72. La gráfica es simétrica respecto al origen.

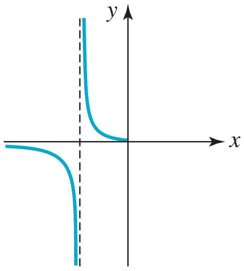
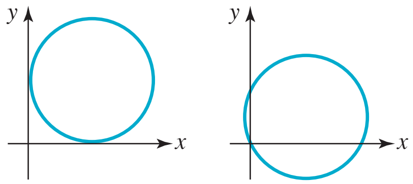


FIGURA 4.2.20 Gráfica para el problema 72

74. ***a***) El radio del círculo en la **FIGURA 4.2.21*a*)** es r. ¿Cuál es su ecuación en la forma normal?

b) El centro del círculo de la **FIGURA 4.2.21*b*)** es (h, k). ¿Cuál es su ecuación en la forma normal?



a) *b*)

FIGURA 4.2.21 Gráficas del problema 74

☰ Para la discusión

73. Diga si la afirmación siguiente es verdadera o falsa. Respalde su respuesta.

> *Si una gráfica tiene dos de las tres simetrías definidas en la página 178, por necesidad poseerá la tercera simetría.*

75. Diga si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

> *Toda ecuación de la forma* $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ *es un círculo.*

4.3 Ecuaciones de rectas

■ **Introducción** Dos puntos distintos cualesquiera en el plano xy determinan una línea recta única. Nuestro objetivo en esta sección es hallar ecuaciones de rectas. El concepto fundamental para plantear estas ecuaciones es la pendiente de una recta.

■ **Pendiente** Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos tales que $x_1 \neq x_2$, entonces el número

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

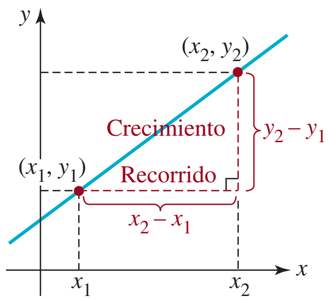
se denomina **pendiente** de la recta determinada por estos dos puntos. Se acostumbra decir que $y_2 - y_1$ es el **cambio en *y*** o **crecimiento** de la recta; $x_2 - x_1$ es el **cambio en *x*** o el **recorrido** de la recta. Por tanto, la pendiente (1) de una recta es [figura 4.3.1*a*)]

$$m = \frac{\text{crecimiento}}{\text{recorrido}}. \tag{2}$$

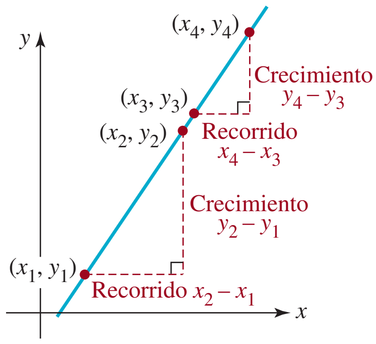
Dos puntos cualesquiera de una recta determinan la misma pendiente. Para entender por qué sucede así, considere los dos triángulos rectángulos semejantes de la figura 4.3.1*b*). Puesto que sabemos que las razones de los lados correspondientes en triángulos semejantes son iguales, tenemos

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}.$$

De ahí que la pendiente de una recta sea independiente de la selección de puntos en la recta.



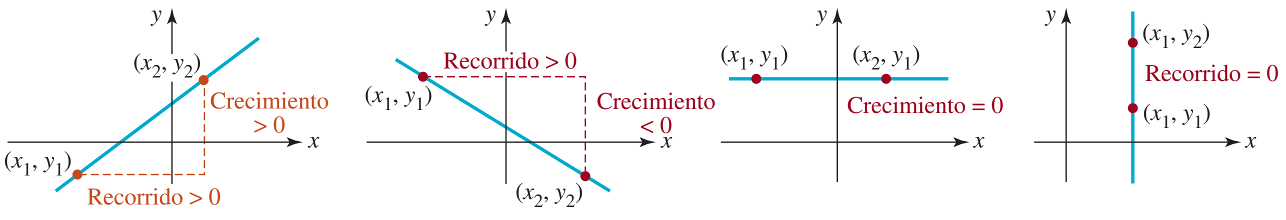
a) Crecimiento y recorrido



b) Triángulos semejantes

FIGURA 4.3.1 Pendiente de una recta

En la **FIGURA 4.3.2** comparamos las gráficas de rectas con pendientes positiva, negativa, cero e indefinida. En la figura 4.3.2*a*) vemos, de izquierda a derecha, que una recta con pendiente positiva ($m > 0$) se eleva conforme x aumenta. En la figura 4.3.2*b*) se muestra que una recta con pendiente negativa ($m < 0$) desciende a medida que x aumenta. Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son puntos sobre una recta horizontal, entonces $y_1 = y_2$ y por tanto su elevación es $y_2 - y_1 = 0$. En consecuencia, por (1) tenemos que la pendiente es cero ($m = 0$) [figura 4.3.2*c*)]. Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son puntos sobre una recta vertical, entonces $x_1 = x_2$ y, por ende, el recorrido es $x_2 - x_1 = 0$. En este caso, decimos que la pendiente de la recta es **indefinida** o que la recta no tiene pendiente [figura 4.3.2*d*)].



a) $m > 0$ *b*) $m < 0$ *c*) $m = 0$ *d*) m indefinida

FIGURA 4.3.2 Rectas con pendiente *a*)-*c*); recta sin pendiente *d*)

En general, puesto que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

no importa cuál de los puntos se llame $P_1(x_1, y_1)$ y cuál se llame $P_2(x_2, y_2)$ en (1).

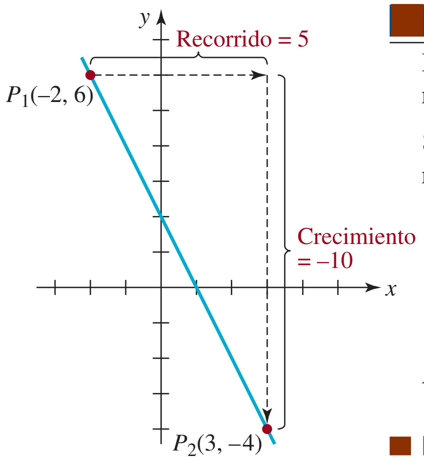


FIGURA 4.3.3 Recta para el ejemplo 1

EJEMPLO 1 Gráfica y pendiente

Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, 6)$ y $(3, -4)$. Trace la recta.

Solución Sea $(-2, 6)$ el punto $P_1(x_1, y_1)$ y $(3, 4)$ el punto $P_2(x_2, y_2)$. La pendiente de la recta que pasa por estos puntos es

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 6}{3 - (-2)} \\ &= \frac{-10}{5} = -2. \end{aligned}$$

Así, la pendiente es -2 y la recta que pasa por P_1 y P_2 se muestra en la **FIGURA 4.3.3**. ≡

■ Ecuación punto-pendiente

Ahora estamos en condiciones de plantear la ecuación de una recta L. Para empezar, suponga que L tiene pendiente m y que $P_1(x_1, y_1)$ está en la recta. Si $P(x, y)$ representa cualquier otro punto en L, entonces (1) da

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Al multiplicar ambos miembros de esta igualdad por $x - x_1$ se obtiene una ecuación importante.

Teorema 4.3.1 Ecuación punto-pendiente

La **ecuación punto-pendiente** de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{3}$$

EJEMPLO 2 Ecuación punto-pendiente

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(-\frac{1}{2}, 2)$, con pendiente 6.

Solución Sea $m = 6$, $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $y_1 = 2$; a partir de (3) obtenemos

$$y - 2 = 6\left[x - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right].$$

Simplificamos y obtenemos

$$y - 2 = 6\left(x + \tfrac{1}{2}\right) \qquad \text{o} \qquad y = 6x + 5.$$

≡

EJEMPLO 3 Ecuación punto-pendiente

Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4, 3) y (−2, 5).

