de enfriamiento o calentamiento, esta hipótesis da por resultado que $T(t) - T_m = (T_0 - T_m)e^{kt}$, donde k es una constante negativa. Nótese que como $e^{kt} \to 0$ para $k < 0$, la última ecuación concuerda con la expectativa intuitiva que $T(t) - T_m \to 0$, o lo que es igual, $T(t) \to T_m$, cuando $t \to \infty$ (el café se enfría y el agua helada se calienta, ambos hasta la temperatura ambiente). Si se despeja $T(t)$ se obtiene la función de la temperatura del objeto,

Suponemos que este momento corresponde al tiempo $t = 0$.

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt},\ k < 0. \tag{4}$$

El modelo matemático (4) se llama **ley de Newton de calentamiento/enfriamiento**, por su descubridor. Observe que $T(0) = T_0$.

EJEMPLO 5 Enfriamiento de un pastel

El pastel se enfriará

Se saca un pastel del horno, cuya temperatura era de 350 °F, y se lo coloca en una cocina donde la temperatura ambiente es de 75 °F. Un minuto después, se mide la temperatura del pastel y resulta de 300 °F. Suponga que la temperatura del pastel en la cocina está dada por (4).

a) ¿Cuál es la temperatura del pastel 6 minutos después?
b) ¿En cuánto tiempo la temperatura del pastel será de 80 °F?
c) Hacer la gráfica de $T(t)$.

Solución ***a***) Cuando se saca el pastel del horno, su temperatura es también de 350 °F, esto es, $T_0 = 350$. La temperatura ambiente es la de la cocina, $T_m = 75$. Entonces, la ecuación (4) se transforma en $T(t) = 75 + 275e^{kt}$. La medición $T(1) = 300$ es la condición que determina k. De $T(1) = 75 + 275e^k = 300$, se ve que

$$e^k = \frac{225}{275} = \frac{9}{11} \qquad \text{o} \qquad k = \ln\frac{9}{11} \approx -0.2007.$$

De acuerdo con el modelo $T(t) = 75 + 275e^{-0.2007t}$ se determina que

$$T(6) = 75 + 275e^{-0.2007(6)} \approx 157.5\ °\text{F}. \tag{5}$$

b) Para determinar el momento en que la temperatura del pastel es de 80 °F se despeja t de la ecuación $T(t) = 80$. La ecuación $T(t) = 75 + 275e^{-0.2007t} = 80$ se reacomoda en la forma

$$e^{-0.2007t} = \frac{5}{275} = \frac{1}{55} \qquad \text{se ve que} \quad t = \frac{\ln\frac{1}{55}}{-0.2007} \approx 20 \text{ min.}$$

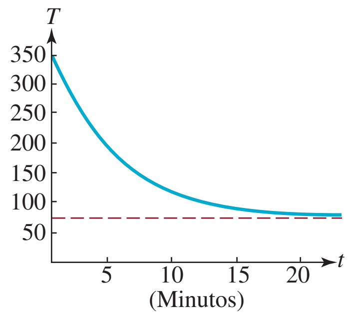


FIGURA 7.4.2 Gráfica de $T(t)$ del ejemplo 5

c) Con ayuda de una función de graficación obtuvimos la gráfica de $T(t)$ que se ve en azul en la **FIGURA 7.4.2**. Debido a que $T(t) = 75 + 275e^{-0.2007t} \to 75$ cuando $t \to \infty$, $T = 75$, indicada en rojo en la figura 7.4.2 es una asíntota horizontal de la gráfica de $T(t) = 75 + 275e^{-0.2007t}$. ≡

Interés compuesto Ciertas inversiones, como las cuentas de ahorro, pagan una tasa anual de interés que se puede componer en forma anual, trimestral, mensual, semanal, a diario, etcétera. En general, si un capital de $\$P$ se invierte a una tasa anual de interés r, que se compone n veces por año, la cantidad S que hay al final de t años se calcula con

$$S = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}. \tag{6}$$

S es el llamado **valor futuro** del capital P. Si aumenta la cantidad n sin límite, entonces se dice que el interés es **compuesto continuamente**. Para calcular el valor futuro de P en este caso, sea $m = n/r$. Entonces $n = mr$ y

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mrt} = \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}.$$

En razón de que $n \to \infty$ implica que $m \to \infty$, observa en la página 321 de la sección 7.1, que $(1 + 1/m)^m \to e$. El lado derecho de (6) se transforma en

$$P\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{rt} \to P[e]^{rt} \quad \text{cuando} \quad m \to \infty.$$

Así, si se compone continuamente una tasa anual r de interés, el valor futuro S de un capital P en t años es

$$S = Pe^{rt}. \tag{7}$$

EJEMPLO 6 Comparación de valores futuros

Supongamos que se depositan \$1 000 en una cuenta de ahorros, cuya tasa de interés anual es 3%. Comparar el valor futuro de este principal dentro de 10 años ***a***) si se compone el interés mensualmente y ***b***) si se compone el interés continuamente.

Solución

a) Como un año tiene 12 meses, $n = 12$. Además, con $P = 1\,000$, $r = 0.03$ y $t = 10$, la ecuación (6) se transforma en

$$S = 1\,000\left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^{12(10)} = 1\,000(1.0025)^{120} \approx \$1\,349.35.$$

b) Según la ecuación (7),

$$S = 1\,000e^{(0.03)(10)} = 1\,000e^{0.3} \approx \$1\,349.86.$$

Entonces, a los 10 años se ha ganado \$0.51 con la composición continua con respecto a la capitalización mensual. ≡

Modelos logarítmicos Probablemente, la aplicación más famosa de los logaritmos base 10, o logaritmos comunes es la **escala de Ricther**. Charles F. Richter, sismólogo estadounidense, inventó en 1935 una escala logarítmica para comparar las energías de distintos temblores o sismos. La magnitud M de un sismo se define con

Charles F. Richter (1900-1985)

$$M = \log_{10}\frac{A}{A_0}, \tag{8}$$

en donde A es la amplitud de la onda sísmica máxima del sismo, y A_0 es una amplitud de referencia que corresponde a la magnitud $M = 0$. El número M se calcula con un decimal de precisión. Se considera que los sismos de magnitud 6 o mayores son potencialmente destructivos.

EJEMPLO 7 Comparación de intensidades

El sismo del 26 de diciembre de 2004, frente a la costa oeste de Sumatra del Norte, que produjo un tsunami que causó 200 000 muertes, se clasificó inicialmente como de 9.3 en la escala de Richter. El 28 de marzo de 2005, una réplica en la misma zona se clasificó como de 8.7 grados en la misma escala. ¿Cuántas veces más intenso fue el sismo de 2004?

Solución De acuerdo con (8),

$$9.3 = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2004} \quad \text{y} \quad 8.7 = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2005}.$$

Esto quiere decir, a su vez, que

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2004} = 10^{9.3} \quad \text{y} \quad \left(\frac{A}{A_0}\right)_{2005} = 10^{8.7}.$$

Ahora bien, como $9.3 = 8.7 + 0.6$, entonces, por las leyes de los exponentes,

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2004} = 10^{9.3} = 10^{0.6}10^{8.7} = 10^{0.6}\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2005} \approx 3.98\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2005}.$$

Así, el sismo original fue unas 4 veces más intenso que la réplica. ≡

En el ejemplo 7 se puede ver que, por ejemplo, si un sismo es de 6.0 y otro es de 4.0 en la escala de Richter, el sismo de 6.0 es $10^2 = 100$ veces más intenso que el de 4.0.

Søren Sørensen (1868-1939)

pH de una solución En química, el potencial hidrógeno o **pH** de una solución se define como

$$\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}^+], \tag{9}$$

en donde el símbolo $[\text{H}^+]$ representa la concentración de iones hidrógeno en la solución, expresada en moles por litro. La escala de pH fue inventada en 1909 por Søren Sørensen, bioquímico danés. Las soluciones se clasifican de acuerdo con el valor de su pH: *ácidas*, *básicas* o *neutras*. Una solución cuyo pH está en el intervalo $0 < \text{pH} < 7$ se considera ácida; cuando el $\text{pH} > 7$, la solución es básica (o alcalina). En caso de que $\text{pH} = 7$, la solución es neutra o neutral. El agua, si no está contaminada por otras soluciones o por la lluvia ácida, es un ejemplo de solución neutra, mientras que el jugo de limón sin diluir tiene un pH en los límites $\text{pH} \le 3$. Una solución con $\text{pH} = 6$ es diez veces más ácida que una solución neutra. Véanse los problemas 47-50 en los ejercicios 7.4.

Como se verá en el siguiente ejemplo, los valores de pH se suelen calcular redondeando a una cifra decimal.

EJEMPLO 8 pH de la sangre humana

Se sabe que la concentración de iones hidrógeno en la sangre de una persona saludable es $[\text{H}^+] = 3.98 \times 10^{-8}$ moles/litro. Calcular el pH de la sangre.

Solución De acuerdo con (9) y las leyes de los logaritmos (teorema 7.2.1)

$$\begin{aligned} \text{pH} &= -\log_{10}[3.98 \times 10^{-8}] \\ &= -[\log_{10}3.98 + \log_{10}10^{-8}] \\ &= -[\log_{10}3.98 - 8\log_{10}10] \qquad \leftarrow \log_{10}10 = 1 \\ &= -[\log_{10}3.98 - 8]. \end{aligned}$$

Con ayuda de la tecla log 10 de una calculadora se comprueba que

$$\text{pH} \approx -[0.5999 - 8] \approx 7.4.$$

≡

La sangre humana suele ser una solución básica. Sus valores de pH caen normalmente dentro de los límites bastante estrechos de $7.2 < \text{pH} < 7.6$. Una persona cuya sangre tiene un pH fuera de estos límites puede padecer alguna enfermedad, e incluso puede morir.

7.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-19.

Crecimiento demográfico

1. Pasadas 2 horas, se observa que la cantidad de bacterias en un cultivo se ha duplicado.

a) Deduzca un modelo exponencial (1) para determinar la cantidad de bacterias en el cultivo, cuando el tiempo es t.

b) Determine la cantidad de bacterias presentes en el cultivo después de 5 horas.

c) Calcule el tiempo que tarda el cultivo en crecer hasta 20 veces su tamaño inicial.

2. Un modelo de la cantidad de bacterias en un cultivo después de t horas es la ecuación (1).

a) Calcule la constante de crecimiento k si se sabe que después de 1 hora la colonia se ha expandido hasta 1.5 veces su población inicial.

b) Calcule el tiempo que tarda el cultivo en cuadruplicar su tamaño.

3. Un modelo de la población de una comunidad pequeña es $P(t) = 1\,500e^{kt}$. Si la población inicial aumenta 25% en 10 años, ¿cuál será la población en 20 años?

4. Un modelo de la población de una comunidad pequeña, después de t años, se define con (1).

a) Si la población inicial se duplica en 5 años, ¿cuánto tardará en triplicarse? ¿Y en cuadruplicarse?

b) Si la población de la comunidad del inciso *a*) es 10 000 después de 3 años, ¿cuál era la población inicial?

5. Un modelo de la cantidad de bacterias en un cultivo, después de t horas, es $P(t) = P_0e^{kt}$. Después de 3 horas, se observa que hay 400 bacterias. Luego de 10 horas desde el inicio, hay 2 000 bacterias. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

6. Como parte de una investigación de genética se cultiva una pequeña colonia de *Drosophila* (moscas pequeñas de las frutas, con dos alas) en un ambiente de laboratorio. A los 2 días se observa que la población de moscas ha aumentado a 200. Después de 5 días, la colonia tiene 400 moscas.

a) Deduzca un modelo $P(t) = P_0e^{kt}$ de la población de la colonia de *drosophilas* después de t días.

b) ¿Cuál será la población de la colonia en 10 días?

c) ¿Cuándo la población de la colonia tendrá 5 000 moscas?

7. Un alumno enfermo de un virus de catarro regresa a un colegio aislado, de 2 000 estudiantes. La cantidad de estudiantes infectados con catarro, t días después del regreso del alumno enfermo, se calcula con la función logística

$$P(t) = \frac{2\,000}{1 + 1\,999e^{-0.8905t}}.$$

a) De acuerdo con este modelo, ¿cuántos estudiantes serán infectados por el catarro después de 5 días?

b) ¿Cuánto tiempo pasará para que la mitad de la población de estudiantes quede infectada?

c) ¿Cuántos alumnos indica el modelo que se infectarán después de un tiempo muy prolongado?

d) Trace una gráfica de $P(t)$.

8. En 1920, Pearl y Reed propusieron un modelo logístico de la población de Estados Unidos, con base en datos de 1790, 1850 y 1910. La función logística que propusieron fue

$$P(t) = \frac{2\,930.3009}{0.014854 + e^{-0.0313395t}},$$

en donde P se expresa en miles, y t representa la cantidad de años después de 1780.

a) El modelo concuerda muy bien con las cifras de los censos de entre 1790 y 1910. Determine las cifras de la población de 1790, 1850 y 1910.

b) ¿Qué indica este modelo de la población de Estados Unidos después de un tiempo muy largo? ¿Cómo se compara esta predicción con el censo de población de 2000, que fue de 281 millones?

Decaimiento radiactivo y vida media

9. Al principio había 200 miligramos de una sustancia radiactiva. Pasadas 6 horas, la masa disminuyó 3%. Forme un modelo exponencial $A(t) = A_0e^{kt}$ de la cantidad residual de la sustancia que se desintegra, pasadas t horas. Calcule la cantidad que queda después de 24 horas.

10. Determine la vida media de la sustancia del problema 9.

11. Resuelva este problema sin usar el modelo exponencial (3). Al principio hay disponibles 400 gramos de una sustancia radiactiva. Si la vida media de la sustancia es de 8 horas, presente su estimación informada de cuánto queda (aproximadamente) luego de 17 horas. Después de 23 horas. Luego de 33 horas.

12. Considere un modelo exponencial $A(t) = A_0e^{kt}$ de la cantidad que queda de la sustancia radiactiva del problema 11. Compare los valores calculados de $A(17)$, $A(23)$ y $A(33)$ con sus estimaciones.

13. El yodo 131 se usa en procedimientos de medicina nuclear; es radiactivo y su vida media es de 8 días. Calcule la constante k de decaimiento del yodo 131. Si la cantidad residual de una muestra inicial después de t días se calcula con el modelo exponencial $A(t) = A_0e^{kt}$, ¿cuánto tardará en decaer 95% de la muestra?

14. La cantidad de una sustancia radiactiva que queda pasadas t horas se calcula con $A(t) = 100e^{kt}$. Después de 12 horas, la cantidad inicial disminuyó 7%. ¿Cuánto queda después de 48 horas? ¿Cuál es la vida media de la sustancia?

15. La vida media del polonio 210, ^{210}Po, es de 140 días. Si $A(t) = A_0e^{kt}$ representa la cantidad de ^{210}Po que queda después de t días, ¿cuál es la cantidad que queda después de 80 días? ¿Después de 300 días?

16. El estroncio 90 es una sustancia radiactiva peligrosa que se encuentra en la lluvia ácida. En ese caso puede llegar a la cadena alimentaria, al contaminar el pasto con el cual se alimentan unas vacas. La vida media del estroncio 90 es de 29 años.

a) Deduzca un modelo exponencial (3) para determinar la cantidad residual después de t años.

b) Suponga que se encuentra ^{90}Sr en el pastizal, y su concentración es 3 veces la concentración de seguridad A_0. ¿Cuánto tiempo pasará para que se pueda usar el pastizal de nuevo para alimentar vacas?

Datación con carbono

17. En las paredes y techos de una caverna en Lascaux, Francia, se encontraron dibujos hechos con carbón vegetal. Determine la edad aproximada de las figuras, si se determinó que 86% del ^{14}C de un trozo de carbón vegetal que se encontró en la cueva había decaído por radiactividad.

Trazos con carbón vegetal, del problema 17

18. El análisis de un hueso fósil de animal, en un sitio arqueológico, indica que ese hueso ha perdido entre 90 y 95% de su ^{14}C. Indique un intervalo de edades posibles del fósil.

19. El Sudario de Turín muestra la imagen negativa del cuerpo de un hombre, que parece haber sido crucificado. Muchos creen que es el sudario con que fue sepultado Jesús de Nazaret. En 1988, el Vaticano permitió hacer una datación del sudario con radiocarbono. Varios laboratorios independientes analizaron la tela, y el consenso de opiniones fue que el sudario tiene unos 660 años de antigüedad, edad que concuerda con su aspecto histórico. Esta edad fue refutada por muchos estudiosos. Con esta edad, determine qué porcentaje de la cantidad original de ^{14}C quedaba en la tela en 1988.

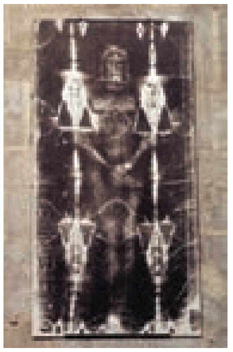


Imagen del sudario del problema 19

20. En 1991, unos alpinistas encontraron un cuerpo conservado de un hombre, parcialmente congelado, en un glaciar de los Alpes Austriacos. Se encontró, con técnicas de fechado con carbono, que el cuerpo de Ötzi, como se llamó a ese hombre de las nieves, contenía 53% del ^{14}C que contiene una persona viva. ¿Cuál es la fecha aproximada de su muerte?

