Si una función polinomial f es de grado n, y si $(x - c)^m$, $m \leq n$, es un factor de $f(x)$, entonces se dice que c es una **raíz de multiplicidad m**. Cuando $m = 1$, c es una **raíz simple**. Lo que es lo mismo, se dice que el número c es una **raíz de multiplicidad m** de la ecuación $f(x) = 0$. Ya hemos examinado el significado gráfico de raíces reales repetidas de una función polinomial f, en la sección 6.1. Véase la figura 6.1.6.

EJEMPLO 3 Factores de un polinomio

Determinar si

a) $x + 1$ es un factor de $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x - 1$,

b) $x - 2$ es un factor de $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$.

Solución Usaremos división sintética para dividir $f(x)$ entre el término lineal indicado.

a) De la división

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & 0 & -5 & 6 & -1 \\
 & & -1 & 1 & 4 & -10 \\
\hline
 & 1 & -1 & -4 & 10 & \boxed{-11 = r = f(-1)}
\end{array}$$

se advierte que $f(-1) = -11$, por lo que -1 no es una raíz de f. La conclusión es que $x - (-1) = x + 1$ no es un factor de $f(x)$.

b) De la división

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\
 & & 2 & -2 & -4 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & \boxed{0 = r = f(2)}
\end{array}$$

se ve que $f(2) = 0$. Eso quiere decir que 2 es una raíz, y que $x - 2$ es un factor de $f(x)$. En la división se observa también que el cociente es $q(x) = x^2 - x - 2$, y por consiguiente $f(x) = (x - 2)(x^2 - x - 2)$. ≡

Cantidad de raíces En el ejemplo 6 de la sección 6.1 se graficó la función polinomial

$$f(x) = (x - 3)(x - 1)^2(x + 2)^3. \tag{2}$$

El número 3 es una raíz de multiplicidad uno, o una raíz simple de f; el número 1 es una raíz de multiplicidad dos, y -2 es una raíz de multiplicidad tres. Aunque la función f tiene tres raíces *distintas* (diferentes entre sí), es decir, que f tiene *seis raíces*, porque se cuentan las multiplicidades de cada raíz. Por consiguiente, para la función f en (2), la cantidad de raíces es $1 + 2 + 3 = 6$. La pregunta

cuántas raíces tiene una función polinomial f

se contesta a continuación.

Teorema 6.3.2 Teorema fundamental del álgebra

Una función polinomial f de grado $n > 0$ tiene cuando menos una raíz.

El teorema anterior lo demostró por primera vez el matemático alemán **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), en 1799, y se considera una de las grandes aportaciones en la historia de las matemáticas. En su primera lectura, este teorema no parece decir mucho, pero cuando se combina con el teorema del factor, el teorema fundamental del álgebra indica que:

$$\textit{Toda función polinomial } f \textit{ de grado } n > 0 \textit{ tiene exactamente } n \textit{ raíces.} \tag{3}$$

Naturalmente, si una raíz está repetida, por tener multiplicidad k, se cuenta k veces esa raíz. Para demostrar (3), de acuerdo con el teorema fundamental del álgebra f tiene una raíz (llamémoslo c_1). Según el teorema del factor, se puede escribir

$$f(x) = (x - c_1)q_1(x), \tag{4}$$

siendo q_1 una función polinomial de grado $n - 1$. Si $n - 1 \neq 0$, entonces, con un procedimiento igual, se sabe que q_1 debe tener una raíz (llamémoslo c_2), y entonces (4) se convierte en

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)q_2(x),$$

en donde q_2 es una función polinomial de grado $n - 2$. Si $n - 2 \neq 0$, se continúa y se llega a

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)q_3(x), \tag{5}$$

y así sucesivamente. Al final se llega a una factorización de $f(x)$ con n factores lineales, y el último factor $q_n(x)$ es de grado 0. En otras palabras, $q_n(x) = a_n$, en donde a_n es constante; en específico, a_n es el coeficiente principal de f. Hemos llegado a la factorización *completa* de $f(x)$.

Teorema 6.3.3 Teorema de la factorización completa

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_n$ las n raíces (no necesariamente distintas) de la función polinomial de grado $n > 0$:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Entonces, $f(x)$ se puede escribir como un producto de n factores lineales

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n). \tag{6}$$

Tenga en cuenta que algunas o todas las raíces $c_1, \ldots, c_n$ en (6) pueden ser números complejos $a + bi$, donde $b \neq 0$.

En el caso de una función polinomial de segundo grado o cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde los coeficientes a, b y c son números reales, las raíces c_1 y c_2 de f se pueden determinar con la fórmula cuadrática o fórmula general:

$$c_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{7}$$

Los resultados en (7) relatan toda la historia acerca de las raíces de la función cuadrática:

- las raíces son reales y distintas cuando $b^2 - 4ac > 0$,
- son reales con multiplicidad dos cuando $b^2 - 4ac = 0$, y
- son complejos y distintos cuando $b^2 - 4ac < 0$.

Como consecuencia de (6), la factorización completa de una función polinomial cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2). \tag{8}$$

EJEMPLO 4 Regreso al ejemplo 1

En el ejemplo 1 demostramos que $\frac{1}{2}$ es una raíz de $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 6x - 1$. Por consiguiente, $x - \frac{1}{2}$ es un factor de $f(x)$, y ahora sabemos que $f(x)$ tiene tres raíces. La división sintética

$$\begin{array}{r|rrrr}
\frac{1}{2} & 2 & -9 & 6 & -1 \\
 & & 1 & -4 & 1 \\
\hline
 & 2 & -8 & 2 & \boxed{0 = r}
\end{array}$$

demuestra de nuevo que $\frac{1}{2}$ es una raíz de $f(x)$ (el residuo 0 es el valor de $f\left(\frac{1}{2}\right)$) y, además, nos da el cociente $q(x)$ obtenido en la división de $f(x)$ entre $x - \frac{1}{2}$; esto es, $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 8x + 2)$. Como se indica en (8), ya se puede factorizar el cociente cuadrático $q(x) = 2x^2 - 8x + 2$, cuyas raíces de $2x^2 - 8x + 2 = 0$ se determinan mediante la fórmula cuadrática:

$$\downarrow \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(2)}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{4}\,4 \\
&= \frac{\cancel{4}(2 \pm \sqrt{3})}{\cancel{4}} = 2 \pm \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Entonces, las raíces restantes de $f(x)$ son los números irracionales $2 + \sqrt{3}$ y $2 - \sqrt{3}$. Si el primer coeficiente es $a_3 = 2$, entonces, de acuerdo con (8), la factorización completa de $f(x)$ es

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(x - (2 + \sqrt{3})\right)\left(x - (2 - \sqrt{3})\right) \\
&= 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(x - 2 - \sqrt{3}\right)\left(x - 2 + \sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 5 Uso de la división sintética

Determinar la factorización completa de

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 62x + 26$$

si 1 es una raíz de f con multiplicidad 2.

Solución Sabemos que $x - 1$ es un factor de $f(x)$; entonces, con la división

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -12 & 47 & -62 & 26 \\
 & & 1 & -11 & 36 & -26 \\
\hline
 & 1 & -11 & 36 & -26 & \boxed{0 = r}
\end{array}$$

se ve que $$f(x) = (x - 1)(x^3 - 11x^2 + 36x - 26).$$

Debido a que 1 es una raíz de multiplicidad dos, $x - 1$ debe ser también un factor del cociente $q(x) = x^3 - 11x^2 + 36x - 26$. Con la división

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & -11 & 36 & -26 \\
 & & 1 & -10 & 26 \\
\hline
 & 1 & -10 & 26 & \boxed{0 = r}
\end{array}$$

la conclusión es que $q(x)$ se puede expresar como $q(x) = (x - 1)(x^2 - 10x + 26)$. Por consiguiente,

$$f(x) = (x - 1)^2(x^2 - 10x + 26).$$

Las dos raíces que restan se determinan resolviendo $x^2 - 10x + 26 = 0$ con la fórmula cuadrática, que son los números complejos $5 + i$ y $5 - i$. Como el primer coeficiente es $a_4 = 1$, la factorización completa de $f(x)$ es

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 1)^2(x - (5 + i))(x - (5 - i)) \\ &= (x - 1)^2(x - 5 - i)(x - 5 + i). \end{aligned}$$ ≡

EJEMPLO 6 Factorización lineal completa

Encontrar una función polinomial f de grado tres cuyas raíces sean 1, -4 y 5, tal que su gráfica tenga el cruce con el eje de las ordenadas en (0, 5).

Solución En razón de que se tienen tres raíces, 1, -4 y 5, se ve que $x - 1$, $x + 4$ y $x - 5$ son factores de f. Sin embargo, la función polinomial que se busca *no es*

$$f(x) = (x - 1)(x + 4)(x - 5). \tag{9}$$

La razón es que todo múltiplo constante distinto de cero de f es un polinomio diferente con las mismas raíces. También obsérvese que la función (9) da como resultado $f(0) = 20$, pero lo que se quiere es que $f(0) = 5$. Por consiguiente, se debe suponer que f tiene la forma

$$f(x) = a_3(x - 1)(x + 4)(x - 5), \tag{10}$$

en donde a_3 es una constante real. Con (10), $f(0) = 5$ resulta

$$f(0) = a_3(0 - 1)(0 + 4)(0 - 5) = 20a_3 = 5$$

y entonces $a_3 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. La función que se busca es, entonces

$$f(x) = \tfrac{1}{4}(x - 1)(x + 4)(x - 5).$$ ≡

Pares conjugados En la introducción de esta sección vimos que i y $-i$ son ceros (o raíces) complejos de $f(x) = x^2 + 1$. Asimismo, en el ejemplo 5 demostramos que $5 + i$ y $5 - i$ son ceros complejos de $f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 62x + 26$. En cada uno de estos dos casos los ceros complejos de la función polinómica son pares conjugados. En otras palabras, un cero complejo es el conjugado del otro. No se trata de ninguna coincidencia; los ceros complejos de los polinomios con coeficientes *reales* aparecen *siempre* en pares conjugados. Para entender esto, recordemos las propiedades que el conjugado de una suma de números complejos z_1 y z_2 es la suma de los conjugados $\bar{z}_1$ y $\bar{z}_2$ y el conjugado de una potencia entera no negativa de un número complejo z es la potencia del conjugado $\bar{z}$:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \text{y} \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n. \tag{11}$$

Véanse los problemas 80 a 82 en los ejercicios 3.4.

Sea $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, donde los coeficientes a_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, son números reales. Si z denota un cero complejo de f, entonces tenemos

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = 0.$$

Tomando el conjugado de ambos lados de esta ecuación nos da

$$\overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0} = \bar{0}.$$

Ahora usamos (11) y el hecho de que el conjugado de todo número real a_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, es él mismo, obtenemos

$$a_n\bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{z} + a_0 = 0.$$

Esto significa que $f(\bar{z}) = 0$ y, por tanto, $\bar{z}$ es un cero de $f(x)$ siempre que z es un cero. Planteamos este resultado como el siguiente teorema.

Teorema 6.3.4 Teorema de las raíces complejas

Sea $f(x)$ una función polinomial de grado $n > 1$ con coeficientes reales. Si z es una raíz compleja de $f(x)$, entonces el conjugado $\bar{z}$ también es una raíz de $f(x)$.

EJEMPLO 7 Reconsideración del ejemplo 2

Obtenga la factorización lineal completa de

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6.$$

Solución En el ejemplo 2 se demostró que $1 + i$ es una raíz compleja de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$. Como los coeficientes de f son números reales, la conclusión es que otra raíz es el conjugado de $1 + i$, es decir, $1 - i$. Con ello se conocen dos factores de $f(x)$, $x - (1 + i)$ y $x - (1 - i)$. Al multiplicar se obtiene

$$(x - 1 - i)(x - 1 + i) = x^2 - 2x + 2.$$

Así, se puede escribir

$$f(x) = (x - 1 - i)(x - 1 + i)q(x) = (x^2 - 2x + 2)q(x).$$

La función $q(x)$ se determina mediante la *división larga* de $f(x)$ entre $x^2 - 2x + 2$. (No se puede hacer la división sintética, porque no se está dividiendo entre un factor lineal.) Entonces,

$$\begin{array}{r|l}
 & x \quad - 3 \\ \hline
x^2 - 2x + 2 & x^3 - 5x^2 + 8x - 6 \\
 & \underline{x^3 - 2x^2 + 2x} \\
 & -3x^2 + 6x - 6 \\
 & \underline{-3x^2 + 6x - 6} \\
 & 0
\end{array}$$

y se ve que la factorización completa de $f(x)$ es

$$f(x) = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x - 3).$$

Las tres raíces de $f(x)$ son $1 + i$, $1 - i$ y 3. ≡

6.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

En los problemas 1 a 6 determine si el número real indicado es una raíz de la función polinomial *f*. En caso de serlo, determine todas las demás raíces y a continuación presente la factorización completa de *f*(*x*).

1. $1;\quad f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$
2. $\frac{1}{2};\quad f(x) = 2x^3 - x^2 + 32x - 16$
3. $5;\quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 5$
4. $3;\quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$
5. $-\frac{2}{3};\quad f(x) = 3x^3 - 10x^2 - 2x + 4$
6. $-2;\quad f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 20$

En los problemas 7 a 10 compruebe que cada uno de los números indicados sean raíces de la función polinomial *f*. Determine todas las demás raíces y a continuación indique la factorización completa de *f*(*x*).

7. $-3, 5;\quad f(x) = 4x^4 - 8x^3 - 61x^2 + 2x + 15$
8. $\frac{1}{4}, \frac{3}{2};\quad f(x) = 8x^4 - 30x^3 + 23x^2 + 8x - 3$
9. $1, -\frac{1}{3}$ (multiplicidad 2); $\quad f(x) = 9x^4 + 69x^3 - 29x^2 - 41x - 8$
10. $-\sqrt{5},\quad \sqrt{5};\quad f(x) = 3x^4 + x^3 - 17x^2 - 5x + 10$

En los problemas 11 a 16 use la división sintética para determinar si el polinomio lineal indicado es un factor de la función polinomial *f*. En caso de serlo, determine todas las demás raíces, e indique la factorización completa de *f*(*x*).

11. $x - 5;\quad f(x) = 2x^2 + 6x - 25$
12. $x + \frac{1}{2};\quad f(x) = 10x^2 - 27x + 11$
13. $x - 1;\quad f(x) = x^3 + x - 2$
14. $x + \frac{1}{2};\quad f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 1$
15. $x - \frac{1}{3};\quad f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 8x - 2$
16. $x - 2;\quad f(x) = x^3 - 6x^2 - 16x + 48$

En los problemas 17 a 20 use la división para demostrar que el polinomio indicado es un factor de la función polinomial *f*. Calcule todas las demás raíces e indique la factorización completa de *f*(*x*).

17. $(x - 1)(x - 2);\quad f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8$
18. $x(3x - 1);\quad f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x$
19. $(x - 1)^2;\quad f(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 3$
20. $(x + 3)^2;\quad f(x) = x^4 - 4x^3 - 22x^2 + 84x + 261$

En los problemas 21 a 26 verifique que el número complejo indicado sea una raíz de la función polinomial *f*. Proceda como en el ejemplo 7 para determinar todas las demás raíces, y a continuación indique la factorización completa de *f*(*x*).

21. $2i;\quad f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 12x - 20$
22. $\frac{1}{2}i;\quad f(x) = 12x^3 + 8x^2 + 3x + 2$
23. $-1 + i;\quad f(x) = 5x^3 + 12x^2 + 14x + 4$
34. $-i;\quad f(x) = 4x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 5$
35. $1 + 2i;\quad f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 18x - 45$
36. $1 + i;\quad f(x) = 6x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 4x - 2$

En los problemas 27 a 32, determine la función polinomial *f*, con coeficientes reales, del grado indicado, que posea las raíces indicadas.

27. grado 4; $\quad 2, 1, -3$ (multiplicidad 2)
28. grado 5; $\quad -4i, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ (multiplicidad 2)
29. grado 5; $\quad 3 + i, 0$ (multiplicidad 3)
30. grado 4; $\quad 5\ i, 2 - 3i$
31. grado 2; $\quad 1 - 6i$
32. grado 2; $\quad 4 + 3i$

En los problemas 33 a 36 determine las raíces de la función polinomial *f*. Indique la multiplicidad de cada raíz.

33. $f(x) = x(4x - 5)^2(2x - 1)^3$
34. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2$
35. $f(x) = (9x^2 - 4)^2$
36. $f(x) = (x^2 + 25)(x^2 - 5x + 4)^2$

En los problemas 37 y 38 determine el o los valores de *k* tales que el número indicado sea una raíz de *f*(*x*). A continuación indique la factorización completa de *f*(*x*).

37. $3;\ f(x) = 2x^3 - 2x^2 + k$
38. $1;\ f(x) = x^3 + 5x^2 - k^2x + k$

En los problemas 39 y 40 deduzca la función polinomial *f* que tenga el grado indicado y cuya gráfica está en la figura.

39. grado 3

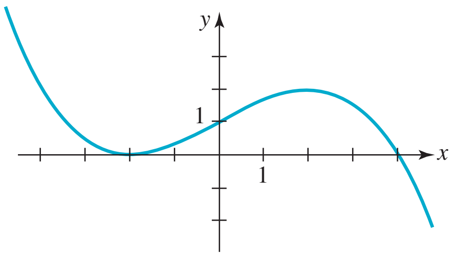


FIGURA 6.3.1 Gráfica del problema 39

40. grado 5

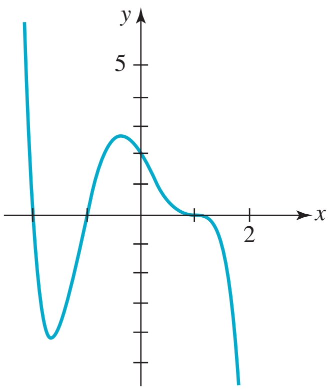


FIGURA 6.3.2 Gráfica del problema 40

Para la discusión

41. Explique lo siguiente:

a) ¿Para cuáles valores enteros positivos de n es $x - 1$ un factor de $f(x) = x^n - 1$?

b) ¿Para cuáles valores enteros positivos de n es $x + 1$ un factor de $f(x) = x^n + 1$?

42. Suponga que f es una función polinomial de grado tres, con coeficientes reales. ¿Por qué $f(x)$ no puede tener tres raíces complejas? Dicho de otro modo, ¿por qué al menos una raíz de una función polinomial cúbica debe ser un número real? ¿Se puede generalizar este resultado?

43. ¿Cuál es el grado más pequeño que puede tener una función polinomial f con coeficientes reales, para que $1 + i$ sea una raíz compleja de multiplicidad dos? ¿Y de multiplicidad tres?

44. Sea $z = a + bi$. Demuestre que $z + \bar{z}$ y que $z\bar{z}$ son números reales.

45. Sea $z = a + bi$. Con los resultados del problema 44 demuestre que

$$f(x) = (x - z)(x - \bar{z})$$

es un función polinomial con coeficientes reales.

46. Trate de comprobar o refutar la siguiente proposición.

Si f es una función polinomial impar, entonces la gráfica de f pasa por el origen.

6.4 Raíces reales de funciones polinomiales

Introducción En la sección anterior vimos que, como consecuencia del teorema fundamental del álgebra, una función polinomial f de grado n tiene n raíces cuando se cuentan las multiplicidades de las raíces. También vimos que una raíz de una función polinomial puede ser un número real o un número complejo. En esta sección limitaremos nuestra atención a las *raíces reales* de funciones polinomiales con coeficientes reales.

Raíces reales Si una función polinomial f de grado $n > 0$ tiene m raíces reales c_1, c_2, . . . , c_m (no necesariamente diferentes), entonces, por el teorema del factor, cada uno de los polinomios lineales $x - c_1$, $x - c_2$, . . . $x - c_m$ son factores de $f(x)$. Esto es,

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_m)q(x),$$

en donde $q(x)$ es un polinomio. Entonces n, el grado de f, debe ser mayor que, o quizás igual a m, ($m \leq n$) la cantidad de raíces reales, cuando cada uno se cuenta de acuerdo con su multiplicidad. En palabras un poco diferentes, esto se dice así:

Teorema 6.4.1 Cantidad de raíces reales

Una función polinomial f de grado $n > 0$ tiene cuando mucho n raíces reales (no necesariamente distintas).

Ahora resumiremos algo de lo que se refiere a las raíces reales de una función polinomial f de grado n:

- f puede no tener raíces reales.

Por ejemplo, la función polinomial de cuarto grado $f(x) = x^4 + 9$ no tiene raíces reales, porque no existe número real alguno x que satisfaga $x^4 + 9 = 0$, es decir, $x^4 = -9$.

- f puede tener m raíces reales, donde $m < n$.

Por ejemplo, la función polinomial de tercer grado $f(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$ tiene una raíz real.

- f puede tener n raíces reales.