Solución Primero calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos. Según (1),

$$m = \frac{5-3}{-2-4} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}.$$

La ecuación punto-pendiente (3) da entonces

la ley distributiva

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 4) \qquad \text{o} \qquad y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}.$$

≡

La ley distributiva

$$a(b + c) = ab + ac$$

es la causa de muchos errores en los exámenes de los estudiantes. Un error común es el siguiente:

$$-(2x - 3) = -2x - 3$$

El resultado correcto es:

$$\begin{aligned} -(2x - 3) &= (-1)(2x - 3) \\ &= (-1)\,2x - (-1)3 \\ &= -2x + 3 \end{aligned}$$

■ **Ecuación pendiente-intersección** Toda recta con pendiente (es decir, cualquier recta que no sea vertical) debe cruzar necesariamente el eje y. Si esta intersección con el eje y es $(0, b)$, con $x_1 = 0$, $y_1 = b$, la forma punto-pendiente (3) da $y - b = m(x - 0)$. Esta última ecuación se simplifica al resultado presentado a continuación.

Teorema 4.3.2 Ecuación pendiente-intersección

La **ecuación pendiente-intersección** de la recta con pendiente m e intersección con el eje y $(0, b)$ es

$$y = mx + b \tag{4}$$

Cuando $b = 0$ en (4), la ecuación $y = mx$ representa una familia de rectas que pasan por el origen (0, 0). En la **FIGURA 4.3.4** hemos trazado algunos de los miembros de esa familia.

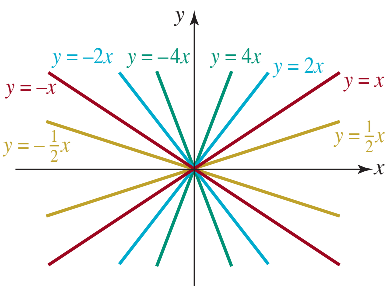


FIGURA 4.3.4 Las rectas que pasan por el origen son $y = mx$

EJEMPLO 4 Regreso al ejemplo 3

También podemos usar la forma pendiente-intersección (4) para obtener una ecuación de la recta que pasa por los dos puntos del ejemplo 3. Igual que en ese ejemplo, para empezar calculamos la pendiente $m = -\frac{1}{3}$. La ecuación de la recta es $y = -\frac{1}{3}x + b$. La sustitución de las coordenadas de cualquiera de los dos puntos (4, 3) o (−2, 5) en la última ecuación nos permite determinar b. Si usamos $x = 4$ y $y = 3$, entonces $3 = -\frac{1}{3} \cdot 4 + b$ y, en consecuencia, $b = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$. La ecuación de la recta es $y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$. ≡

■ **Rectas horizontales y verticales** En la figura 4.3.2*c*) vimos que una recta horizontal tiene pendiente $m = 0$. La ecuación de una recta horizontal que pasa por un punto (a, b) puede obtenerse a partir de (3), es decir, $y - b = 0(x - a)$ o $y = b$.

Teorema 4.3.3 Ecuación de una recta horizontal

La **ecuación de una recta horizontal** con intersección con el eje y en $(0, b)$ es

$$y = b \tag{5}$$

Una recta vertical que pasa por (a, b) tiene pendiente indefinida y todos los puntos que la forman tienen la misma coordenada x. La **ecuación de una recta vertical** es como se expone a continuación.

Teorema 4.3.4 Ecuación de una recta vertical

La **ecuación de una recta vertical** con intersección con el eje x en $(a, 0)$ es

$$x = a \tag{6}$$

EJEMPLO 5 Rectas verticales y horizontales

Halle las ecuaciones de las rectas vertical y horizontal que pasan por $(3, -1)$. Grafique esas rectas.

Solución Todo punto en la recta vertical que cruza $(3, -1)$ tiene 3 como coordenada x. La ecuación de esta recta es $x = 3$. Del mismo modo, todo punto en la recta horizontal que pasa por $(3, -1)$ tiene -1 como coordenada y. La ecuación de esta recta es $y = -1$. La gráfica de estas dos rectas se presenta en la **FIGURA 4.3.5**. ≡

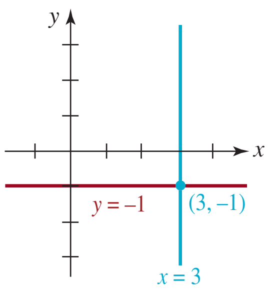


FIGURA 4.3.5 Rectas horizontal y vertical del ejemplo 5

Ecuación lineal

Las ecuaciones (3), (4), (5) y (6) son casos especiales de la **ecuación lineal general** en dos variables x y y

$$ax + by + c = 0 \tag{7}$$

donde a y b son constantes reales y las dos no son cero al mismo tiempo. La característica por la que (7) se llama *lineal* es que las variables x y y aparecen sólo a la primera potencia. Observe que

$$a = 0, b \neq 0, \text{ da } \; y = -\frac{c}{b}, \quad \leftarrow \text{recta horizontal}$$

$$a \neq 0, b = 0, \text{ da } \; x = -\frac{c}{a}, \quad \leftarrow \text{recta vertical}$$

$$a \neq 0, b \neq 0, \text{ da } \; y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}. \quad \leftarrow \text{recta con pendiente diferente de cero}$$

EJEMPLO 6 Pendiente e intersección con el eje *y*

Calcule la pendiente y la intersección con el eje y de la recta $3x - 7y + 5 = 0$.

Solución Despejamos y de la ecuación:

$$\begin{aligned} 3x - 7y + 5 &= 0 \\ 7y &= 3x + 5 \\ y &= \frac{3}{7}x + \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

Comparando la última ecuación con (4) vemos que la pendiente de la recta es $m = \frac{3}{7}$ y la intersección con y es $(0, \frac{5}{7})$. ≡

Si las intersecciones con los ejes x y en y son distintas, podemos graficar la recta mediante los puntos correspondientes en dichos ejes.

EJEMPLO 7 Gráfica de una ecuación lineal

Grafique la ecuación lineal $3x - 2y + 8 = 0$.

Solución No hay necesidad de reescribir la ecuación lineal en la forma $y = mx + b$; simplemente buscamos las intersecciones con los ejes:

Intersección con el eje y: se establece $x = 0$ para obtener $-2y + 8 = 0$, o $y = 4$. La intersección con el eje y es $(0, 4)$.

Intersección con el eje x: se establece $y = 0$ para obtener $3x + 8 = 0$, o $x = -\frac{8}{3}$. La intersección con el eje x es $(-\frac{8}{3}, 0)$.

Como se muestra en la **FIGURA 4.3.6**, la recta se traza a través de las dos intersecciones $(0, 4)$ y $(-\frac{8}{3}, 0)$. ≡

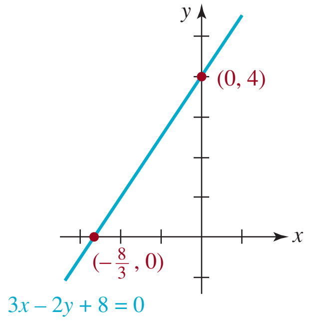


FIGURA 4.3.6 Recta del ejemplo 7

rectas paralelas

■ **Rectas paralelas y perpendiculares** Suponga que L_1 y L_2 son dos rectas y ambas tienen pendiente. Este supuesto implica que ni L_1 ni L_2 son rectas verticales. Entonces, por necesidad, L_1 y L_2 son paralelas o se intersecan. Si se intersecan en ángulo recto, se dice que son perpendiculares. Para determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares se examinan sus pendientes.

> **Teorema 4.3.5** **Rectas paralelas y perpendiculares**
>
> Si L_1 y L_2 son rectas con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, entonces
>
> *i*) L_1 es **paralela** a L_2 si y sólo si $m_1 = m_2$.
>
> *ii*) L_1 es **perpendicular** a L_2 si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.