El hombre de las nieves del problema 20

Ley de enfriamiento o calentamiento de Newton

21. Suponga que sale una pizza del horno a 400 °F y que la cocina tiene una temperatura constante de 80 °F. Tres minutos después, la temperatura de la pizza es de 275 °F.

a) ¿Cuál es la temperatura $T(t)$ de la pizza después de 5 minutos?

b) Determine el tiempo cuando la temperatura de la pizza es de 150 °F.

c) Después de un tiempo muy largo, ¿cuál es la temperatura aproximada de la pizza?

22. Un vaso de agua fría se saca de un refrigerador cuya temperatura interior es de 39 °F, y se deja en un recinto que se mantiene a 72 °F. Un minuto después, la temperatura del agua es de 43 °F. ¿Cuál es la temperatura del agua después de 10 minutos? ¿Y después de 25 minutos?

23. Se introduce un termómetro que estaba a la intemperie, donde la temperatura del aire es de -20 °F, a un recinto donde la temperatura del aire es de 70 °F constante. Un minuto después, dentro del recinto, el termómetro indica 0 °F. ¿Cuánto tardará en indicar 60 °F?

24. Un termómetro se saca del interior de una casa al exterior, donde la temperatura del aire es de 5 °F. Después de estar afuera un minuto, el termómetro indica 59 °F y después de 5 minutos indica 32 °F. ¿Cuál es la temperatura en el interior de la casa?

Termómetro del problema 24

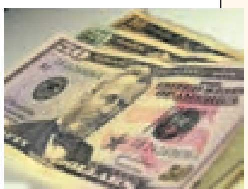
25. Se encontró un cadáver dentro de un cuarto cerrado de una casa, donde la temperatura era de 70 °F constantes. Cuando lo descubrieron, la temperatura en su interior se midió y resultó ser de 85 °F. Una hora después, la segunda medición fue de 80 °F. Suponga que el momento de la muerte corresponde a $t = 0$, y que en ese momento la temperatura interna era de 98.6 °F. Determine cuántas horas pasaron hasta que se encontró el cadáver.

26. Repita el problema 25, si las pruebas indicaban que la persona muerta tenía fiebre de 102 °F en el momento de su muerte.

Interés compuesto

27. Suponga que se deposita 1¢ en una cuenta de ahorros que paga 1% de interés anual, compuesto continuamente. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta después de 2 000 años? ¿Cuál es el valor futuro de 1¢ en 2 000 años, si la cuenta paga 2% de interés anual compuesto continuamente?

28. Suponga que se invierten \$100 000 a una tasa de interés anual de 5%. Use (6) y (7) para comparar los valores futuros de esa cantidad en 1 año, llenando la tabla siguiente:



Interés compuesto	n	Valor futuro S
Anual	1	
Semestral	2	
Trimestral	4	
Mensual	12	
Semanal	52	
Diario	365	
Cada hora	8 760	
Continuamente	$n \to \infty$	

29. Suponga que deposita \$5 000 en una cuenta de ahorros que paga 6% de interés anual compuesto continuamente. ¿Cuántos intereses ganará en 8 años?

30. Valor presente Si se despeja P (el capital) de (7), esto es, si $P = Se^{-rt}$, se obtiene la cantidad que se debe invertir hoy, a una tasa anual r de interés, para que valgan \$$S$ después de t años. Se dice que P es el **valor presente** de la cantidad S. ¿Cuál es el valor presente de \$100 000 a una tasa anual de 3% compuesto continuamente durante 30 años?

Modelos exponenciales diversos

31. Vida media efectiva Las sustancias radiactivas son eliminadas de los organismos vivos mediante dos procesos: decaimiento físico natural y metabolismo biológico. Cada proceso contribuye a que haya una vida media efectiva E, que se define por

$$1/E = 1/P + 1/B,$$

en donde P es la vida media física de la sustancia radiactiva, y B es la vida media biológica.

a) El yodo radiactivo, ^{131}I, se usa para tratar el hipertiroidismo (tiroides hiperactiva). Se sabe que para las tiroides humanas, $P = 8$ días, y $B = 24$ días. Calcule la vida media efectiva del ^{131}I.

b) Suponga que la cantidad de ^{131}I en la tiroides humana después de t días se modela con $A(t) = A_0e^{kt}$, $k < 0$. Use la vida media efectiva que determinó en el inciso *a*) para calcular el porcentaje de yodo radiactivo que queda en la tiroides humana dos semanas después de su ingestión.

32. Regreso a la ley de enfriamiento de Newton La rapidez con que se enfría un cuerpo también depende de su superficie S expuesta. Si S es constante, entonces una modificación de (4) es

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kSt},\ k < 0.$$

Suponga que dos tazas, A y B, se llenan con café al mismo tiempo. Al principio, la temperatura del café es de 150 °F. La superficie expuesta de la taza de café B es el doble de la de la taza de café A. Pasados 30 minutos, la temperatura de la taza de café A es de 100 °F. Si $T_m = 70$ °F, ¿cuál es la temperatura del café en la taza B a los 30 minutos?

33. Circuito en serie En un circuito sencillo en serie, formado por un voltaje constante E, una inductancia de L henries y una resistencia de R ohms, se puede demostrar que la corriente $I(t)$ es

$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right).$$

Despeje t en función de los otros símbolos.

34. Concentración de medicina Bajo ciertas condiciones, la concentración de una medicina, en el momento t después de inyectarla, es

$$C(t) = \frac{a}{b} + \left(C_0 - \frac{a}{b}\right)e^{-bt}.$$

Aquí, a y b son constantes positivas, y C_0 es la concentración de la sustancia cuando $t = 0$. Determine la concentración de un medicamento, en estado estable, esto es, el valor límite de $C(t)$ cuando $t \to \infty$. Determine el tiempo t en el cual $C(t)$ es la mitad de la concentración de estado estable.

Escala de Richter

35. Dos de los sismos más devastadores en el área de la bahía de San Francisco sucedieron en 1906, a lo largo de la Falla de San Andrés, y en 1989 en las Montañas Santa Cruz, cerca del Pico Loma Prieta. Los sismos de 1906 y 1989 fueron de 8.5 y 7.1 en la escala de Richter, respectivamente. ¿Cuántas veces mayor fue la intensidad del sismo de 1906 que la de 1989?

Distrito Marina de San Francisco, 1989

36. ¿Cuántas veces mayor fue la intensidad del sismo del norte de Sumatra en 2004 (ejemplo 7) en comparación con el sismo de Alaska, en 1964, cuya magnitud fue de 8.9?

37. Si un sismo tiene 4.2 de magnitud en la escala de Richter, ¿cuál es la magnitud, en escala de Richter, de un sismo cuya intensidad es 20 veces mayor? [*Pista:* primero resuelva la ecuación $10^x = 20$].

38. Demuestre que la escala de Richter, definida en (8) de esta sección, se puede escribir en la forma

$$M = \frac{\ln A - \ln A_0}{\ln 10}.$$

pH de una solución

En los problemas 39 a 42, determine el pH de una solución con la concentración de iones hidrógeno $[H^+]$ indicada.

39. 10^{-6}

40. 4×10^{-7}

41. 2.8×10^{-8}

42. 5.1×10^{-5}

En los problemas 43 a 46, determine la concentración de iones hidrógeno $[H^+]$ de una solución a partir del pH indicado.

43. 3.3

44. 7.3

45. 6.6

46. 8.1

En los problemas 47 a 50, determine cuántas veces más ácida es la primera sustancia que la segunda.

47. jugo de limón: pH = 2.3, vinagre: pH = 3.3

48. ácido de acumulador: pH = 1, lejía: pH = 13

49. lluvia ácida: pH = 3.8, lluvia limpia: pH = 5.6

50. NaOH: $[H^+] = 10^{-14}$, HCl: $[H^+] = 1$

Modelos logarítmicos diversos

51. Escala de Richter y la energía Charles Richter, al trabajar con Beno Gutenberg, desarrolló el modelo

$$M = \tfrac{2}{3}[\log_{10} E - 11.8]$$

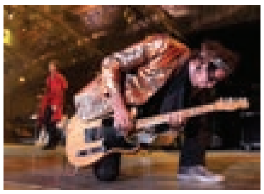
que relaciona la magnitud Richter, M de un sismo con su energía sísmica E (expresada en ergs). Calcule la energía sísmica E del sismo del norte de Sumatra, en 2004, en el que $M = 9.3$.

52. Nivel de intensidad El **nivel de intensidad** b de un sonido, expresado en decibeles (dB), se define por medio de

$$b = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}, \tag{10}$$

en donde I es la **intensidad del sonido** expresada en watts/cm^2 e $I_0 = 10^{-16}$ watts/cm^2 es la intensidad del sonido más débil que se puede oír (0 dB). Use (10) y llene la siguiente tabla:

Sonido	Intensidad I (watts/cm^2)	Nivel de intensidad b (dB)
Murmullo	10^{-14}	
Conversación	10^{-11}	
Comerciales de TV	10^{-10}	
Alarma de humo	10^{-9}	
Despegue de avión a reacción	10^{-7}	
Rock band	10^{-4}	



53. Umbral de dolor En general, se toma el umbral del dolor como alrededor de 140 dB. Calcule la intensidad del sonido I que corresponde a 140 dB.

54. Niveles de intensidad La intensidad del sonido I es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d a su fuente, esto es,

$$I = \frac{k}{d^2}, \tag{11}$$

en donde k es la constante de proporcionalidad. Suponga que d_1 y d_2 son distancias a una fuente de sonido, y que los niveles de intensidad correspondientes, de los sonidos, son b_1 y b_2. Use (11) en (10) para demostrar que b_1 y b_2 se relacionan por

$$b_2 = b_1 + 20\log_{10}\frac{d_1}{d_2}. \tag{12}$$

55. Nivel de intensidad Cuando un avión P_1 volaba a una altitud de 1 500 pies, pasó sobre un punto en el suelo donde midieron su intensidad, que resultó ser de $b_1 = 70$ dB. Use (12) para calcular el nivel de intensidad b_2 de un segundo avión P_2 que vuela a 2 600 pies de altura, cuando pasa sobre el mismo punto.

56. Conversación sobre política A una distancia de 4 pies, el nivel de intensidad de una conversación animada es de 50 dB. Use (12) para calcular el nivel de intensidad a 14 pies de la conversación.

57. Pupila del ojo Un modelo empírico, inventado por DeGroot y Gebhard, relaciona el diámetro d de la pupila, en milímetros, con la luminancia B de la fuente luminosa (expresada en mililamberts, mL):

$$\log_{10}d = 0.8558 - 0.000401\,(8.1 + \log_{10}B)^3.$$

Véase la **FIGURA 7.4.3**.

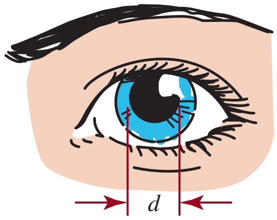


FIGURA 7.4.3 Diámetro de la pupila del problema 57

a) La luminancia promedio del cielo claro es aproximadamente de $B = 255$ mL. Calcule el diámetro de pupila correspondiente.

b) La luminancia del Sol varía entre aproximadamente $B = 190\,000$ mL en la aurora, hasta $B = 51\,000\,000$ a mediodía. Calcule los diámetros correspondientes de pupila.

c) Calcule la luminancia B que corresponde a un diámetro de pupila de 7 mm.

58. Área superficial del cuerpo Los investigadores médicos usan el modelo matemático empírico

$$\log_{10}A = -2.144 + (0.425)\log_{10}m + (0.725)\log_{10}h$$

para calcular el área superficial del cuerpo A (medida en metros cuadrados), dada la masa m de una persona (en kilogramos) y la estatura h (en centímetros).

a) Calcule el área superficial del cuerpo de una persona cuya masa es $m = 70$ kg y que mide $h = 175$ cm de estatura.

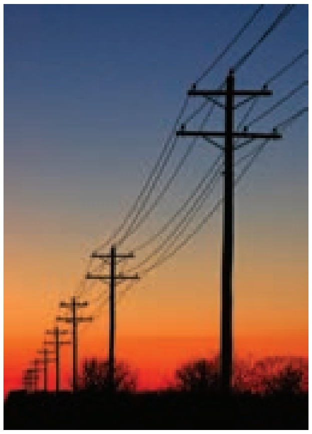
b) Determine su masa y estatura y calcule el área superficial de su cuerpo.

7.5 Funciones hiperbólicas

Introducción En la sección 7.4 comprobamos la utilidad de la función exponencial e^x en diversos modelos matemáticos. Otra aplicación más consiste en imaginar una cuerda de alambre flexible, como un cable que cuelga sólo bajo su propio peso entre dos soportes fijos. Se puede demostrar que, bajo ciertas condiciones, el alambre colgante toma la forma de la gráfica de la función

$$f(x) = c\frac{e^{x/c} + e^{-x/c}}{2}. \tag{1}$$

El símbolo c representa una constante positiva que depende de las características físicas del alambre. Funciones como la (1), formadas por ciertas combinaciones de e^x y e^{-x}, aparecen en tantas aplicaciones, que se les han asignado nombres.



Cables telefónicos

Funciones hiperbólicas En particular cuando $c = 1$ en (1), la función resultante $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ se llama **coseno hiperbólico**.

Definición 7.5.1 Funciones hiperbólicas

Para todo número real x, el **seno hiperbólico** de x, representado por senh x, es

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{2}$$

y el **coseno hiperbólico** de x, representado por cosh x, es

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{3}$$

Arco Gateway, St. Louis, MO., Estados Unidos

En forma análoga a las funciones trigonométricas tan x, cot x, sec x y csc x, que se definen en términos de sen x y cos x, hay cuatro funciones hiperbólicas más, tanh x, coth x, sech x y csch x, que se definen en términos de senh x y cosh x. Por ejemplo, las funciones tangente hiperbólica y secante hiperbólica se definen como sigue:

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{y} \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \tag{4}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad \text{y} \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}. \tag{5}$$

■ **Gráficas** La gráfica del coseno hiperbólico, que muestra la **FIGURA 7.5.1**, se llama **catenaria**. La palabra *catenaria* se deriva de la palabra *catena*, cadena en griego. La forma del famoso arco Gateway de St. Louis Missouri, de 630 pies de altura, es una catenaria invertida. Compare la forma de la figura 7.5.1 con la de la foto adjunta. La gráfica de $y = \operatorname{senh} x$ se ve en la **FIGURA 7.5.2**.

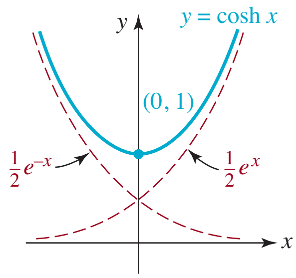


FIGURA 7.5.1 La gráfica de $y = \cosh x$ es una catenaria

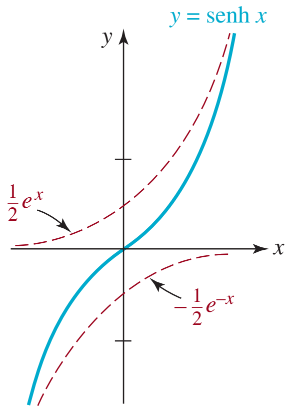


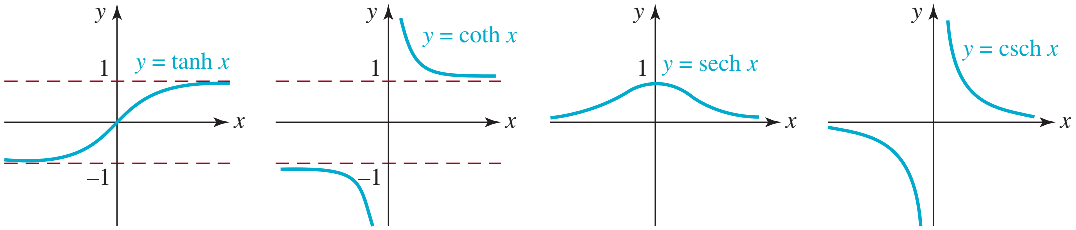
FIGURA 7.5.2 Gráfica de $y = \operatorname{senh} x$

Las gráficas de la tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas se presentan en la **FIGURA 7.5.3**. Observe que $y = 1$ y $y = -1$ son las asíntotas horizontales en las gráficas de $y = \tanh x$ y $y = \coth x$ y que $x = 0$ es una asíntota vertical en las gráficas de $y = \coth x$ y $y = \operatorname{csch} x$.

■ **Identidades** Aunque las funciones hiperbólicas no son periódicas, poseen identidades parecidas a las identidades trigonométricas. En forma parecida a la identidad pitagórica básica de trigonometría, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, en los casos del seno y del coseno hiperbólicos:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1. \tag{6}$$

Véanse los problemas 1 a 6 en los ejercicios 7.5.



a) $y = \tanh x$ *b*) $y = \coth x$ *c*) $y = \operatorname{sech} x$ *d*) $y = \operatorname{csch} x$

FIGURA 7.5.3 Gráficas de la tangente hiperbólica *a*), cotangente hiperbólica *b*), secante hiperbólica *c*) y cosecante hiperbólica *d*)

7.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

En los problemas 1 a 6, use las definiciones de $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$, en (2) y (3), para verificar la identidad.

1. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

2. $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

3. $\cosh(-x) = \cosh x$

4. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$

5. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

6. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

7. ***a***) Si $\operatorname{senh} x = -\frac{3}{2}$, use la identidad dada en el problema 1 para encontrar el valor de $\cosh x$.
b) Use el resultado del inciso *a*) para encontrar los valores numéricos de $\tanh x$, $\coth x$, $\operatorname{sech} x$, y $\operatorname{csch} x$.

8. ***a***) Si $\tanh x = \frac{1}{2}$, use la identidad dada en el problema 2 para encontrar el valor de $\operatorname{sech} x$.
b) Use el resultado del inciso *a*) para encontrar los valores numéricos de $\tanh x$, $\coth x$, $\operatorname{sech} x$, y $\operatorname{csch} x$.

9. Como puede observarse en la figura 7.5.2, la función seno hiperbólico $y = \operatorname{senh} x$ es uno a uno. Use (2) de la definición 7.5.1 en la forma $e^x - 2y - e^{-x} = 0$ para demostrar que el seno hiperbólico inverso $\operatorname{senh}^{-1} x$ está dado por

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

10. La función $y = \cosh x$ en el dominio restringido $[0, \infty)$ es uno a uno. Proceda como en el problema 9 para encontrar el inverso de $y = \cosh x$, $x \geq 0$.

Conceptos importantes

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Función exponencial:
- base $b > 0$, $b \neq 1$
- creciente, $b > 1$
- decreciente, $b < 1$

Leyes de los exponentes
Inverso de la función exponencial
El número e
Función exponencial natural
Función logarítmica:
- base $b > 0$, $b \neq 1$

Leyes de los logaritmos
Logaritmo común
Logaritmo natural
Fórmula de cambio de base
Crecimiento y decaimiento:
- constante de crecimiento
- constante de decaimiento

Vida media
Datación con carbono
Interés compuesto continuo

pH de una solución
Escala de Richter
Funciones hiperbólicas:
- coseno
- seno

CAPÍTULO 7 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

A. Verdadero/Falso

En los problemas 1 a 14, conteste cierto o falso.

1. $y = \ln x$ y $y = e^x$ son funciones inversas. ________
2. El punto $(b, 1)$ está en la gráfica de $f(x) = \log_b x$. ________
3. $y = 10^{-x}$ y $y = (0.1)^x$ son la misma función. ________
4. Si $f(x) = e^{x^2} - 1$, entonces $f(x) = 1$ cuando $x = \pm\ln\sqrt{2}$. ________
5. $4^{x/2} = 2^x$ ________
6. $\dfrac{2^{x^2}}{2^x} = 2^x$ ________
7. $2^x + 2^{-x} = (2 + 2^{-1})^x$ ________
8. $2^{3+3x} = 8^{1+x}$ ________
9. $-\ln 2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ________
10. $\ln\dfrac{e^a}{e^b} = a - b$ ________
11. $\ln(\ln e) = 1$ ________
12. $\ln\sqrt{43} = \dfrac{\ln 43}{2}$ ________
13. $\ln(e + e) = 1 + \ln 2$ ________
14. $\log_6(36)^{-1} = -2$ ________

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 22, llene los espacios.

1. La gráfica de $y = 6 - e^{-x}$ corta el eje y en ________ y su asíntota horizontal es $y =$ ________.
2. El corte de la gráfica de $y = -10 + 10^{5x}$ con el eje x está en ________.
3. La gráfica de $y = \ln(x + 4)$ corta al eje x en ________ y su asíntota vertical es $x =$ ________.
4. La gráfica de $y = \log_8(x + 2)$ interseca el eje y en ________.
5. $\log_5 2 - \log_5 10 =$ ________.
6. $6\ln e + 3\ln\dfrac{1}{e} =$ ________.
7. $e^{3\ln 10} =$ ________.
8. $10^{\log_{10} 4.89} =$ ________.
9. $\log_4(4 \cdot 4^2 \cdot 4^3) =$ ________.
10. $\dfrac{\log_5 625}{\log_5 125} =$ ________.
11. Si $\log_3 N = -2$, entonces $N =$ ________.
12. Si $\log_b 6 = \frac{1}{2}$, entonces $b =$ ________.
13. Si $\ln e^3 = y$, entonces $y =$ ________.
14. Si $\ln 3 + \ln(x - 1) = \ln 2 + \ln x$, entonces $x =$ ________.
15. Si $-1 + \ln(x - 3) = 0$, entonces $x =$ ________.
16. Si $\ln(\ln x) = 1$, entonces $x =$ ________.
17. Si $100 - 20e^{-0.15t} = 35$, entonces, redondeando a cuatro decimales, $t =$ ________.
18. Si $3^x = 5$, entonces $3^{-2x} =$ ________.
19. $f(x) = 4^{3x} = (\_\_\_)^x$
20. $f(x) = (e^2)^{x/6} = (\_\_\_)^x$
21. Si la gráfica de $y = e^{x-2} + C$ pasa por $(2, 9)$, entonces $C =$ ________.
22. Con transformaciones rígidas, el punto $(0, 1)$ de la gráfica de $y = e^x$ se desplaza al punto ________ en la gráfica de $y = 4 + e^{x-3}$.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 y 2, reformule la expresión exponencial como una expresión logarítmica equivalente.

1. $5^{-1} = 0.2$
2. $\sqrt[3]{512} = 8$

En los problemas 3 y 4, reformule la expresión logarítmica como una expresión exponencial equivalente.

3. $\log_9 27 = 1.5$
4. $\log_6(36)^{-2} = -4$

En los problemas 5 a 12, calcule x.

5. $2^{1-x} = 8$
6. $3^{2x} = 81$
7. $e^{1-2x} = e^2$
8. $e^{x^2} - e^5 e^{x-1} = 0$
9. $2^{1-x} = 7$
10. $3^x = 7^{x-1}$

11. $e^{x+2} = 6$

12. $3e^{x} = 4e^{-3x}$

En los problemas 13 y 14, resuelva la variable indicada.

13. $P = Se^{-rm}$; para m

14. $P = K / 1 + ce^{rt}$; para t

En los problemas 15 y 16, grafique las funciones en el mismo conjunto de ejes coordenados.

15. $y = 4^{x}$, $y = \log_4 x$

16. $y = (\frac{1}{2})^{x}$, $y = \log_{1/2} x$

17. Indique la correspondencia de la letra en la gráfica de la **FIGURA 7.R.1** con la función adecuada.

i) $f(x) = b^{x}, b > 2$

ii) $f(x) = b^{x}, 1 < b < 2$

iii) $f(x) = b^{x}, \frac{1}{2} < b < 1$

iv) $f(x) = b^{x}, 0 < b < \frac{1}{2}$

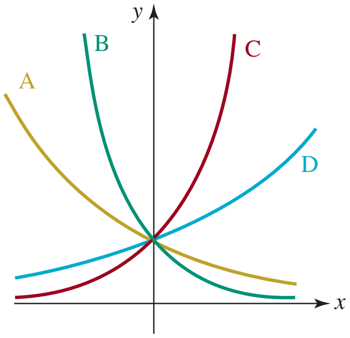


FIGURA 7.R.1 Gráficas del problema 17

18. En la **FIGURA 7.R.2** llene los espacios en blanco de las coordenadas de los puntos en cada gráfica.

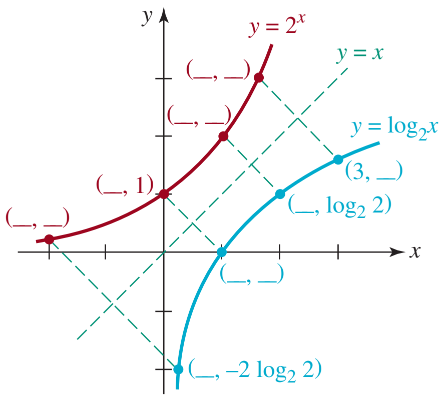


FIGURA 7.R.2 Gráficas del problema 18

En los problemas 19 y 20, determine la pendiente de la recta L que se indica en cada figura.

19.

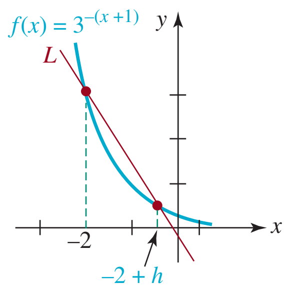


FIGURA 7.R.3 Gráfica del problema 19

20.

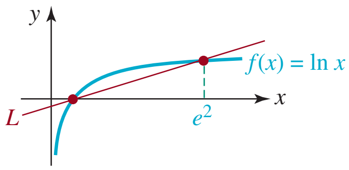


FIGURA 7.R.4 Gráfica del problema 20

En los problemas 21 a 26, indique la correspondencia de las siguientes funciones con una de las gráficas de abajo.

i) $y = \ln(x - 2)$

ii) $y = 2 - \ln x$

iii) $y = 2 + \ln(x + 2)$

iv) $y = -2 - \ln(x + 2)$

v) $y = -\ln(2x)$

vi) $y = 2 + \ln(-x + 2)$

21.

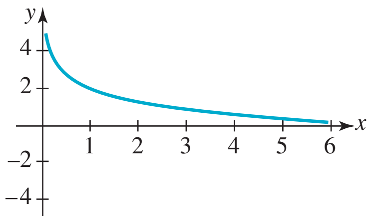


FIGURA 7.R.5 Gráfica del problema 21

22.

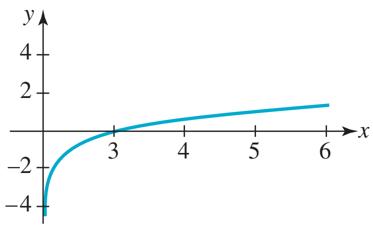


FIGURA 7.R.6 Gráfica del problema 22

23.

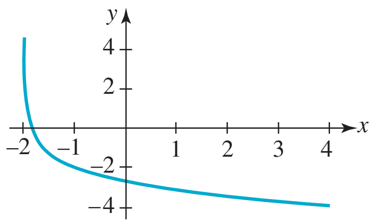


FIGURA 7.R.7 Gráfica del problema 23

24.

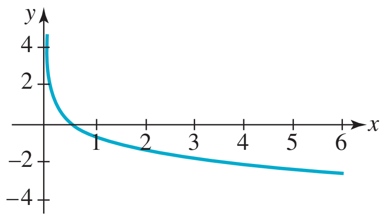


FIGURA 7.R.8 Gráfica del problema 24

25.

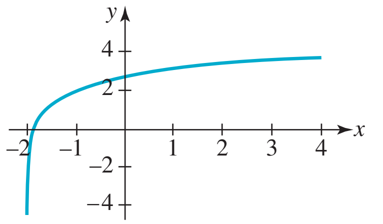


FIGURA 7.R.9 Gráfica del problema 25

26.

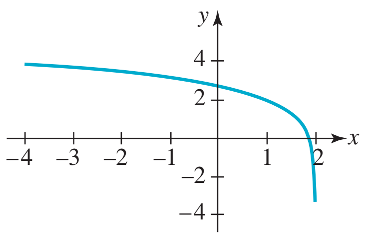


FIGURA 7.R.10 Gráfica del problema 26

En los problemas 27 y 28, describa la gráfica de la función f en términos de una transformación de la gráfica de $y = \ln x$.

27. $f(x) = \ln ex$

28. $f(x) = \ln x^3$

29. Deduzca la función $f(x) = Ae^{kx}$ si (0, 5) y (6, 1) son puntos en la gráfica de f.

30. Deduzca la función $f(x) = A\ 10^{kx}$ si $f(3) = 8$ y $f(0) = \frac{1}{2}$.

31. Deduzca la función $f(x) = a + b^x$, $0 < b < 1$, si $f(1) = 5.5$ y la gráfica de f tiene como una asíntota horizontal $y = 5$.

32. Deduzca la función $f(x) = a + \log_3(x - c)$ si $f(11) = 10$ y la gráfica de f tiene una asíntota vertical $x = 2$.

33. Tiempo para duplicarse Si la cantidad inicial de bacterias presentes en un cultivo se duplica después de 9 horas, ¿cuánto tiempo pasará para que la cantidad de bacterias se vuelva a duplicar?

34. ¿Tienes cebo? Un lago de pesca comercial se abastece con 10 000 crías de pez. Deduzca un modelo $P(t) = P_0e^{kt}$ de la población de peces en el lago, cuando el tiempo es t, si su propietario estima que entonces quedarán 5 000 peces después de 6 meses. ¿Después de cuántos meses el modelo predice que quedarán 1 000 peces?

35. Desintegración radiactiva El tritio es un isótopo del hidrógeno que tiene vida media de 12.5 años. ¿Cuánto de una cantidad inicial de este elemento queda después de 50 años?

36. Huesos viejos Un esqueleto humano que se encontró en un sitio arqueológico ha perdido 97% de ^{14}C. ¿Cuál es la edad aproximada del esqueleto?

37. Ilusiones Una persona se jubila e invierte $650 000 en una cuenta de ahorros. Desea que la cuenta tenga $1 000 000 en 10 años. ¿Qué tasa r de interés anual compuesto continuamente satisfará su deseo?

38. Intensidad de la luz De acuerdo con la **ley de Lambert-Bouguer**, la intensidad I (expresada en lúmenes) de un haz luminoso vertical que atraviesa una sustancia transparente disminuye de acuerdo con la función exponencial $I(x) = I_0e^{kx}$, $k < 0$, donde I_0 es la intensidad del rayo incidente y x es la profundidad, expresada en metros. Si la intensidad de la luz a 1 metro abajo de la superficie del agua es 30% de I_0, ¿cuál es la intensidad a 3 metros abajo de la superficie? ¿A qué profundidad es la intensidad 50% de lo que era en la superficie?

39. La gráfica de la función $y = ae^{-be^{-cx}}$ se conoce como **curva de Gompertz.** Resuelva x en términos de los otros símbolos.

40. Si $a > 0$ y $b > 0$, demuestre que $\log_{a^2}b^2 = \log_a b$.

TRIGONOMETRÍA DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

8

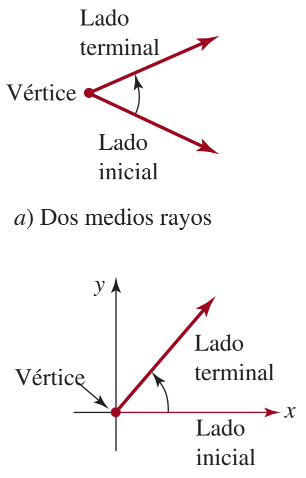
En este capítulo

Una rebanada de pizza es un ejemplo de sector circular. Véase el problema 73 de los ejercicios 8.1.

Un poco de historia Los rudimentos de la trigonometría se remontan al trabajo de matemáticos griegos, egipcios, indios, árabes y chinos. La palabra *trigonometría* se deriva de dos vocablos griegos: *trigon,*que significa triángulo, y *metro,*que significa medida. Por tanto, el nombre *trigonometría* hace alusión a las diversas relaciones entre los ángulos de un triángulo y sus lados. El astrónomo y matemático griego **Hiparco**, que vivió en el siglo II antes de Cristo, fue uno de los principales inventores de la trigonometría. Las tablas de "cuerdas" que elaboró fueron precursoras de las tablas de valores de las funciones trigonométricas que aparecían en todos los textos de trigonometría hasta antes de la invención de la calculadora de mano. El primer matemático europeo que definió las funciones trigonométricas directamente en términos de triángulos rectángulos en lugar de círculos, con tablas de las seis funciones trigonométricas, fue el matemático y astrónomo austriaco **Georg Joachim von Lauchen** (1514-1574), también conocido como **Georg Joachim Rheticus**. Además, Rheticus es recordado porque fue el único discípulo de **Nicolás Copérnico** (1473-1543) y el primer defensor de la teoría heliocéntrica del sistema solar propuesta por su maestro.

Empezaremos este capítulo con una explicación de los ángulos y dos formas de medirlos. La sección 8.2 se dedicará a definir las funciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. En la sección 8.4 extendemos estas definiciones a los ángulos generales.

8.1 Ángulos y sus medidas



a) Dos medios rayos

b) Posición normal

FIGURA 8.1.1 Lados inicial y terminal de un ángulo

Introducción Comenzamos nuestro estudio de la trigonometría con la descripción de los ángulos y dos métodos para medirlos: en grados y en radianes. Como veremos en la sección 9.1, la medida de un ángulo en radianes es lo que nos permite definir funciones trigonométricas en conjuntos de números reales.

Ángulos Un **ángulo** se forma con dos rayos o semirrectas, que tienen un extremo común llamado **vértice**. A un rayo lo llamaremos **lado inicial** del ángulo, y al otro, **lado terminal**. Es útil imaginar al ángulo como formado por una rotación, desde el lado inicial hasta el lado terminal, como se ve en la **FIGURA 8.1.1*a*)**. El ángulo se puede poner en un plano cartesiano con su vértice en el origen y su lado inicial que coincida con el eje positivo de las x, como se ve en la figura 8.1.1*b*). En ese caso se dice que el ángulo está en su **posición normal** o estándar.