Por citar un caso, al factorizar la función polinomial de tercer grado $f(x) = x^3 - x$ en la forma $f(x) = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$, se ve que tiene tres raíces reales.

- f tiene cuando menos una raíz real cuando n es impar.

Es una consecuencia de que las raíces complejas de una función polinomial f con coeficientes reales deban aparecer como pares conjugados. Así, si hubiera que escribir una función polinomial cúbica arbitraria, como $f(x) = x^3 + x + 1$, ya sabríamos que f no puede tener tan sólo una raíz compleja, ni puede tener tres raíces complejas. Esto es, $f(x) = x^3 + x + 1$ tiene exactamente una raíz real, o tiene exactamente tres raíces reales. Tal vez tenga que pensar en la siguiente propiedad:

- Si los coeficientes de $f(x)$ son positivos, y el término constante $a_0 \neq 0$, entonces todas las raíces reales de f deben ser negativas.

Determinación de raíces reales Una cosa es hablar de la existencia de raíces reales y complejas de una función polinomial, y un problema totalmente diferente es determinar esas raíces. El problema de encontrar una *fórmula* que exprese las raíces de una función polinomial f general, de grado n, en términos de sus coeficientes ha confundido a los matemáticos durante siglos. En las secciones 3.3 y 5.3 vimos que, en el caso de una función polinomial de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$, en la que los coeficientes a, b y c son números reales, se pueden determinar las raíces c_1 y c_2 aplicando la fórmula cuadrática.

El problema de determinar raíces de funciones polinomiales de tercer grado, o cúbicas, fue resuelto en el siglo XVI, por el trabajo pionero de **Niccolò Fontana**, matemático italiano (1499-1557), llamado Tartaglia, "el tartamudo". Alrededor de 1540, otro matemático italiano, **Lodovico Ferrari** (1522-1565), descubrió una fórmula algebraica para determinar las raíces de funciones polinomiales de cuarto grado, o cuárticas. Como esas fórmulas son complicadas y difíciles de usar, casi nunca se describen en los cursos elementales.

En 1824, a los 22 años, **Niels Henrik Abel**, matemático noruego (1802-1829), demostró que es imposible llegar a esas fórmulas que definan las raíces de todos los polinomios generales de grados $n \geq 5$, en términos de sus coeficientes.

Niels Henrik Abel

Raíces racionales Las raíces reales de una función polinomial son números racionales o irracionales. Un número racional es un número que tiene la forma p/s, donde p y s son enteros, y $s \neq 0$. Un número irracional es uno que no es racional. Por ejemplo, $\frac{1}{4}$ y -9 son números racionales, pero $\sqrt{2}$ y π son irracionales; esto es, ni $\sqrt{2}$ ni π se pueden escribir en forma de una fracción p/s, donde p y s son enteros. Entonces, ¿cómo se determinan raíces reales de funciones polinomiales de grado $n > 2$? Las malas noticias son que en el caso de raíces reales irracionales *podríamos* tener que contentarnos con usar una gráfica exacta para de un "vistazo" indicar su lugar en el eje x, y a continuación usar uno de los muchos y complicados métodos para *aproximar* la raíz, que se han inventado a lo largo de los años. La buena noticia es que siempre se pueden determinar las raíces reales racionales de *cualquier* función polinomial con coeficientes racionales. Ya vimos que la división sintética es un método adecuado para determinar si cierto número c es una raíz de una función polinomial $f(x)$. Cuando el residuo, en la división de $f(x)$ entre $x - c$, es $r = 0$, se ha encontrado una raíz de la función polinomial f, porque $r = f(c) = 0$. Por citar un caso entre otros, $\frac{2}{3}$ es una raíz de $f(x) = 18x^3 - 15x^2 + 14x - 8$, porque

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{2}{3} & 18 & -15 & 14 & -8 \\ & & 12 & -2 & 8 \\ \hline & 18 & -3 & 12 & \boxed{0 = r}. \end{array}$$

Así, de acuerdo con el teorema del factor, tanto $x - \frac{2}{3}$ como el cociente $18x^2 - 3x + 12$ son factores de f, y se puede escribir la función polinomial como el producto

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \tfrac{2}{3})(18x^2 - 3x + 12) && \leftarrow \text{Se saca 3 como factor común de una función polinomial cuadrática} \\ &= (x - \tfrac{2}{3})(3)(6x^2 - x + 4) \\ &= (3x - 2)(6x^2 - x + 4). \end{aligned} \tag{1}$$

Como se describió en la sección anterior, si se puede factorizar el polinomio hasta que el factor restante sea un polinomio cuadrático, se pueden entonces determinar las raíces restantes con la fórmula cuadrática. En este ejemplo, la factorización de las ecuaciones (1) es todo lo que se puede avanzar empleando números reales, porque las raíces del factor cuadrático $6x^2 - x + 4$ son complejos (verifíquelo). Pero la multiplicación indicada en (1) ilustra algo importante acerca de las raíces reales. El primer coeficiente, 18, y el término constante, -8, de $f(x)$ se obtienen con los productos

$$(\underbrace{3x - \overbrace{2)(6x^2 - x + 4}^{-8}}_{18}).$$

Vemos entonces que el denominador 3 de la raíz racional $\frac{2}{3}$ es un *factor* del primer coeficiente, 18, de $f(x) = 18x^3 - 15x^2 + 14x - 8$, y que el numerador 2 de la raíz racional es un factor del término constante -8.

Este ejemplo ilustra el siguiente principio general para determinar las raíces racionales de una función polinomial. Lea con cuidado el siguiente teorema; los coeficientes de f no sólo son números reales; deben ser *enteros*.

Teorema 6.4.2 Teorema de las raíces racionales

Sea p/s un número racional en sus términos más simples, y además una raíz de la función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

en donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ son enteros, y $a_n \neq 0$. Entonces, p es un factor entero del término constante a_0 y s es un factor entero del primer coeficiente a_n.

El teorema de las raíces racionales merece ser leído varias veces. Nótese que el teorema *no* asegura que una función polinomial f, con coeficientes enteros, *deba* tener una raíz racional; más bien afirma que *si* una función polinomial f con coeficientes enteros tiene una raíz racional p/s, entonces necesariamente

$$\frac{p}{s}. \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{es un factor entero del término constante } a_0 \\ \leftarrow \text{es un factor entero del primer coeficiente } a_n \end{array}$$

Formando todos los cocientes posibles de cada factor entero a_0 con cada factor entero de a_n se puede formar una lista de raíces racionales *potenciales* de f.

EJEMPLO 1 Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$.

Solución Se identifican el término constante $a_0 = -2$ y el primer coeficiente $a_4 = 3$, y a continuación se hace una lista de todos los factores enteros de a_0 y a_4, respectivamente:

$$\begin{aligned} p&: \ \pm 1, \pm 2, \\ s&: \ \pm 1, \ \pm 3. \end{aligned}$$

Ahora se forma una lista de todas las raíces racionales posibles p/s, dividiendo todos los factores de p entre ± 1 y ± 3:

$$\frac{p}{s}: \ \pm 1, \pm 2, \pm \tfrac{1}{3}, \pm \tfrac{2}{3}. \tag{2}$$

Sabemos que la función polinomial f dada, de cuarto grado, tiene cuatro raíces; si alguno de ellos es un número real y es racional, debe estar en la lista (2).

Para determinar cuál de los números en (2) son raíces, si es que las hay, podríamos hacer una sustitución directa en $f(x)$. Sin embargo, la división sintética suele ser un método más eficiente para evaluar $f(x)$. Comenzaremos probando -1:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 3 & -10 & -3 & 8 & -2 \\ & & -3 & 13 & -10 & 2 \\ \hline & 3 & -13 & 10 & -2 & \boxed{0 = r}. \end{array} \tag{3}$$

El residuo cero indica que $r = f(-1) = 0$, y así -1 es una raíz de f. Por consiguiente, $x - (-1) = x + 1$ es un factor de f. Usando el cociente determinado en (3) se puede escribir

$$f(x) = (x + 1)(3x^3 - 13x^2 + 10x - 2). \tag{4}$$

En la ecuación (4) se ve que cualquier otra raíz racional de f debe ser una raíz del cociente $3x^3 - 13x^2 + 10x - 2$. Como este último polinomio tiene grado menor, será más fácil aplicar la división sintética en él que en $f(x)$ para llegar a la siguiente raíz racional. En este punto del proceso, el lector debería comprobar si la raíz que se acaba de encontrar es una raíz repetida. Eso se hace determinando si la raíz que se encontró también es una raíz del cociente. Una comprobación rápida, usando división sintética, demuestra que -1 *no es* una raíz repetida de f, porque no es una raíz de $3x^3 - 13x^2 + 10x - 2$. Entonces se prosigue determinando si el número 1 es una raíz racional de f. En realidad *no* lo es, porque la división

$$\begin{array}{r|rrrrl} 1 & 3 & -13 & 10 & -2 & \leftarrow \text{coeficientes del cociente} \\ & & 3 & -10 & 0 & \\ \hline & 3 & -10 & 0 & \boxed{-2 = r} & \end{array} \tag{5}$$

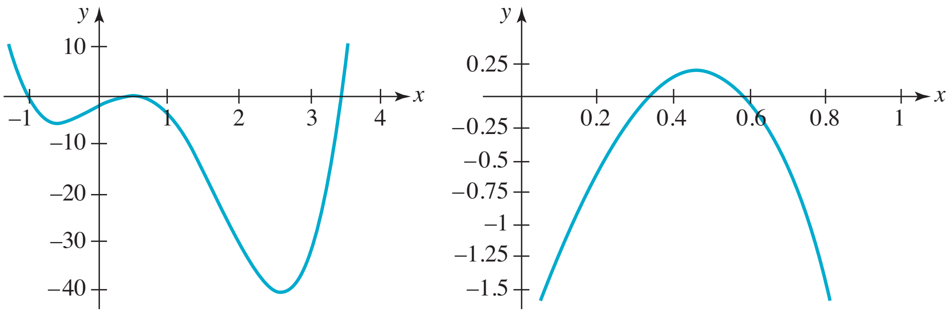
indica que el residuo es $r = -2 \neq 0$. Al revisar $\frac{1}{3}$ se tiene que

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{1}{3} & 3 & -13 & 10 & -2 \\ & & 1 & -4 & 2 \\ \hline & 3 & -12 & 6 & \boxed{0 = r}. \end{array} \tag{6}$$

Por consiguiente, $\frac{1}{3}$ sí es una raíz. En este momento podemos dejar de usar la división sintética, porque (6) indica que el factor que resta de f es el polinomio cuadrático $3x^2 - 12x + 6$. De acuerdo con la fórmula cuadrática se llega a que las raíces reales que restan son $2 + \sqrt{2}$ y $2 - \sqrt{2}$. Por consiguiente, el polinomio dado f tiene dos raíces racionales, -1 y $\frac{1}{3}$, y dos raíces irracionales, $2 + \sqrt{2}$ y $2 - \sqrt{2}$. ≡

Si el lector tiene acceso a computadoras, su selección de los números racionales que se van a probar en el ejemplo 1 podrá motivarse con una gráfica de la función $f(x) = 3x^4 - 10x^3$

$-\,3x^2 + 8x - 2$. Con ayuda de una función graficadora se obtienen las gráficas de la **FIGURA 6.4.1**. En la figura 6.4.1*a*), parece que *f* tiene al menos tres raíces reales. Pero al "acercarse" a la gráfica en el intervalo [0, 1], figura 6.4.1*b*), se ve que en realidad *f* tiene cuatro raíces reales: una negativa y tres positivas. Así, una vez determinada una raíz racional negativa de *f*, se pueden desechar todos los demás números negativos de la primera lista como raíces potenciales.



a) Gráfica de *f* en el intervalo [–1, 4]

b) Acercamiento de la gráfica, en el intervalo [0, 1]

FIGURA 6.4.1 Gráfica de la función *f* del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Factorización completa

Como la función *f* del ejemplo 1 es de grado 4, y hemos determinado cuatro raíces reales, se puede indicar su factorización completa. Usando el primer coeficiente $a_4 = 3$, entonces, de (6) en la sección 6.3,

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x+1)(x-\tfrac{1}{3})(x-(2-\sqrt{2}))(x-(2+\sqrt{2})) \\ &= 3(x+1)(x-\tfrac{1}{3})(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2}). \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 3 Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$.

Solución En este caso, el término constante es $a_0 = 4$, y el primer coeficiente es $a_4 = 1$. Los factores enteros de a_0 y a_4 son, respectivamente:

$$\begin{aligned} &p\colon\ \pm1, \pm2, \pm4, \\ &s\colon\ \pm1. \end{aligned}$$

La lista de todas las raíces racionales posibles *p/s* es:

$$\frac{p}{s}\colon\ \pm1, \pm2, \pm4.$$

Como todos los coeficientes de *f* son positivos, la sustitución de un número positivo de la lista anterior en $f(x)$ no podrá hacer que $f(x) = 0$. Así, los únicos números que son raíces racionales potenciales son -1, -2 y -4. Mediante la división sintética

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ & & -1 & -3 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 2 & \boxed{2 = r} \end{array}$$

se comprueba que -1 no es una raíz. Sin embargo, de

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ & & -2 & -4 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 2 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

se ve que -2 es una raíz. Ahora se investiga si -2 es una raíz repetida. Usando los coeficientes del cociente,

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ & & -2 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

entonces -2 es una raíz de multiplicidad 2. Hasta ahora se ha demostrado que

$$f(x) = (x + 2)^2(x^2 + 1).$$

Como las raíces de $x^2 + 1$ son los complejos conjugados i y $-i$, se puede llegar a la conclusión que -2 es la única raíz real de $f(x)$. ≡

EJEMPLO 4 Sin raíces racionales

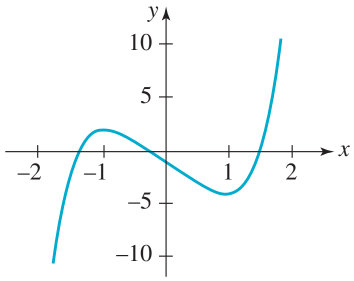


FIGURA 6.4.2 Gráfica de f del ejemplo 4

Se tiene la función polinomial $f(x) = x^5 - 4x - 1$. Las únicas raíces racionales posibles son -1 y 1, y es fácil ver que ni $f(-1)$ ni $f(1)$ son raíces. Entonces, f tiene raíces no racionales. Como f tiene grado impar, tiene al menos una raíz real, y entonces esa raíz debe ser un número irracional. Con ayuda de una función graficadora se obtuvo la gráfica de la **FIGURA 6.4.2**. Note que, en la figura, la gráfica a la derecha de $x = 2$ no puede regresar hacia abajo, *así como tampoco* la gráfica a la izquierda de $x = -2$ no puede regresar hacia arriba y entonces cruzar al eje x cinco veces, porque esa forma de la gráfica sería inconsistente con el comportamiento de f en los extremos. Por lo tanto, se puede decir que la función f posee tres raíces reales irracionales y dos raíces complejas conjugadas. Lo mejor que se puede hacer en este caso es aproximar esas raíces. Con un programa computarizado de álgebra, como *Mathematica*, se pueden aproximar las raíces reales y complejas. Se ve que esas aproximaciones son -1.34, -0.25, 1.47, $0.061 + 1.42i$ y $0.061 - 1.42i$. ≡

Aunque en el teorema de las raíces racionales se requiere que los coeficientes de una función polinomial f sean enteros, en algunos casos ese teorema se puede aplicar a una función polinomial con algunos coeficientes reales *no enteros*. En el siguiente ejemplo se ilustra este concepto.

EJEMPLO 5 Coeficientes no enteros

Determinar las raíces racionales de $f(x) = \frac{5}{6}x^4 - \frac{23}{12}x^3 + \frac{10}{3}x^2 - 3x - \frac{3}{4}$.

Solución Si se multiplica f por el mínimo común denominador 12, de todos los coeficientes racionales, se obtiene una nueva función g, con coeficientes enteros:

$$g(x) = 10x^4 - 23x^3 + 40x^2 - 36x - 9.$$

En otras palabras, $g(x) = 12f(x)$. Si c es una raíz de la función g, entonces c también es una raíz de f, porque $g(c) = 12f(c) = 0$ implica que $f(c) = 0$. Después de hacer las operaciones numéricas en la lista de las raíces racionales potenciales,

$$\frac{p}{s}\!: \ \pm 1, \ \pm 3, \ \pm 9, \ \pm \tfrac{1}{2}, \ \pm \tfrac{3}{2}, \ \pm \tfrac{9}{2}, \ \pm \tfrac{1}{5}, \ \pm \tfrac{3}{5}, \ \pm \tfrac{9}{5}, \ \pm \tfrac{1}{10}, \ \pm \tfrac{3}{10}, \ \pm \tfrac{9}{10},$$

se ve que $-\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{2}$ son raíces de g, y por consiguiente son raíces de f. ≡

6.4 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-17.

En los problemas 1 a 20 determine todas las raíces racionales del polinomio *f*.

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$
2. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$
3. $f(x) = x^3 - 8x - 3$
4. $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$
5. $f(x) = 4x^4 - 7x^2 + 5x - 1$
6. $f(x) = 8x^4 - 2x^3 + 15x^2 - 4x - 2$
7. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 14x + 21$
8. $f(x) = 3x^4 + 5x^2 + 1$
9. $f(x) = 6x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 8x + 3$
10. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x - 3$
11. $f(x) = x^4 + 6x^3 - 7x$
12. $f(x) = x^5 - 2x^2 - 12x$
13. $f(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x$
14. $f(x) = 128x^6 - 2$
15. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{17}{4}x - 3$
16. $f(x) = 0.2x^3 - x + 0.8$
17. $f(x) = 2.5x^3 + x^2 + 0.6x + 0.1$
18. $f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$
19. $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - \frac{11}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$
20. $f(x) = x^4 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

En los problemas 21 a 30, determine todas las raíces reales del polinomio *f*. A continuación factorice $f(x)$ usando sólo números reales.

21. $f(x) = 8x^3 + 5x^2 - 11x + 3$
22. $f(x) = 6x^3 + 23x^2 + 3x - 14$
23. $f(x) = 10x^4 - 33x^3 + 66x - 40$
24. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 24x + 144$
25. $f(x) = x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 5x + 20$
26. $f(x) = 18x^5 + 75x^4 + 47x^3 - 52x^2 - 11x + 3$
27. $f(x) = 4x^5 - 8x^4 - 24x^3 + 40x^2 - 12x$
28. $f(x) = 6x^5 + 11x^4 - 3x^3 - 2x^2$
29. $f(x) = 16x^5 - 24x^4 + 25x^3 + 39x^2 - 23x + 3$
30. $f(x) = x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64$

En los problemas 31 a 36, encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

31. $2x^3 + 3x^2 + 5x + 2 = 0$
32. $x^3 - 3x^2 = -4$
33. $2x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 25x - 6 = 0$
34. $9x^4 + 21x^3 + 22x^2 + 2x - 4 = 0$
35. $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$
36. $8x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 6x - 1 = 0$

En los problemas 37 y 38, deduzca una función polinomial *f*, del grado indicado, con coeficientes enteros y que tenga las raíces racionales indicadas.

37. grado 4; $-4, \frac{1}{3}, 1, 3$
38. grado 5; $-2, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 1$ (multiplicidad dos)

En los problemas 39 y 40, obtenga una función polinómica cúbica *f* que satisfaga las condiciones dadas.

39. ceros racionales 1 y 2, $f(0) = 1$ y $f(-1) = 4$
40. cero racional $\frac{1}{2}$, ceros irracionales $1 + \sqrt{3}$ y $1 - \sqrt{3}$, el coeficiente de x es 2

Aplicaciones diversas

41. **Construcción de una caja** Se va a hacer una caja sin tapa a partir de una pieza cuadrada de cartón, cortando piezas cuadradas en cada esquina, y después doblando los lados hacia arriba. Vea la **FIGURA 6.4.3**. La longitud de un lado del cartón es 10 pulgadas. Calcule la longitud del lado de los cuadrados que se quitaron en las esquinas, si el volumen de la caja debe ser de 48 pulg^3.

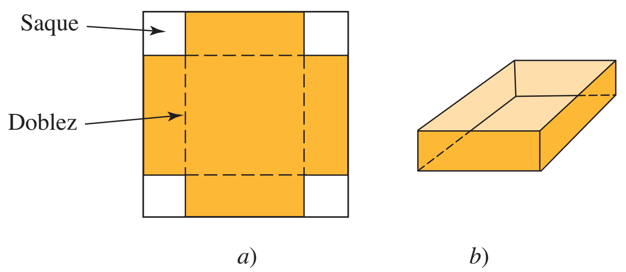


FIGURA 6.4.3 Caja del problema 41

42. **Flexión de una viga** Una viga en voladizo tiene 20 pies de longitud, y se carga con 600 lb en su extremo derecho; se flexiona una cantidad $d(x) = \frac{1}{16\,000}(60x^2 - x^3)$, donde d se expresa en pulgadas y x en pies. Véase la **FIGURA 6.4.4**.