Hay varias formas de comprobar los dos incisos del teorema 4.3.5. La comprobación del inciso *i*) se obtiene usando triángulos rectángulos semejantes, como en la **FIGURA 4.3.7**, y el hecho de que las razones de los lados correspondientes de dichos triángulos son iguales. Dejamos la demostración del inciso *ii*) como ejercicio para el lector (véanse los problemas 49 y 50 de los ejercicios 4.3). Tenga en cuenta que la condición $m_1 m_2 = -1$ implica que $m_2 = -1/m_1$, es decir, las pendientes son recíprocos negativos. Una recta horizontal $y = b$ y una recta vertical $x = a$ son perpendiculares, pero la segunda es una recta sin pendiente.

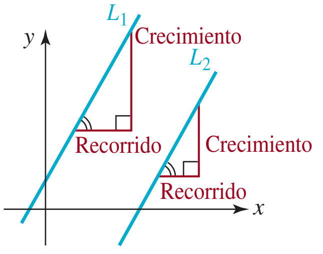


FIGURA 4.3.7 Rectas paralelas

EJEMPLO 8 Rectas paralelas

Las ecuaciones lineales $3x + y = 2$ y $6x + 2y = 15$ pueden reescribirse en las formas pendiente-intersección

$$y = -3x + 2 \quad \text{y} \quad y = -3x + \frac{15}{2},$$

respectivamente. Como se destaca en color en la recta anterior, la pendiente de cada recta es -3. Por tanto, las rectas son paralelas. Las gráficas de estas ecuaciones se presentan en la **FIGURA 4.3.8**. ≡

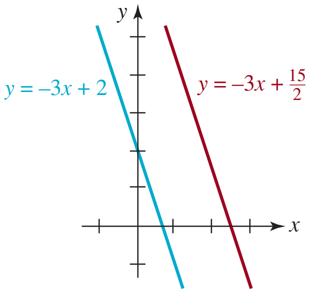


FIGURA 4.3.8 Rectas paralelas del ejemplo 8

EJEMPLO 9 Rectas perpendiculares

Obtenga la ecuación de la recta que pasa por $(0, -3)$ y es perpendicular a la gráfica de $4x - 3y + 6 = 0$.

Solución Expresamos la ecuación lineal dada en forma pendiente-intersección:

$$4x - 3y + 6 = 0 \quad \text{implica que} \quad 3y = 4x + 6$$

Dividimos entre 3 para obtener $y = \frac{4}{3}x + 2$. Esta recta, cuya gráfica aparece en azul en la **FIGURA 4.3.9**, tiene pendiente $\frac{4}{3}$. La pendiente de cualquier recta perpendicular a la primera es el recíproco negativo de $\frac{4}{3}$, es decir, $-\frac{4}{3}$. Como $(0, -3)$ es la intersección con el eje y de la recta requerida, a partir de (4) se desprende que su ecuación es $y = -\frac{4}{3}x - 3$. La gráfica de esta última ecuación es la recta roja de la figura 4.3.9. ≡

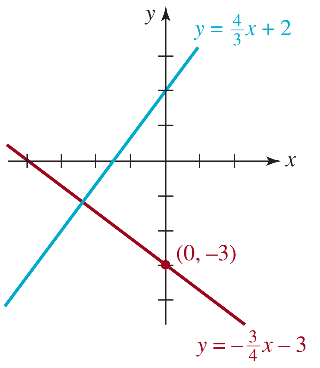


FIGURA 4.3.9 Rectas perpendiculares del ejemplo 9

4.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-10.

En los problemas 1 a 6, halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados. Grafique la recta a través de los puntos.

1. $(3, -7), (1, 0)$

2. $(-4, -1), (1, -1)$

3. $(5, 2), (4, -3)$

4. $(1, 4), (6, -2)$

5. $(-1, 2), (3, -2)$

6. $(8, -\frac{1}{2}), (2, \frac{5}{2})$

En los problemas 7 y 8, use la gráfica de la recta para estimar la pendiente.

7.

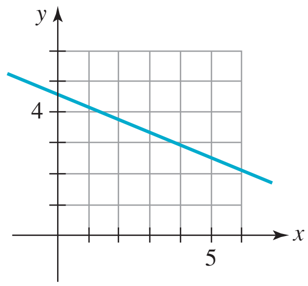


FIGURA 4.3.10 Gráfica para el problema 7

8.

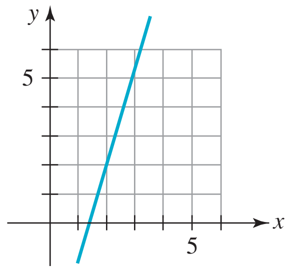


FIGURA 4.3.11 Gráfica para el problema 8

En los problemas 9 a 16, calcule la pendiente y las intersecciones con los ejes x y y de la recta. Grafique ésta.

9. $3x - 4y + 12 = 0$

10. $\frac{1}{2}x - 3y = 3$

11. $2x - 3y = 9$

12. $-4x - 2y + 6 = 0$

13. $2x + 5y - 8 = 0$

14. $\frac{x}{10}$

15. $y + \frac{2}{3}x = 1$

16. $y = 2x + 6$

En los problemas 17 a 22, halle la ecuación de la recta que pasa por $(1, 2)$ con la pendiente indicada.

17. $\frac{2}{3}$

18. $\frac{1}{10}$

19. 0

20. -2

21. -1

22. indefinida

En los problemas 23 a 36, encuentre una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

23. Pasa por $(2, 3)$ y $(6, -5)$.

24. Pasa por $(5, -6)$ y $(4, 0)$.

25. Pasa por $(8, 1)$ y $(-3, 1)$.

26. Pasa por $(2, 2)$ y $(-2, -2)$.

27. Pasa por $(-2, 0)$ y $(-2, 6)$.

28. Pasa por $(0, 0)$ y (a, b).

29. Pasa por $(-2, 4)$ y es paralela a $3x + y - 5 = 0$.

30. Pasa por $(1, -3)$ y es paralela a $2x - 5y + 4 = 0$.

31. Pasa por $(5, -7)$ y es paralela al eje y.

32. Pasa por el origen y es paralela a la recta que pasa por $(1, 0)$ y $(-2, 6)$.

33. Pasa por $(2, 3)$ y es perpendicular a $x - 4y + 1 = 0$.

34. Pasa por $(0, -2)$ y es perpendicular a $3x + 4y + 5 = 0$.

35. Pasa por $(-5, -4)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(3, 11)$.

36. Pasa por el origen y es perpendicular a todas las rectas con pendiente 2.

En los problemas 37 a 40, determine cuál de las rectas dadas son paralelas y cuáles son perpendiculares.

37. ***a)*** $3x - 5y + 9 = 0$
b) $5x = -3y$
c) $-3x + 5y = 2$
d) $3x + 5y + 4 = 0$
e) $-5x - 3y + 8 = 0$
f) $5x - 3y - 2 = 0$

38. ***a)*** $2x + 4y + 3 = 0$
b) $2x - y = 2$
c) $x + 9 = 0$
d) $x = 4$

e) $y - 6 = 0$
f) $-x - 2y + 6 = 0$

39. *a)* $3x - y - 1 = 0$
b) $x - 3y + 9 = 0$
c) $3x + y = 0$
d) $x + 3y = 1$
e) $6x - 3y + 10 = 0$
f) $x + 2y = -8$

40. *a)* $y + 5 = 0$
b) $x = 7$
c) $4x + 6y = 3$
d) $12x - 9y + 7 = 0$
e) $2x - 3y - 2 = 0$
f) $3x + 4y - 11 = 0$

41. Halle una ecuación de la recta L que se ilustra en la **FIGURA 4.3.12**, si una ecuación de la curva azul es $y = x^2 + 1$.