Medición en grados La medición de un ángulo en **grados** se basa en la asignación de 360 grados (se escribe 360°) al ángulo formado por una rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se indica en la **FIGURA 8.1.2**. Entonces, otros ángulos se miden en función de un ángulo de 360°, y un ángulo de 1° es el que se forma por $\frac{1}{360}$ de una rotación completa. Si la rotación es contraria a la de las manecillas del reloj, la medida será *positiva*; si es en el sentido de las manecillas del reloj, la medida será *negativa*. Por ejemplo, el ángulo de la **FIGURA 8.1.3*a*)** se obtiene con un cuarto de rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y es

$$\tfrac{1}{4}(360°) = 90°.$$

También se ve en la figura 8.1.3*b*) el ángulo formado por tres cuartos de rotación completa en sentido de las manecillas del reloj. Este ángulo mide:

$$\tfrac{3}{4}(-360°) = -270°.$$

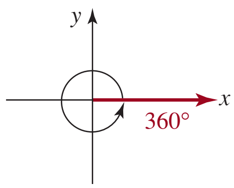
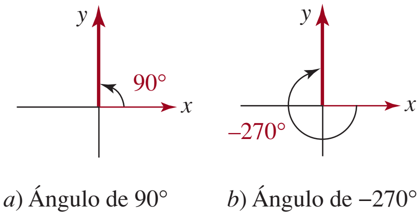


FIGURA 8.1.2 Ángulo de 360 grados



a) Ángulo de 90° *b*) Ángulo de −270°

FIGURA 8.1.3 *a*) Medida positiva; *b*) medida negativa

Ángulos coterminales Una comparación de la figura 8.1.3*a*) con la figura 8.1.3*b*) demuestra que el lado terminal de un ángulo de 90° coincide con el lado terminal de un ángulo de −270°. Cuando dos ángulos en la posición normal tienen los mismos lados terminales se dice que los ángulos son **coterminales**. Por ejemplo, los ángulos θ, $\theta + 360°$ y $\theta - 360°$ que se ven en la **FIGURA 8.1.4** son coterminales. De hecho, la suma de cualquier múltiplo entero de 360° a un ángulo dado da como resultado un ángulo coterminal. Al revés, dos ángulos coterminales cualesquiera tienen medidas en grados que difieren por un múltiplo entero de 360°.

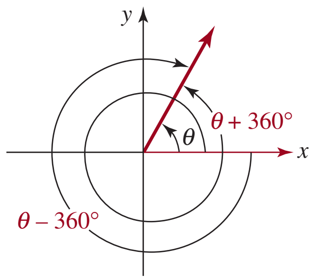


FIGURA 8.1.4 Tres ángulos coterminales

EJEMPLO 1 Ángulos y ángulos coterminales

En el caso de un ángulo de 960°,

***a*)** Ubicar el lado terminal y trazar el ángulo.
***b*)** Determinar un ángulo coterminal entre 0° y 360°.
***c*)** Determinar un ángulo coterminal entre −360° y 0°.

Solución

a) Primero se determina cuántas rotaciones completas se dan para formar este ángulo. Al dividir 960 entre 360 se obtiene un cociente de 2, y un residuo de 240; esto es,

$$960 = 2(360) + 240.$$

Entonces, este ángulo se forma dando dos rotaciones en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y haciendo después $\frac{240}{360} = \frac{2}{3}$ de otra rotación. Como se ve en la **FIGURA 8.1.5*a*)**, el lado terminal de 960° está en el tercer cuadrante.

b) La figura 8.1.5*b*) muestra que el ángulo de 240° es coterminal con un ángulo de 960°.

c) La figura 8.1.5*c*) muestra que el ángulo de $-120°$ es coterminal con un ángulo de 960°.

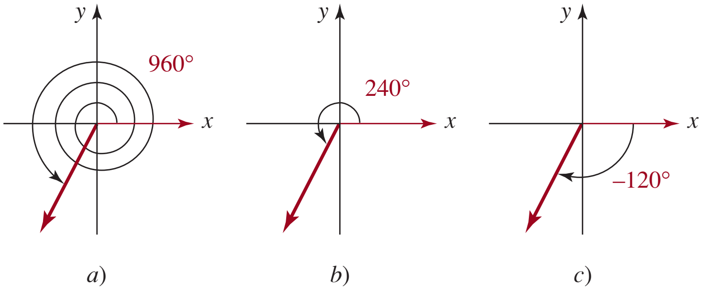


FIGURA 8.1.5 Los ángulos en *b*) y en *c*) son coterminales con el ángulo en *a*).

■ **Minutos y segundos** Con las calculadoras es conveniente expresar las fracciones de grados con decimales, por ejemplo, 42.23°. Sin embargo, tradicionalmente las fracciones de grados se han expresado en **minutos** y **segundos**, donde

$$1° = 60 \text{ minutos (se escribe } 60')^* \tag{1}$$

y

$$1' = 60 \text{ segundos (se escribe } 60'') \tag{2}$$

Por ejemplo, un ángulo de 7 grados, 30 minutos y 5 segundos se expresa así: 7°30′5″. Algunas calculadoras tienen una tecla especial DMS (notación DMS, acrónimo en inglés que significa grados, minutos y segundos) para convertir un ángulo expresado en grados decimales en grados, minutos y segundos y viceversa. Los siguientes ejemplos muestran cómo realizar a mano estas conversiones.

EJEMPLO 2 Usar (1) y (2)

Convierta:

a) 86.23° en grados, minutos y segundos;

b) 17°47′13″ en notación decimal.

Solución En cada caso usaremos (1) y (2).

a) Como 0.23° representa $\frac{23}{100}$ de 1° y $1° = 60'$, tenemos

$$\begin{aligned} 86.23° &= 86° + 0.23° \\ &= 86° + (0.23)(60') \\ &= 86° + 13.8' \end{aligned}$$

Ahora bien, $13.8' = 13' + 0.8'$, por lo que debemos convertir 0.8′ en segundos. Puesto que 0.8′ representan $\frac{8}{10}$ de 1′ y $1' = 60''$, tenemos

* El uso del número 60 como base se remonta a los babilonios. Otro ejemplo del uso de esta base en nuestra cultura es la medida del tiempo (1 hora = 60 minutos y 1 minuto = 60 segundos).

$$
\begin{aligned}
86° + 13' + 0.8' &= 86° + 13' + (0.8)(60'') \\
&= 86° + 13' + 48''.
\end{aligned}
$$

Por tanto, $86.23° = 86°13'48''$.

b) En virtud de que $1° = 60'$, se desprende que $1' = (\frac{1}{60})°$. Del mismo modo, encontramos que $1'' = (\frac{1}{60}) = (\frac{1}{1\,360})°$. Así, tenemos

$$
\begin{aligned}
17°47'13'' &= 17° + 47' + 13'' \\
&= 17° + 47(\tfrac{1}{60})° + 13(\tfrac{1}{3\,600})° \\
&\approx 17° + 0.7833° + 0.0036° \\
&= 17.7869°.
\end{aligned}
$$

≡

Medida en radianes En el cálculo, la unidad más cómoda para medir ángulos es el radián. La medida de un ángulo en radianes se basa en la longitud de un arco del círculo unitario

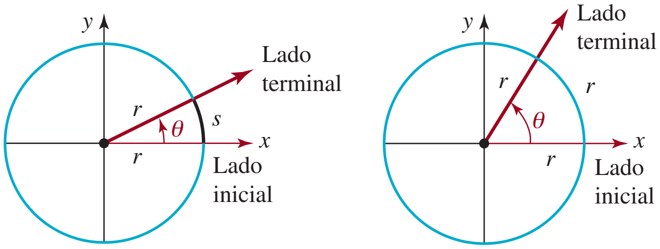
$$x^2 + y^2 = 1.$$

Como ya sabemos, un ángulo θ en posición normal se puede considerar como formado por la rotación del lado inicial, desde el eje positivo de x hasta el lado terminal. Como se ve en la **FIGURA 8.1.6**, el lado inicial de θ recorre una distancia t a lo largo de la circunferencia del círculo unitario. Se dice que la medida de θ es ***t*** **radianes**.

En radianes se usa la misma convención que con la medida en grados: un ángulo formado por una rotación contraria a las manecillas del reloj se considera positivo, mientras que un ángulo formado por una rotación en el sentido de las manecillas del reloj es negativo. Como la circunferencia del círculo unitario es 2π, un ángulo formado por una rotación en contra de las manecillas del reloj es 2π radianes. En la **FIGURA 8.1.7** se han ilustrado ángulos de $\pi/2$, $-\pi/2$, π y 3π radianes, respectivamente. De acuerdo con las figuras 8.1.8*c*) y 8.1.8*d*), un ángulo de π radianes es coterminal con uno de 3π radianes.

$$\theta = \frac{s}{r}. \tag{3}$$

En el caso en que el lado terminal de θ atraviesa un arco de longitud s a lo largo de la circunferencia del círculo igual al radio r del círculo, nos damos cuenta, por (3), de que la medida del ángulo θ es **1 radián**. Véase la figura 8.1.6*b*)



a) *b*)

FIGURA 8.1.6 Ángulo central en *a*); ángulo de 1 radián en *b*)

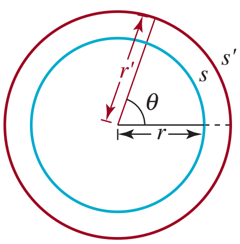


FIGURA 8.1.7 Círculos concéntricos

La definición dada en (3) no depende del tamaño del círculo. Para entender esto, lo único que necesitamos hacer es dibujar otro círculo centrado en el vértice de θ de radio r' y longitud de arco subtendido s'. Véase la **FIGURA 8.1.7**. Debido a que los dos sectores circulares son similares, las razones s/r y s'/r' son iguales. Por consiguiente, independientemente del círculo que utilicemos, obtendremos la misma medida en radianes de θ.

En la ecuación (3) se puede usar cualquier unidad de longitud conveniente para s y r, pero es necesario usar la misma unidad *tanto* para s *como* para r. Así,

$$\theta\,(\text{en radianes}) = \frac{s\,(\text{unidades de longitud})}{r\,(\text{unidades de longitud})}$$

parece ser una cantidad "sin dimensión". Por ejemplo, si $s = 6$ pulgadas y $r = 2$ pulgadas, entonces la medida del ángulo en radianes es

$$\theta = \frac{4 \text{ pulgadas}}{2 \text{ pulgadas}} = 2,$$

donde 2 es simplemente un número real. Por esta razón, algunas veces se omite la palabra *radianes* cuando el ángulo se mide en radianes. Retomaremos esta idea en la sección 9.1.

Una rotación completa del lado inicial de θ atravesará un arco igual en longitud a la circunferencia del círculo $2\pi r$. Se desprende de (3) que

$$\text{una rotación} = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ radianes.}$$

Tenemos la misma convención que antes: un ángulo formado por una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj se considera positivo, mientras que un ángulo formado por una rotación en el sentido de las agujas del reloj es negativa. En la **FIGURA 8.1.8** ilustramos ángulos en las posiciones estándares de $\pi/2$, $-\pi/2$, π y 3π radianes, respectivamente. Tenga en cuenta que el ángulo de $\pi/2$ radianes que se muestra en *a*) se obtiene de un cuarto de una rotación completa en sentido contrario a las agujas del reloj; es decir

$$\frac{1}{4}(2\pi \text{ radianes}) = \frac{\pi}{2} \text{ radianes.}$$

El ángulo que presenta la figura 8.1.8*b*), obtenido de un cuarto de rotación completa en el sentido de las agujas del reloj, es $-\pi/2$ radianes. El ángulo ilustrado en la figura 8.1.8*c*) es coterminal con el ángulo de la figura 8.1.8*d*). En general, la suma de cualquier múltiplo entero de 2π radianes a un ángulo expresado en radianes da como resultado un ángulo coterminal. Al revés, dos ángulos coterminales cualesquiera expresados en radianes diferirán en un múltiplo entero de 2π.

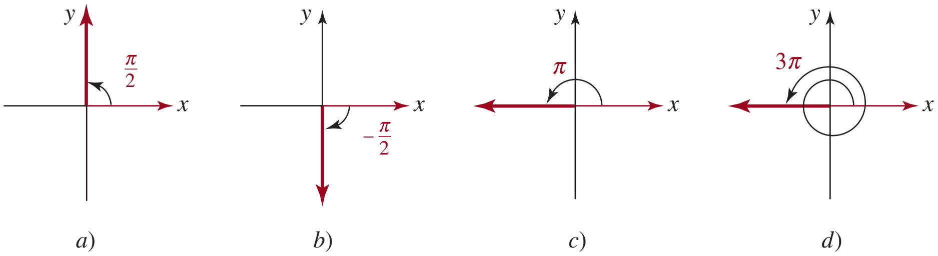


FIGURA 8.1.8 Ángulos expresados en radianes

EJEMPLO 3 Ángulo coterminal

Determinar un ángulo entre 0 y 2π radianes, que sea coterminal con $\theta = 11\pi/4$ radianes. Trazar el ángulo.

Solución Como $2\pi < 11\pi/4 < 3\pi$, se resta el equivalente de una rotación, o sea 2π radianes, para obtener

$$\frac{11\pi}{4} - 2\pi = \frac{11\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

De igual forma, una alternativa es proceder como en el inciso *a*) del ejemplo 1, y dividir: $11\pi/4 = 2\pi + 3\pi/4$. Entonces, un ángulo de $3\pi/4$ radianes es coterminal con θ, como vemos en la **FIGURA 8.1.9**. ≡

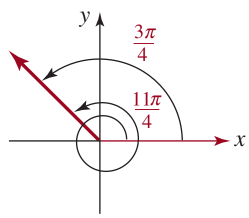


FIGURA 8.1.9 Ángulos coterminales del ejemplo 3

Fórmulas de conversión

Si bien muchas calculadoras científicas tienen teclas que convierten mediciones entre grados y radianes, hay una forma fácil de recordar la relación entre las dos medidas. Como la circunferencia de un círculo unitario es 2π, una rotación completa mide 2π radianes, y también 360°. Por consiguiente, $360° = 2\pi$ radianes, o

$$180° = \pi \text{ radianes.} \tag{4}$$

Si (4) se interpreta como $180\,(1°) = \pi$ (1 radián), entonces se obtienen las dos fórmulas siguientes para convertir entre grados y radianes.

CONVERSIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ radián} \tag{5}$$

$$1 \text{ radián} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \tag{6}$$

Con una calculadora se hacen las divisiones en (5) y (6), y se llega a

$$1° \approx 0.0174533 \text{ radián} \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ radián} \approx 57.29578°.$$

EJEMPLO 4 Conversión entre grados y radianes

Convertir

a) 20° a radianes, ***b***) $7\pi/6$ radianes a grados, ***c***) 2 radianes a grados.

Solución

a) Para convertir grados en radianes se usa la ecuación (5):

$$20° = 20(1°) = 20 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \text{ radián}\right) = \frac{\pi}{9} \text{ radián}.$$

b) Para convertir radianes en grados, se usa la ecuación (6):

$$\frac{7\pi}{6} \text{ radianes} = \frac{7\pi}{6} \cdot (1 \text{ radián}) = \frac{7\pi}{6}\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 210°.$$

c) De nuevo se usa (6):

$$2 \text{ radianes} = 2 \cdot (1 \text{ radián}) = 2 \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = \left(\frac{360}{\pi}\right)^{\circ} \approx \overbrace{114.59°}^{\text{respuesta aproximada redondeada a dos decimales}}.$$

≡

TABLA 8.1.1

Grados	0	30	45	60	90	180
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

La tabla que sigue muestra las medidas de los ángulos de uso más frecuente, expresadas en radianes y en grados.

Terminología El lector recordará que, en geometría, a un ángulo de 90° se le llama **ángulo recto**, y a un ángulo de 180° se le llama **ángulo recto doble**. En radianes, $\pi/2$ es un ángulo recto, y π es un ángulo recto doble. Un **ángulo agudo** mide entre 0° y 90° (o entre 0 y $\pi/2$ radianes), y un **ángulo obtuso** mide entre 90° y 180° (o entre $\pi/2$ y π radianes). Se dice que dos ángulos agudos son **complementarios** si suman 90° (o $\pi/2$ radianes). Dos ángulos positivos son **suplementarios** si suman 180° (o π radianes). Un triángulo que contiene un ángulo recto se llama **triángulo rectángulo**. Un ángulo cuyo lado terminal coincide con un eje de coordenadas se llama **ángulo cuadrantal**. Por ejemplo, 90° (o $\pi/2$ radianes) es un ángulo cuadrantal. Un triángulo que contiene un ángulo recto se llama **triángulo rectángulo**. Las longitudes a, b y c de los lados de un triángulo rectángulo satisfacen la relación pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$, donde c es la longitud del lado opuesto al ángulo recto (la hipotenusa); los otros dos lados, a y b, son los catetos.

EJEMPLO 5 Ángulos complementarios y suplementarios

a) Calcular el ángulo que es complementario de $\theta = 74.23°$.
b) Calcular el ángulo que es suplementario de $\phi = \pi/3$ radianes.