Calcule x cuando la flexión es de 0.1215 pulg. También cuando la flexión es de 1 pulgada.

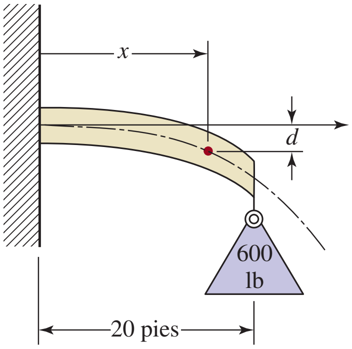


FIGURA 6.4.4 Caja del problema 42

Para la discusión

43. Argumente: ¿Cuál es la máxima cantidad de veces que las gráficas de las funciones polinómicas

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{y} \quad g(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

pueden entrecruzarse?

44. Considere la función polinomial $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, donde los coeficientes $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son enteros pares distintos de cero. Explique por qué -1 y 1 no pueden ser raíces de $f(x)$.

45. Una función polinomial es una función continua; es decir, la gráfica de una función polinomial no tiene interrupciones. Si $f(x) = 4x^3 - 11x^2 + 14x - 6$, muestre que $f(0)f(1) < 0$. Explique por qué esto demuestra que $f(x)$ tiene un cero en el intervalo [0, 1]. Obtenga el cero.

46. Si el coeficiente principal de una función polinomial f con coeficientes íntegros es 1, ¿qué se puede decir sobre los posibles ceros reales de f?

47. Si k es un número primo* tal como $k > 2$, ¿cuáles son los posibles ceros racionales de $f(x) = 6x^4 - 9x^2 + k$?

48. Demuestre que $\sqrt[3]{7}$ es un cero de la función polinomial $f(x) = x^3 - 7$. Explique por qué esto prueba que $\sqrt[3]{7}$ es un número irracional.

*Un **número primo** es un entero positivo mayor que 1 cuyos únicos factores enteros positivos son el propio número y el número 1. Los primeros cinco números primos son 2, 3, 5, 7 y 11.

6.5 Aproximación de los ceros reales

Introducción Una función polinómica o polinomial f es una función **continua**. Recuérdese que en la sección 5.4 señalamos que esto significa que la gráfica de $y = f(x)$ no tiene interrupciones, hoyos o huecos. El resultado presentado en seguida es una consecuencia directa de la continuidad.

Teorema 6.5.1 Teorema del valor intermedio

Supóngase que $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si $f(a) \neq f(b)$ para $a < b$, y si N es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces hay un número c en el intervalo abierto (a, b) para el que $f(c) = N$.

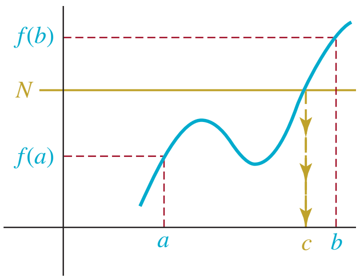
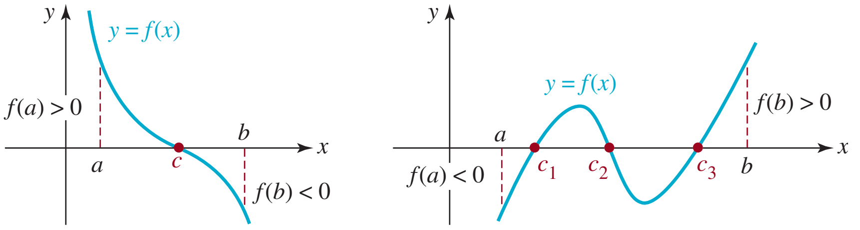


FIGURA 6.5.1 $f(x)$ adopta todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$

Como se muestra en la **FIGURA 6.5.1**, el teorema del valor intermedio simplemente expresa que una función continua $f(x)$ adopta todos los valores entre los números $f(a)$ y $f(b)$. En particular, si los valores de la función $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, entonces al identificar $N = 0$ podemos afirmar que hay al menos un número en el intervalo abierto (a, b) para el que $f(c) = 0$. En otras palabras:

Si $f(a) > 0, f(b) < 0$ o $f(a) < 0, f(b) > 0$, entonces $f(x)$ tiene al menos un cero c en el intervalo (a, b). (1)

La veracidad de esta conclusión se ilustra en la **FIGURA 6.5.2**.



a) Un cero c en (a, b) *b*) Tres ceros c_1, c_2, c_3 en (a, b)

FIGURA 6.5.2 Localización de los ceros de una función mediante el teorema del valor intermedio

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema de valor intermedio

Considere la función polinomial $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Con base en los datos mostrados en la tabla de abajo podemos concluir de (1) que f tiene un cero real en cada uno de los intervalos $[-2, -1]$, $[-1, 0]$ y $[1, 2]$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-3	1	-1	-3	1

signos contrarios

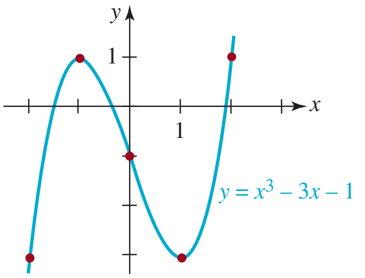


FIGURA 6.5.3 Gráfica de la función del ejemplo 1

Sin embargo, al aplicar el teorema 6.4.2 puede comprobarse que f no tiene ceros racionales y, por tanto, sus tres ceros reales son números irracionales. Como se observa en la **FIGURA 6.5.3**, la gráfica de f interseca la recta $y = 0$ (el eje x) tres veces. ≡

En el ejemplo que sigue se obtendrá una aproximación a uno de los ceros irracionales del ejemplo 1 mediante una técnica denominada **método de la bisección**.

Método de la bisección La idea básica de este método parte del supuesto de que una función f es continua y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios. Con esto se sabe que hay un número c en (a, b) para el cual $f(c) = 0$. Luego, el punto medio $m = (a + b)/2$ del intervalo $[a, b]$ es una aproximación a c. Si $m = (a + b)/2$ no es un cero de f, entonces hay un cero c en un intervalo [en el intervalo abierto (a, m) o en el intervalo (m, b), también abierto] que tiene la mitad de la longitud del intervalo original $[a, b]$. Si c se halla, por ejemplo, en (m, b) como se muestra en la **FIGURA 6.5.4**, se divide este intervalo más pequeño por la mitad: el nuevo punto medio es un cero o el cero c se encuentra en el intervalo que mide una cuarta parte de la longitud del intervalo original $[a, b]$. Al continuar de esta forma es posible localizar el cero c de f en intervalos sucesivamente más pequeños. Después se toman los puntos medios de esos intervalos como aproximaciones al cero c. Usando este método, en la figura 6.5.4 se advierte que el error de una aproximación a un cero en el intervalo es menor que la mitad de la longitud de ese intervalo.

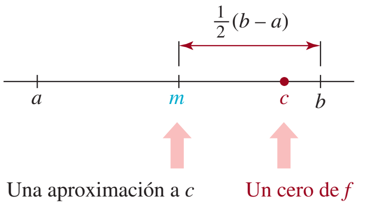


FIGURA 6.5.4 Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, entonces debe haber un cero c de f en $[a, m]$ o en $[m, b]$.

En seguida se resume lo anterior.

GUÍA PARA APROXIMAR UN CERO

Sea f una función polinómica tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios.

i) Divida el intervalo $[a, b]$ a la mitad hallando su punto medio $m = (a + b)/2$.

ii) Obtenga $f(m)$.

iii) Si $f(a)$ y $f(m)$ tienen signos contrarios, entonces f tiene un cero en el intervalo $[a, m]$.
Si $f(m)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, entonces f tiene un cero en el intervalo $[m, b]$.
Si $f(m) = 0$, entonces m es un cero de f.

EJEMPLO 2 Aplicación del método de la bisección

Obtenga una aproximación al cero de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ en el intervalo [1, 2], con una precisión de hasta tres lugares decimales.

Solución Recuérdese del ejemplo 1 que $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$. Ahora, para lograr la precisión indicada el error debe ser menor de 0.0005.* La primera aproximación al cero en [1, 2] es

$$m_1 = \frac{1 + 2}{2} = 1.5 \quad \text{con error } < \tfrac{1}{2}(2 - 1) = 0.5.$$

Como $f(1.5) = -2.15 < 0$, el cero se halla en [1.5, 2].

La segunda aproximación al cero es

$$m_2 = \frac{1.5 + 2}{2} = 1.75 \quad \text{con error } < \tfrac{1}{2}(2 - 1.5) = 0.25.$$

Puesto que $f(1.75) = -0.89065 < 0$, el cero se ubica en [1.75, 2].

La tercera aproximación al cero es

$$m_3 = \frac{1.75 + 2}{2} = 1.875 \quad \text{con error } < \tfrac{1}{2}(2 - 1.75) = 0.125.$$

Si se continúa de esta forma a la postre se llegará a

$$m_{11} = 1.879395 \qquad \text{con error} < 0.0005.$$

Por tanto, el número 1.879 es una aproximación al cero de f en [1, 2] precisa hasta tres lugares decimales. ≡

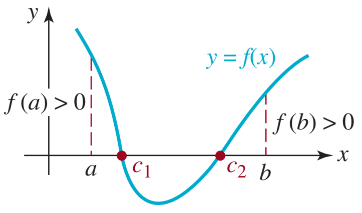


FIGURA 6.5.5 $f(a)$ y $f(b)$ son positivas; no obstante, hay dos ceros en $[a, b]$

En el ejemplo 2 dejamos la aproximación a los ceros de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ en los intervalos $[-2, -1]$ y $[-1, 0]$ como ejercicios.

Precaución ▶ Aunque $f(a)$ y $f(b)$ tengan el mismo signo, la función f podría tener uno o más ceros en el intervalo $[a, b]$, como se muestra en la **FIGURA 6.5.5**.

* Si se quiere una aproximación precisa hasta dos lugares decimales se calculan los puntos medios m_i, con $i = 1, 2, \ldots n$ hasta que el error es menor de 0.005.

6.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-17.

En los problemas 1 y 2, obtenga una aproximación con exactitud de tres lugares decimales al cero de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ en el intervalo dado.

1. $[-2, -1]$

2. $[-1, 0]$

En los problemas 3 a 6, use el método de la bisección para aproximar el o los ceros indicados por la gráfica de la función dada, con una exactitud de tres lugares decimales.

3. $f(x) = x^3 - x^2 + 4$

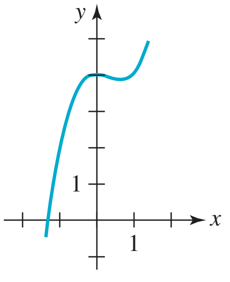


FIGURA 6.5.6 Gráfica para el problema 3

4. $f(x) = -x^3 - x + 11$

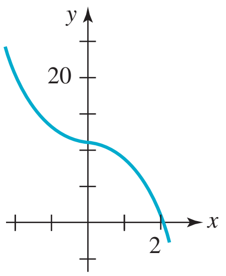


FIGURA 6.5.7 Gráfica para el problema 4

5. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

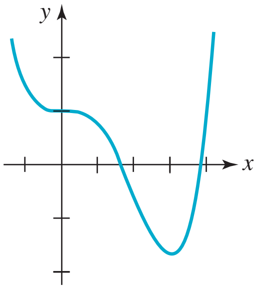


FIGURA 6.5.8 Gráfica para el problema 5

6. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$

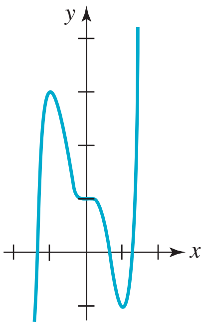


FIGURA 6.5.9 Gráfica para el problema 6

En los problemas 7 y 8, aplique el método de la bisección para aproximar las coordenadas x del punto (o puntos) de intersección de las gráficas dadas, con una precisión de tres lugares decimales.

7.

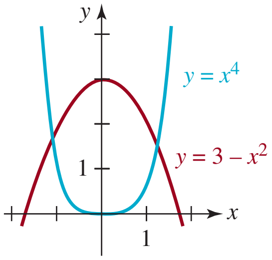


FIGURA 6.5.10 Gráfica para el problema 7

8.

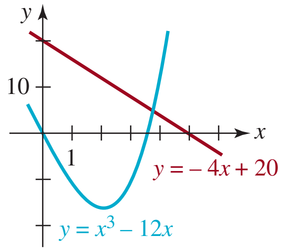


FIGURA 6.5.11 Gráfica para el problema 8

Aplicaciones diversas

9. Bola flotante de madera Se pone en agua una esfera de madera de radio r. Para determinar la profundidad h a la que se hunde, igualamos el peso del agua desplazada y el de la bola (principio de Arquímedes):

$$\frac{\pi}{3}\rho_w h^2(3r - h) = \frac{4\pi}{3}\rho_b r^3,$$

donde ρ_w y ρ_b son, respectivamente, la densidad del agua y la de la madera (**FIGURA 6.5.12**). Supóngase que $\rho_b = 0.4\rho_w$ y $r = 2$ pulg. Use el método de la bisección para aproximar la profundidad h a la que se hunde la bola, con una precisión de dos lugares decimales.

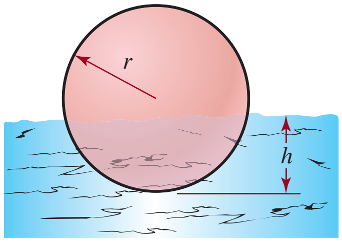


FIGURA 6.5.12 Bola flotante para el problema 9

10. Comba de un cable La longitud L de un cable unido a dos suportes verticales de un puente colgante se expresa mediante

$$L = r + \frac{8}{3r}s^2 - \frac{32}{5r^3}s^4,$$

donde r es la inclinación de los soportes y s la comba del cable unido a ellos (**FIGURA 6.5.13**). Sea $r = 400$ pies y $L = 404$ pies. Use el método de la bisección para aproximar la comba s del cable con una precisión de dos lugares decimales. [*Pista:* considere el intervalo [20, 30]].

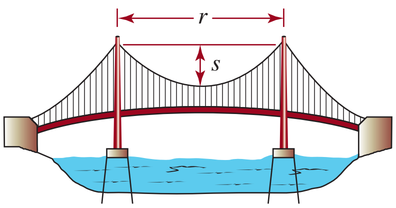


FIGURA 6.5.13 Puente colgante para el problema 10

6.6 Funciones racionales

Introducción Muchas funciones se forman a partir de funciones polinomiales, con operaciones aritméticas y composición de funciones (véase la sección 5.5). En esta sección se formará una clase de funciones, con el cociente de dos funciones polinomiales.

En virtud de que los números racionales se forman de enteros, así también una **función racional** se forma de funciones polinómicas.

Definición 6.6.1 Función racional

Una **función racional** $y = f(x)$ es una función que tiene la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

en donde P y Q son funciones polinomiales.

Por ejemplo, las siguientes funciones son racionales:

$$y = \frac{x}{x^2 + 5}, \qquad y = \frac{\overset{\text{polinomio}}{\overset{\downarrow}{x^3 - x + 7}}}{\underset{\text{polinomio}}{\underset{\uparrow}{x + 3}}}, \qquad y = \frac{1}{x}.$$

La función

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1} \quad \leftarrow \text{no es un polinomio}$$

no es una función racional. En (1), no se puede permitir que el denominador sea cero. Entonces, el **dominio** de una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ es el conjunto de todos los números reales, *excepto* aquellos números en los cuales el denominador $Q(x)$ sea cero. Por ejemplo, el dominio de la función racional $f(x) = (2x^3 - 1)/(x^2 - 9)$ es $\{x | x \neq -3, x \neq 3\}$, o bien $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$. No es necesario decir que tampoco se permite que el denominador sea el polinomio nulo, $Q(x) = 0$.

Gráficas Es un poco más complicado graficar una función racional f que una función polinomial, porque además de poner atención en

- las intersecciones con los ejes,
- la simetría y
- el desplazamiento o reflexión o estiramiento de gráficas conocidas, también se deben vigilar el dominio de f y
- los grados de $P(x)$ y $Q(x)$.

Estos dos últimos temas son importantes para determinar si una gráfica de una función racional tiene *asíntotas*.

La intersección con el eje y está en el punto $(0, f(0))$, siempre que el número 0 esté en el dominio de f. Por ejemplo, la gráfica de la función racional $f(x) = (1 - x)/x$ no cruza el eje y, porque $f(0)$ no está definida. Si los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes, entonces las intersecciones con el eje x en la gráfica de la función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ son los puntos cuyas abscisas son las raíces reales del numerador $P(x)$. En otras palabras, la única forma en que $f(x) = P(x)/Q(x) = 0$ es hacer que $P(x) = 0$. La gráfica de una función racional f es simétrica con respecto al eje y si $f(-x) = f(x)$, y simétrica con respecto al origen si $f(-x) = -f(x)$. Como es fácil localizar una función polinomial par o impar, una forma fácil de determinar la simetría de la gráfica de una función racional es la siguiente. Se considera que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes.

- El cociente de dos funciones pares es par. (2)
- El cociente de dos funciones impares es par. (3)
- El cociente de una función par y una impar es impar. (4)

Véase el problema 48, en los ejercicios 6.6.

Ya hemos visto las gráficas de dos funciones racionales simples, $y = 1/x$ y $y = 1/x^2$, en las figuras 5.2.1*e*) y 5.2.1*f*). Se pide al lector que repase ahora esas gráficas. Note que $P(x) = 1$ es una función par, y que $Q(x) = x$ es una función impar, por lo que $y = 1/x$ es una función impar, de acuerdo con (4). Por otra parte, $P(x) = 1$ es una función par, así como $Q(x) = x^2$, por lo que $y = 1/x^2$ es una función impar, de acuerdo con (2).

EJEMPLO 1 Función recíproca desplazada

Graficar la función $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$.

Solución La gráfica no tiene simetría, porque $Q(x) = x - 1$ no es función par ni impar. Como $f(0) = -2$, la intersección con el eje y está en $(0, -2)$. Como $P(x) = 2$ nunca es 0, no hay intersecciones con el eje x. También, el lector debe reconocer que la gráfica de esta función racional es la de la función recíproca $y = 1/x$, estirada verticalmente en un factor de 2, y trasladada 1 unidad hacia la derecha. El punto $(1, 1)$ está en la gráfica de $y = 1/x$; en la **FIGURA 6.6.1**, después del estiramiento vertical y el desplazamiento horizontal, el punto correspondiente en la gráfica de $y = 2/(x - 1)$ es $(2, 2)$.

La recta vertical $x = 1$, y la recta horizontal $y = 0$ (la ecuación del eje x) tienen especial importancia en esta gráfica.

La línea interrumpida vertical $x = 1$ de la figura 6.6.1, es el eje y de la figura 5.2.1*e*), desplazado 1 unidad hacia la derecha. Aunque el número 1 no está en el dominio de la función dada, se puede evaluar f en valores de x *cercanos* a 1. Por ejemplo, se puede verificar que

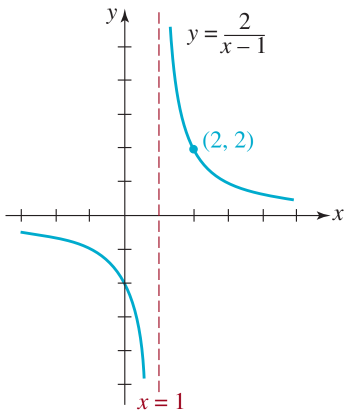


FIGURA 6.6.1 Gráfica de la función del ejemplo 1

x	0.999	1.001
$f(x)$	$-2\,000$	$2\,000$

(5)

Esta tabla muestra que en el caso de valores de x cercanos a 1, los valores correspondientes de la función $f(x)$ tienen valor absoluto grande. Por otra parte, en el de valores de x cuando $|x|$ es grande, los valores correspondientes de la función $f(x)$ son cercanos a cero. Por ejemplo, el lector puede comprobar que

x	-999	$1\,001$
$f(x)$	-0.002	0.002

(6)

Desde el punto de vista geométrico, cuando x tiende a 1, la gráfica de la función tiende a la recta vertical $x = 1$, y cuando $|x|$ aumenta sin límite, la gráfica de la función tiende a la recta horizontal $y = 0$. ≡

■ **Notación** Para indicar que x se aproxima a un número a se usa la notación

- $x \to a^-$, para decir que x tiende a a desde la *izquierda*, esto es, a través de números que son menores que a;
- $x \to a^+$, para decir que x tiende a a desde la *derecha*, esto es, a través de números que son mayores que a, y
- $x \to a$, para decir que x tiende a a desde la *izquierda* y también desde la *derecha*.

También se usan los símbolos de infinito, así como la notación

- $x \to -\infty$ para indicar que x se vuelve *no acotado en la dirección negativa*, y
- $x \to \infty$ para indicar que x se vuelve *no acotado en la dirección positiva*.