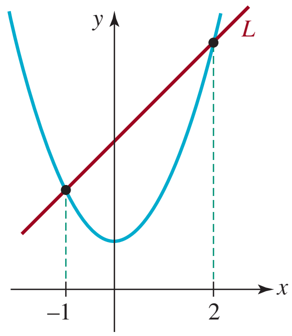


FIGURA 4.3.12 Gráficas para el problema 41

42. La **tangente de un círculo** se define como la línea recta que toca el círculo en un solo punto P. Halle la ecuación de la tangente L que se muestra en la **FIGURA 4.3.13**.

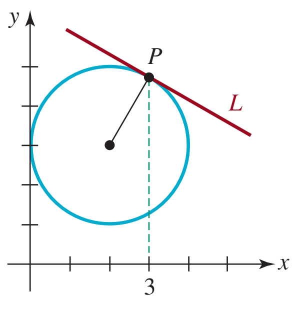


FIGURA 4.3.13 Círculo y tangente para el problema 42

Para la discusión

43. ¿Cómo hallaría una ecuación de la recta que es la bisectriz perpendicular del segmento de recta que pasa por $(\frac{1}{2}, 10)$ y $(\frac{3}{2}, 4)$?

44. Usando sólo los conceptos de esta sección, ¿cómo demostraría o refutaría que un triángulo con vértices $(2, 3)$, $(-1, -3)$ y $(4, 2)$ es rectángulo?

45. Usando sólo los conceptos de esta sección, ¿cómo demostraría o refutaría que el cuadrilátero con vértices $(0, 4)$, $(-1, 3)$, $(-2, 8)$ y $(-3, 7)$ es un paralelogramo?

46. Si C es una constante real arbitraria, se dice que una ecuación como $2x - 3y = C$ define una **familia de rectas**. Seleccione cuatro valores de C y trace las rectas correspondientes en los mismos ejes de coordenadas. ¿Qué es verdadero sobre las rectas que forman parte de esta familia?

47. Halle las ecuaciones de las rectas que pasan por $(0, 4)$ que son tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 4$.

48. En la recta $ax + by + c = 0$, ¿qué se puede decir sobre a, b y c si
a) la recta pasa por el origen?
b) la pendiente de la recta es 0?
c) la pendiente de la recta es indefinida?

En los problemas 49 y 50, para demostrar el inciso *ii*) del teorema 4.3.5 hay que probar dos cosas: la parte correspondiente a *sólo si* (problema 49) y después, la parte correspondiente a *si* (problema 50) del teorema.

49. En la **FIGURA 4.3.14**, sin pérdida de generalidad, hemos supuesto que dos rectas perpendiculares, $y = m_1x$, $m_1 > 0$, y $y = m_2x$, $m_2 < 0$, se intersecan en el origen. Use la información de la figura para demostrar la parte *sólo si*:

Si L_1 y L_2 son rectas perpendiculares con pendientes m_1 y m_2, entonces $m_1m_2 = -1$.

50. Invierta el argumento del problema 49 para demostrar la parte *si*:

Si L_1 y L_2 son rectas con pendientes m_1 y m_2, de modo que $m_1m_2 = -1$, entonces L_1 y L_2 son perpendiculares.

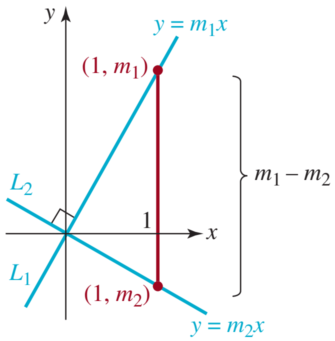


FIGURA 4.3.14 Rectas que pasan por el origen para los problemas 49 y 50

4.4 Variación

Introducción En muchas disciplinas, una descripción matemática por medio de una ecuación, es decir, un **modelo matemático** de un problema real puede elaborarse con el concepto de proporcionalidad. Por ejemplo, en un modelo de una población creciente (por citar un caso, bacterias), se supone que la tasa de crecimiento en el tiempo t es directamente proporcional a la población en ese tiempo. Si R representa la tasa de crecimiento y P la población, la oración anterior se traduce en

$$R \propto P \tag{1}$$

donde el símbolo $\propto$ se lee "es proporcional a". La proposición matemática en (1) es un ejemplo de una **variación.** En esta sección examinamos cuatro tipos de variación: *directa, inversa, conjunta* y *combinada,* cada uno de los cuales produce una ecuación en dos o más variables.

Variación directa Comenzamos con la definición formal de variación directa.

Definición 4.4.1 Variación directa

Una cantidad y **varía directamente,** o es **directamente proporcional a** una cantidad x si existe un número k diferente de cero tal que

$$y = kx \tag{2}$$

En (2) decimos que el número k es la **constante de proporcionalidad**. Al comparar de (2) con la figura 4.3.4 sabemos que la gráfica de cualquier ecuación de la forma dada en (2) es una recta que pasa por el origen y tiene pendiente k. En la **FIGURA 4.4.1** se ilustra la gráfica de (2) cuando $k > 0$ y $x \geq 0$.

Por supuesto, con frecuencia en (2) se usan otros símbolos diferentes de x y y. En el estudio de resortes en física se supone que la fuerza F requerida para mantener un resorte estirado x unidades más allá de su longitud natural, o sin estirar, es directamente proporcional al alargamiento de x, es decir (figura 4.4.2),

$$F = kx \tag{3}$$

El resultado de (3) se conoce como la **ley de Hooke** en honor del irascible físico inglés **Robert Hooke** (1635-1703).

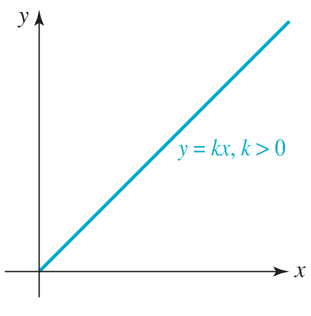


FIGURA 4.4.1 Gráfica de $y = kx$, con $k > 0$ y $x \geq 0$

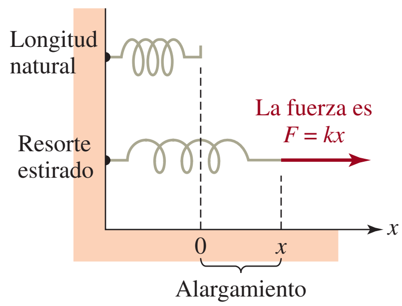


FIGURA 4.4.2 Resorte estirado

EJEMPLO 1 Ley de Hooke

Un resorte cuya longitud natural es $\frac{1}{4}$ de pie se estira 1 pulgada al aplicar una fuerza de 30 libras. ¿Cuánta fuerza se necesita para estirar el resorte a una longitud de 1 pie?

Solución El alargamiento de 1 pulgada equivale a $\frac{1}{12}$. En consecuencia, por (2) tenemos que

$$30 = k(\tfrac{1}{12}) \qquad \text{o} \qquad k = 360 \text{ lb/ft}$$

Por tanto, $F = 360x$. Cuando el resorte se estira a una longitud de 1 pie, su alargamiento es de $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ de pie. La fuerza necesaria para estirar el resorte a una longitud de 1 pie es

$$F = 360 \cdot \tfrac{3}{4} = 270 \text{ libras}$$

≡

Una cantidad también puede ser proporcional a una potencia de otra cantidad. En general, decimos que y **varía directamente** con la potencia n-ésima de x, o que es **directamente proporcional a** x^n, si existe una constante k tal que

$$y = kx^n, \quad \text{con } n > 0 \tag{4}$$

La potencia n en (4) no tiene que ser un entero.