Solución

a) Como dos ángulos son complementarios si suman 90°, se ve que el ángulo que es complementario de $\theta = 74.23°$ es

$$90° - \theta = 90° - 74.23° = 15.77°.$$

b) Como dos ángulos son suplementarios si suman π radianes, se ve que el ángulo que es suplementario de $\phi = \pi/3$ radianes es

$$\pi - \phi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ radianes.}$$

≡

Longitud de arco Un ángulo θ con su vértice en el centro de un círculo de radio r se llama **ángulo central**. La región dentro del círculo contenida en el ángulo central θ se llama **sector**. Como se ve en la **FIGURA 8.1.10**, la longitud del arco del círculo abarcado (subtendido, o cortado) por el ángulo θ se representa con s. Cuando se mide en radianes, el ángulo central θ corresponde a $\theta/2\pi$ de una rotación completa. Por consiguiente, el arco abarcado por θ es $\theta/2\pi$ de la circunferencia del círculo. Así, la longitud s del arco es

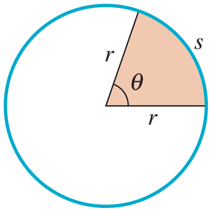


FIGURA 8.1.10 Longitud de arco s, determinada por un ángulo central θ

$$s = \frac{\theta}{2\pi}(2\pi r) = r\theta,$$

siempre que θ se exprese en radianes. Este resultado se resume como sigue:

Teorema 8.1.1 Fórmula de la longitud del arco

Un ángulo central de θ radianes en un círculo de radio r abarca un arco de longitud

$$s = r\theta. \tag{7}$$

Mediante la ecuación (7) se puede expresar la medida θ en radianes de un ángulo central, en un círculo, en función de la longitud del arco abarcado s y del radio r del círculo:

$$\theta \text{ (en radianes)} = \frac{s}{r}.$$

EJEMPLO 6 Cálculo de la longitud del arco

Calcular la longitud del arco abarcado por un ángulo central de: ***a***) 2 radianes en un círculo de 6 pulgadas de radio, ***b***) 30° en un círculo de 12 pies de radio.

Solución

a) De acuerdo con la fórmula (7) de la longitud del arco, con $\theta = 2$ radianes, y $r = 6$ pulgadas, $s = r\theta = 2 \cdot 6 = 12$. Entonces, la longitud del arco es de 12 pulgadas.
b) Primero se debe expresar 30° en radianes. Recordamos que $30° = \pi/6$ radianes. Entonces, de la fórmula (7) de la longitud del arco, $s = r\theta = (12)(\pi/6) = 2\pi$. Entonces, la longitud del arco es $2\pi \approx 6.28$ pies.

≡

Con frecuencia, los alumnos aplican la fórmula de la longitud del arco en forma incorrecta, porque usan grados. Recuerde que $s = r\theta$ sólo es válida si θ se expresa en radianes.

8.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

En los problemas 1 a 16, trace el ángulo indicado en la posición normal. Tenga en cuenta que cuando no hay símbolo de grados (°) en una medida angular, quiere decir que el ángulo está expresado en radianes.

1. $60°$

2. $-120°$

3. $135°$

4. $150°$

5. $1\,140°$

6. $-315°$

7. $-240°$

8. $-210°$

9. $\dfrac{\pi}{3}$

10. $\dfrac{5\pi}{4}$

11. $\dfrac{7\pi}{6}$

12. $-\dfrac{2\pi}{3}$

13. $-\dfrac{\pi}{6}$

14. -3π

15. 3

16. 4

En los problemas 17 a 20, exprese el ángulo dado en notación decimal.

17. $10°39'17''$

18. $143°7'2''$

19. $5°10'$

20. $10°25'$

En los problemas 21 a 24, exprese el ángulo dado en términos de grados, minutos y segundos.

21. $210.78°$

22. $15.45°$

23. $30.81°$

24. $110.5°$

En los problemas 25 a 32, convierta los grados en radianes.

25. $10°$

26. $15°$

27. $45°$

28. $215°$

29. $270°$

30. $-120°$

31. $-230°$

32. $540°$

En los problemas 33 a 40, convierta los radianes en grados.

33. $\dfrac{2\pi}{9}$

34. $\dfrac{11\pi}{6}$

35. $\dfrac{2\pi}{3}$

36. $\dfrac{5\pi}{12}$

37. $\dfrac{5\pi}{4}$

38. 7π

39. 3.1

40. 12

En los problemas 41 a 44, calcule el ángulo coterminal de cada ángulo indicado ***a***) entre 0° y 360°, y ***b***) entre −360° y 0°.

41. $875°$

42. $400°$

43. $-610°$

44. $-150°$

45. Encuentre el ángulo entre $-360°$ y $0°$ que es coterminal con el ángulo del problema 41.

46. Encuentre el ángulo entre $-360°$ y $0°$ que es coterminal con el ángulo del problema 43.

En los problemas 47 a 52, calcule el ángulo coterminal de cada ángulo indicado ***a)*** entre 0 y 2π radianes, y ***b)*** entre -2π y 0 radianes.

47. $-\frac{9\pi}{4}$

48. $\frac{17\pi}{2}$

49. 5.3π

50. $-\frac{9\pi}{5}$

51. -4

52. 7.5

53. Encuentre el ángulo entre -2π y 0 radianes que es coterminal con el ángulo del problema 47.

54. Encuentre el ángulo entre -2π y 0 radianes que es coterminal con el ángulo del problema 49.

En los problemas 55 a 62, calcule un ángulo que sea ***a)*** complementario y ***b)*** suplementario del ángulo indicado, o diga por qué no puede calcularse ese ángulo.

55. $48.25°$

56. $93°$

57. $98.4°$

58. $63.08°$

59. $\frac{\pi}{4}$

60. $\frac{\pi}{6}$

61. $\frac{2\pi}{3}$

62. $\frac{5\pi}{6}$

63. Calcule las medidas, en grados y en radianes, del ángulo formado por ***a)*** tres quintas partes de una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y ***b)*** cinco y un octavo rotaciones en el sentido de las manecillas del reloj.

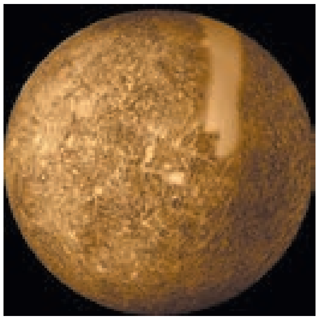
64. Calcule las medidas, en grados y en radianes, del ángulo obtuso formado por las manecillas de un reloj ***a)*** a las 8:00, ***b)*** a la 1:00 y ***c)*** a las 7:30.

65. Calcule las medidas, en grados y en radianes, del ángulo que recorre la manecilla de las horas de un reloj en 2 horas.

66. Conteste la pregunta del problema 65 del minutero.

67. La Tierra gira sobre su eje una vez cada 24 horas. ¿Cuánto tarda en girar un ángulo de ***a)*** $240°$ y ***b)*** $\pi/6$ radianes?

68. El planeta Mercurio completa una rotación sobre su eje cada 59 días. ¿Qué ángulo (medido en grados) gira en ***a)*** 1 día terrestre, ***b)*** 1 hora y ***c)*** 1 minuto?



Planeta Mercurio del problema 68

69. Calcule la longitud del arco abarcada por un ángulo central de 3 radianes, en un círculo de ***a)*** radio 3 y ***b)*** radio 5.

70. Calcule la longitud del arco abarcado por un ángulo central de $30°$ en un círculo de ***a)*** radio 2 y ***b)*** radio 4.

71. Calcule el ángulo central θ en un círculo de radio 5, si θ subtiende un arco de longitud de 7.5. Exprese θ en ***a)*** radianes y ***b)*** grados.

72. Calcule el ángulo central θ en un círculo de radio 1 si θ subtiende un arco de $\pi/3$ de longitud. Exprese θ en ***a)*** radianes y ***b)*** grados.

73. Demuestre que el área A de un sector formado por un ángulo central de θ radianes en un círculo de radio r es $A = \frac{1}{2}r^2\theta$. [*Pista:* use la propiedad geométrica de proporcionalidad: la relación del área A de un sector circular entre el área total πr^2 del círculo es igual a la relación del ángulo central θ entre el ángulo de una revolución completa, 2π].

74. ¿Cuál es el área de la banda circular roja de la **FIGURA 8.1.11**, si θ se expresa ***a)*** en radianes y ***b)*** en grados? [*Pista:* use el resultado del problema 73].

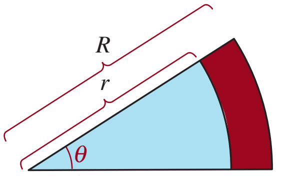


FIGURA 8.1.11 Banda circular del problema 74

75. Velocidad angular y lineal Si dividimos (7) por el tiempo t, obtenemos la relación $v = r\omega$, donde $v = s/t$ se llama **velocidad lineal** de un punto en la circunferencia de un círculo y $\omega = \theta/t$ se llama **velocidad angular** del punto. Un satélite de telecomunicaciones se coloca en una órbita geosincrónica circular a 37 786 km por encima de la superficie de la Tierra. El tiempo que tarda el satélite en realizar una revolución completa alrededor de la Tierra es de 23 horas, 56 minutos, 4 segundos y el radio de la Tierra es de 6 378 km. Vea la **FIGURA 8.1.12**.

a) ¿Cuál es la velocidad angular del satélite en rad/s?

b) ¿Cuál es la velocidad lineal del satélite en km/s?

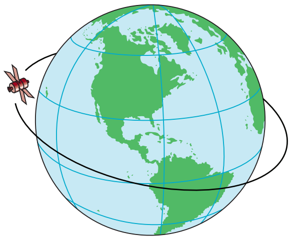


FIGURA 8.1.12 Satélite del problema 75

76. Péndulo de reloj Un péndulo de reloj tiene 1.3 m de longitud, y oscila describiendo un arco de 15 cm. Calcule ***a***) el ángulo central y ***b***) el área del sector que barre el péndulo en una oscilación. [*Pista:* para contestar el inciso ***b***), use el resultado del problema 61].

Aplicaciones diversas

77. Navegación marítima Una milla náutica, o milla marina, se define como la longitud del arco abarcado, en la superficie de la Tierra, por un ángulo central que mide 1 minuto. Si el diámetro de la Tierra es de 7 927 millas terrestres, calcule cuántas millas terrestres hay en una milla náutica.

78. Circunferencia de la Tierra Alrededor de 230 a.C., Eratóstenes calculó la circunferencia de la Tierra con las siguientes observaciones. A mediodía del día más largo del año, el Sol estaba directamente arriba de Siene (ahora Aswan), mientras que estaba inclinado 7.2° de la vertical en Alejandría. Creía que las dos ciudades estaban en el mismo meridiano, y supuso que los rayos del Sol son paralelos. Así, llegó a la conclusión que el arco de Siene a Alejandría era subtendido por un ángulo central de 7.2°. Vea la **FIGURA 8.1.13**. En esos días, la distancia medida de Siene a Alejandría era de 5 000 estadios. Si un estadio equivale a 559 pies, calcule la circunferencia de la Tierra en ***a***) estadios y ***b***) millas. Demuestre que los datos de Eratóstenes llegan a un resultado dentro de 7% del valor correcto, si el diámetro de la Tierra, con aproximación de cientos de millas, es de 7 900 millas.

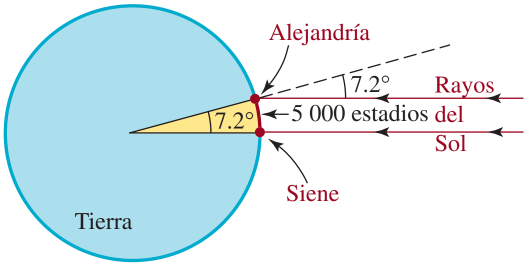


FIGURA 8.1.13 La Tierra del problema 78

79. Movimiento circular de un yoyo Un yoyo se hace girar en torno a un círculo en el extremo de su cordón de 100 cm. ***a***) Si hace 6 revoluciones en 4 segundos, calcule su rapidez de giro (es la magnitud de su **velocidad angular**), en radianes por segundo. ***b***) Calcule la rapidez lineal (es la magnitud de su **velocidad lineal**) a la que viaja el yoyo, en centímetros por segundo.

Yoyo de los problemas 79 y 80

80. Más yoyos Si hay un nudo en el cordón del yoyo del problema 68, a 40 cm del yoyo, calcule ***a***) la rapidez angular del nudo y ***b***) la rapidez lineal.

81. Movimiento circular de un neumático Si un automóvil con neumáticos de 26 pulgadas de diámetro viaja a 55 millas por hora, calcule ***a***) la cantidad de revoluciones por minuto de sus neumáticos y ***b***) la rapidez angular de los neumáticos, en radianes por minuto.

82. Diámetro de la Luna La distancia promedio de la Tierra a la Luna según NASA es de 238 855 millas. Si el ángulo subtendido por la Luna a los ojos de un observador en la Tierra es de 0.52°, ¿cuánto mide aproximadamente el diámetro de la Luna? La **FIGURA 8.1.14** no es a escala.

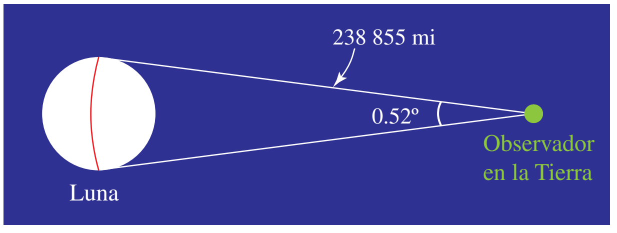


FIGURA 8.1.14 El arco rojo representa el diámetro aproximado de la Luna

8.2 Trigonometría del triángulo rectángulo

Introducción La palabra *trigonometría* (del griego *trigonon*, triángulo, y *metria*, medición) se refiere a la medición de triángulos. En la sección 4.2 se definieron las funciones trigonométricas mediante coordenadas de puntos en el círculo unitario, y por medio de radianes se pudieron definir las funciones trigonométricas de cualquier ángulo. En esta sección demostraremos que las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo tienen una definición equivalente en función de las longitudes de los lados del triángulo.

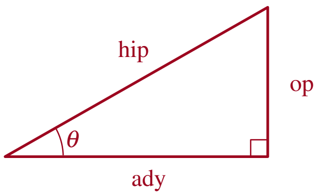


FIGURA 8.2.1 Definición de las funciones trigonométricas de θ

Terminología En la **FIGURA 8.2.1** se ha trazado un triángulo rectángulo, y sus lados se identifican con a, b y c (que indican sus longitudes respectivas), y uno de los ángulos agudos representado por θ. Por el teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$. El lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**; los otros lados son los **catetos** del triángulo. Los catetos indicados con a y b son, respectivamente, el cateto **adyacente** al ángulo θ y el cateto **opuesto** al ángulo θ. También usaremos las abreviaturas **hip**, **ady** y **op** para representar las longitudes de esos lados.

Definición 8.2.1 Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas de un ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo son

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} & \cos\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \\ \tan\theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} & \cot\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} \\ \sec\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} & \csc\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Dominios El dominio de cada una de estas funciones trigonométricas es el conjunto de todos los ángulos agudos. En la sección 8.4 extenderemos estos dominios para incluir otros ángulos, aparte de los agudos. Luego, en el capítulo 9, veremos cómo se definen las funciones trigonométricas con dominios formados por números reales, en lugar de ángulos.

Los valores de las funciones trigonométricas dependen sólo del tamaño del ángulo θ, y no del tamaño del triángulo rectángulo. Para entender esto, considere los dos triángulos rectángulos que se muestran en la **FIGURA 8.2.2**. Como los triángulos rectángulos tienen el mismo ángulo agudo θ son semejantes y, por tanto, las razones de los ángulos correspondientes son iguales. Por ejemplo, por el triángulo rojo de la figura 8.2.2*a*) tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{b}{c}, \text{ op} = \text{cateto opuesto, hip} = \text{hipotenusa}$$

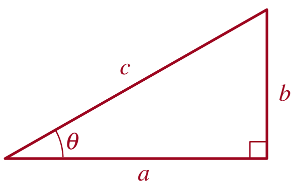
mientras que en el triángulo azul más pequeño de la figura 8.2.2*b*) tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{b'}{c'}.$$

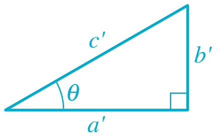
Sin embargo, como el triángulo rojo es semejante al triángulo azul, debemos tener que

$$\frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}.$$

En otras palabras, obtenemos el mismo valor de sen θ independientemente del triángulo rectángulo que utilicemos para calcularlo. Se puede decir lo mismo de las restantes cinco funciones trigonométricas.



a)



b)

FIGURA 8.2.2 Triángulos semejantes

EJEMPLO 1 Valores de las funciones trigonométricas

Determinar los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ del triángulo rectángulo de la **FIGURA 8.2.3**.