Esta notación se empleó en la explicación del *comportamiento extremo* en la sección 6.1.

Se dan interpretaciones parecidas a los símbolos $f(x) \to -\infty$ y $f(x) \to \infty$. Estas notaciones son una forma cómoda de describir el comportamiento de una función ya sea cerca de un número $x = a$, o cuando x aumenta hacia la derecha o disminuye hacia la izquierda. Así, en el ejemplo 1 se ve que, de acuerdo con (5) y la figura 6.5.1,

$$f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to 1^- \qquad \text{y} \qquad f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to 1^+.$$

En palabras, la notación del renglón anterior quiere decir que los valores de la función decrecen sin límite cuando x tiende a 1 desde la izquierda, y que los valores de la función crecen sin límite cuando x tiende a 1 desde la derecha. De acuerdo con (6) y la figura 6.6.1, también debe quedar claro que

$$f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to \infty.$$

■ **Asíntotas** En la figura 6.6.1, la recta vertical cuya ecuación es $x = 1$ se denomina **asíntota vertical** de la gráfica de f, y la recta horizontal cuya ecuación es $y = 0$ se llama **asíntota horizontal** de la gráfica de f.

En esta sección examinaremos tres tipos de asíntotas, que corresponden a los tres tipos de rectas que estudiamos en la sección 4.3: *rectas verticales*, *rectas horizontales* y *rectas inclinadas* (u oblicuas). La característica de cualquier asíntota es que la gráfica de una función f debe acercarse, o tender, a la recta.

Definición 6.6.2 Asíntota vertical

Se dice que una recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función f, si se cumple al menos una de las seis condiciones siguientes:

$$\begin{array}{llllll} f(x) \to -\infty & \text{cuando} & x \to a^-, & f(x) \to \infty & \text{cuando} & x \to a^-, \\ f(x) \to -\infty & \text{cuando} & x \to a^+, & f(x) \to \infty & \text{cuando} & x \to a^+, \\ f(x) \to -\infty & \text{cuando} & x \to a, & f(x) \to \infty & \text{cuando} & x \to a. \end{array} \tag{7}$$

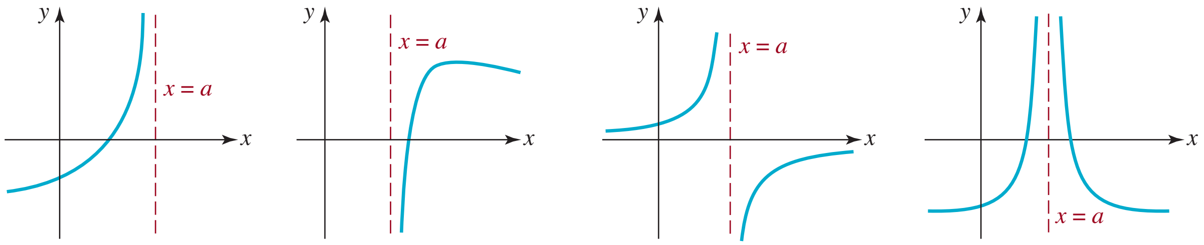
La **FIGURA 6.6.2** ilustra cuatro de las posibilidades que indica (7) sobre el comportamiento no acotado de una función f cerca de una asíntota vertical $x = a$. Si la función tiene la *misma clase de comportamiento no acotado desde ambos lados de* $x = a$, se expresa ya sea como

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a, \tag{8}$$

o bien como

$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to a. \tag{9}$$

En la figura 6.6.2*d*) se ve que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$ y que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^+$; por consiguiente, se escribe $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$.



a) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$ *b)* $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ *c)* $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$, $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ *d)* $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$

FIGURA 6.6.2 La recta $x = a$ es una asíntota vertical

Si $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una *función racional* $f(x) = P(x)/Q(x)$, entonces, los valores de la función $f(x)$ se vuelven no acotados cuando x tiende a a desde *ambos lados*, esto es, desde la derecha $(x \to a^+)$ *y también* desde la izquierda $(x \to a^-)$. Las gráficas de las figuras 6.6.2*c*) y 6.6.2*d*) (o la reflexión de esas gráficas en el eje x) son gráficas típicas de una función racional con una sola asíntota vertical. Como se ve en esas figuras, una función racional con una asíntota vertical es una **función discontinua**. Hay una interrupción infinita en cada gráfica, en $x = a$. Como se ve en las figuras 6.6.2*c*) y 6.6.2*d*), una sola asíntota vertical divide al plano *xy* en dos regiones, y dentro de cada región hay una sola parte, o **rama**, de la gráfica de la función racional f.

Definición 6.6.3 Asíntota horizontal

Se dice que una recta $y = c$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de una función f, si

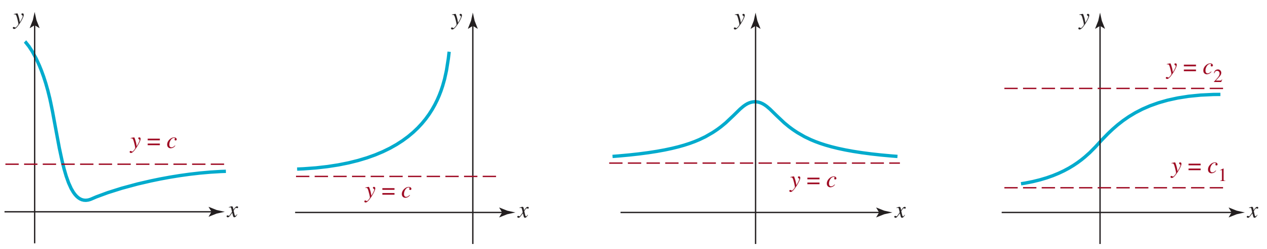
$$f(x) \to c \text{ cuando } x \to -\infty \quad \text{o si} \quad f(x) \to c \text{ cuando } x \to \infty. \tag{10}$$

En la **FIGURA 6.6.3** hemos ilustrado algunas asíntotas horizontales típicas. Se ve que, junto con la figura 6.6.3*d*), en general la gráfica de una función puede tener cuando mucho *dos* asíntotas horizontales, pero que la gráfica de una *función racional* $(f(x) = P(x)/Q(x)$ puede tener *una*, cuando mucho. Si la gráfica de una función racional f tiene una asíntota horizontal $y = c$, entonces, como se ve en la figura 6.6.3*c*),

Recuerde esto.

$$f(x) \to c \text{ cuando } x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad f(x) \to c \text{ cuando } x \to \infty.$$

El último renglón es una descripción matemática del **comportamiento en los extremos** de la gráfica de una función racional con asíntota horizontal. También, la gráfica de una función *nunca* puede cruzar una asíntota vertical; pero, como se ve en la figura 6.6.3*a*), una gráfica sí puede cruzar una asíntota horizontal.



a) $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$ *b)* $f(x) \to c$ cuando $x \to -\infty$ *c)* $f(x) \to c$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$ *d)* $f(x) \to c_1$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to c_2$ cuando $x \to \infty$

FIGURA 6.6.3 La recta $y = c$ es una asíntota horizontal en *a*), *b*) y *c*)

Una asíntota inclinada también se llama **asíntota oblicua**.

Definición 6.6.4 Asíntota oblicua

Se dice que una recta $y = mx + b$, $m \neq 0$, es una **asíntota inclinada**, o **asíntota oblicua**, de la gráfica de una función f, si

$$f(x) \to mx + b \text{ cuando } x \to -\infty$$

o bien

$$f(x) \to mx + b \text{ cuando } x \to \infty. \tag{11}$$

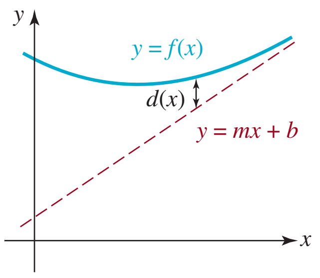


FIGURA 6.6.4 La asíntota oblicua es $y = mx + b$

La notación en (11) quiere decir que la gráfica de f tiene una asíntota oblicua siempre que los valores de la función $f(x)$ se aproximan cada vez más a los valores de y en la recta $y = mx + b$, cuando el valor absoluto de x crece. Otra forma de enunciar (11) es esta: una recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de f, si la distancia vertical $d(x)$ entre los puntos con la misma abscisa, en las dos gráficas, satisface

$$d(x) = f(x) - (mx + b) \to 0 \text{ cuando } x \to -\infty \text{ o cuando } x \to \infty.$$

Véase la **FIGURA 6.6.4**. Se nota que si una gráfica de una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ posee una asíntota oblicua, puede tener asíntotas verticales, pero *no puede* tener una asíntota horizontal.

Desde el punto de vista práctico, las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de una función racional f se pueden determinar por inspección. Entonces, para fines de esta descripción, supongamos que

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \; a_n \neq 0, \; b_m \neq 0, \tag{12}$$

representa una función racional general.

Determinación de asíntotas verticales Supongamos que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ en (12) no tienen factores comunes. En ese caso:

- Si a es un número real tal que $Q(a) = 0$, la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

Debido a que $Q(x)$ es un polinomio de grado m, puede tener hasta m raíces reales, y entonces la gráfica de una función racional f puede tener hasta m asíntotas verticales. Si la gráfica de una función racional f tiene, por ejemplo, k asíntotas verticales ($k \leq m$), entonces las k rectas verticales dividen al plano xy en $k + 1$ regiones. Por tanto, la gráfica de esta función racional tendría $k + 1$ ramas.

EJEMPLO 2 Asíntotas verticales

a) Por inspección de la función racional $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 4}$ se observa que el denominador $Q(x) = x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) = 0$ en $x = -2$ y en $x = 2$. Son las ecuaciones de las asíntotas verticales de la gráfica de f. Esta gráfica tiene tres ramas: una a la izquierda de la recta $x = -2$, una entre las rectas $x = -2$ y $x = 2$, y una a la derecha de la recta $x = 2$.

b) La gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 4}$ no tiene asíntotas verticales, porque $Q(x) = x^2 + x + 4 \neq 0$ para todos los números reales. ≡

Determinación de las asíntotas horizontales Cuando describimos el comportamiento en los extremos de un polinomio $P(x)$ de grado n hicimos notar que $P(x)$ se comporta como

$y = a_n x^n$, esto es, $P(x) \approx a_n x^n$, para valores absolutos grandes de x. En consecuencia, se ve en

$$f(x) = \frac{a_n x^n \boxed{+ a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}}{b_m x^m \boxed{+ b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}}$$

las potencias menores de x son irrelevantes cuando $x \to \pm\infty$

que $f(x)$ se comporta como $y = \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ porque $f(x) \approx \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m} = \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ para $x \to \pm\infty$. Por tanto:

$$\text{Si } n = m, \qquad f(x) \approx \frac{a_n}{b_m}x^{\overset{0}{\overbrace{n-n}}} \to \frac{a_n}{b_m} \quad \text{cuando} \quad x \to \pm\infty. \tag{13}$$

$$\text{Si } n < m, \qquad f(x) \approx \frac{a_n}{b_m}x^{\overset{\text{negativa}}{\overbrace{n-m}}} = \frac{a_n}{b_m}\frac{1}{x^{m-n}} \to 0 \qquad \text{cuando } x \to \pm\infty. \tag{14}$$

$$\text{Si } n > m, \qquad f(x) \approx \frac{a_n}{b_m}x^{\overset{\text{positiva}}{\overbrace{n-m}}} \to \infty \qquad \text{cuando } x \to \pm\infty. \tag{15}$$

De acuerdo con (13), (14) y (15), sacamos en claro las tres propiedades siguientes de las asíntotas horizontales de la gráfica de $f(x) = P(x)/Q(x)$:

- Si el grado de $P(x)$ = grado de $Q(x)$, entonces $y = a_n/b_m$ (el cociente de los primeros coeficientes) es una asíntota horizontal. (16)
- Si el grado de $P(x) <$ grado de $Q(x)$, entonces $y = 0$ es una asíntota horizontal. (17)
- Si el grado de $P(x) >$ grado de $Q(x)$, entonces la gráfica de f *no* tiene asíntota horizontal. (18)

EJEMPLO 3 Asíntotas horizontales

Determinar si la gráfica de cada una de las funciones racionales tiene una asíntota horizontal

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 1}{8x^2 + x}$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{4x^3 + 7x + 8}{2x^4 + 3x^2 - x + 6}$ ***c)*** $f(x) = \dfrac{5x^3 + x^2 + 1}{2x + 3}$

Solución

a) Como el grado del numerador $3x^2 + 4x - 1$ es igual al grado del denominador $8x^2 + x$ (ambos grados son 2), de acuerdo con (13):

$$f(x) \approx \frac{3}{8}x^{2-2} = \frac{3}{8} \quad \text{cuando} \quad x \to \pm\infty.$$

Como se resume en (16), $y = \frac{3}{8}$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

b) En vista de que el grado del numerador $4x^3 + 7x + 8$ es 3, y que el grado del denominador $2x^4 + 3x^2 - x + 6$ es 4 (y $3 < 4$), de acuerdo con (14),

$$f(x) \approx \frac{4}{2}x^{3-4} = \frac{2}{x} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad x \to \pm\infty.$$

Como se resume en (17), $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

c) Como el grado del numerador $5x^3 + x^2 - 1$ es 3 y el del denominador $2x + 3$ es 1 (y $3 > 1$), de acuerdo con (15):

$$f(x) \approx \frac{5}{2}x^{3-1} = \frac{5}{2}x^2 \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to \pm\infty.$$

Como se indica en (18), la gráfica de f *no* tiene asíntota horizontal. ≡

En los ejemplos de graficado que siguen supondremos que $P(x)$ y $Q(x)$ en (12) no tienen factores comunes.

EJEMPLO 4 Gráfica de una función racional

Graficar la función $f(x) = \dfrac{3 - x}{x + 2}$.

Solución Algo de lo que se debe buscar para trazar la gráfica de f es lo siguiente:

Simetría: No tiene simetría. $P(x) = 3 - x$ y $Q(x) = x + 2$ no son pares ni impares.

Intersecciones: $f(0) = \frac{3}{2}$ y entonces la intersección con el eje y está en $(0, \frac{3}{2})$. Al igualar $P(x) = 0$, o $3 - x = 0$, se ve que 3 es una raíz de P. La única intersección con el eje x está en $(3, 0)$.

Asíntotas verticales: Al igualar $Q(x) = 0$ o $x + 2 = 0$, se obtiene $x = -2$. La recta $x = -2$ es una asíntota vertical.

Ramas: Como sólo hay una sola asíntota vertical, la gráfica de f consiste en dos ramas distintas, una a la izquierda de $x = -2$ y una a la derecha de $x = -2$.

Asíntota horizontal: El grado de P y el grado de Q son iguales (a 1), y entonces la gráfica de f tiene una asíntota horizontal. Al reacomodar a f en la forma $f(x) = \dfrac{-x + 3}{x + 2}$ se ve que la relación de los primeros coeficientes es $-1/1 = -1$.

De acuerdo con (16), la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal.

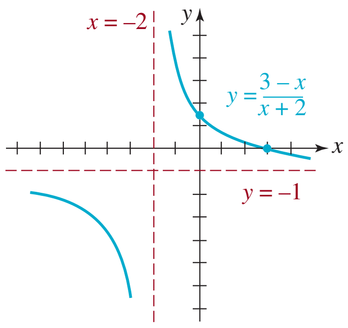


FIGURA 6.6.5 Gráfica de la función del ejemplo 4

Gráfica: Se trazan las asíntotas vertical y horizontal usando líneas interrumpidas. La rama derecha de la gráfica de f se traza pasando por las intersecciones con los ejes $(0, \frac{3}{2})$ y $(3, 0)$, de tal manera que tienda a ambas asíntotas. La rama izquierda se traza *abajo* de la asíntota horizontal $y = -1$. Si la dibujáramos arriba de la asíntota horizontal, debería estar cerca de la asíntota horizontal desde arriba y cerca de la asíntota vertical desde la izquierda. Para hacerlo, la rama de la gráfica debería cruzar el eje x, pero como no hay más intersecciones con el eje x, eso es imposible. Véase la **FIGURA 6.6.5**. ≡

EJEMPLO 5 Ejemplo 4 con transformaciones

A veces pueden ser útiles la división entre polinomios y las transformaciones rígidas para graficar funciones racionales. Nótese que si se hace la división en la función f del ejemplo 4, se ve que

$$f(x) = \frac{3 - x}{x + 2} \qquad \text{es lo mismo que} \qquad f(x) = -1 + \frac{5}{x + 2}.$$

Entonces, comenzando con la gráfica de $y = 1/x$, la estiramos verticalmente en un factor de 5. A continuación, desplazamos la gráfica de $y = 5/x$ dos unidades hacia la izquierda. Por último, desplazamos $y = 5/(x + 2)$ una unidad verticalmente hacia abajo. El lector debe verificar que el resultado neto es la gráfica de la figura 6.6.5. ≡

EJEMPLO 6 Gráfica de una función racional

Graficar la función $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$.

Solución

Simetría: Ya que $P(x) = x$ es impar, y $Q(x) = 1 - x^2$ es par, el cociente $P(x)/Q(x)$ es impar. La gráfica de f es simétrica con respecto al origen.

Intersecciones: $f(0) = 0$, y entonces la intersección con el eje y está en $(0, 0)$. Al igualar $P(x) = x = 0$ se obtiene $x = 0$. Por lo anterior, las únicas intersecciones con los ejes están en $(0, 0)$.

Asíntotas verticales: Al igualar $Q(x) = 0$, o $1 - x^2 = 0$, se obtienen $x = -1$ y $x = 1$. Las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

Ramas: Como hay dos asíntotas verticales, la gráfica de f consiste en tres ramas distintas, una a la izquierda de la recta $x = -1$, una entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$, y una a la derecha de la recta $x = 1$.

Asíntota horizontal: Como el grado del numerador x es 1, y el grado del denominador $1 - x^2$ es 2 (y $1 < 2$), de acuerdo con (14) y (17), $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

La gráfica: Se puede trazar la gráfica de $x \geq 0$ y a continuación aplicar la simetría para obtener la parte restante de la gráfica de $x < 0$. Comenzaremos trazando las asíntotas verticales con líneas interrumpidas. El medio ramal de la gráfica de f en el intervalo $[0, 1)$ se traza comenzando en $(0, 0)$. La función f debe crecer, porque $P(x) = x > 0$, y $Q(x) = 1 - x^2 > 0$ indican que $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$. Eso implica que cerca de la asíntota vertical $x = 1$, $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 1^-$. La rama de la gráfica para $x > 1$ se traza abajo de la asíntota horizontal $y = 0$, porque $P(x) = x > 0$ y $Q(x) = 1 - x^2 < 0$ implica que $f(x) < 0$. Entonces, $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 1^+$ y $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. El resto de la gráfica, para $x < 0$, se obtiene reflejando la gráfica para $x < 0$ en el origen. Véase la **FIGURA 6.6.6**. ≡

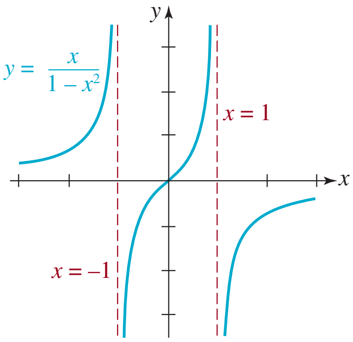


FIGURA 6.6.6 Gráfica de la función del ejemplo 6

EJEMPLO 7 Gráfica de una función racional

Graficar la función $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

Solución La función f se parece a la función del ejemplo 6, porque f es una función impar, $(0, 0)$ es el único cruce de esta gráfica con los ejes, y su gráfica tiene la asíntota horizontal. Sin embargo, obsérvese que como $1 + x^2 > 0$ para todos los números reales, no hay asíntotas verticales, y entonces no hay ramas; la gráfica es una curva continua. Para $x \geq 0$, la gráfica pasa por $(0, 0)$ y entonces debe crecer, porque $f(x) > 0$ para $x > 0$. También, f debe llegar a un máximo local para luego decrecer, a fin de satisfacer la condición $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Como se vio en la sección 6.1, el lugar exacto de este máximo local se puede obtener con las técnicas del cálculo. Por último, se refleja la parte de la gráfica para $x > 0$ respecto al origen. Esa gráfica debe verse algo así como la de la **FIGURA 6.6.7**. ≡

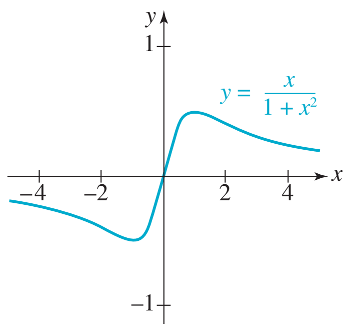


FIGURA 6.6.7 Gráfica de la función del ejemplo 7

Determinación de asíntotas oblicuas

Supongamos de nuevo que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ en (11) no tienen factores comunes. En ese caso, se puede reconocer la existencia de una asíntota oblicua como sigue:

- Si el grado de $P(x)$ es precisamente uno más que el grado de $Q(x)$; esto es, si el grado de $Q(x)$ es m y el grado de $P(x)$ es $n = m + 1$, entonces la gráfica de f tiene una asíntota oblicua o inclinada.