EJEMPLO 2 Variación directa

a) La circunferencia C de un círculo es directamente proporcional a su radio r. Si k es la constante de proporcionalidad, entonces por (2) podemos escribir $C = kr$.

b) El área A de un círculo es directamente proporcional al cuadrado de su radio r. Si k es la constante de proporcionalidad, entonces por (4) $A = kr^2$.

c) El volumen V de una esfera es directamente proporcional al cubo de su radio r. Si k es la constante de proporcionalidad, entonces por (4) $V = kr^3$.

≡

En geometría aprendimos que en el inciso *a*) del ejemplo 2, $k = 2\pi$; en el inciso *b*), $k = \pi$, y en el inciso *c*), $k = 4\pi/3$.

EJEMPLO 3 Variación directa

Suponga que y es directamente proporcional a x^3. Si $y = 4$ cuando $x = 2$, ¿qué valor tiene y cuando $x = 4$?

Solución Por (3), escribimos $y = kx^3$. Por sustitución de $y = 4$ y $x = 2$ en esta ecuación, obtenemos la constante de proporcionalidad k, puesto que $4 = k \cdot 8$ implica que $k = \frac{1}{2}$. Por tanto, $y = \frac{1}{2}x^3$. Por último, cuando $x = 4$, tenemos que $y = \frac{1}{2} \cdot 4^3$, o $y = 32$.

≡

Variación inversa Decimos que una cantidad y **varía inversamente** con x si es proporcional al recíproco de x. A continuación se presenta la definición formal de este concepto.

Definición 4.4.2 Variación inversa

Una cantidad y **varía inversamente,** o es **inversamente proporcional a** una cantidad x si existe un número k diferente de cero tal que

$$y = \frac{k}{x}. \tag{4}$$

Tenga en cuenta en (4) que si la magnitud de una de las cantidades, por ejemplo x, aumenta, entonces en igual medida se reduce la magnitud de la cantidad y. Por otra parte, si

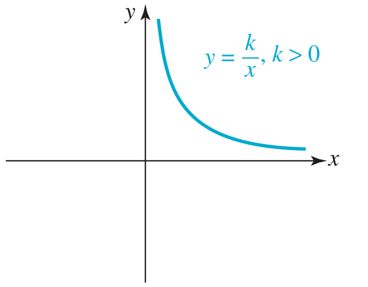


FIGURA 4.4.3 Gráfica de $y = k/x$, con $k > 0$, $x \geq 0$

el valor de x es pequeño en magnitud, el valor de y será grande en magnitud. Esto se observa claramente en la gráfica que se presenta en la **FIGURA 4.4.3** para $x > 0$.

Otra forma de (4) es $xy = k$. En el estudio de los gases, la **ley de Boyle** establece que el producto de la presión P de un gas ideal y el volumen V ocupado por dicho gas satisface $PV = k$. En otras palabras, P es inversamente proporcional a V. Si el volumen V de un recipiente que contiene un gas ideal se reduce, necesariamente la presión que ejerce dicho gas sobre las paredes interiores del recipiente aumenta.

En general, decimos que y **varía inversamente,** o es **inversamente proporcional a** la n-ésima potencia de x si existe una constante k tal que

$$y = \frac{k}{x^n} = kx^{-n}, \qquad \text{con} \quad n > 0$$

■ **Variación conjunta y combinada** Una variable puede ser directamente proporcional a los productos de las potencias de diversas variables. Si la variable z está dada por

$$z = kx^m y^n, \qquad \text{con} \quad m > 0 \quad \text{y} \quad n > 0 \tag{5}$$

decimos que z **varía conjuntamente** con la m-ésima potencia de x y la n-ésima potencia de y, o que z es **conjuntamente proporcional a** x^m y y^n. Desde luego, el concepto de variación conjunta expresado en (5) puede extenderse a productos de potencias de más de dos variables. Además, una cantidad puede ser directamente proporcional a varias variables e inversamente proporcional a otras variables. Este tipo de variación se llama **variación combinada**.

EJEMPLO 4 Variación conjunta

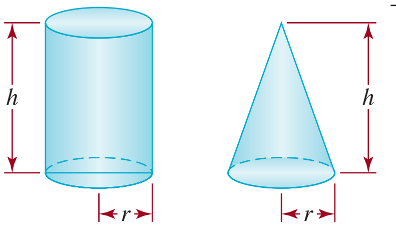
Considere el cilindro circular recto y el cono circular recto que se muestran en la **FIGURA 4.4.4**. El volumen V de cada uno es conjuntamente proporcional al cuadrado de su radio r y su altura h. Es decir,

$$V_{\text{cilindro}} = k_1 r^2 h \qquad \text{y} \qquad V_{\text{cono}} = k_2 r^2 h$$

Las constantes de proporcionalidad son $k_1 = \pi$ y $k_2 = \pi/3$. Así, los volúmenes son:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h \qquad \text{y} \qquad V_{\text{cono}} = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

≡



a) Cilindro circular recto

b) Cono circular recto

FIGURA 4.4.4 Cono y cilindro del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Variación conjunta

La resistencia hidrodinámica D a un barco que se desplaza por el agua es conjuntamente proporcional a la densidad ρ del agua, el área A de la parte mojada del casco de la nave y el cuadrado de la velocidad de ésta v. Esto es,

$$D = k\rho A v^2 \tag{6}$$

donde k es la constante de proporcionalidad (**FIGURA 4.4.5**).

≡

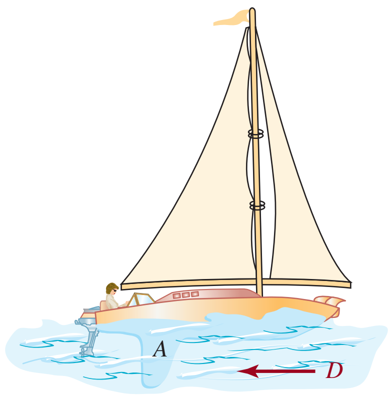


FIGURA 4.4.5 Barco del ejemplo 5

La misma relación (6) puede usarse a veces para determinar la *fuerza de fricción* que actúa sobre un objeto que se desplaza por el aire.

EJEMPLO 6 Variación combinada

La ley de la Gravitación Universal de Newton es un buen ejemplo de variación combinada:

*La fuerza que ejerce una masa puntual en el universo sobre otra con masa puntual es **directamente** proporcional al producto de las dos masas, e **inversamente** proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.*

Si, como se muestra en la **FIGURA 4.4.6**, representamos las masas con m_1 y m_2, la distancia entre las masas con r, el cuadrado de la distancia con r^2, la magnitud común de los vectores de fuerza $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con F, y k la constante de proporcionalidad, la interpretación simbólica del párrafo anterior es

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad \equiv$$

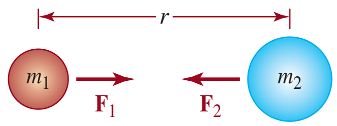


FIGURA 4.4.6 Fuerza gravitacional del ejemplo 6

La constante de proporcionalidad k del ejemplo 6 suele denotarse con el símbolo G y se conoce como **constante de la gravitacional universal**.

4.4 Ejercicios

Las respuestas de problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-10.

1. Suponga que y varía directamente con el cuadrado de x. Si $y = 3$ cuando $x = 1$, ¿qué valor tiene y cuando $x = 2$?

2. Suponga que y es directamente proporcional a la raíz cuadrada de x. Si $y = 4$ cuando $x = 16$, ¿qué valor tiene y cuando $x = 25$?

3. Suponga que w es inversamente proporcional a la raíz cúbica de t. Si $w = 2$ cuando $t = 27$, ¿qué valor tiene w cuando $t = 8$?

4. Suponga que s varía inversamente con el cuadrado de r. Si se triplica el valor de r, ¿cuál será el efecto en s?

5. ***a)*** Suponga que una fuerza de 10 libras estira un resorte 3 pulgadas más allá de su longitud natural. Encuentre la fórmula de la fuerza F que se requiere para estirar el resorte x pies más allá de su longitud natural.
b) Determine cuánto se estirará el resorte si se le aplica una fuerza de 50 libras.