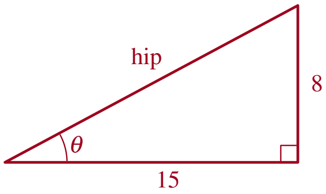


FIGURA 8.2.3 Triángulo rectángulo del ejemplo 1

Solución En la figura 8.2.3 se ve que el cateto opuesto a θ tiene 8 de longitud, y que el cateto adyacente tiene 15 de longitud. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es

$$c^2 = 8^2 + 15^2 = 289 \qquad \text{y así} \qquad c = \sqrt{289} = 17.$$

Entonces, de acuerdo con (1), los valores de las seis funciones trigonométricas son:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{8}{17}, & \cos\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{15}{17}, \\ \tan\theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{8}{15}, & \cot\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} = \frac{15}{8}, \\ \sec\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} = \frac{17}{15}, & \csc\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{17}{8}. \end{aligned}$$

≡

Identidades por cociente y recíprocas Existen muchas relaciones importantes entre las funciones trigonométricas. Las básicas se presentan a continuación y se denominan **identidades fundamentales**, debe memorizarlas.

Identidades por cociente:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \tag{2}$$

Identidades recíprocas:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}. \tag{3}$$

Las identidades (2) y (3) se obtienen de la definición 8.2.1. Por ejemplo, la primera de las identidades por cociente se comprueba como sigue:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{op/hip}}{\text{ady/hip}} = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \tan\theta.$$

Las demás pueden comprobarse del mismo modo. Con estas identidades podemos obtener los valores de las seis funciones trigonométricas una vez que conocemos los valores de sen θ y cos θ.

EJEMPLO 2 Usar (2) y (3)

Dado que sen $\theta = \frac{4}{5}$ y cos $\theta = \frac{3}{5}$, encuentre los valores de las restantes cuatro funciones trigonométricas.

Solución Con base en las identidades fundamentales, tenemos

$$\left.\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}\right\} \leftarrow \text{de (2)}$$

$$\left.\begin{aligned} \sec\theta &= \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} \\ \csc\theta &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} \\ \cot\theta &= \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}\right\} \leftarrow \text{de (3)}$$

Aunque usamos la identidad recíproca de (3) para calcular $\cot\theta$, también podríamos haber usado la identidad por cociente de (2) para calcular $\cot\theta$. ≡

EJEMPLO 3 Usar un triángulo rectángulo

Dado que $\cos\theta = \frac{1}{3}$ y $\tan\theta = 2\sqrt{2}$, calcule $\operatorname{sen}\theta$.

Solución Para obtener $\operatorname{sen}\theta$, multiplicamos la primera identidad de (2) por $\cos\theta$:

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta\tan\theta = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$ ≡

El siguiente ejemplo ilustra que si conocemos el valor de sólo una función trigonométrica de un ángulo agudo, podemos obtener los valores de las otras cinco funciones si dibujamos el triángulo apropiado.

EJEMPLO 4 Uso del triángulo

Si θ es un ángulo agudo y $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{7}$, determinar los valores de las demás funciones trigonométricas de θ.

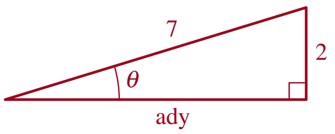


FIGURA 8.2.4 Triángulo rectángulo del ejemplo 4

Solución Se traza un esquema de un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ que satisfaga $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{7}$, haciendo que op = 2 e hip = 7, como se ve en la **FIGURA 8.2.4**. Según el teorema de Pitágoras,

$$2^2 + (\text{ady})^2 = 7^2 \quad \text{y entonces} \quad (\text{ady})^2 = 7^2 - 2^2 = 45.$$

Por tanto,

$$\text{ady} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes se obtienen con las definiciones de (1):

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{3\sqrt{5}}{7}, \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} = \frac{7}{3\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{15},$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}, \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}} = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{7}{2}.$$ ≡

Cofunciones El uso de la terminología seno y coseno, tangente y cotagente, y secante y cosecante es resultado de la siguiente observación. Como se muestra en la **FIGURA 8.2.5**, si los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo ABC se denominan α y β y a es la longitud del lado opuesto a α, b es la longitud del lado opuesto a β, y c es la longitud del lado opuesto al ángulo recto, entonces, por la definición 8.2.1,

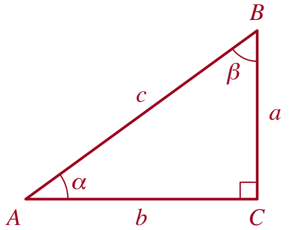


FIGURA 8.2.5 Ángulos agudos α y β de un triángulo rectángulo

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \operatorname{sen}\beta,$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta, \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan\beta$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \csc\beta, \qquad \csc\alpha = \frac{c}{a} = \sec\beta.$$

Debido a que la suma de los ángulos de todo triángulo es 180° (o π radianes), los ángulos agudos α y β de un triángulo rectángulo son complementarios. Por tanto, el coseno de un ángulo agudo es igual al seno del ángulo complementario, la cotangente de un ángulo agudo es igual a la tangente del ángulo complementario, la cosecante de un ángulo agudo es igual a la secante del ángulo complementario, y viceversa. Por esta razón decimos que seno y coseno, tangente y cotangente y secante y cosecante son **cofunciones** una de otra. Podemos resumir esta exposición en una sola oración:

Las cofunciones de ángulos complementarios son iguales. (4)

Identidades de cofunción Si α y β son los ángulos agudos del triángulo de la figura 8.2.5, entonces

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \qquad \text{o} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Debido a que $\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha$, obtenemos

$$\cos\beta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

Esta última expresión es una de las seis identidades por cofunción.

Identidades de cofunción:

$$\begin{aligned} &\cos\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad &&\cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad &&\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &\operatorname{sen}\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &&\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &&\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{aligned} \tag{5}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} &\cos\theta = \operatorname{sen}(90^\circ - \theta) \qquad &&\cot\theta = \tan(90^\circ - \theta) \qquad &&\csc\theta = \sec(90^\circ - \theta) \\ &\operatorname{sen}\theta = \cos(90^\circ - \theta) &&\tan\theta = \cot(90^\circ - \theta) &&\sec\theta = \csc(90^\circ - \theta). \end{aligned} \tag{6}$$

En (5) y (6) se sobreentiende que θ se mide en radianes y grados, respectivamente.

EJEMPLO 5 Usar (5) y (6)

Por (5):

ángulos complementarios

a) $\cot\frac{\pi}{6} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{3}$

b) $\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.$

Por (6):

c) $\csc 27^\circ = \sec(90 - 27^\circ) \sec 63^\circ$

d) $\cot 15^\circ = \tan(90^\circ - 15^\circ) = \tan 75^\circ.$ ≡

Identidades pitagóricas Si sólo conocemos el valor de *una* función trigonométrica de un ángulo agudo, podemos calcular los valores de las otras cinco funciones sin utilizar las relaciones de (1). Debido a que el triángulo de la figura 8.2.1 es un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras relaciona las longitudes de los lados del triángulo mediante

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Si dividimos este último resultado por c^2, obtenemos $a^2/c^2 + b^2/c^2 = 1$ o

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1. \tag{7}$$

Asimismo, si dividimos $a^2 + b^2 = c^2$ por a^2 y b^2, obtenemos, a su vez,

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \tag{8}$$

y

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2. \tag{9}$$

El uso de la definición apropiada de (1) en los resultados de (7), (8) y (9) produce otro conjunto de identidades importantes.

Identidades pitagóricas:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{10}$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \tag{11}$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta. \tag{12}$$

En las fórmulas (10), (11) y (12), el cuadrado de las funciones trigonométricas se escribe $(\operatorname{sen}\theta)^2 = \operatorname{sen}^2\theta$, $(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$, $(\tan\theta)^2 = \tan^2\theta$, etcétera.

EJEMPLO 6 Usar (11)

Si θ es un ángulo agudo y $\tan\theta = \sqrt{5}$, calcule el valor de $\cos\theta$.

Solución Hay varias formas de resolver este problema. Una de ellas es usar la identidad pitagórica (11):

$$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1 = (\sqrt{5})^2 + 1 = 5 + 1 = 6$$

y, por tanto, $\sec\theta = \sqrt{6}$. Debido a que $\sec\theta = 1/\cos\theta$, tenemos que $\cos\theta = 1/\sec\theta$. Por tanto, $\cos\theta = 1/\sqrt{6} = \sqrt{6}/6$. ≡

Notas del aula

Como veremos en la sección 9.4, *todas* las identidades presentadas en esta sección son válidas con cualquier ángulo θ (y no sólo con ángulos agudos).

8.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-21.

En los problemas 1 a 10 determine los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ del triángulo.

1.

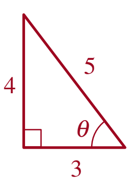


FIGURA 8.2.6 Triángulo del problema 1

2.

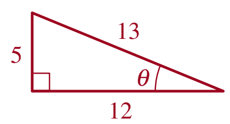


FIGURA 8.2.7 Triángulo del problema 2

3.

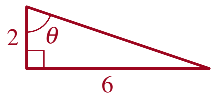


FIGURA 8.2.8 Triángulo del problema 3

4.

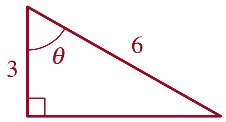


FIGURA 8.2.9 Triángulo del problema 4

5.

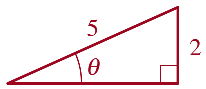


FIGURA 8.2.10 Triángulo del problema 5

6.

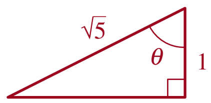


FIGURA 8.2.11 Triángulo del problema 6

7.

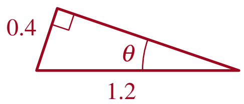


FIGURA 8.2.12 Triángulo del problema 7

8.

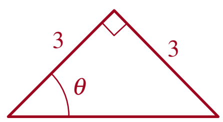


FIGURA 8.2.13 Triángulo del problema 8

9.

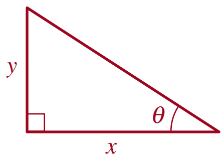


FIGURA 8.2.14 Triángulo el problema 9

10.

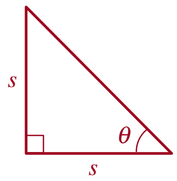


FIGURA 8.2.15 Triángulo del problema 10

En los problemas 11 a 20, use las identidades presentadas en esta sección para obtener los valores de las cuatro funciones trigonométricas restantes del ángulo agudo θ.

11. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

12. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

13. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{7}$, $\cos\theta = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$

14. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$

15. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{65}}$, $\tan\theta = \dfrac{1}{8}$

16. $\cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$, $\cot\theta = \dfrac{5}{2}$

17. $\csc\theta = \dfrac{5}{3}$, $\sec\theta = \dfrac{5}{4}$

18. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{50}}$, $\cot\theta = 7$

19. $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$, $\csc\theta = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

20. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{50}}$, $\cot\theta = 7$

En los problemas 21 a 28, dibuje el triángulo apropiado para obtener el valor de las funciones trigonométricas restantes.

21. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{12}{13}$

22. $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

23. $\sec\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

24. $\csc\theta = \sqrt{10}$

25. $\tan\theta = \dfrac{2}{5}$

26. $\cot\theta = \dfrac{1}{7}$

27. $\sec\theta = \dfrac{7}{3}$

28. $\tan\theta = 3$

29. Si $\cos 75° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, obtenga el valor exacto de sen 15°.

30. Si $\cos 75° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, obtenga el valor exacto de sec 75°.

31. Si $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$, obtenga el valor exacto de $\cot(3\pi/8)$.

32. Si $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$, obtenga el valor exacto de $\tan(3\pi/8)$.

En los problemas 33 a 46, use las identidades de esta sección para obtener el valor exacto de la expresión trigonométrica dada. No use calculadora.

33. $3\,\text{sen}^2\dfrac{\pi}{12} + 3\cos^2\dfrac{\pi}{12}$

34. $\text{sen}^2 35° + \text{sen}^2 55°$

35. $1 + \cos^2 18° + \text{sen}^2 18°$

36. $1 + \tan^2 33° - \sec^2 33°$

37. $\tan^2\dfrac{\pi}{8} - \sec^2\dfrac{\pi}{8}$

38. $-4\csc^2 13° + 4\cot^2 13°$

39. $\dfrac{\text{sen}\,10°}{\text{sen}\,80°} - \dfrac{\text{sen}\,10°}{\cos 10°}$

40. $\sec 20° - \csc 70°$

41. $5\cot 41° \cot 49°$

42. $\frac{1}{2}\cos 11° \sec 11°$

43. $\text{sen}\,28° \cot 28° \csc 62°$

44. $10\,\text{sen}\dfrac{\pi}{3}\cot\dfrac{\pi}{3}\sec\dfrac{\pi}{3}$

45. $\text{sen}\,10° \cos 80° + \cos 10° \text{sen}\,80°$

46. $\tan 30° \cot 60° - \sec 30° \csc 30°$

En los problemas 47 a 54, dado que $\cos 30° = \sqrt{3}/2$, use las identidades de esta sección para obtener el valor exacto de la función trigonométrica presentada. No use calculadora.

47. sen 30°

48. cos 60°

49. tan 60°

50. cot 30°

51. sec 30°

52. csc 30°

53. cos 30° tan 30°

54. tan 30° + cot 60°

8.3 Funciones trigonométricas de ángulos especiales

■ Introducción Los ángulos de 30° ($\pi/6$ radianes), 45° ($\pi/4$ radianes) y 60° ($\pi/3$ radianes) se consideran especiales porque se presentan muy a menudo en el estudio de trigonometría y su uso en cálculo. Por tanto, es muy conveniente que aprenda los *valores exactos* del seno y coseno de cada uno de estos ángulos. En la siguiente explicación obtenemos estos valores por medio de algunos resultados de la geometría euclidiana.

■ Valores de sen 45° y cos 45° Para obtener los valores de las funciones seno y coseno de un ángulo de 45°, consideramos el triángulo rectángulo isósceles con dos lados iguales de longitud 1 que se ilustra en la **FIGURA 8.3.1**. Por la geometría euclidiana sabemos que los ángulos agudos de este triángulo son iguales; por tanto, cada ángulo agudo mide 45°. Para obtener la longitud de la hipotenusa, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$(\text{hip})^2 = (1)^2 + (1)^2 = 2 \qquad \text{da por resultado} \qquad \text{hip} = \sqrt{2}.$$

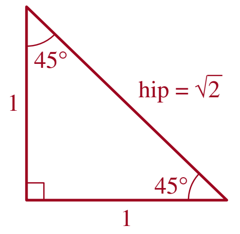


FIGURA 8.3.1 Triángulo rectángulo isósceles

Por consiguiente, por (1) de la sección 8.2 obtenemos

$$\text{sen}\,45° = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1}$$

y

$$\cos 45° = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{2}$$

■ Valores de sen 30° y cos 30° Para obtener los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°, consideramos el triángulo equilátero AOB con lados de longitud 2 que se ilustra en la **FIGURA 8.3.2*a*)**. Por la geometría euclidiana sabemos que los tres ángulos de un triángulo equilátero miden cada uno 60°. Como se muestra en la **FIGURA 8.3.2*b*)**, si dividimos en dos el ángulo en O, entonces CO es la bisectriz perpendicular de AB. Se desprende que

$$\angle AOC = \tfrac{1}{2}\angle AOB = \tfrac{1}{2}(60°) = 30°,$$
$$\overline{AC} = \tfrac{1}{2}\,\overline{AB} = \tfrac{1}{2}(2) = 1 \qquad \text{y} \qquad \angle ACO = 90°.$$

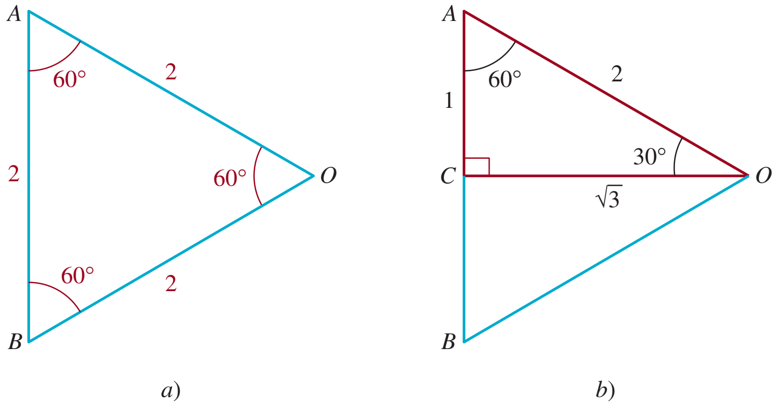


FIGURA 8.3.2 Triángulo equilátero en *a*); dos triángulos rectángulos congruentes en *b*)

Si aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo rojo ACO de la figura 8.3.2*b*), obtenemos $(\overline{CO})^2 + 1^2 = 2^2$. Despejamos $\overline{CO}$ y obtenemos $\overline{CO} = \sqrt{3}$. Por tanto, del triángulo rectángulo ACO y (1) de la sección 8.2, obtenemos los siguientes valores:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{1}{2} \tag{3}$$
$$\cos 30° = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{4}$$

■ Valores de sen 60° y cos 60° Ahora usamos el ángulo de 60° del triángulo rectángulo rojo ACO de la figura 8.3.2*b*) e identificamos op $= \sqrt{3}$, ady $= 1$ e hip $= 2$.