La asíntota oblicua se determina por simple división entre polinomios. Al dividir $P(x)$ entre $Q(x)$ se obtiene un cociente que es un polinomio lineal $mx + b$, y un polinomio residuo $R(x)$:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \overset{\text{cociente}}{\overset{\downarrow}{mx + b}} + \overset{\text{residuo}}{\overset{\downarrow}{\frac{R(x)}{Q(x)}}}. \tag{19}$$

Como el grado de $R(x)$ debe ser menor que el grado del divisor $Q(x)$, entonces $R(x)/Q(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to \infty$, y en consecuencia

$$f(x) \to mx + b \text{ cuando } x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad f(x) \to mx + b \text{ cuando } x \to \infty.$$

En otras palabras, una ecuación de la asíntota oblicua es $y = mx + b$, donde $mx + b$ es el cociente de (19).

Si el denominador $Q(x)$ es un polinomio *lineal*, se puede aplicar entonces la división sintética.

EJEMPLO 8 Gráfica con una asíntota oblicua

Graficar la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 5}$.

Solución

Simetría: No hay simetría. $P(x) = x^2 - x - 6$ y $Q(x) = x - 5$ no son pares ni son impares.

Intersecciones: $f(0) = \frac{6}{5}$, y entonces la intersección con el eje y está en $(0, \frac{6}{5})$. Al igualar $P(x) = 0$, es decir, $x^2 - x - 6 = 0$, o $(x + 2)(x - 3) = 0$ se ve que -2 y 3 son raíces de $P(x)$. Las intersecciones con el eje x están en $(-2, 0)$ y en $(3, 0)$.

Asíntotas verticales: Si se iguala $Q(x) = 0$, o $x - 5 = 0$, el resultado es $x = 5$. La recta $x = 5$ es una asíntota vertical.

Ramas: La gráfica de f consta de dos ramas, una a la izquierda de $x = 5$ y una a la derecha de $x = 5$.

Asíntota horizontal: No hay.

Asíntota oblicua: Como el grado de $P(x) = x^2 - x - 6$ (que es 2) es exactamente una unidad más grande que el grado de $Q(x) = x - 5$ (que es 1), la gráfica de $f(x)$ tiene una asíntota oblicua. Para determinarla se divide $P(x)$ entre $Q(x)$. Debido a que $Q(x)$ es un polinomio lineal, se puede aplicar la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrr}
5 & 1 & -1 & -6 \\
 & & 5 & 20 \\
\hline
 & 1 & 4 & \boxed{14}.
\end{array}$$

Recuerde que esta notación quiere decir que

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 5} = \overset{y\,=\,x\,+\,4 \text{ es la asíntota oblicua}}{\overset{\downarrow}{x + 4}} + \frac{14}{x - 5}.$$

Nótese de nuevo que $14/(x - 5) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Por consiguiente, la recta $y = x + 4$ es una asíntota inclinada.

La gráfica: Con la información anterior se obtiene la gráfica de la **FIGURA 6.6.8**. Las asíntotas son las líneas interrumpidas de la figura. ≡

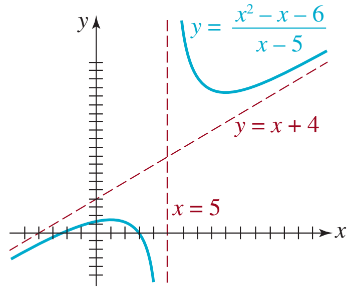


FIGURA 6.6.8 Gráfica de la función del ejemplo 8

EJEMPLO 9 Gráfica con una asíntota oblicua

Por inspección debe verse que la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x^3 - 8x + 12}{x^2 + 1}$ tiene una asíntota oblicua, pero no tiene asíntotas verticales. Como el denominador es un polinomio cuadrático, recurrimos a la división, para obtener

$$\frac{x^3 - 8x + 12}{x^2 + 1} = x + \frac{-9x + 12}{x^2 + 1}.$$

La asíntota oblicua es la recta $y = x$. La gráfica no tiene simetría. La intersección con el eje y está en $(0, 12)$. La carencia de asíntotas verticales indica que la función f es continua; su gráfica consiste en una curva ininterrumpida. Como el numerador es un polinomio de grado impar, al menos tiene una raíz real. Ya que $x^3 - 8x + 12 = 0$ no tiene raíces racionales, se usan técnicas de aproximación, o de graficación, para demostrar que la ecuación sólo tiene una raíz irracional real. Por lo anterior, la intersección con el eje x está aproximadamente en $(-3.4, 0)$. La gráfica de f se ve en la **FIGURA 6.6.9**. Observe que la gráfica de f cruza a la asíntota oblicua. ≡

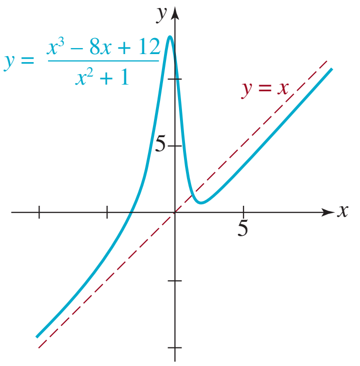


FIGURA 6.6.9 Gráfica de la función del ejemplo 9

Gráfica con un agujero

En la descripción de las asíntotas de funciones racionales supusimos que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ en (1) no tienen factores comunes. Ahora sabemos que si a es un número real tal que $Q(a) = 0$ y $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f. Como Q es un polinomio, entonces, de acuerdo con el teorema del factor, $Q(x) = (x - a)\,q(x)$. La hipótesis de que el numerador P y el denominador Q no tienen factores comunes indica que $x - a$ no es un factor de P, y entonces $P(a) \neq 0$. Cuando $P(a) = 0$ y $Q(a) = 0$, entonces $x = a$ *podría no ser* una asíntota vertical. Por ejemplo, cuando a es una *raíz simple* tanto de P como de Q, entonces $x = a$ *no es* una asíntota vertical de la gráfica de $f(x) = P(x)/Q(x)$. Para verlo, de acuerdo con el teorema del factor, si $P(a) = 0$ y $Q(a) = 0$, entonces $x - a$ es un factor común de P y Q:

$$P(x) = (x - a)p(x) \qquad \text{y} \qquad Q(x) = (x - a)q(x),$$

donde p y q son polinomios tales que $p(a) \neq 0$ y $q(a) \neq 0$. Después de simplificar

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\cancel{(x - a)}p(x)}{\cancel{(x - a)}q(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad x \neq a,$$

se ve que $f(x)$ es indefinida en a, pero los valores de la función $f(x)$ no crecen o decrecen sin límite cuando $x \to a^-$ o cuando $x \to a^+$, porque $q(x)$ no tiende a 0. Por ejemplo, en la sección 5.4 vimos que la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2, \quad x \neq 2,$$

básicamente es una recta. Pero como $f(2)$ no está definida, no hay punto $(2, f(2))$ en la curva. En su lugar, hay un **agujero** en la gráfica en el punto $(2, 4)$. Véase la figura 5.4.5*a*).

EJEMPLO 10 Gráfica con un agujero

Graficar la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$.

Solución Aunque $x^2 - 1 = 0$ para $x = -1$ y $x = 1$, sólo $x = 1$ es una asíntota vertical. Nótese que el numerador $P(x)$ y el denominador $Q(x)$ tienen el factor común $x + 1$, que se anula siempre que $x \neq -1$:

la igualdad es cierta para $x \neq -1$

$$f(x) = \frac{\cancel{(x + 1)}(x - 3)}{\cancel{(x + 1)}(x - 1)} \overset{\downarrow}{=} \frac{x - 3}{x - 1}. \tag{20}$$

Así vemos que, de acuerdo con (20), no hay interrupción infinita en la gráfica en $x = -1$. Se hace la gráfica de $y = \dfrac{x-3}{x-1}$, $x \neq -1$, observando que la intersección con el eje y está en (0, 3), una intersección con el eje x es (3, 0), una asíntota vertical es $x = 1$ y una asíntota horizontal es $y = 1$. La gráfica de esta función tiene dos ramas, pero la rama a la izquierda de la asíntota vertical $x = 1$ tiene un agujero en ella, que corresponde al punto $(-1, 2)$. Véase la **FIGURA 6.6.10**. ≡

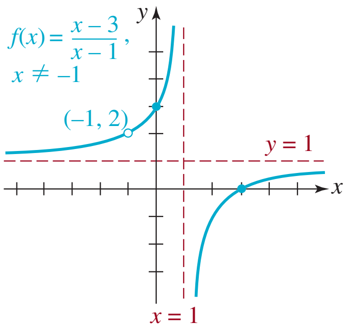


FIGURA 6.6.10 Gráfica de la función del ejemplo 10

Notas para el salón de clases

Cuando se les pregunta si alguna vez han oído la afirmación "*una asíntota es una recta a la que la gráfica se aproxima, pero no corta*", una cantidad sorprendente de alumnos levanta la mano. Primero, debemos aclarar que la afirmación es falsa, una gráfica *puede* cruzar una asíntota horizontal y *también* una asíntota oblicua. Una gráfica nunca *puede* cruzar una asíntota *vertical* $x = a$, porque en forma inherente la función es indefinida en $x = a$. Hasta se pueden determinar los puntos donde una gráfica cruza a una asíntota horizontal o una oblicua. Por ejemplo, la función racional $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$ tiene la asíntota horizontal $y = 1$. La determinación de si la gráfica de f corta la recta horizontal $y = 1$, equivale a preguntar si $y = 1$ está en el contradominio de la función f. Si se iguala $f(x)$ a 1, esto es,

$$\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 1 \qquad \text{implica que} \qquad x^2 + 2x = x^2 - 1 \quad \text{y} \quad x = -\tfrac{1}{2}.$$

Como $x = -\frac{1}{2}$ está en el dominio de f, la gráfica de f interseca la asíntota horizontal en $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2})) = (-\frac{1}{2}, 1)$. Obsérvese, en el ejemplo 9, que se puede determinar el punto en el que la asíntota inclinada cruza a la gráfica de $y = x$, resolviendo $f(x) = x$. El lector debe verificar que el punto de intersección es $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. Véanse los problemas 31 a 36 de los ejercicios 6.6.

6.6 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-17.

En los problemas 1 y 2 use una calculadora para llenar la tabla de la función racional

$$f(x) = \frac{2x}{x-3}.$$

1. $x = 3$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

x	3.1	3.01	3.001	3.0001	3.00001
$f(x)$					
x	2.9	2.99	2.999	2.9999	2.99999
$f(x)$					

2. $y = 2$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

x	10	100	1 000	10 000	100 000
$f(x)$					
x	−10	−100	−1 000	−10 000	−100 000
$f(x)$					

En los problemas 3 a 22 determine las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de la función racional indicada. Determine las intersecciones con los ejes de la gráfica. Trace un bosquejo de la gráfica de f.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

4. $f(x) = \dfrac{4}{x + 3}$

5. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

6. $f(x) = \dfrac{x}{2x - 5}$

7. $f(x) = \dfrac{4x - 9}{2x + 3}$

8. $f(x) = \dfrac{2x + 4}{x - 2}$

9. $f(x) = \dfrac{1 - x}{x + 1}$

10. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$

12. $f(x) = \dfrac{4}{(x + 2)^3}$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

14. $f(x) = \dfrac{8}{x^4}$

15. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

16. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x(x - 2)}$

18. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 8}$

19. $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$

20. $f(x) = \dfrac{16}{x^2 + 4}$

21. $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 8}{(x - 1)^2}$

22. $f(x) = \dfrac{x(x - 5)}{x^2 - 9}$

En los problemas 23 a 30, determine las asíntotas verticales y oblicuas de la gráfica de la función racional indicada. Determine las intersecciones con los ejes de la gráfica. Trace esa gráfica.

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x}$

24. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x}$

25. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$

26. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 2}$

27. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$

28. $f(x) = \dfrac{-(x - 1)^2}{x + 2}$

29. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - x}$

30. $f(x) = \dfrac{5x(x + 1)(x - 4)}{x^2 + 1}$

En los problemas 31 a 34, determine el punto donde la gráfica de *f* cruza su asíntota horizontal. Trace la gráfica de *f*.

31. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + 3}$

32. $f(x) = \dfrac{(x - 3)^2}{x^2 - 5x}$

33. $f(x) = \dfrac{4x(x - 2)}{(x - 3)(x + 4)}$

34. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + x + 1}$

En los problemas 35 y 36 determine el punto donde la gráfica de *f* cruza su asíntota oblicua. Use una función de graficación para obtener la gráfica de *f* y la asíntota oblicua, en el mismo plano coordenado.

35. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + 1}$

36. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 4}{x^2}$

En los problemas 37 a 40, determine una función racional que satisfaga las condiciones indicadas. No hay una respuesta única.

37. asíntota vertical: $x = 2$
asíntota horizontal: $y = 1$
intersección con el eje *x* en (5, 0)

38. asíntota vertical: $x = 1$
asíntota horizontal: $y = -2$
intersección con el eje *y* en (0, –1)

39. asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 2$
asíntota horizontal: $y = 3$
intersección con el eje x en: $(3, 0)$

40. asíntota vertical: $x = 4$
asíntota inclinada: $y = x + 2$

En los problemas 41 a 44, determine las asíntotas y todos los agujeros que haya en la gráfica de la función racional indicada. Determine las intersecciones con los ejes de la gráfica. Trace esa gráfica.

41. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

42. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$

43. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x(x^2 + 4x + 3)}$

44. $f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

Aplicaciones diversas

45. Resistores en paralelo Un resistor de 5 ohms y un resistor variable se conectan en paralelo como se ve en la **FIGURA 6.6.11**. La resistencia R que resulta (en ohms) se relaciona con la resistencia r (en ohms) del resistor variable, mediante la ecuación

$$R = \frac{5r}{5 + r}.$$

Trace la gráfica de R en función de r, para $r > 0$. ¿Cuál es la resistencia R que resulta cuando r se vuelve muy grande?

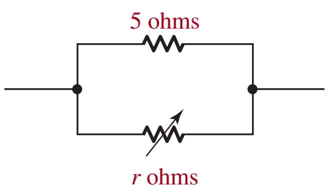


FIGURA 6.6.11 Resistores paralelos del problema 45

46. Potencia La potencia eléctrica P producida por cierta fuente se determina con

$$P = \frac{E^2 r}{R^2 + 2Rr + r^2},$$

en donde E es el voltaje de la fuente, R es la resistencia de la fuente y r es la resistencia en el circuito. Trace la gráfica de P en función de r, empleando los valores $E = 5$ volts y $R = 1$ ohm.

47. Intensidad de iluminación La intensidad de iluminación debida a una fuente luminosa, en cualquier punto, es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente. Si hay dos fuentes con intensidades de 16 unidades y 2 unidades, y están a 100 cm de distancia, como se ve en la **FIGURA 6.6.12**, la intensidad de iluminación I en cualquier punto p entre ellas se calcula con

$$I(x) = \frac{16}{x^2} + \frac{2}{(100 - x)^2},$$

en donde x es la distancia a la fuente de 16 unidades. Trace la gráfica de $I(x)$ para $0 < x < 100$. Describa el comportamiento de $I(x)$ cuando $x \to 0^+$. Descríbalo cuando $x \to 100^-$.

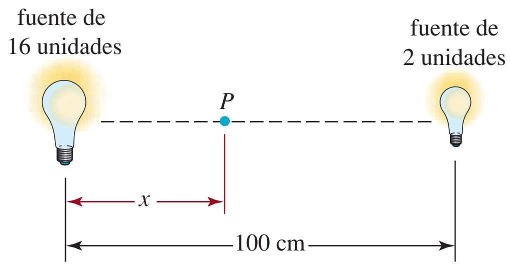


FIGURA 6.6.12 Dos fuentes luminosas del problema 47

Para la discusión

48. Suponga que $f(x) = P(x)/Q(x)$. Demuestre las reglas de simetría (2), (3) y (4) en el caso de funciones racionales.

49. Forme una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ cuya gráfica cruce dos veces su asíntota oblicua. Suponga que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes.

50. Construya una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ cuyas gráficas tengan dos discontinuidades.

Repaso de conceptos Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Función polinomial:
- grado
- término principal
- término constante

Gráficas:
- simetría
- intersecciones
- punto de inflexión
- comportamiento extremo

Cero de una función polinómica:
- simple
- de multiplicidad m

Fracción propia
Fracción impropia
Algoritmo de la división
Teorema del residuo
División sintética
Teorema del factor
Teorema fundamental del álgebra
Factorización lineal completa
Teorema de ceros conjugados
Teorema de las raíces racionales
Función continua
Teorema del valor intermedio

Método de la bisección
Función racional:
- ramas de una gráfica

Asíntotas:
- asíntota vertical
- asíntota horizontal
- asíntota oblicua

Discontinuidad en una gráfica

CAPÍTULO 6 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-18.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 18, responda verdadero o falso:

1. $f(x)$ 0 $2x^3 - 8x^{-2} + 5$ no es un polinomio. _____
2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ es una función racional. _____
3. La gráfica de una función polinómica no puede tener discontinuidades. _____
4. Una función polinómica de cuarto grado tiene exactamente cuatro ceros reales. _____
5. Cuando un polinomio de grado mayor que 1 se divide por $x + 2$, el residuo siempre es una constante. _____
6. Si los coeficientes a, b, c y d de la función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ son enteros positivos, entonces f no tiene ceros reales positivos. _____
7. La ecuación polinómica $2x^7 = 1 - x$ tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$. _____
8. La gráfica de la función racional $f(x) = (x^2 + 1)/x$ tiene una asíntota oblicua. _____
9. La gráfica de la función polinómica $f(x) = 4x^6 + 3x^2$ es simétrica con respecto al eje y. _____
10. La gráfica de una función polinómica que es una punción impar debe pasar por el origen. _____
11. Una asíntota es una recta que se acerca a la gráfica de una función sin nunca cruzarla. _____
12. El punto $(\frac{1}{3}, \frac{7}{4})$ está en la gráfica de $f(x) = \dfrac{2x + 4}{3 - x}$. _____
13. La gráfica de una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ tiene una asíntota oblicua cuando el grado de P es mayor que el grado de Q. _____
14. Si $3 - 4i$ es un cero de una función polinómica $f(x)$ con coeficientes reales, entonces $3 + 4i$ también es un cero de $f(x)$. _____
15. Una función polinómica debe tener cuando menos un cero racional. _____
16. Si $1 + i$ es un cero de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 8$, entonces 4 también es un cero de f. _____
17. La función continua $f(x) = x^6 + 2x^5 - x^2 + 1$ tiene un cero real dentro del intervalo $[-1, 1]$. _____
18. Cuando $f(x) = x^{50} + 1$ se divide por $g(x) = x - 1$, el residuo es $f(1) = 2$. _____

B. Llenar los espacios en blanco

En los problemas 1 a 12, llene los espacios en blanco.

1. El gráfico de la función polinómica $f(x) = x^3(x - 1)^2(x - 5)$ es tangente al eje x en ________ y pasa por el eje x en ________.
2. Una función polinómica de tercer grado con ceros 1 y $3i$ es ________.

3. El comportamiento extremo de la gráfica de $f(x) = x^2(x + 3)(x - 5)$ se parece a la gráfica de la función potencial $f(x)$ = __________.

4. La función polinómica $f(x) = x^4 - 3x^3 + 17x^2 - 2x + 2$ tiene _________ (cuántos) ceros racionales posibles.

5. Para $f(x) = kx^2(x - 2)(x - 3)$, $f(-1) = 8$ si k = _________.

6. La intersección con y de la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{2x + 8}{x^2 - 5x + 4}$ es _________.

7. Las asíntotas verticales de la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{2x + 8}{x^2 - 5x + 4}$ son __________.

8. Las intersecciones con x de la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{4 - 2x^3}$ son _________.

9. La asíntota horizontal de la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{4 - 2x^3}$ es _________.

10. Una función racional cuya gráfica tiene la asíntota horizontal $y = 1$ e intersección con x $(3, 0)$ es __________.

11. La gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x^n}{x^3 + 1}$, donde n es un entero no negativo, tiene la asíntota horizontal $y = 0$ cuando n = __________.

12. La gráfica de la función polinómica $f(x) = 3x^5 - 4x^2 + 5x - 2$ tiene cuando mucho __________ puntos de inflexión.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 y 2, use la división larga para dividir $f(x)$ por $g(x)$.

1. $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 4$, $g(x) = 2x^2 - 1$

2. $f(x) = 15x^4 - 2x^3 + 8x + 6$, $g(x) = 5x^3 + x + 2$

En los problemas 3 y 4, use la división sintética para dividir $f(x)$ por $g(x)$.