6. Un resorte cuya longitud natural de 1 pie se estira $\frac{3}{4}$ de pie mediante una fuerza de 100 libras. ¿Cuánta fuerza se necesita para estirar el resorte hasta una longitud de 2.5 pies?

≡ Aplicaciones diversas

7. Piedra en caída La distancia s que una piedra recorre cuando se le deja caer desde un edificio muy alto es proporcional al cuadrado del tiempo t en vuelo. Si la piedra cae 64 pies en 2 segundos, encuentra una fórmula que relacione s y t. ¿Hasta dónde cae la piedra en 5 s? ¿Cuánto cae la piedra entre 2 y 3 segundos?

8. Otra piedra en caída La velocidad v de una piedra que cae desde un edificio muy alto varía directamente con el tiempo t en vuelo. Halle una fórmula que relacione v y t si la velocidad de la piedra al cabo de 1 segundo es de 32 ft/s. Si la piedra se deja caer desde lo alto de un edificio que mide 144 pies de altura, ¿cuál es su velocidad cuando llega al suelo? [*Pista:* use el problema 7].

9. Movimiento del péndulo El periodo T de un péndulo plano varía directamente con la raíz cuadrada de su longitud L. ¿Cuánto debe cambiar la longitud L para aumentar al doble el periodo del péndulo?

10. Peso El peso w de una persona varía directamente con el cubo de la estatura l de la persona. A los 13 años, la persona que mide 60 pulgadas de altura pesa 120 libras. ¿Cuál será el peso de la persona a los 16 años cuando mida 72 pulgadas de estatura?

11. Área superficial de un animal El área superficial S (en metros cuadrados) de un animal es directamente proporcional a la potencia dos tercios de su peso w medido en kilogramos. En el caso de los seres humanos, se considera que la constante de proporcionalidad es $k = 0.11$. Calcule el área superficial de una persona cuyo peso es de 81 kg.

12. Tercera ley de Kepler Según la tercera ley del movimiento planetario de Kepler, el cuadrado del periodo P de un planeta (es decir, el tiempo que el planeta tarda en dar una vuelta alrededor del Sol) es proporcional al cubo de su distancia media s del Sol. El periodo de la Tierra es de 365 días y su distancia media del Sol es de 92 900 000 mi. Determine el periodo de Marte si se sabe que su distancia media del Sol es de 142 000 000 mi.

13. Fuerza magnética Suponga que las corrientes eléctricas I_1 e I_2 fluyen por cables paralelos largos, como se muestra en la figura 4.4.7. La fuerza F_L por unidad de longitud que se ejerce sobre un cable debido al campo magnético que rodea al otro cable es conjuntamente proporcional a las corrientes I_1 e I_2, e inversamente proporcional a la distancia r entre los cables. Exprese esta variación combinada como una fórmula. Si la distancia r se reduce a la mitad, ¿cuál es el efecto en la fuerza F_L?

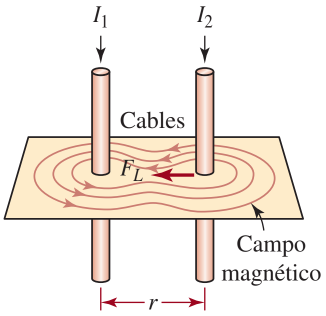


FIGURA 4.4.7 Cables paralelos para el problema 13

14. Energía La energía cinética K de un cuerpo en movimiento varía conjuntamente con el producto de su masa m y el cuadrado de su velocidad v. Si la constante de proporcionalidad es $\frac{1}{2}$, calcule la energía cinética de un neutrón de masa 1.7×10^{-27} kg que se mueve a velocidad constante de 3.5×10^4 m/s.

15. Gases Según la ley general de gases, la presión P de una cantidad de gas es directamente proporcional a la temperatura absoluta T del gas e inversamente proporcional a su volumen V. Exprese esta variación combinada con una fórmula. Un globo grande contiene 500 ft^3 de un gas en el nivel del suelo, donde la presión es de 14.7 lb/in^2 y la temperatura es de 293 K (o 20 °C). ¿Qué volumen ocupa este gas a una altitud de 10 mi, donde la presión es de 1.5 lb/in^2 y la temperatura absoluta es de 218 K (o −55 °C)?

16. Tensión y deformación En el estudio de cuerpos elásticos, la tensión es directamente proporcional a la deformación. En el caso de un alambre de longitud L y un área transversal A que se estira una cantidad e por una fuerza aplicada F, la tensión se define como F/A y la deformación está dada por e/L. Halle una fórmula que exprese e en términos de las otras variables.

17. Velocidad del sonido La velocidad del sonido en el aire varía con la temperatura de acuerdo con la ecuación $v = 33\,145\sqrt{T/273}$, donde v es la velocidad del sonido en centímetros por segundo y T es la temperatura del aire en unidades kelvin (273 K = 0 °C). ¿En qué día el sonido de el estallido de fuegos artificiales viaja más rápido: el 4 de julio ($T = 310$ K) o el 1 de enero ($T = 270$ K)? ¿Cuánto más rápido?

Fuegos artificiales del problema 17

18. Esperanza de vida animal Estudios empíricos indican que la esperanza de vida de un mamífero en cautiverio se relaciona con el tamaño del cuerpo por la fórmula $L = (11.8)M^{0.20}$, donde L es la esperanza de vida en años y M es la masa del cuerpo en kilogramos.

a) ¿Qué pronostica esta función respecto a la esperanza de vida de un elefante de 4 000 kg en un zoológico?

b) ¿Qué pronostica esta función respecto a la esperanza de vida de un hombre de 80 kg recluido en una cárcel?

19. Temperatura La temperatura de una varilla de vidrio refractario se eleva de una temperatura t_1 a una temperatura final t_2. La expansión térmica e de la varilla es conjuntamente proporcional a su longitud L y al aumento de temperatura. Cuando una varilla de 10 cm de longitud se calienta de 20 °C a 420 °C, su expansión térmica es de 0.012 cm. ¿Cuál es la expansión térmica de la misma varilla cuando se calienta de 20 °C a 550 °C?

20. Tono de una campana Según un criterio general, el tono P de una campana es inversamente proporcional a la raíz cúbica de su peso w. Una campana que pesa 800 libras tiene un tono de 512 ciclos por segundo. ¿Cuánto tendría que pesar una campana similar para producir un tono de 256 ciclos por segundo (do central)?

El tono de una campana depende de su peso

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Sistema de coordenadas cartesianas (rectangulares)
Ejes de coordenadas:
- eje x
- eje y

Coordenadas de un punto
Cuadrantes
Punto:
- coordenadas

Fórmula de la distancia
Fórmula del punto medio
Círculo:
- forma estándar
- completar el cuadrado

Semicírculo
Intersecciones de una gráfica:
- con el eje x
- con el eje y

Simetría de una gráfica:
- con el eje x
- con eje y
- con el origen

Pendiente de una recta:
- positiva
- negativa
- indefinida

Ecuaciones de rectas:
- forma punto-pendiente
- forma pendiente-intersección

Recta vertical
Recta horizontal
Rectas paralelas
Rectas perpendiculares
Variación:
- directa
- inversa
- conjunta
- combinada
- constante de proporcionalidad

CAPÍTULO 4 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-10.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 22, responda verdadero o falso.