Por tanto,

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{5}$$
$$\cos 60° = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

■ Cofunciones No tuvimos que usar un triángulo rectángulo para obtener los valores en (5) y (6). Recuerde que en la sección 8.2 demostramos que las cofunciones de ángulos complementarios son iguales. Así, (5) y (6) se desprenden de inmediato de los resultados de (3) y (4):

$$\operatorname{sen} 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 60° = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}.$$

EJEMPLO 1 Valores de las otras funciones trigonométricas

Obtenga los valores de tan $(\pi/6)$, cot $(\pi/6)$, sec $(\pi/6)$ y csc $(\pi/6)$.

Solución El ángulo de 30° es equivalente a $\pi/6$ radianes. Usando las identidades por cociente y recíproca de la sección 8.2 junto con los resultados de (3) y (4), obtenemos

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{6} &= \frac{\operatorname{sen}(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\\
\cot\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\tan(\pi/6)} = \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}\\
\sec\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\cos(\pi/6)} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\\
\csc\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/6)} = \frac{1}{1/2} = 2.
\end{aligned}$$

≡

Dejaremos que usted mismo obtenga los valores de tan θ, cot θ, sec θ y csc θ de $\theta = \pi/4$ y $\theta = \pi/3$ como ejercicio. Véanse los problemas 1 y 2 de los ejercicios 8.3.

La tabla 8.3.1 resume los valores de las funciones seno, coseno y tangente que acabamos de determinar para los ángulos especiales de 30°, 45° y 60°. Como mencionamos en la introducción a esta sección, estos valores de funciones se usan con tanta frecuencia que creemos que debe memorizarlos. Conocer estos valores y las identidades fundamentales que estudiamos antes le permitirá determinar cualquiera de las funciones trigonométricas de estos ángulos especiales.

TABLA 8.3.1

θ (grados)	θ (radianes)	sen θ	cos θ	tan θ
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

EJEMPLO 2 Obtención de los valores exactos

Obtenga el valor exacto de la expresión trigonométrica dada.

a) $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}$ ***b***) $\cos 30° \tan 60°$ ***c***) $2 + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - 6\cos\frac{\pi}{6}$

Solución En cada caso usaremos la información de la tabla 8.3.1.

a) $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{2}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

b) $\cos 30° \tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{3}{2}$

c) $2 + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - 6\cos\frac{\pi}{6} = 2 + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$ ≡

Uso de calculadora Se pueden obtener aproximaciones de los valores de las funciones trigonométricas con una calculadora científica. Sin embargo, antes de usar una calculadora para obtener valores de funciones trigonométricas de ángulos medidos en *radianes,* es necesario seleccionar el modo de radianes de la calculadora. Si los ángulos se miden en grados, entonces hay que seleccionar el modo de grados antes de realizar los cálculos. Además, si los ángulos se dan en grados, minutos y segundos, antes deben convertirse a decimales. Las calculadoras científicas tienen teclas con las leyendas sin, cos y tan para calcular los valores de estas funciones. Para obtener los valores de $\boxed{\text{csc}}$, $\boxed{\text{sec}}$ o $\boxed{\text{cot}}$, se usan las teclas $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$ y $\boxed{\text{tan}}$ con la tecla de recíproco $\boxed{1/\text{x}}$. El siguiente ejemplo ilustra el proceso.

EJEMPLO 3 Usar una calculadora

Use una calculadora para aproximar cada uno de lo siguiente:

a) sen 45°
b) cos 8°15′
c) sec 0.23
d) $\cot\dfrac{\pi}{7}$

Solución ***a***) En primer lugar, debemos asegurarnos de que la calculadora esté funcionando en modo de grados. A continuación, introducimos 45 y usamos la tecla $\boxed{\text{sin}}$ para obtener

$$\text{sen } 45^\circ \approx 0.7071068,$$

que es una aproximación con siete decimales del valor exacto $\sqrt{2}/2$ dado en (1).

b) Puesto que el ángulo está dado en grados y minutos, primero es necesario convertirlo a forma decimal: $8^\circ 15' = 8^\circ + (\frac{15}{60})^\circ = 8.25^\circ$. Ahora, con la calculadora en *modo de grados,* introducimos 8.25 y usamos la tecla $\boxed{\text{cos}}$ para obtener

$$\cos 8^\circ 15' = \cos 8.25^\circ \approx 0.9896514$$

c) Como no se indican los grados, reconocemos que este ángulo está medido en radianes. Para evaluar sec 0.23, usaremos la identidad fundamental $\sec\theta = 1/\cos\theta$. Con la calculadora en modo de radianes, introducimos 0.23, usamos la tecla $\boxed{\text{cos}}$ y luego oprimimos la tecla $\boxed{1/\text{x}}$ para sacar el recíproco del resultado. Así, tenemos

$$\sec 0.23 = \frac{1}{\cos 0.23} \approx 1.0270458.$$

d) Observamos que este ángulo está medido en radianes y configuramos la calculadora en consecuencia. Primero introducimos π, dividimos por 7, usamos la tecla $\boxed{\text{tan}}$ y luego la tecla $\boxed{1/\text{x}}$ para obtener

$$\cot\frac{\pi}{7} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{7}} \approx 2.0765214.$$

≡

8.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-21.

En los problemas 1 y 2, use los resultados de esta sección para obtener los valores de $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ y $\csc\theta$ del ángulo dado.

1. 45°

2. $\pi/3$

En los problemas 3 a 22, obtenga el valor exacto de la expresión trigonométrica dada. No use la calculadora.

3. $\cos^2 \dfrac{\pi}{3}$

4. $\tan^2 \dfrac{\pi}{6}$

5. $\sec 45° \csc 45°$

6. $\text{sen}\, 60° \cos 30°$

7. $\text{sen}\, \dfrac{\pi}{4} \cot \dfrac{\pi}{4}$

8. $6 \sec \dfrac{\pi}{3} \csc \dfrac{\pi}{6}$

9. $9 \sec 45° \csc 45°$

10. $\tan 60° \cot 30°$

11. $\text{sen}\, \dfrac{\pi}{3} \cos \dfrac{\pi}{4} + \cos \dfrac{\pi}{3} \text{sen}\, \dfrac{\pi}{4}$

12. $\cos \dfrac{\pi}{3} \cos \dfrac{\pi}{6} - \text{sen}\, \dfrac{\pi}{3} \text{sen}\, \dfrac{\pi}{6}$

13. $6 \tan 30° + 7 \tan 60°$

14. $3\, \text{sen}\, \dfrac{\pi}{4} - 5 \cos \dfrac{\pi}{4}$

15. $\tan 45° - \cot 45°$

16. $\sec^2 \dfrac{\pi}{4} + 4 \csc^2 \dfrac{\pi}{3}$

17. $\dfrac{8\, \text{sen}\, (\pi/4)}{\sec (\pi/3)}$

18. $\dfrac{2 - \sqrt{2}\, \text{sen}(\pi/4)}{\cos(\pi/4)}$

19. $\text{sen}^2 30° + \cos^2 45°$

20. $2 + \cot^2 30° - 10 \csc^2 30°$

21. $\dfrac{\tan(\pi/4) - \tan(\pi/6)}{1 + \tan(\pi/4)\tan(\pi/6)}$

22. $\dfrac{\tan(\pi/3) + \tan(\pi/4)}{1 - \tan(\pi/3)\tan(\pi/4)}$

En los problemas 23 a 32, use una calculadora para obtener los valores aproximados de las seis funciones trigonométricas del ángulo dado. Redondee su respuesta a cuatro posiciones decimales.

23. $17°$

24. $82°$

25. $14.3°$

26. $34.75°$

27. $71°30'15''$

28. $46°15'8''$

29. $\dfrac{\pi}{5}$

30. $\dfrac{\pi}{10}$

31. 0.6725

32. 1.24

Para la discusión

33. Sin usar la calculadora, obtenga el valor exacto del producto

$$\tan \frac{\pi}{180} \cdot \tan \frac{2\pi}{180} \cdot \tan \frac{3\pi}{180} \cdots \tan \frac{89\pi}{180}.$$

8.4 Funciones trigonométricas de ángulos generales

Introducción Hasta el momento sólo hemos definido las funciones trigonométricas de los ángulos agudos. Sin embargo, muchas aplicaciones de trigonometría incluyen ángulos que no son agudos. En consecuencia, es necesario ampliar la definición de las seis funciones trigonométricas en (1) de la sección 8.2 a todos los ángulos generales. Como es natural, necesitamos que la definición ampliada coincida con la definición anterior siempre que el ángulo sea agudo. Para lograrlo, procedemos de la siguiente manera.

Sea θ un ángulo agudo en posición estándar y seleccionemos el punto $P(x, y)$ en el lado terminal de θ. Si $r = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$, en la **FIGURA 8.4.1** vemos que x, y y r representan la longitud de los lados de un triángulo rectángulo. Como $y = \text{op}$, $x = \text{ady}$ y $r = \text{hip}$, por la definición 8.2.1 tenemos que

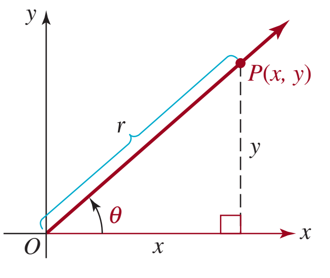


FIGURA 8.4.1 Un ángulo agudo

$$\text{sen}\, \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \tag{1}$$

Las expresiones de (1) nos proporcionan un modelo en el que basaremos nuestra definición ampliada para *cualquier* ángulo θ en posición estándar, como los que se ilustran en la **FIGURA 8.4.2**.

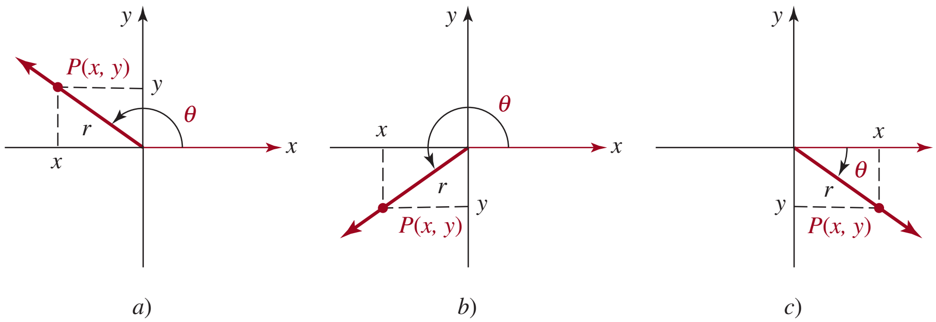


FIGURA 8.4.2 Ángulos que no son agudos

Ahora tenemos la siguiente definición de las **funciones trigonométricas de un ángulo en general**.

Definición 8.4.1 Funciones trigonométricas

Sea θ cualquier ángulo en posición estándar y sea $P(x, y)$ cualquier punto, excepto (0, 0) en el lado terminal de θ. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia entre (0, 0) y $P(x, y)$, las funciones trigonométricas se definen como sigue:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{y}{r} & \cos\theta &= \frac{x}{r} \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} & \cot\theta &= \frac{x}{y} \\ \sec\theta &= \frac{r}{x} & \csc\theta &= \frac{r}{y} \end{aligned} \tag{2}$$

siempre que ningún denominador sea 0.

Se puede demostrar, usando triángulos semejantes, que los valores de las seis funciones trigonométricas dependen sólo del ángulo θ y no del punto $P(x, y)$ que se seleccione en el lado terminal de θ. La justificación de esta aseveración es como la que se presentó en el caso de los ángulos agudos en la página 361.

■ Dominios Una función trigonométrica definida en (2) será indefinida si su denominador es cero. Puesto que $P(x, y) \neq (0, 0)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ nunca es cero. Por tanto, los dominios de las funciones seno y coseno constan en su totalidad de ángulos θ. Sin embargo, las funciones tangente y secante serán indefinidas si el lado terminal de θ está situado en el eje y, porque entonces $x = 0$. Por tanto, los dominios de tan θ y sec θ constan en su totalidad de ángulos θ, *excepto* los que miden en radianes $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, $\pm 5\pi/2$, y así sucesivamente. Usando notación de conjuntos y con base en el hecho de que un entero impar se puede escribir como $2n + 1$, n un entero, los dominios de las funciones tangente y secante son:

Los ángulos son múltiplos impares de $\pi/2$.

$$\{\theta \mid \theta \neq (2n + 1)\pi/2,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

o

$$\{\theta \mid \theta \neq (2n + 1)90°,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

Las funciones cotangente y cosecante no están definidas para ángulos cuyos lados terminales se sitúan sobre el eje x, porque entonces $y = 0$. Por consiguiente, los dominios de $\cot\theta$ y $\csc\theta$ constan en su totalidad de ángulos θ, *excepto* los que miden en radianes $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$, y así sucesivamente; es decir, $\{\theta \mid \theta \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ o $\{\theta \mid \theta \neq 180°n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Los ángulos son múltiplos enteros de π.

Puesto que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, se desprende que $|x| \leq r$ y $|y| \leq r$, o lo que es lo mismo, $|x/r| \leq 1$ y $|y/r| \leq 1$. Por tanto, como antes,

$$|\operatorname{sen}\theta| \leq 1 \qquad \text{y} \qquad |\cos\theta| \leq 1 \tag{3}$$

Asimismo, como $|r/x| \geq 1$ y $|r/y| \geq 1$, tenemos que

$$|\csc\theta| 1 \geq 1 \qquad \text{y} \qquad |\sec\theta| \geq 1 \tag{4}$$

Las desigualdades en (3) y (4) son válidas para cada θ en el dominio de cada una de estas funciones.

EJEMPLO 1 Valores de las funciones trigonométricas

Obtenga los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ si θ está en posición estándar y el lado terminal de θ contiene el punto $P(-3, 1)$.

Solución En la **FIGURA 8.4.3** se representa gráficamente el lado terminal del ángulo obtuso θ. Con las identificaciones $x = -3$, $y = 1$, y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10},$$

tenemos por (2) que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta &= \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, & \cos\theta &= \frac{-3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10},\\
\tan\theta &= \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}, & \cot\theta &= \frac{-3}{1} = -3,\\
\sec\theta &= \frac{\sqrt{10}}{-3} = -\frac{\sqrt{10}}{3}, & \csc\theta &= \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}.
\end{aligned}$$

≡

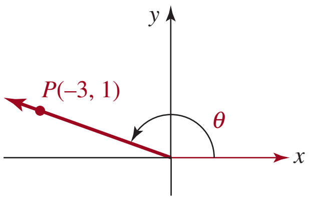


FIGURA 8.4.3 Ángulo θ del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Valores de las funciones trigonométricas

Obtenga los valores de las seis funciones trigonométricas de θ si $\theta = -\pi/2$.

Solución Primero colocamos θ en posición estándar, como se muestra en la **FIGURA 8.4.4**. De acuerdo con la definición 8.4.1, podemos elegir *cualquier* punto $P(x, y)$ en el lado terminal de θ. Por conveniencia, vamos a seleccionar $P(0, -1)$ para que $x = 0$, $y = -1$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{-1}{1} = -1, & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{0}{1} = 0,\\
\cot\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{0}{-1} = 0, & \csc\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{-1} = -1.
\end{aligned}$$

Sin embargo, las expresiones $\tan\theta = y/x$ y $\sec\theta = r/x$ son indefinidas para $\theta = -\pi/2$, puesto que $x = 0$.

≡

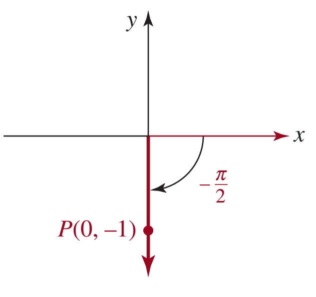


FIGURA 8.4.4 Ángulo θ del ejemplo 2

Signos algebraicos Según el cuadrante en el que se sitúe el lado terminal de θ, una o las dos coordenadas de $P(x, y)$ puede ser negativa. Puesto que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es *siempre positivo,* cada una de las seis funciones trigonométricas de θ tiene valores negativos y positivos. Por ejemplo, sen $\theta = y/r$ es positivo si el lado terminal de θ se sitúa dentro de los cuadrantes I o II (donde y es positivo), y sen $\theta = y/r$ es negativo si el lado terminal de θ está situado dentro de los cuadrantes III o IV (donde y es negativo). La **FIGURA 8.4.5** resume los signos algebraicos de las seis funciones trigonométricas definidas en (2). Por conveniencia, si el lado terminal de θ se sitúa dentro del cuadrante II, nos referiremos a θ como un ángulo del cuadrante II o diremos que θ está en el cuadrante II. Emplearemos terminología similar cuando mencionemos ángulos cuyos lados terminales se sitúan dentro de los cuadrantes I, III o IV.

II		I	
$\cos\theta < 0$	$\text{sen}\,\theta > 0$	$\cos\theta > 0$	$\text{sen}\,\theta > 0$
$\tan\theta < 0$	$\cot\theta < 0$	$\tan\theta > 0$	$\cot\theta > 0$
$\sec\theta < 0$	$\csc\theta > 0$	$\sec\theta > 0$	$\csc\theta > 0$
$\cos\theta < 0$	$\text{sen}\,\theta < 0$	$\cos\theta > 0$	$\text{sen}\,\theta < 0$
$\tan\theta > 0$	$\cot\theta > 0$	$\tan\theta < 0$	$\cot\theta < 0$
$\sec\theta < 0$	$\csc\theta < 0$	$\sec\theta > 0$	$\csc\theta < 0$
III		IV	

FIGURA 8.4.5 Signos algebraicos de las seis funciones trigonométricas

EJEMPLO 3 Usar la figura 8.4.5

¿En qué cuadrante está situado el lado terminal de θ si sen $\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$?