3. $f(x) = 7x^4 - 6x^2 + 9x + 3$, $g(x) = x - 2$

4. $f(x) = 4x^3 + 7x^2 - 8x$, $g(x) = x + 1$

5. Sin realizar la división, determine el residuo cuando $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 9$ se divide entre $g(x) = x + 3$.

6. Use la división sintética y el teorema del residuo para obtener $f(c)$ para

$$f(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 1$$

cuando $c = 2$.

7. Determine los valores del entero positivo n de tal modo que $f(x) = x^n + c^n$ sea divisible por $g(x) = x + c$.

8. Suponga que

$$f(x) = 36x^{98} - 40x^{25} + 18x^{14} - 3x^7 + 40x^4 + 5x^2 - x + 2$$

se divide por $g(x) = x - 1$. ¿Qué residuo tiene?

9. Escriba, pero no pruebe, todos los ceros racionales posibles de

$$f(x) = 8x^4 + 19x^3 + 31x^2 + 38x - 15.$$

10. Obtenga la factorización completa de $f(x) = 12x^3 + 16x^2 + 7x + 1$.

En los problemas 11 y 12, verifique que cada uno de los números indicados sea un cero de la función polinómica $f(x)$ dada. Encuentre todos los demás ceros y luego haga la factorización completa de $f(x)$.

11. 2; $f(x) = (x - 3)^3 + 1$

12. 1; $f(x) = (x + 2)^4 - 1$

En los problemas 13 a 16, obtenga el valor real de k que satisface la condición dada.

13. El residuo de la división de $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + kx - 1$ por $g(x) = x - 4$ es $r = 5$.

14. $x + \frac{1}{2}$ es factor de $f(x) = 8x^2 - 4kx + 9$.

15. $x - k$ es factor de $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x - 12$.

16. La gráfica de $f(x) = \dfrac{x - k}{x^2 + 5x + 6}$ tiene una discontinuidad en $x = k$.

En los problemas 17 y 18, encuentre una función polinómica f del grado indicado cuya gráfica está dada en la figura.

17. quinto grado.

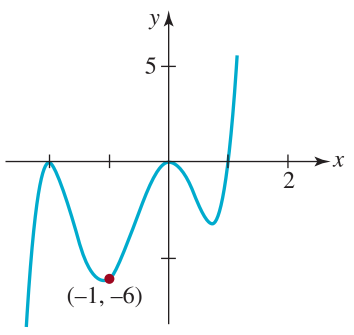


FIGURA 6.R.1 Gráfica del problema 17

18. sexto grado.

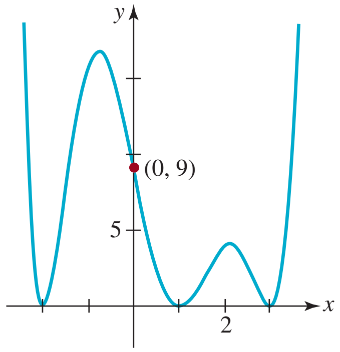


FIGURA 6.R.2 Gráfica del problema 18

En los problemas 19 a 28, relacione la función racional dada con una de las gráficas *a*)-*j*).

a)

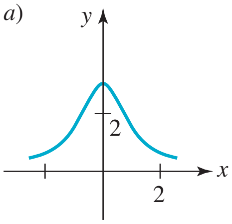


FIGURA 6.R.3

b)

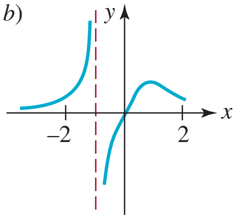


FIGURA 6.R.4

c)

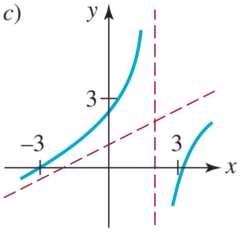


FIGURA 6.R.5

d)

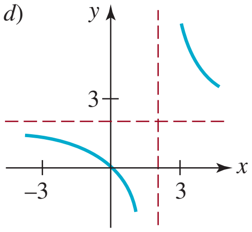


FIGURA 6.R.6

e)

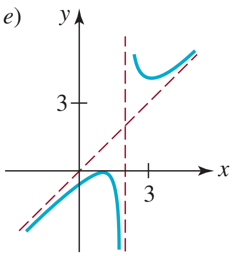


FIGURA 6.R.7

f)

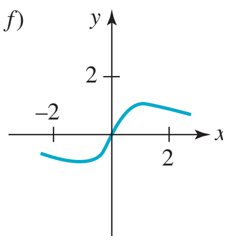


FIGURA 6.R.8

g)

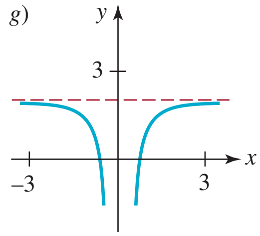


FIGURA 6.R.9

h)

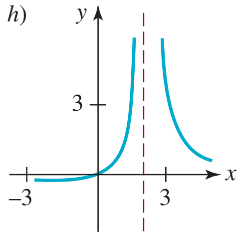


FIGURA 6.R.10

i)

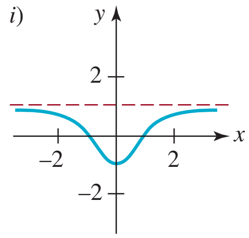


FIGURA 6.R.11

j)

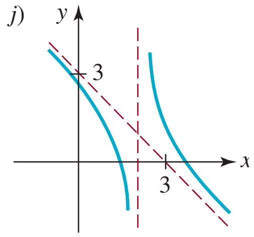


FIGURA 6.R.12

19. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

21. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 2}$

22. $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2}$

23. $f(x) = \dfrac{x}{(x - 2)^2}$

24. $f(x) = \dfrac{(x - 1)^2}{x - 2}$

25. $f(x) = \dfrac{x^2 - 10}{2x - 4}$

26. $f(x) = \dfrac{-x^2 + 5x - 5}{x - 2}$

27. $f(x) = \dfrac{2x}{x^3 + 1}$

28. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

En los problemas 29 y 30, obtenga las asíntotas de la gráfica de la función racional dada. Encuentre las intersecciones con x y y de la gráfica. Dibuje la gráfica de f.

29. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x - 8}$

30. $f(x) = \dfrac{-x^3 + 2x^2 + 9}{x^2}$

31. Explique: sin trazar la gráfica ni tratar de encontrarlos, ¿por qué la función polinomial

$$f(x) = 4x^{10} + 9x^6 + 5x^4 + 13x^2 + 3$$

no tiene ceros reales?

32. Dibuje la gráfica de $f(x) = \dfrac{x-1}{x(x-4)}$. Con la gráfica de f obtenga la solución de la desigualdad

$$\frac{x-1}{x(x-4)} \geq 0.$$

33. ***a***) Demuestre que el número $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es un cero de la función polinomial $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$.

b) Explique: ¿Por qué *a*) prueba que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es un número irracional?

34. Considere la función polinómica $f(x) = x^3 - i$, donde $i = \sqrt{-1}$.

a) Compruebe que cada uno de los tres números $-i$, $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ es un cero de la función f.

b) Tenga en cuenta en el inciso *b*) que cada cero no es el conjugado de ninguno de los otros dos ceros. Explique por qué esto no infringe el teorema de ceros conjugados de la sección 6.3.

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

7

En este capítulo

7.1 Funciones exponenciales
7.2 Funciones logarítmicas
7.3 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas
7.4 Modelos exponenciales y logarítmicos
7.5 Funciones hiperbólicas
Ejercicios de repaso

La curva que describe la forma adoptada por un cable que cuelga de dos postes corresponde a una función hiperbólica

Un poco de historia En este capítulo estudiaremos dos tipos de funciones que aparecen a menudo en aplicaciones: las funciones exponenciales y las logarítmicas.

En la actualidad recordamos a **John Napier** (1550-1617), el acaudalado polemista político y religioso de Inglaterra, principalmente por una de sus digresiones matemáticas: el logaritmo. En la sección 7.2 veremos que, en esencia, los logaritmos son exponentes y que hay dos tipos importantes. La invención del *logaritmo natural* se atribuye a Napier. Su amigo y colaborador, el matemático inglés **Henry Briggs** (1561-1631), ideó los *logaritmos comunes* o de base diez (decimales). El vocablo *logaritmo* se formó de dos palabras griegas: *logos,* que significa razón o relación, y *arithmos,* que significa número. Por consiguiente, logaritmo es la "relación entre números". Durante varios siglos los logaritmos se utilizaron sobre todo como auxiliares para realizar cálculos aritméticos complejos y tediosos. Una calculadora anterior a 1967 era un instrumento analógico llamado "regla de cálculo". Las operaciones realizadas con una regla de cálculo se basaban por completo en las propiedades de los logaritmos. Con la invención de la calculadora electrónica de mano en 1966 y la evolución de la computadora personal, la regla de cálculo y el uso de los logaritmos como método de cálculo con papel y lápiz corrieron la misma suerte de los dinosaurios.

7.1 Funciones exponenciales

Introducción En los capítulos anteriores estudiamos funciones como $f(x) = x^2$; esto es, una función con una base variable x y una potencia o exponente constante 2. Ahora examinaremos funciones como $f(x) = 2^x$; en este caso tiene una base constante 2 y un exponente variable x.

Definición 7.1.1 Función exponencial

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, una **función exponencial** $y = f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = b^x. \tag{1}$$

El número b se llama **base** y x se llama **exponente**.

El **dominio** de una exponencial f definida en (1) es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$.

En (1), la base b se restringe a números positivos, para garantizar que b^x siempre sea un número real. Por ejemplo, con esta restricción se evitan números complejos, como $(-4)^{1/2}$. También, cuando la base $b = 1$, tiene poco interés para nosotros, porque (1) es la función constante $f(x) = 1^x = 1$. Además, para $b > 0$, tenemos $f(0) = b^0 = 1$.

Exponentes Como acabamos de mencionar, el dominio de una función exponencial (1) es el conjunto de todos los números reales. Eso quiere decir que el exponente x puede ser un número racional o irracional. Por ejemplo, si la base es $b = 3$ y el exponente x es un *número racional*, por ejemplo, $x = \frac{1}{5}$ y $x = 1.4$, entonces

$$3^{1/5} = \sqrt[5]{3} \quad \text{y} \quad 3^{1.4} = 3^{14/10} = 3^{7/5} = \sqrt[5]{3^7}.$$

Para un exponente x que sea un *número irracional*, b^x está definida, pero su definición precisa sale del alcance de este libro. Sin embargo, se puede sugerir un procedimiento para definir un número como $3^{\sqrt{2}}$. En la representación decimal de $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$ se ve que los números racionales

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ \ldots,$$

se aproximan sucesivamente cada vez más a $\sqrt{2}$. Si se usan estos números racionales como exponentes, cabe esperar que los números

$$3^1,\ 3^{1.4},\ 3^{1.41},\ 3^{1.414},\ 3^{1.4142},\ 3^{1.41421},\ \ldots,$$

La definición precisa de b^x cuando x es un número irracional requiere el concepto de *límite*. La idea de límite de una función es el fundamento central del cálculo diferencial e integral.

Sean aproximaciones cada vez mejores a $3^{\sqrt{2}}$. En realidad, se puede demostrar que esto es cierto, con una definición precisa de b^x para un valor irracional de x. De manera práctica, se puede usar la tecla $\boxed{y^x}$ de una calculadora científica para obtener la aproximación a $3^{\sqrt{2}} = 4.728804388$.

Leyes de los exponentes En la mayor parte de los textos de álgebra se enuncian primero las leyes de los exponentes enteros y después las de los exponentes racionales. Debido a que se puede definir a b^x para todos los números reales x cuando $b > 0$, se puede demostrar que estas mismas **leyes de los exponentes** rigen a todos los exponentes que son números reales.

Teorema 7.1.1 Leyes de los exponentes

Si $a > 0$, $b > 0$ y x, x_1 y x_2 son números reales, entonces:

i) $b^{x_1} \cdot b^{x_2} = b^{x_1 + x_2}$ *ii*) $\dfrac{b^{x_1}}{b^{x_2}} = b^{x_1 - x_2}$

iii) $\dfrac{1}{b^x} = b^{-x}$ *iv*) $(b^{x_1})^{x_2} = b^{x_1 x_2}$

v) $(ab)^x = a^x b^x$ *vi*) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

EJEMPLO 1 Reformulación de una función

A veces usaremos las leyes de los exponentes para reformular una función, en forma distinta. Por ejemplo, ni $f(x) = 2^{3x}$ ni $g(x) = 4^{-2x}$ tienen la forma precisa de la función exponencial definida en (1). Sin embargo, según las leyes de los exponentes, f puede reformularse como $f(x) = 8^x$ ($b = 8$ en (1)), y g se puede expresar como $g(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ ($b = \frac{1}{16}$ en (1)). Los detalles se ven a continuación:

$$f(x) = 2^{3x} = \overset{\substack{\text{por } iv)\\ \downarrow}}{(2^3)^x} = \overset{\substack{\text{la forma es ahora } b^x\\ \downarrow}}{8^x},$$

$$g(x) = 4^{-2x} = \overset{\substack{\text{por } iv)\\ \downarrow}}{(4^{-2})^x} = \overset{\substack{\text{por } iii)\\ \downarrow}}{\left(\frac{1}{4^2}\right)^x} = \overset{\substack{\text{la forma es ahora } b^x\\ \downarrow}}{\left(\frac{1}{16}\right)^x}.$$

≡

Gráficas Distinguiremos dos tipos de gráficas para (1), que dependerán de si la base b satisface a $b > 1$, o si $0 < b < 1$. Los dos ejemplos que siguen ilustran, una a una, las gráficas de $f(x) = 3^x$ y de $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Antes de trazarlas, podemos hacer algunas observaciones intuitivas acerca de ambas funciones. En razón de que las bases $b = 3$ y $b = \frac{1}{3}$ son positivas, los valores de 3^x y de $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ son positivos para todo número real x. Además, ni 3^x ni $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ pueden ser cero para alguna x, por lo que las gráficas de $f(x) = 3^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ no intersecan el eje x. También, $3^0 = 1$ y $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$, por lo que $f(0) = 1$ en cada caso. Eso quiere decir que las gráficas de $f(x) = 3^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ tienen la misma intersección con el eje y, en $(0, 1)$.

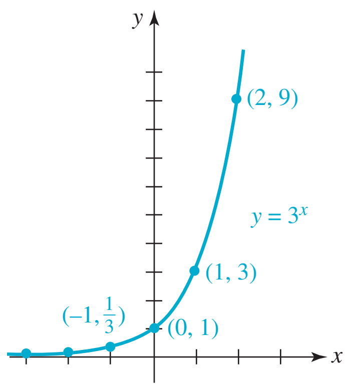


FIGURA 7.1.1 Gráfica de la función del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Gráfica para $b > 1$

Graficar la función $f(x) = 3^x$.

Solución Primero se hace una tabla de algunos valores de la función que correspondan a valores preseleccionados de x. Como se ve en la **FIGURA 7.1.1**, se graficaron los puntos correspondientes que se obtuvieron de la tabla, y se unieron con una curva continua. La gráfica muestra que f es una función creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

≡

EJEMPLO 3 Gráfica de $0 < b < 1$

Graficar la función $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

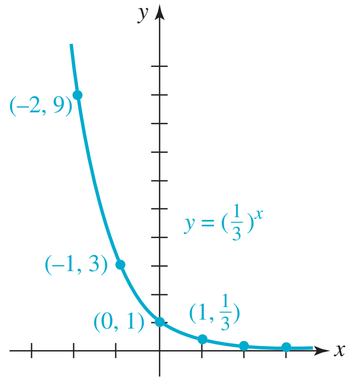


FIGURA 7.1.2 Gráfica de la función del ejemplo 3

Solución Procedemos como en el ejemplo anterior 2, y formamos una tabla de algunos valores de la función que correspondan a valores preseleccionados de x. Por ejemplo, nótese que, según las leyes de los exponentes,

$$f(-2) = (\tfrac{1}{3})^{-2} = (3^{-1})^{-2} = 3^2 = 9.$$

Como se ve en la **FIGURA 7.1.2**, se graficaron los puntos correspondientes que se sacaron de la tabla, y se unieron con una curva continua. En este caso, la gráfica muestra que f es una función decreciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

≡

En el caso de reflexiones en un eje coordenado, véase el teorema 5.2.3 en la sección 5.2

Reflexiones A menudo, las funciones exponenciales con bases que satisfagan $0 < b < 1$, como cuando $b = \frac{1}{3}$, se escriben en una forma alternativa. Se ve que $y = (\frac{1}{3})^x$ es lo mismo que $y = 3^{-x}$. De este último resultado se desprende que la gráfica de $y = 3^{-x}$ sólo es la gráfica de $y = 3^x$ reflejada en el eje y.

Asíntota horizontal La **FIGURA 7.1.3** ilustra las dos formas generales que puede tener la gráfica de una función exponencial $f(x) = b^x$. Sin embargo, hay otro aspecto importante en todas esas gráficas. Obsérvese, en la figura 7.1.3, que para $b > 1$,

$$f(x) = b^x \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty, \qquad \leftarrow \text{gráfica en azul}$$

mientras que para $0 < b < 1$,

$$f(x) = b^x \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty. \qquad \leftarrow \text{gráfica en rojo}$$

En otras palabras, la línea $y = 0$ (el eje x) es una **asíntota horizontal** en ambos tipos de gráficas exponenciales.

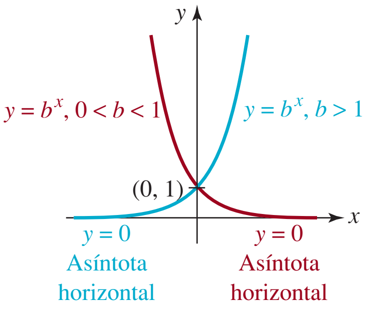


FIGURA 7.1.3 f creciente para $b > 1$; f decreciente para $0 < b < 1$

Propiedades La lista siguiente resume algunas de las propiedades importantes de la función exponencial f con base b. Vuelva a examinar las gráficas de las figuras 7.1.1 a 7.1.3 cuando lea esta lista.

PROPIEDADES DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL

i) El dominio de f es el conjunto de los números reales, esto es, $(-\infty, \infty)$.

ii) El contradominio de f es el conjunto de los números reales positivos, esto es, $(0, \infty)$.

iii) La intersección con el eje y de f está en $(0, 1)$. La gráfica de f no tiene intersección con el eje x.

iv) La función f es creciente para $b > 1$ y es decreciente para $0 < b < 1$.

v) El eje x, esto es, $y = 0$, es una asíntota horizontal en la gráfica de f.

vi) La función f es continua en $(-\infty, \infty)$.

vii) La función f es uno a uno.

Aunque las gráficas de $y = b^x$ en el caso, por ejemplo, cuando $b > 1$, comparten la misma forma, y todas pasan por el mismo punto $(0, 1)$, hay algunas diferencias sutiles. Mientras mayor sea la base b la gráfica sube con más pendiente cuando x aumenta. En la **FIGURA 7.1.4** se comparan las gráficas de $y = 5^x$, $y = 3^x$, $y = 2^x$ y $y = (1.2)^x$, que se trazan en verde, azul, amarillo y rojo, respectivamente, en los mismos ejes coordenados. Vemos en esta gráfica que los valores de $y = (1.2)^x$ aumentan con lentitud cuando x crece. Por ejemplo, para $y = (1.2)^x$, $f(3) = (1.2)^3 = 1.728$, mientras que para $y = 5^x$, $f(3) = 5^3 = 125$.

El hecho que (1) sea función uno a uno es consecuencia de la prueba de la recta horizontal descrita en la sección 5.6. Note que en las figuras 7.1.1 a 7.1.4, una línea horizontal puede cruzar una gráfica exponencial cuando mucho en un punto.

Naturalmente, se pueden obtener otras clases de gráficas, mediante transformaciones rígidas y no rígidas, o cuando se combina una función exponencial con otras funciones, en una operación aritmética o en composición de funciones. En los siguientes ejemplos examinaremos las variaciones de la gráfica exponencial.

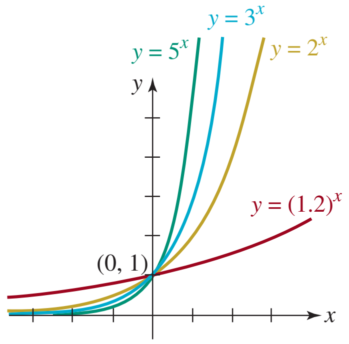


FIGURA 7.1.4 Gráficas de $y = b^x$ para $b = 1.2, 2, 3$ y 5.

EJEMPLO 4 Gráfica desplazada horizontalmente

Graficar la función $f(x) = 3^{x+2}$.