1. El punto (5, 0) está en el cuadrante I. _____

2. El punto $(-3, 7)$ está en el cuadrante III. _____

3. Los puntos (0, 3), (2, 2) y (6, 0) son colineales. _____

4. Dos rectas con pendientes positivas no pueden ser perpendiculares. _____

5. La ecuación de una recta vertical que pasa por $(2, -5)$ es $x = 2$. _____

6. Si A, B y C son puntos en el plano cartesiano, siempre es verdad que $d(A, B) + d(B, C) > d(A, C)$. _____

7. Las rectas $2x + 3y = 5$ y $-2x + 3y = 1$ son perpendiculares. _____

8. El círculo $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ es tangente tanto al eje x como al eje y. _____

9. La gráfica de la ecuación $y = x + x^3$ es simétrica respecto al origen. _____

10. El centro del círculo $x^2 + 4x + y^2 + 10y = 0$ es $(-2, -5)$. _____

11. El círculo $x^2 + 4x + y^2 + 10y = 0$ pasa por el origen. _____

12. Si una recta tiene pendiente indefinida, entonces tiene que ser vertical. _____

13. El círculo $(x - 3)^2 + (y + 5)^2$ no tiene intersecciones. _____

14. Si $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ se encuentra en una recta con pendiente 1, entonces $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ también se halla en la recta. _____

15. Las rectas $y = 2x - 5$ y $y = 2x$ son paralelas. _____

16. Si y es inversamente proporcional a x, y se reduce conforme x aumenta. _____

17. La recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(4, 2)$ es horizontal. _____

18. Las gráficas de rectas de la forma $y = mx$, con $m > 0$, no pueden contener un punto con coordenada x negativa y coordenada y positiva. _____

19. Si la gráfica de una ecuación contiene el punto (2, 3) y es simétrica respecto al eje x, la gráfica también contiene el punto $(2, -3)$. _____

20. La gráfica de la ecuación $|x| = |y|$ es simétrica respecto al eje x, el eje y y el origen. _____

21. No hay ningún punto en el círculo $x^2 + y^2 - 10x + 22 = 0$ que tenga 2 como coordenada x. _____

22. El radio r del círculo con centro en el origen que contiene el punto $(1, -2)$ es 5. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 20, llene los espacios en blanco.

1. Las rectas $2x - 5y = 1$ y $kx + 3y + 3 = 0$ son paralelas si $k =$ _______________.
2. La ecuación de una recta que pasa por $(1, 2)$ y es perpendicular a $y = 3x - 5$ es _______________.
3. La pendiente y las intersecciones con los ejes x y y de la recta $-4x + 3y - 48 = 0$ son _______________.
4. La distancia entre los puntos $(5, 1)$ y $(-1, 9)$ es _______________.
5. La pendiente de la recta $4y = 6x + 3$ es $m =$ _______________.
6. Las rectas $2x - 5y = 1$ y $kx + 3y + 3 = 0$ son perpendiculares si $k =$ _______________.
7. Dos puntos del círculo $x^2 + y^2 = 25$ con la misma coordenada y -3 son _______________.
8. La gráfica de $y = -6$ es una _______________.
9. El centro y el radio del círculo $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 8$ son _______________.
10. El punto $(1, 5)$ está en una gráfica. Dé las coordenadas de otro punto en la gráfica si ésta es
    a) simétrica respecto al eje x. _______________
    b) simétrica respecto al eje y. _______________
    c) simétrica respecto al origen. _______________
11. Si $(-2, 6)$ es el punto medio de un segmento de recta que va de $P_1(x_1, 3)$ a $P_2(8, y_2)$, entonces $x_1 =$ _______ y $y_2 =$ _______.
12. El punto medio del segmento de recta que va de $P_1(2, -5)$ a $P_2(8, -9)$ es _______________.
13. Los cuadrantes del plano xy donde el cociente x/y es negativo son _______________.
14. Una recta con intersección con el eje x en $(-4, 0)$ e intersección con el eje y en $(0, 32)$ tiene pendiente _______________.
15. La ecuación de una recta perpendicular a $y = 3$ que contiene el punto $(-2, 7)$ es _______________.
16. Si el punto $(a, a + \sqrt{3})$ está en la gráfica de $y = 2x$, entonces $a =$ _______________.
17. La gráfica de $y = -\sqrt{100 - x^2}$ es una _______________.
18. La ecuación _______________ es un ejemplo de un círculo cuyo centro y las dos intersecciones con el eje x se halla en el eje x negativo.
19. La distancia del punto medio del segmento de recta que une los puntos $(4, -6)$ y $(-2, 0)$ con el origen es _______________.
20. Si p varía inversamente con el cubo de q y $p = 9$ cuando $q = -1$, entonces $p =$ _______ cuando $q = 3$.

C. Ejercicios de repaso

1. Determine si los puntos $A(1, 1)$, $B(3, 3)$ y $C(5, 1)$ son vértices de un triángulo rectángulo.
2. Halle la ecuación de un círculo con los puntos $(3, 4)$ y $(5, 6)$ como los extremos del diámetro.
3. Halle la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(2, -2)$.
4. Halle la ecuación de la recta que pasa por $(2, 4)$ y es paralela a la recta que pasa $(-1, -1)$ y $(4, -3)$.
5. Considere el segmento de recta que une $(-1, 6)$ y $(1, 10)$ y el segmento de recta que une $(7, 3)$ y $(-3, -2)$. Halle la ecuación de la recta que contiene los puntos medios de estos dos segmentos de recta.
6. Halle la ecuación de la recta que pasa por $(3, -8)$ y es paralela a la recta $2x - y = -7$.
7. Halle dos puntos, distintos de las intersecciones con los ejes, en la recta $2x + 5y = 12$.
8. La coordenada y de un punto es 2. Halle la coordenada x del punto si la distancia del punto a $(1, 3)$ es $\sqrt{26}$.
9. Halle la ecuación del círculo con centro en el origen si la longitud de su diámetro es 8.
10. Halle la ecuación del círculo cuyo centro es $(1, 1)$ y pasa por el punto $(5, 2)$.
11. Halle las ecuaciones de los círculos que pasan por los puntos $(1, 3)$ y $(-1, -3)$ y tienen radio 10.
12. El punto $(-3, b)$ está en la gráfica de $y + 2x + 10 = 0$. Halle b.
13. Tres vértices de un rectángulo están en $(3, 5)$, $(-3, 7)$ y $(-6, -2)$. Determine el cuarto vértice.
14. Halle el punto de intersección de las diagonales del rectángulo del problema 13.

En los problemas 15 y 16, obtenga el valor de x.

15. $P_1(x, 2)$, $P_2(1, 1)$, $d(P_1, P_2) = \sqrt{10}$
16. $P_1(x, 0)$, $P_2(-4, 3x)$, $d(P_1, P_2) = 4$
17. Halle la ecuación que relaciona x y y si se sabe que la distancia (x, y) a $(0, 1)$ es la misma que la de (x, y) a $(x, -1)$.
18. Demuestre que el punto $(-1, 5)$ está en la bisectriz perpendicular del segmento de recta que va de $P_1(1, 1)$ a $P_2(3, 7)$.
19. M es el punto medio del segmento de recta que va de $P_1(2, 3)$ a $P_2(6, -9)$. Halle el punto medio del segmento de recta que va de P_1 a M y el punto medio del segmento de recta que va de M a P_2.

20. En la **FIGURA 4.R.1** se muestran los puntos medios de los lados de un triángulo. Determine los vértices del triángulo.

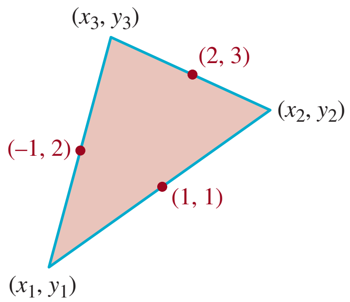


FIGURA 4.R.1 Triángulo para el problema 20

21. Una recta tangente a un círculo en el punto P del círculo es la que pasa por P y es perpendicular a la recta que pasa por P y el centro del círculo. Halle la ecuación de la recta tangente L que se indica en la **FIGURA 4.R.2**.