Solución En la figura 8.4.5 observamos que la función seno es positiva para los ángulos en los cuadrantes I y II y la función tangente es negativa en los cuadrantes II y IV, por tanto, el lado terminal de θ debe situarse dentro del cuadrante II. ≡

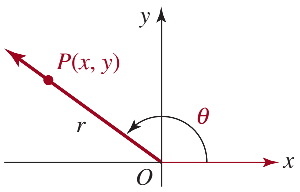


FIGURA 8.4.6 Un ángulo arbitrario θ

Identidades pitagóricas, segunda parte Las identidades recíprocas, por cociente y pitagóricas de los ángulos agudos que se presentaron en la sección 8.2 también son válidas para los ángulos generales. Por ejemplo, para obtener las **identidades pitagóricas**, sea θ cualquier ángulo en posición estándar. Como se muestra en la **FIGURA 8.4.6**, sea $P(x, y)$ cualquier punto, excepto el origen, en el lado terminal de θ. De nuevo, si $r = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces tenemos $x^2 + y^2 = r^2$. Dividiendo ambos lados de la última ecuación por r^2, obtenemos

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \quad \text{o} \quad \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1.$$

Reconociendo que $x/r = \cos\theta$ y $y/r = \text{sen}\,\theta$ obtenemos la identidad pitagórica básica

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos\theta^2 = 1 \tag{5}$$

En (5) seguimos la convención que $\text{sen}^2\theta$ se escribe en primer término. Si dividimos ambos lados de (5), a su vez, por $\cos^2\theta$ y $\text{sen}^2\theta$, obtenemos

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \tag{6}$$

y

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta. \tag{7}$$

Las fórmulas (5), (6) y (7) son idénticas a (10), (11) y (12) de la sección 8.2. Sin embargo, a diferencia de estas últimas, las funciones trigonométricas de (5), (6) y (7) son

- válidas para todos los ángulos cuyas funciones están definidas, y
- los valores de las funciones pueden tener valores negativos.

Retomaremos las identidades pitagóricas (en el capítulo 9) cuando demostremos que es posible definir las funciones trigonométricas de números reales, en vez de ángulos.

EJEMPLO 4 Usar (5)

Dado que $\cos\theta = \frac{1}{3}$ y que θ es un ángulo del cuadrante IV, obtenga los valores exactos de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ.

Solución Sustituimos $\cos\theta = \frac{1}{3}$ en (5) y obtenemos

$$\operatorname{sen}^2\theta + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$
$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Puesto que el lado terminal de θ está en el cuadrante IV, $\operatorname{sen}\theta$ es *negativo*. Por tanto, debemos seleccionar la raíz cuadrada negativa de $\frac{8}{9}$:

Vea la figura 8.4.5.

$$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ahora, usando

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta},$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta},$$

encontramos que los valores de las cuatro funciones restantes son

$$\tan\theta = \frac{-2\sqrt{2}/3}{1/3} = -2\sqrt{2}, \quad \cot\theta = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$
$$\sec\theta = \frac{1}{1/3} = 3, \quad \csc\theta = \frac{1}{-2\sqrt{2}/3} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

≡

EJEMPLO 5 Usar (6)

Dado que $\tan\theta = -2$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$, obtenga los valores exactos de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ.

Solución Si $\tan\theta = -2$ en la identidad $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, tenemos que

$$\sec^2\theta = 1 + (-2)^2 = 5.$$

Puesto que $\tan\theta$ es negativo en los cuadrantes II y IV y $\operatorname{sen}\theta$ es positivo en los cuadrantes I y II, el lado terminal de θ debe estar situado en el cuadrante II. Por tanto, deducimos que

$$\sec\theta = -\sqrt{5}.$$

De $\sec\theta = 1/\cos\theta$, se desprende que

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{-\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Usando $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$, obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta\tan\theta = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)(-2) = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Entonces, $$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{2\sqrt{5}/5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

y $$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

≡

En la sección 8.3 obtuvimos los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de los ángulos especiales de 30°, 45° y 60° (o $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$, respectivamente, medidos en radianes). Estos valores se pueden usar para determinar los valores exactos de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos que no son agudos por medio de un **ángulo de referencia**.

Definición 8.4.2 Ángulo de referencia

Sea θ un ángulo en posición estándar tal que su lado terminal no se sitúa sobre un eje de coordenadas. El **ángulo de referencia** θ' para θ se define como el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x.

La **FIGURA 8.4.7** ilustra esta definición para los ángulos que tienen lados terminales en cada uno de los cuatro cuadrantes.

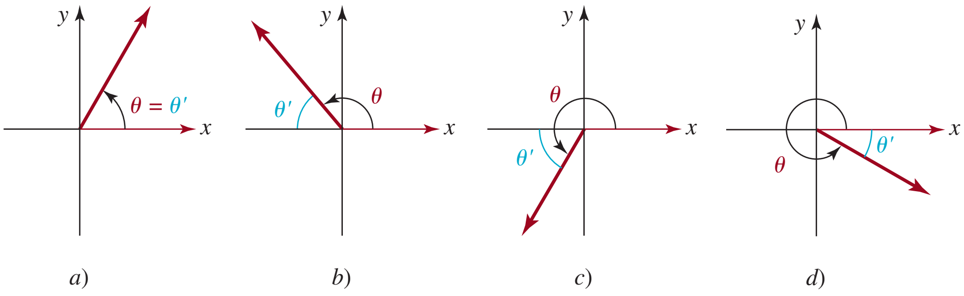


FIGURA 8.4.7 Un ángulo θ (rojo) y su ángulo de referencia θ' (azul)

EJEMPLO 6 Ángulos de referencia

Obtenga el ángulo de referencia de cada ángulo θ.

a) $\theta = 40°$ ***b)*** $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ ***c)*** $\theta = 210°$ ***d)*** $\theta = -\dfrac{9\pi}{4}$

Solución ***a)*** En la **FIGURA 8.4.8*a*)** observamos que $\theta' = 40°$.

b) Por la figura 8.4.8*b*), $\theta' = \pi - \theta = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$.

c) Por la figura 8.4.8*c*), $\theta' = \theta - 180° = 210° - 180° = 30°$.

d) Puesto que $\theta = -9\pi/4$ es coterminal con

$$-\frac{9\pi}{4} + 2\pi = -\frac{\pi}{4},$$

tenemos que $\theta' = \pi/4$ [figura 8.4.8*d*)].

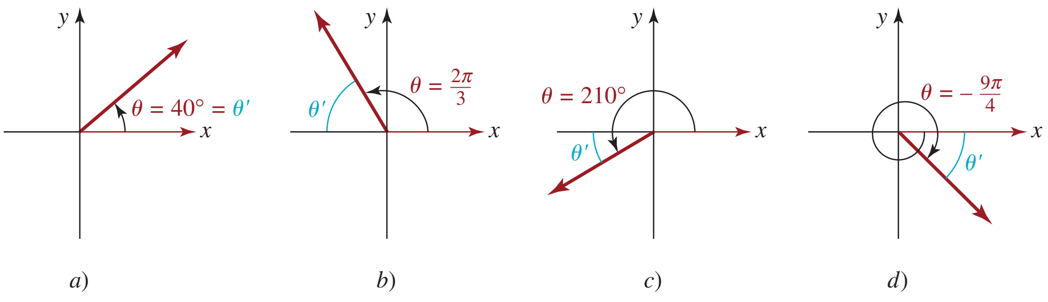


FIGURA 8.4.8 Ángulos de referencia del ejemplo 6

Propiedad de los ángulos de referencia La utilidad de los ángulos de referencia en la evaluación de las funciones trigonométricas es resultado de la siguiente propiedad:

El valor absoluto de toda función trigonométrica de un ángulo θ es igual al valor de esa función en el ángulo de referencia θ'.

Por ejemplo, $|\operatorname{sen}\theta| = \operatorname{sen}\theta'$, $|\cos\theta| = \cos\theta'$, y así sucesivamente.

Comprobaremos la propiedad anterior con la función seno. Si el lado terminal de θ está situado dentro del cuadrante I, entonces $\theta = \theta'$ y sen θ es positivo, por tanto

$$\operatorname{sen}\theta' = \operatorname{sen}\theta = |\operatorname{sen}\theta|.$$

En la **FIGURA 8.4.9** vemos que si θ es un ángulo de los cuadrantes II, III o IV, tenemos

$$\operatorname{sen}\theta' = \frac{|y|}{r} = \left|\frac{y}{r}\right| = |\operatorname{sen}\theta|,$$

donde $P(x, y)$ es cualquier punto en el lado terminal de θ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

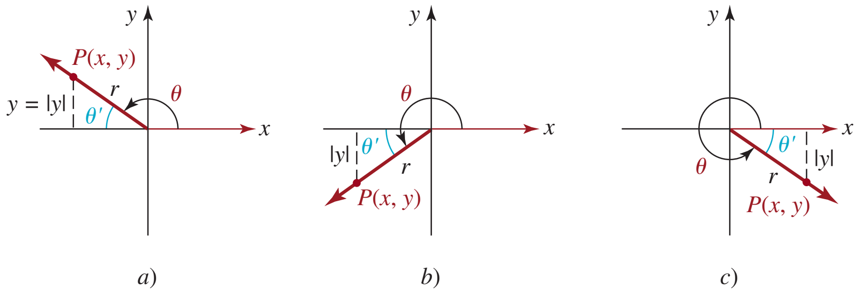


FIGURA 8.4.9 Ángulos de referencia

Ahora podemos explicar un procedimiento paso por paso para determinar el valor de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo θ.

CÁLCULO DEL VALOR DE UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Suponga que θ representa cualquier ángulo.

i) Obtenga el ángulo de referencia θ'.

ii) Determine el valor de la función trigonométrica de θ'.

iii) Seleccione el signo algebraico correcto del valor de *ii*); para ello, considere en qué cuadrante está situado el lado terminal del ángulo θ.

EJEMPLO 7 Calcular valores usando ángulos de referencia

Obtenga los valores exactos de sen θ, cos θ y tan θ de cada uno de los siguientes ángulos.

a) $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ ***b***) $\theta = 210°$ ***c***) $\theta = -\dfrac{9\pi}{4}$

Solución Seguimos el procedimiento que acabamos de explicar junto con la tabla 8.3.1 de la sección 8.3.

a) En el inciso *b*) del ejemplo 6 encontramos que el ángulo de referencia de $\theta = 2\pi/3$ era $\theta' = \pi/3$. Ahora sabemos que sen $(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, cos $(\pi/3) = 1/2$, y tan $(\pi/3) = \sqrt{3}$. Debido a que $\theta = 2\pi/3$ es un ángulo del cuadrante II, donde el seno es positivo, pero el coseno y la tangente son negativos, concluimos que

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

***b*)** En relación con el inciso *c*) del ejemplo 6, observamos que el ángulo de referencia es $\theta' = 30°$. Usando la propiedad de los ángulos de referencia y el hecho de que el lado terminal de $\theta' = 210°$ se sitúa en el cuadrante III, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} 210° &= -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}, \\ \cos 210° &= -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \tan 210° &= \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}\right\} \leftarrow \begin{array}{l}\text{consulte los signos algebraicos} \\ \text{correctos en la figura 8.4.5}\end{array}$$

***c*)** Por el inciso *d*) del ejemplo 6 sabemos que el ángulo de referencia $\theta' = \pi/4$. En vista de que $\theta - 9\pi/4$ es un ángulo del cuadrante IV, se desprende que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(-\frac{9\pi}{4}\right) &= -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) &= \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \tan\left(-\frac{9\pi}{4}\right) &= -\tan\frac{\pi}{4} = -1. \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 8 Cálculo de ángulos

Calcule todos los ángulos θ que satisfacen $0° \leq \theta < 360°$ tales que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$

Solución Por lo que sabemos de los ángulos especiales de 30°, 60° y 90°, nos damos cuenta de que $\theta = 30°$ es una solución. Usando 30° como ángulo de referencia en el segundo cuadrante, como se ilustra en la **FIGURA 8.4.10**, obtenemos $\theta = 150°$ como segunda solución. Como la función seno es negativa para los ángulos de los cuadrantes III y IV, no hay más soluciones que satisfagan $0° \leq \theta < 360°$. ≡

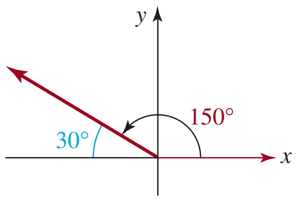


FIGURA 8.4.10 Soluciones del ejemplo 8

EJEMPLO 9 Cálculo de ángulos

Calcule todos los ángulos θ que satisfacen $0 \leq \theta < 2\pi$ tales que $\cos\theta = -\sqrt{2}/2$.

Solución Puesto que el valor dado de la función coseno es negativo, en primer lugar determinamos el ángulo de referencia θ' tal que $\cos\theta' = \sqrt{2}/2$. Por la sección 8.3 sabemos que $\theta' = \pi/4$. En virtud de que la función coseno es negativa para los ángulos de los cuadrantes II y III, colocamos el ángulo de referencia $\theta' = \pi/4$ como se muestra en la **FIGURA 8.4.11**. A continuación obtenemos $\theta = 3\pi/4$ y $\theta = 5\pi/4$ como soluciones.

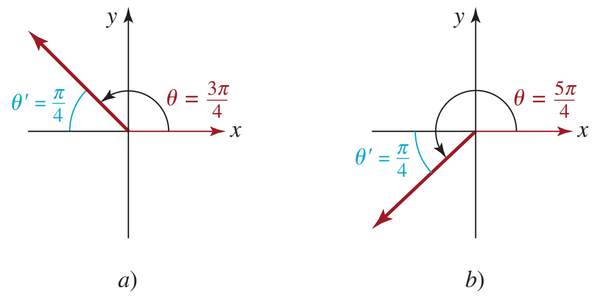
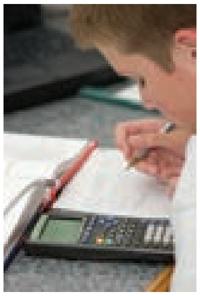


FIGURA 8.4.11 Soluciones del ejemplo 9

Notas del aula

En esta sección deliberadamente evitamos usar calculadoras. Para comprender plenamente la trigonometría, es esencial que domine los conceptos y sea capaz de ejecutar, *sin la ayuda de una calculadora,* los tipos de cálculos y simplificaciones que hemos estudiado. Los siguientes ejercicios deben resolverse sin recurrir al uso de una calculadora.



8.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-21.

Recomendamos que no use la calculadora para resolver ninguno de los siguientes problemas.

En los problemas 1 a 10, evalúe las seis funciones trigonométricas del ángulo θ si θ se encuentra en la posición estándar y el lado terminal de θ contiene el punto dado.

1. $(6, 8)$

2. $(-1, 2)$

3. $(5, -12)$

4. $(-8, -15)$

5. $(0, 2)$

6. $(-3, 0)$

7. $(-2, 3)$

8. $(5, -1)$

9. $(-\sqrt{2}, -1)$

10. $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$

En los problemas 11 a 18, encuentre el cuadrante en el que se sitúa el lado terminal de un ángulo θ si θ satisface las condiciones dadas.

11. $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$

12. $\cos\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$

13. $\tan\theta < 0$ y $\sec\theta < 0$

14. $\sec\theta < 0$ y $\csc\theta < 0$

15. $\cot\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$

16. $\csc\theta > 0$ y $\cot\theta < 0$

17. $\operatorname{sen}\theta > 0$ y $\cos\theta < 0$

18. $\tan\theta < 0$ y $\csc\theta > 0$

En los problemas 19 a 28, se proporciona el valor de una de las funciones trigonométricas del ángulo θ. Con base en el valor dado y la información adicional, determine los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ.

19. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{4}$, θ está en el cuadrante II

20. $\cos\theta = -\frac{2}{5}$, θ está en el cuadrante II

21. $\tan\theta = 3$, θ está en el cuadrante III

22. $\cot\theta = 2$, θ está en el cuadrante III

23. $\csc\theta = -10$, θ está en el cuadrante IV

24. $\sec\theta = 3$, θ está en el cuadrante IV

25. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{5}$, $\cos\theta > 0$

26. $\cos\theta = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{sen}\theta < 0$

27. $\tan\theta = 8$, $\sec\theta > 0$

28. $\tan\theta = 8$, $\sec\theta > 0$

29. Si $\cos\theta = \frac{3}{10}$, encuentre todos los valores posibles de $\operatorname{sen}\theta$.

30. Si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{7}$, encuentre todos los valores posibles de $\cos\theta$.

31. Si $2\operatorname{sen}\theta - \cos\theta = 0$, encuentre todos los valores posibles de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

32. Si $\cot\theta = \frac{3}{4}$, encuentre todos los valores posibles de $\csc\theta$.

33. Si $\sec\theta = -5$, encuentre todos los valores posibles de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

34. Si $3\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$, encuentre todos los valores posibles de $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ y $\csc\theta$.