Solución Según la descripción de la sección 5.2, se debe reconocer que la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$ es la gráfica de $y = 3^x$ desplazada 2 unidades hacia la izquierda. Recordemos que como el desplazamiento es una transformación rígida, en este caso a la izquierda, los puntos en la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$ son los puntos de la gráfica de $y = 3^x$ movidos horizontalmente 2 unidades hacia la izquierda. Eso quiere decir que las ordenadas de los puntos (x, y) de la gráfica de $y = 3^x$ permanecen inalterados, pero de todas las abscisas de los puntos se resta 2. Entonces, en la **FIGURA 7.1.5** se observa que los puntos (0, 1) y (2, 9) de la gráfica de $y = 3^x$ se mueven, respectivamente, a los puntos $(-2, 1)$ y (0, 9) de la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$. ≡

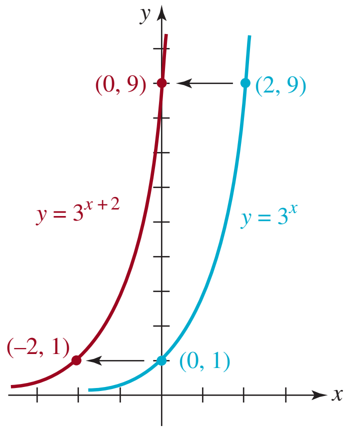


FIGURA 7.1.5 Gráfica desplazada del ejemplo 4

La función $f(x) = 3^{x+2}$ del ejemplo 4 se puede reformular, como $f(x) = 9 \cdot 3^x$. Mediante *i*) de las leyes de los exponentes, $3^{x+2} = 3^2 3^x = 9 \cdot 3^x$. De este modo, podemos reinterpretar la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$ como un estiramiento vertical de la gráfica de $y = 3^x$ por un factor de 9. Por ejemplo, (1, 3) está en la gráfica de $y = 3^x$, en tanto que $(1, 9 \cdot 3) = (1, 27)$ está en la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$.

El número *e* Casi todo estudiante de matemáticas ha oído y probablemente ha trabajado con el famoso número irracional $\pi = 3.141592654\ldots$ Recuerde que un número irracional tiene decimales no repetitivos y que no terminan. En cálculo y en matemáticas aplicadas, el número irracional

$$e = 2.718281828459\ldots$$

puede decirse que tiene un papel más importante que el número π. La definición usual del número e es el número al cual tiende la función $f(x) = (1 + 1/x)^x$ cuando x crece sin límite en dirección positiva, esto es,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e \quad \text{como} \quad x \to \infty.$$

Véanse los problemas 39 y 40, en los ejercicios 5.1.

La función exponencial natural Cuando se escoge que la base en (1) sea $b = e$, la función

$$f(x) = e^x \tag{2}$$

se denomina **función exponencial natural**. Como $b = e > 1$ y $b = 1/e < 1$, las gráficas de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ (o $y = (1/e)^x$) se ven en la **FIGURA 7.1.6**.

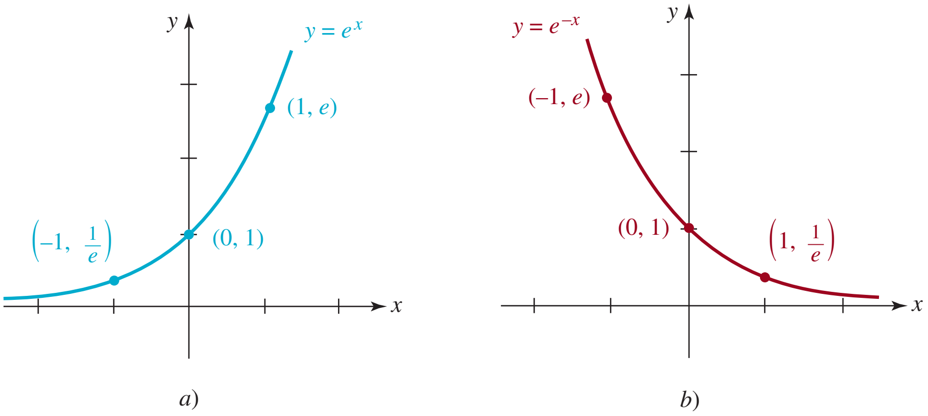


FIGURA 7.1.6 Función exponencial natural (parte *a*), y su recíproca (parte *b*)

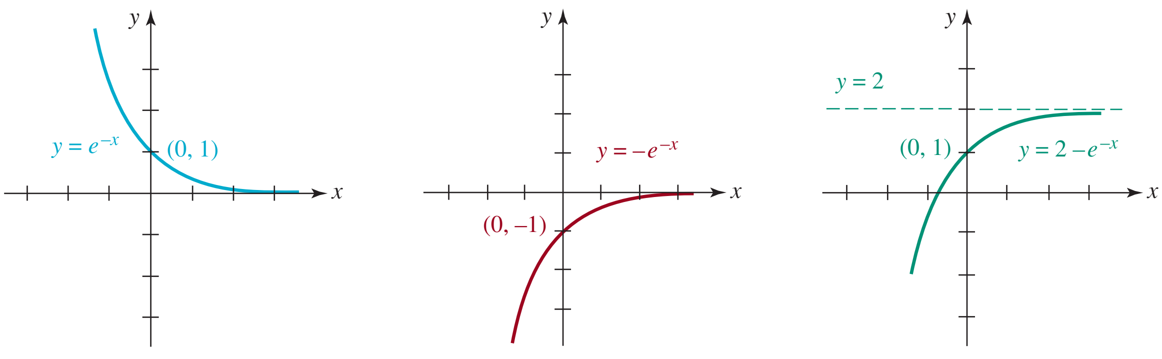
Al verla, la función exponencial (2) no posee alguna característica gráfica notable que la distinga, por ejemplo, de la función $f(x) = 3^x$, y no tiene propiedades especiales además que las de la lista *i*)-*vii*). Como se mencionó, las dudas acerca de las razones por las cuales (2) es una función "natural" y la función exponencial más importante, sólo pueden aclararse totalmente en los cursos de cálculo y posteriores. Exploraremos aquí algo de la importancia del número *e* en las secciones 7.3 y 7.4.

EJEMPLO 5 Gráfica desplazada verticalmente

Graficar la función $f(x) = 2 - e^{-x}$. Indicar el contradominio.

Solución Primero se traza la gráfica de $y = e^{-x}$, como se indica en el inciso *a*) de la **FIGURA 7.1.7**. Luego se refleja la primera gráfica en el eje x para obtener la de $y = -e^{-x}$ en el inciso *b*) de la figura 7.1.7. Por último, la gráfica del inciso *c*) de la figura 7.1.7 se obtiene desplazando la gráfica del inciso *b*) 2 unidades hacia arriba.

La intersección con el eje y $(0, -1)$ de $y = -e^{-x}$ cuando se desplaza 2 unidades hacia arriba nos regresa a la ordenada original al origen del inciso *a*), de la figura 7.1.7. Por último, la asíntota horizontal $y = 0$ en los incisos *a*) y *b*) de la figura se traslada a $y = 2$ en el inciso *c*) de la figura 7.1.7. De acuerdo con esta última gráfica, se puede llegar a la conclusión de que el contradominio de la función $f(x) = 2 - e^{-x}$ es el conjunto de los números reales definido por $y < 2$; esto es, el intervalo $(-\infty, 2)$ en el eje y.



a) Se comienza con la gráfica de $y = e^{-x}$ *b*) Gráfica *a*) reflejada en el eje x *c*) Gráfica *b*) desplazada 2 unidades hacia arriba

FIGURA 7.1.7 Gráfica de la función del ejemplo 5 ≡

En el ejemplo se grafica la composición de la función exponencial natural $y = e^x$ con la función polinomial cuadrática simple $y = -x^2$.

EJEMPLO 6 Composición de funciones

Graficar la función $f(x) = e^{-x^2}$.

Solución Como $f(0) = e^{-0^2} = e^0 = 1$, la intersección con el eje y de las gráficas está en (0, 1). También, $f(x) \neq 0$, porque $e^{-x^2} \neq 0$ para todo número real x. Eso quiere decir que la gráfica de f no tiene intersección con el eje x. Entonces, de

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$$

se desprende que f es una función par, por lo que su gráfica es simétrica con respecto al eje y. Por último, se observa que

$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2}} \to 0 \text{ cuando } x \to \infty.$$

También, por simetría se puede decir que $f(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$. Esto demuestra que $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f. La gráfica de f se muestra en la **FIGURA 7.1.8**. ≡

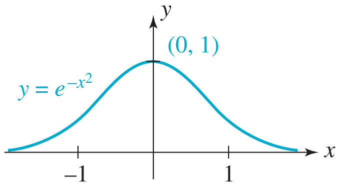


FIGURA 7.1.8 Gráfica de la función del ejemplo 6

Las gráficas con forma de campana, como la de la figura 7.1.8, son muy importantes cuando se estudia probabilidad y estadística.

7.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-18.

En los problemas 1 a 12, trace la gráfica de la función f. Determine la intersección con el eje y y la asíntota horizontal de la gráfica. Indique si la función es creciente o decreciente.

1. $f(x) = (\frac{3}{4})^x$
2. $f(x) = (\frac{4}{3})^x$
3. $f(x) = -2^x$
4. $f(x) = -2^{-x}$
5. $f(x) = 2^{x+1}$
6. $f(x) = 2^{2-x}$
7. $f(x) = -5 + 3^x$
8. $f(x) = 2 + 3^{-x}$
9. $f(x) = 3 - (\frac{1}{5})^x$
10. $f(x) = 9 - e^x$
11. $f(x) = -1 + e^{x-3}$
12. $f(x) = -3 - e^{x+5}$

En los problemas 13 a 16, deduzca una función exponencial $f(x) = b^x$ tal que la gráfica de f pase por el punto dado.

13. $(3, 216)$
14. $(-1, 5)$
15. $(-1, e^2)$
16. $(2, e)$

En los problemas 17 y 18 determine el contradominio de la función.

17. $f(x) = 5 + e^{-x}$
18. $f(x) = 4 - 2^{-x}$

En los problemas 19 y 20, determine las coordenadas de las intersecciones de la gráfica de la función con los ejes x y y. No trace las gráficas.

19. $f(x) = xe^x + 10e^x$
20. $f(x) = x^2 2^x - 2^x$

En los problemas 21 a 24, use una gráfica para resolver la desigualdad.

21. $2^x > 16$
22. $e^x \leq 1$
23. $e^{x-2} < 1$
24. $(\frac{1}{2})^x \geq 8$

En los problemas 25 y 26 use la gráfica de la figura 7.1.8 para trazar la gráfica de la función f.

25. $f(x) = e^{-(x-3)^2}$
26. $f(x) = 3 - e^{-(x+1)^2}$

En los problemas 27 y 28, use $f(-x) = f(x)$ para demostrar que la función es par. Trace la gráfica de f.

27. $f(x) = e^{x^2}$

28. $f(x) = e^{-|x|}$

En los problemas 29 a 32, use las gráficas que obtuvo en los problemas 27 y 28 como ayuda para trazar la gráfica de la función f indicada.

29. $f(x) = 1 - e^{x^2}$

30. $f(x) = 2 + 3e^{|x|}$

31. $f(x) = -e^{|x-3|}$

32. $f(x) = e^{(x+2)^2}$

33. Demuestre que $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es una función par. Trace la gráfica de f.

34. Demuestre que $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ es una función impar. Trace la gráfica de f.

En los problemas 35 y 36, trace la gráfica de la función f definida por partes.

35. $f(x) = \begin{cases} -e^x, & x < 0 \\ -e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ -e^x, & x > 0 \end{cases}$

37. Encuentre la ecuación de la línea roja de la **FIGURA 7.1.9**.

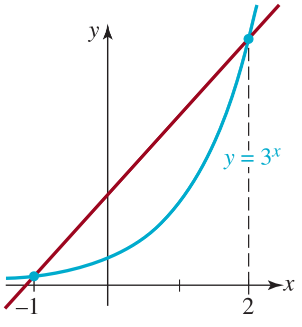


FIGURA 7.1.9 Gráfica para el problema 37

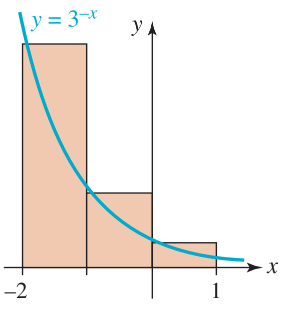


FIGURA 7.1.10 Gráfica para el problema 38

38. Calcule el área total de la región sombreada de la **FIGURA 7.1.10**.

Problemas para calculadora o computadora

Use una calculadora para llenar la tabla respectiva.

39.

x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$(1 + 1/x)^x$						

40. ***a)*** Utilice una graficadora para graficar las funciones $f(x) = (1 + 1/x)^x$ y $g(x) = e$, en el mismo conjunto de ejes coordenados. Use los intervalos $(0, 10]$, $(0, 100]$ y $(0, 1\,000]$. Describa el comportamiento de f para grandes valores de x. Gráficamente, ¿qué es $g(x) = e$?

b) Trace la gráfica de la función f del inciso *a*), en el intervalo $[-10, 0)$. Sobreponga esta gráfica con la gráfica de f en $(0, 10]$ que obtuvo en el inciso *a*). ¿Es f una función continua?

En los problemas 41 y 42 use una graficadora para ayudarse a determinar las abscisas al origen de las gráficas de las funciones f y g.

41. $f(x) = x^2, g(x) = 2^x$

42. $f(x) = x^3, g(x) = 3^x$

Para la discusión

43. Suponga que $2^t = a$, y que $6^t = b$. Conteste lo siguiente, usando las leyes de los exponentes que se presentaron en esta sección.

a) ¿A qué es igual 12^t?

b) ¿A qué es igual 3^t?

c) ¿A qué es igual 6^{-t}?

d) ¿A qué es igual 6^{3t}?

e) ¿A qué es igual $2^{-3t}2^{7t}$?

f) ¿A qué es igual 18^t?

44. Analice: ¿Cómo se verá la gráfica de $y = e^{e^x}$? No use graficadora.

7.2 Funciones logarítmicas

Introducción Debido a que una función exponencial $y = b^x$ es uno a uno, debe tener una función inversa. Para determinar esta inversa se intercambian las variables x y y, y se obtiene $x = b^y$. Esta última fórmula define a y en función de x:

y es el exponente de la base b que da como resultado x.

Al sustituir la palabra *exponente* por la palabra *logaritmo*, se puede reformular este último renglón como sigue:

y es el logaritmo de la base b que da como resultado x.

Este último renglón se abrevia con la notación $y = \log_b x$ y se llama función logarítmica.

Definición 7.2.1 Función logarítmica

La **función logarítmica** con la base $b > 0$, $b \neq 1$, se define por

$$y = \log_b x \quad \text{si y sólo si} \quad x = b^y. \tag{1}$$

Para $b > 0$, no hay número real y para el cual b^y pueda ser 0 o negativo. Por consiguiente, de acuerdo con $x = b^y$, se ve que $x > 0$. En otras palabras, el **dominio** de una función logarítmica $y = \log_b x$ es el conjunto de los números reales positivos $(0, \infty)$.

Para subrayar todo lo que se dijo en las frases anteriores:

La expresión logarítmica $y = \log_b x$ y la expresión exponencial $x = b^y$ son equivalentes,

esto es, quieren decir lo mismo. Como consecuencia, dentro de un contexto específico como en la solución de un problema, se puede usar la forma que sea más cómoda. La tabla siguiente muestra algunos ejemplos de proposiciones equivalentes, exponenciales y logarítmicas.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_3 9 = 2$	$9 = 3^2$
$\log_8 2 = \frac{1}{3}$	$2 = 8^{1/3}$
$\log_{10} 0.001 = -3$	$0.001 = 10^{-3}$
$\log_b 5 = -1$	$5 = b^{-1}$

■ **Gráficas** Vimos en la sección 5.6 que la gráfica de una función inversa puede obtenerse reflejando la gráfica de la función original en la recta $y = x$. Se usó esta técnica para obtener gráficas rojas a partir de gráficas azules en la **FIGURA 7.2.1**. Si el lector revisa las dos gráficas, en la figura 7.2.1*a*) y 7.2.1*b*), recuerde que el dominio $(-\infty, \infty)$ y el contradominio $(0, \infty)$ de $y = b^x$ se transforman, respectivamente, en el contradominio $(-\infty, \infty)$ y el dominio $(0, \infty)$ de $y = \log_b x$. También, observe que la intersección con el eje y $(0, 1)$ de la función exponencial (gráficas azules) se transforma en el corte con el eje x $(1, 0)$ en la función logarítmica (gráficas rojas).

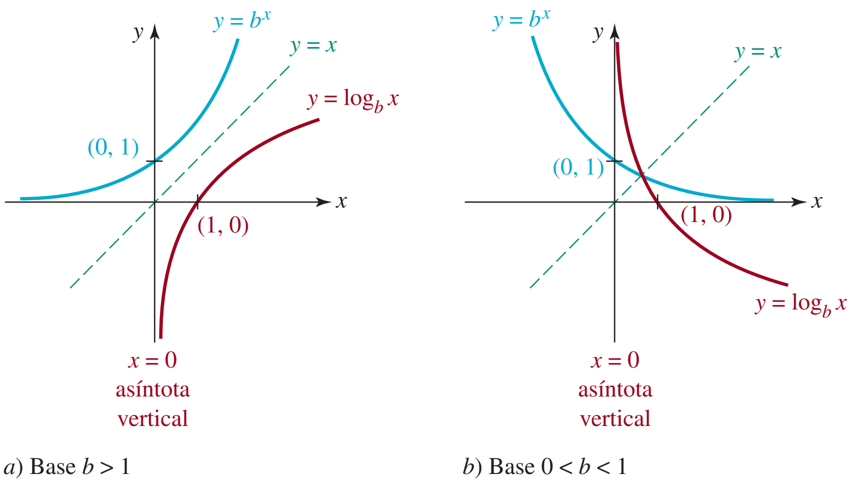


FIGURA 7.2.1 Gráficas de funciones logarítmicas

■ **Asíntota vertical** Cuando la función exponencial se refleja en la recta $y = x$, la asíntota horizontal $y = 0$ de la gráfica de $y = b^x$ se transforma en una asíntota vertical de la gráfica de $y = \log_b x$. En la figura 7.2.1 se ve que para $b > 1$,

$$\log_b x \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^+, \qquad \leftarrow \text{gráfica roja en } a)$$

mientras que para $0 < b < 1$,

$$\log_b x \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^+. \qquad \leftarrow \text{gráfica roja en } b$$

De acuerdo con (7) de la sección 6.6, se llega a la conclusión de que $x = 0$, que es la ecuación del eje y, es una **asíntota vertical** de la gráfica de $y = \log_b x$.

■ **Propiedades** La lista que sigue resume algunas de las propiedades importantes de la función logarítmica $f(x) = \log_b x$.

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

i) El dominio de f es el conjunto de los números reales positivos, esto es, $(0, \infty)$.

ii) El contradominio de f es el conjunto de los números reales, esto es, $(-\infty, \infty)$.

iii) La intersección de f con el eje x está en $(1, 0)$. La gráfica de f no tiene intersección con el eje y.

iv) La función f es creciente para $b > 1$ y decreciente para $0 < b < 1$.

v) El eje y, esto es, $x = 0$, es asíntota vertical de la gráfica de f.

vi) La función f es continua en $(0, \infty)$.

vii) La función f es uno a uno.

Deseamos llamar la atención al tercer punto de la lista anterior:

$$\log_b 1 = 0 \quad \text{ya que} \quad b^0 = 1. \tag{2}$$

También

$$\log_b b = 1 \quad \text{ya que} \quad b^1 = b. \tag{3}$$

Así, además de $(1, 0)$, la gráfica de toda función logarítmica (1) con base b también contiene al punto $(b, 1)$. La equivalencia de $y = \log_b x$ y $x = b^y$ también llega a dos identidades, que a veces son útiles. Al sustituir $y = \log_b x$ en $x = b^y$, y después $x = b^y$ en $y = \log_b x$, se obtiene:

$$x = b^{\log_b x} \quad \text{y} \quad y = \log_b b^y. \tag{4}$$

Por ejemplo, de (4), $8^{\log_8 10} = 10$ y $\log_{10} 10^5 = 5$.

EJEMPLO 1 Gráfica logarítmica para $b > 1$

Graficar $f(x) = \log_{10}(x + 10)$.

Solución Es la gráfica de $y = \log_{10} x$, que tiene la forma que muestra la figura 7.2.1*a*), desplazada 10 unidades hacia la izquierda. Para subrayar el hecho que el dominio de una función logarítmica es el conjunto de los números reales positivos, se puede obtener el dominio de $f(x) = \log_{10}(x + 10)$, con el requisito que se debe cumplir $x + 10 > 0$ o que $x > -10$. En notación de intervalos, el dominio de f es $(-10, \infty)$. En la tabla siguiente se eligieron valores adecuados de x para graficar algunos puntos.

x	-9	0	90
$f(x)$	0	1	2

Nótese que

$$f(-9) = \log_{10} 1 = 0 \quad \leftarrow \text{por } (2)$$
$$f(0) = \log_{10} 10 = 1 \quad \leftarrow \text{por } (3)$$

La asíntota vertical $x = 0$ de la gráfica de $y = \log_{10} x$ se transforma en $x = -10$ de la gráfica desplazada. Esta asíntota es la recta vertical interrumpida en la **FIGURA 7.2.2**. ≡

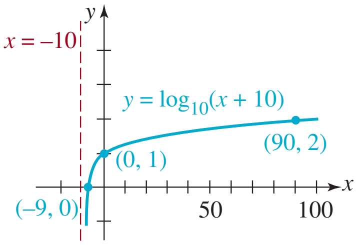


FIGURA 7.2.2 Gráfica de la función del ejemplo 1

■ Logaritmo natural Los logaritmos con base $b = 10$ se llaman **logaritmos base 10** o **logaritmos comunes**, y a los logaritmos con base $b = e$ se les llama **logaritmos naturales**. Además se acostumbra escribir el logaritmo natural

$$\log_e x \quad \text{como} \quad \ln x.$$

Se acostumbra decir que el símbolo "ln x" es "ele ene x". Como $b = e > 1$, la gráfica de $y = \ln x$ tiene la forma característica logarítmica que se ve en la figura 7.2.1*a*). Vea la **FIGURA 7.2.3**. En el caso de la base $b = e$, la ecuación (1) se transforma en

$$y = \ln x \quad \text{si y sólo si} \quad x = e^y. \tag{5}$$

Las ecuaciones análogas a (2) y (3) del logaritmo natural son:

$$\ln 1 = 0 \quad \text{ya que} \quad e^0 = 1. \tag{6}$$
$$\ln e = 1 \quad \text{ya que} \quad e^1 = e. \tag{7}$$

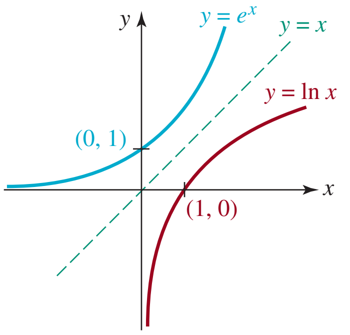


FIGURA 7.2.3 La gráfica del logaritmo natural aparece en rojo

Las identidades (4) se transforman en

$$x = e^{\ln x} \quad \text{y} \quad y = \ln e^y. \tag{8}$$

Por ejemplo, de acuerdo con (8), $e^{\ln 13} = 13$.

Los logaritmos base 10 y naturales se pueden encontrar en todas las calculadoras.

■ Leyes de los logaritmos Se pueden modificar las leyes de los exponentes del teorema 7.1.1 para indicar en forma equivalente las leyes de los logaritmos. Para visualizarlo, supongamos que se escribe $M = b^{x_1}$ y $N = b^{x_2}$. Entonces, de acuerdo con (1), $x_1 = \log_b M$ y $x_2 = \log_b N$.

Producto: Según *i*) del teorema 7.1.1, $MN = b^{x_1 + x_2}$. Expresado como logaritmo, esto es $x_1 + x_2 = \log_b MN$. Se sustituyen x_1 y x_2 para llegar a

$$\log_b M + \log_b N = \log_b MN.$$

Cociente: De acuerdo con *ii*) del teorema 7.1.1, $M/N = b^{x_1 - x_2}$. Expresado como logaritmo, esto es $x_1 - x_2 = \log_b(M/N)$. Se sustituyen x_1 y x_2 para obtener

$$\log_b M - \log_b N = \log_b (M/N).$$

Potencia: Según *iv*) del teorema 7.1.1, $M^c = b^{cx_1}$. Expresado como logaritmo, esto es $cx_1 = \log_b M^c$. Se sustituye x_1 para obtener

$$c \log_b M = \log_b M^c.$$

Para comodidad, y como futura referencia, resumiremos a continuación estas leyes de producto, cociente y potencia de los logaritmos.

Teorema 7.2.1 Leyes de los logaritmos

Para toda base $b > 0$, $b \neq 1$, y para los números positivos M y N,

i) $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

ii) $\log_b \left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$

iii) $\log_b M^c = c\log_b M$, para cualquier número real c.

EJEMPLO 2 Leyes de los logaritmos

Simplificar y escribir como un solo logaritmo

$$\tfrac{1}{2}\ln 36 + 2\ln 4 - \ln 4.$$

Solución Hay varias formas de atacar este problema. Por ejemplo, obsérvese que el segundo y el tercer términos se pueden combinar aritméticamente como sigue:

$$2\ln 4 - \ln 4 = \ln 4. \quad \leftarrow \text{análogo a } 2x - x = x$$

También se puede aplicar la ley *iii*) y después la ley *ii*), para combinar estos términos:

$$\begin{aligned} 2\ln 4 - \ln 4 &= \ln 4^2 - \ln 4 \\ &= \ln 16 - \ln 4 \\ &= \ln \tfrac{16}{4} \\ &= \ln 4. \end{aligned}$$

Por consiguiente
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\ln 36 + 2\ln 4 - \ln 4 &= \ln (36)^{1/2} + \ln 4 && \leftarrow \text{por } iii) \text{ del teorema 7.2.1} \\ &= \ln 6 + \ln 4 \\ &= \ln 24. && \leftarrow \text{por } i) \text{ del teorema 7.2.1} \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 3 Reformulación de expresiones logarítmicas

Usar las leyes de los logaritmos para reformular cada expresión, y evaluarla.

a) $\ln\sqrt{e}$ ***b***) $\ln 5e$ ***c***) $\ln\dfrac{1}{e}$

Solución

a) Como $\sqrt{e} = e^{1/2}$, entonces de acuerdo con *iii*) de las leyes de los logaritmos,

$$\ln\sqrt{e} = \ln e^{1/2} = \tfrac{1}{2}\ln e = \tfrac{1}{2} \quad \leftarrow \text{de acuerdo con (7), } \ln e = 1$$

b) De *i*) de las leyes de los logaritmos, y con una calculadora:

$$\ln 5e = \ln 5 + \ln e = \ln 5 + 1 \approx 2.6094.$$

c) Según *ii*) de las leyes de los logaritmos,

$$\ln\frac{1}{e} = \ln 1 - \ln e = 0 - 1 = -1. \quad \leftarrow \text{de acuerdo con (6) y (7)}$$

Nótese que aquí también se pudo haber usado *iii*) de las leyes de los logaritmos:

$$\ln\frac{1}{e} = \ln e^{-1} = (-1)\ln e = -1. \quad \leftarrow \ln e = 1$$

≡

EJEMPLO 4 Valor de un logaritmo

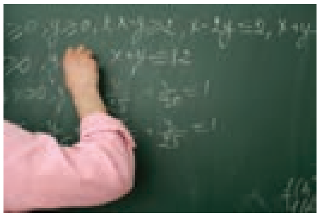
Si $\log_b 2 = 0.4307$ y $\log_b 3 = 0.6826$, encuentre $\log_b \sqrt[3]{18}$.

Solución Para empezar, reescribimos $\sqrt[3]{18}$ como $(18)^{1/3}$. Entonces, por las leyes de los logaritmos,

$$\begin{aligned}
\log_b(18)^{1/3} &= \tfrac{1}{3}\log_b 18 && \leftarrow \text{por } iii) \text{ del teorema 7.2.1}\\
&= \tfrac{1}{3}\log_b(2\cdot 3^2)\\
&= \tfrac{1}{3}[\log_b 2 + \log_b 3^2] && \leftarrow \text{por } i) \text{ del teorema 7.2.1}\\
&= \tfrac{1}{3}[\log_b 2 + 2\log_b 3] && \leftarrow \text{por } iii) \text{ del teorema 7.2.1}\\
&= \tfrac{1}{3}[0.4307 + 2(0.6826)]\\
&= 0.5986.
\end{aligned}$$

≡

Notas del aula



i) Con frecuencia los alumnos batallan con el concepto de *logaritmo*. Puede ser que les ayude repetir algunas docenas de veces “un logaritmo es un exponente”. También puede ayudarse leyendo una declaración como $3 = \log_{10} 1\,000$ en la forma “3 es el exponente al que hay que elevar 10 para...”.

ii) Tenga *mucho* cuidado al aplicar las leyes de los logaritmos. El logaritmo *no* se distribuye sobre la suma,

$$\log_b(M + N) \neq \log_b M + \log_b N.$$

En otras palabras, el exponente de una suma no es la suma de los exponentes.

También, $$\frac{\log_b M}{\log_b N} \neq \log_b M - \log_b N.$$

En general, no hay manera de reformular ya sea

$$\log_b(M + N) \quad \text{o} \quad \frac{\log_b M}{\log_b N}.$$

iii) En cálculo, el primer paso de un procedimiento llamado *diferenciación logarítmica* requiere sacar el logaritmo natural de ambos lados de una función complicada como $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^3+2}}$. La idea es usar las leyes de los logaritmos para transformar potencias a múltiplos constantes, productos en sumas y cocientes en diferencias. Véanse los problemas 61 a 64 de los ejercicios 7.2.

iv) Al avanzar en cursos superiores de matemáticas, ciencias e ingeniería, verá diferentes notaciones de la función exponencial natural, así como del logaritmo natural. Por ejemplo, en algunas calculadoras se puede ver $y = \exp x$ y no $y = e^x$. En el sistema *Mathematica*, de álgebra computacional, la función exponencial natural se escribe $\text{Exp}[x]$ y el logaritmo natural se escribe $\text{Log}[x]$.

7.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-19.

En los problemas 1 a 6 reformule la expresión exponencial en forma de una expresión logarítmica equivalente.

1. $4^{-1/2} = \frac{1}{2}$

2. $9^0 = 1$

3. $10^4 = 10\,000$

4. $10^{0.3010} = 2$

5. $t^{-s} = v$

6. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

En los problemas 7 a 12 reformule la expresión logarítmica en forma de una expresión exponencial equivalente.

7. $\log_2 128 = 7$

8. $\log_5 \frac{1}{25} = -2$

9. $\log_{\sqrt{3}} 81 = 8$

10. $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$

11. $\log_b u = v$

12. $\log_b b^2 = 2$

En los problemas 13 a 18 determine el valor exacto del logaritmo.

13. $\log_{10}(0.0000001)$

14. $\log_4 64$

15. $\log_2(2^2 + 2^2)$

16. $\log_9 \frac{1}{3}$

17. $\ln e^e$

18. $\ln(e^4 e^9)$

En los problemas 19 a 22 determine el valor exacto de la expresión indicada.

19. $10^{\log_{10} 6^2}$

20. $25^{\log_5 8}$

21. $e^{-\ln 7}$

22. $e^{\frac{1}{2}\ln \pi}$

En los problemas 23 y 24 deduzca una función logarítmica $f(x) = \log_b x$ tal que la gráfica de f pase por el punto indicado.

23. $(49, 2)$

24. $(4, \frac{1}{3})$

En los problemas 25 a 32, determine el dominio de la función f. Determine la intersección con el eje x y la asíntota vertical de la gráfica. Trace la gráfica de f.

25. $f(x) = -\log_2 x$

26. $f(x) = -\log_2(x + 1)$

27. $f(x) = \log_2(-x)$

28. $f(x) = \log_2(3 - x)$

29. $f(x) = 3 - \log_2(x + 3)$

30. $f(x) = 1 - 2\log_4(x - 4)$

31. $f(x) = -1 + \ln x$

32. $f(x) = 1 + \ln(x - 2)$

En los problemas 33 y 34, resuelva la desigualdad con una gráfica.

33. $\ln(x + 1) < 0$

34. $\log_{10}(x + 3) > 1$

35. Demuestre que $f(x) = \ln|x|$ es una función par. Trace la gráfica de f. Determine las intersecciones con el eje x y la asíntota vertical de la gráfica.

36. Use la gráfica que obtuvo en el problema 35 para trazar la gráfica de $y = \ln|x - 2|$. Determine la intersección con el eje x y la asíntota vertical de la gráfica.

En los problemas 37 y 38, trace la gráfica de la función f respectiva.

37. $f(x) = |\ln x|$

38. $f(x) = |\ln(x + 1)|$

En los problemas 39 a 42, describa el dominio de la función f.

39. $f(x) = \ln(2x - 3)$

40. $f(x) = \ln(3 - x)$

41. $f(x) = \ln(9 - x^2)$

42. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

En los problemas 43 a 48, use las leyes de los logaritmos para reescribir la expresión dada como logaritmo.

43. $\log_{10} 2 + 2\log_{10} 5$

44. $\frac{1}{2}\log_5 49 - \frac{1}{3}\log_5 8 + 13\log_5 1$

45. $\ln(x^4 - 4) - \ln(x^2 + 2)$

46. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2\ln x^3 - 4\ln y$

47. $\ln 5 + \ln 5^2 + \ln 5^3 - \ln 5^6$

48. $5\ln 2 + 2\ln 3 - 3\ln 4$

En los problemas 49 a 60, para evaluar el logaritmo dado, use $\log_b 4 = 0.6021$ y $\log_b 5 = 0.6990$. Redondee sus respuestas a cuatro decimales.

49. $\log_b 2$

50. $\log_b 20$

51. $\log_b 64$

52. $\log_b 625$

53. $\log_b \sqrt{5}$

54. $\log_b 5/4$

55. $\log_b \sqrt[3]{4}$

56. $\log_b 80$

57. $\log_b 0.8$

58. $\log_b 3.2$

59. $\log_4 b$

60. $\log_5 5b$

En los problemas 61 a 64 aplique las leyes de los logaritmos de modo que ln y no contenga productos, cocientes ni potencias.

61. $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{8x^3 + 2}}$

62. $y = \sqrt{\dfrac{(2x + 1)(3x + 2)}{4x + 3}}$

63. $y = \dfrac{(x^3 - 3)^5(x^4 + 3x^2 + 1)^8}{\sqrt{x}(7x + 5)^9}$

64. $y = 64x^6\sqrt{x + 1}\sqrt[3]{x^2 + 2}$

Para la discusión

65. A veces, en ciencias, es útil mostrar datos usando coordenadas logarítmicas. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones determina la gráfica que muestra la **FIGURA 7.2.4**?
   i) $y = 2x + 1$
   ii) $y = e + x^2$
   iii) $y = ex^2$
   iv) $x^2 y = e$

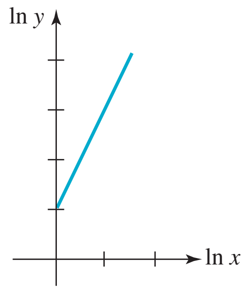


FIGURA 7.2.4 Gráfica del problema 65

66. ***a)*** Use un programa de gráficas para obtener la gráfica de la función $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.
   b) Demuestre que f es una función impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$.

67. Si $a > 0$ y $b > 0$, $a \neq b$, entonces $\log_a x$ es un múltiplo constante de $\log_b x$. Esto es, $\log_a x = k \log_b x$. Determine k.

68. Demuestre que $(\log_{10} e)(\log_e 10) = 1$. ¿Se puede generalizar este resultado?

69. Explique: ¿cómo pueden obtenerse las gráficas de las funciones indicadas a partir de la gráfica de $f(x) = \ln x$ mediante una transformación rígida (un desplazamiento o una reflexión)?
   a) $y = \ln 5x$
   b) $y = \ln \dfrac{x}{4}$
   c) $y = \ln x^{-1}$
   d) $y = \ln(-x)$

70. Encuentre las asíntotas verticales de la gráfica de $f(x) = \ln\left(\dfrac{x - 3}{x}\right)$. Trace la gráfica de f. No use calculadora.

71. Use la notación matemática correcta para reescribir la aseveración:

   c es el exponente de 5 que da el número *n*,

   de dos maneras equivalentes.

72. Obtenga los ceros de la función $f(x) = 5 - \log_2|-x + 4|$. Compruebe sus respuestas.

7.3 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Introducción En vista de que las funciones exponenciales y logarítmicas aparecen dentro del contexto de muchas aplicaciones, a menudo es necesario resolver ecuaciones que se relacionan con estas funciones. Aunque pospondremos las aplicaciones hasta la sección 7.4, en la presente sección examinaremos algunos de los mejores métodos que pueden usarse para resolver una amplia variedad de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Resolución de ecuaciones A continuación se presenta una lista breve de estrategias para resolver ecuaciones.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

i) Reescriba una expresión exponencial como expresión logarítmica.

ii) Reescriba una expresión logarítmica como expresión exponencial.

iii) Use las propiedades uno a uno de b^x y $\log_b x$.

iv) Para las ecuaciones de la forma $a^{x_1} = b^{x_2}$, donde $a \neq b$, obtenga el logaritmo natural de ambos lados de la igualdad y simplifique usando *iii*) de las leyes de los logaritmos presentadas en la sección 7.2.

Por supuesto, esta lista no es exhaustiva ni refleja el hecho de que para resolver ecuaciones que incluyen funciones exponenciales y logarítmicas es muy probable que también debamos emplear procedimientos algebraicos habituales, como *factorización,* y utilizar la *fórmula cuadrática.*

En los primeros dos ejemplos, usamos la equivalencia

$$y = \log_b x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = b^y \tag{1}$$

para alternar entre expresiones logarítmicas y exponenciales.

EJEMPLO 1 Reescribir una expresión exponencial

Resuelva $e^{10k} = 7$ para k.

Solución Usamos (1) con $b = e$, para reescribir la expresión exponencial dada como expresión logarítmica:

$$e^{10k} = 7 \qquad \text{significa que} \qquad 10k = \ln 7.$$

Por tanto, con ayuda de una calculadora,

$$k = \frac{1}{10}\ln 7 \approx 0.1946.$$

≡

EJEMPLO 2 Reescribir una expresión logarítmica

Resuelva $\log_2 x = 5$ para x.

Solución Usamos (1), con $b = 2$, para reescribir la expresión logarítmica en su forma exponencial equivalente:

$$x = 2^5 = 32.$$

≡

Propiedades uno a uno Recuerde que en (1) de la sección 5.6 vimos que una función uno a uno f tiene la propiedad que si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces, necesariamente, $x_1 = x_2$. Hemos visto en las secciones 7.1 y 7.2 que tanto la función exponencial $y = b^x$, $b > 0$, $b \neq 1$, y la función logarítmica $y = \log_b x$ son uno a uno. En consecuencia, tenemos:

$$\text{Si } b^{x_1} = b^{x_2}, \text{ entonces } x_1 = x_2. \tag{2}$$

$$\text{Si } \log_b x_1 = \log_b x_2, \text{ entonces } x_1 = x_2. \tag{3}$$

EJEMPLO 3 Usar la propiedad uno a uno (2)

Resuelva $2^{x-3} = 8^{x+1}$ para x.

Solución Observe en el lado derecho de la igualdad que 8 puede escribirse como una potencia de 2, es decir, $8 = 2^3$. Además, por *iv*) de las leyes de los exponentes presentadas en el teorema 7.1.1,

$$8^{x+1} = (\underbrace{2^3)^{x+1}}_{\text{multiplicar exponentes}} = 2^{3x+3}.$$

Por consiguiente, la ecuación es lo mismo que

$$2^{x-3} = 2^{3x+3}.$$

Se desprende de la propiedad uno a uno de (2) que los exponentes son iguales, es decir, $x - 3 = 3x + 3$. Al despejar x obtenemos $2x = -6$ o $x = -3$. Lo invitamos a sustituir x por -3 en la ecuación original para comprobar esta respuesta. ≡

EJEMPLO 4 Usar la propiedad uno a uno (2)

Resuelva $7^{2(x+1)} = 343$ para x.

Solución Si tomamos en cuenta que $343 = 7^3$, tendremos la misma base en ambos lados de la igualdad:

$$7^{2(x+1)} = 7^3.$$

Por tanto, por (2), podemos igualar los exponentes y despejar x:

$$\begin{aligned} 2(x+1) &= 3 \\ 2x + 2 &= 3 \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 5 Usar la propiedad uno a uno (3)

Resuelva $\ln 2 + \ln(4x - 1) = \ln(2x + 5)$ para x.

Solución Por *i*) de las leyes de los logaritmos del teorema 7.2.1, el lado izquierdo de la ecuación se puede escribir así:

$$\ln 2 + \ln(4x - 1) = \ln 2(4x - 1) = \ln(8x - 2).$$

Así pues, la ecuación original es

$$\ln(8x - 2) = \ln(2x + 5).$$

Puesto que los dos logaritmos de la misma base son iguales, de inmediato se desprende de la propiedad uno a uno de (3) que

$$8x - 2 = 2x + 5 \quad \text{o} \quad 6x = 7 \quad \text{o} \quad x = \frac{6}{7}.$$

≡

En las ecuaciones logarítmicas, en especial las del tipo del ejemplo 5, debe acostumbrarse a sustituir su respuesta en la ecuación original para comprobarla. Es posible que una ecuación logarítmica tenga una **solución extraña**.