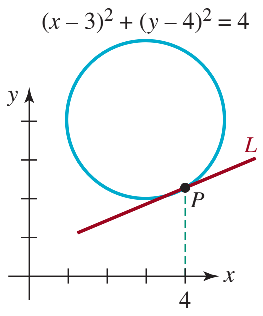


FIGURA 4.R.2 Gráfica para el problema 21

22. ¿Cuál de las ecuaciones siguientes describe mejor el círculo ilustrado en la **FIGURA 4.R.3**? Los símbolos a, b, c, d y e son constantes diferentes de cero.

a) $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$
b) $ax^2 + ay^2 + cx + dy + e = 0$
c) $ax^2 + ay^2 + cx + dy = 0$
d) $ax^2 + ay^2 + c = 0$
e) $ax^2 + ay^2 + cx + e = 0$

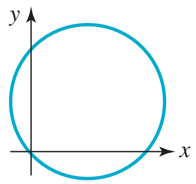


FIGURA 4.R.3 Gráfica para el problema 22

En los problemas 23 a 30, relacione la ecuación dada con la gráfica que corresponda de la **FIGURA 4.R.4**.

23. $x + y - 1 = 0$

24. $x + y = 0$

25. $x - 1 = 0$

26. $y - 1 = 0$

27. $10x + y - 10 = 0$

28. $-10x + y + 10 = 0$

29. $x + 10y - 10 = 0$

30. $-x + 10y - 10 = 0$

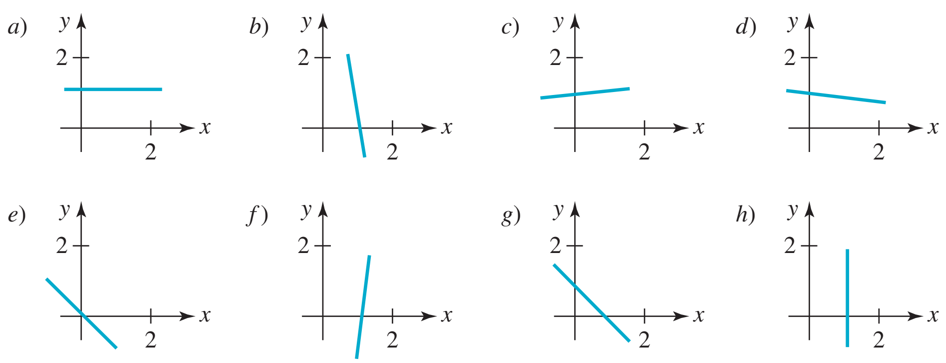


FIGURA 4.R.4 Gráficas para los problemas 23 a 30

FUNCIONES Y GRÁFICAS

5

En este capítulo

La correspondencia que hay entre los alumnos de una clase y las bancas que ocupan es un ejemplo de función

Un poco de historia Si se planteara la pregunta "¿cuál es el concepto matemático más importante?" a un grupo de matemáticos, maestros de matemáticas y científicos, no hay duda de que el término *función* aparecería cerca o incluso en el primer lugar de la lista de respuestas. En los capítulos 5 y 6 nos centraremos sobre todo en la definición y la interpretación gráfica de las funciones.

Es probable que el matemático alemán y "coinventor" del cálculo **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) haya introducido la palabra *función* a finales del siglo XVII; este vocablo proviene del latín *functo*, que significa actuar o ejecutar. En los siglos XVII y XVIII, los matemáticos tenían una idea muy vaga de función. Para muchos de ellos, una relación funcional entre dos variables estaba dada por alguna curva suave o una ecuación con dos variables. Aunque las fórmulas y ecuaciones desempeñan un papel importante en el estudio de las funciones, en la sección 5.1 veremos que la interpretación "moderna" de función (que data de mediados del siglo XIX) es la de un tipo especial de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos.

5.1 Funciones y gráficas

Introducción Al usar los objetos y las personas que nos rodean, es fácil establecer una regla de correspondencia que asocie, esto es, que haga coincidir los elementos de un conjunto con los de otro conjunto. Por ejemplo, cada número de seguro social se relaciona con una persona; cada automóvil registrado en California con un número de placas, cada libro tiene cuando menos un autor, cada estado tiene un gobernador, etc. Hay una correspondencia natural entre un conjunto de 20 alumnos y un conjunto de, digamos, 25 pupitres en un salón de clase, cuando cada uno haya seleccionado y se siente en uno de los que están disponibles. En matemáticas nos interesa un tipo especial de correspondencia, una *correspondencia unívoca entre valores*, que se llama función.

Definición 5.1.1 Función

Una **función** de un conjunto X a un conjunto Y es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x de X exactamente un elemento y de Y.

El conjunto Y no es necesariamente el rango

En la correspondencia entre alumnos y pupitres, suponga que el conjunto de 20 alumnos es el conjunto X, y el conjunto de 25 pupitres es el conjunto Y. Esta correspondencia es una función del conjunto X al conjunto Y, siempre que no haya alumno que se siente en dos pupitres al mismo tiempo.

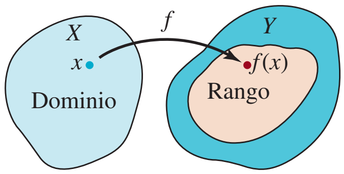


FIGURA 5.1.1 Dominio y rango de una función f

Terminología Se acostumbra representar una función por una letra, por ejemplo f, g o h. Entonces, se puede representar una función f de un conjunto X a un conjunto Y mediante la notación $f{:}X \to Y$. El conjunto X se llama **dominio** de f. El conjunto de elementos correspondientes y del conjunto Y se llama **rango** de la función. En el caso de nuestra función alumno/pupitre, el conjunto de alumnos es el dominio y el conjunto de 20 pupitres que realmente estén ocupados por alumnos es el rango. Observe que el rango de f no necesita ser el conjunto entero Y. El elemento único y en el rango que corresponde a un elemento seleccionado x en el dominio X se llama **valor** de la función en x, o la **imagen** de x, y se escribe $f(x)$. Este último símbolo se lee "efe de equis o "efe en equis", y se escribe $y = f(x)$ (**FIGURA 5.1.1**). En muchos libros, a x se le llama **entrada** de la función y a $f(x)$ **salida** de la función. Como el valor de y depende de la elección de x, a y se le llama **variable dependiente**; a x se le llama **variable independiente**. A menos que se indique otra cosa, aquí supondremos en adelante que los conjuntos X y Y están formados por números reales.

EJEMPLO 1 La función elevar al cuadrado

La regla para elevar al cuadrado un número real es la ecuación $y = x^2$ o $f(x) = x^2$. Los valores de f en $x = -5$ y $x = \sqrt{7}$ se obtienen sustituyendo x, cada vez, por los números -5 y $\sqrt{7}$:

$$f(-5) = (-5)^2 = 25 \quad \text{y} \quad f(\sqrt{7}) = (\sqrt{7})^2 = 7. \qquad \equiv$$

A veces, para destacarla escribiremos una función usando paréntesis en lugar del símbolo x. Por ejemplo, podemos escribir la función de elevar al cuadrado, $f(x) = x^2$ en la forma

$$f(\quad) = (\quad)^2. \tag{1}$$

Esto ilustra el hecho que x es un *comodín* que puede ser sustituido por cualquier número del dominio de la función $y = f(x)$. Así, si se desea evaluar (1) en, por ejemplo, $3 + h$, donde h representa un número real, se pone $3 + h$ entre los paréntesis y se hacen las operaciones algebraicas adecuadas.

Véase (3) de la sección 2.6.

$$f(3 + h) = (3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2.$$

Si una función f se define mediante una fórmula o una ecuación, en el caso típico el dominio de $y = f(x)$ no se indica en forma expresa. Se verá que normalmente se puede deducir el dominio de $y = f(x)$, ya sea por la estructura de la ecuación, o por el contexto del problema.

EJEMPLO 2 Dominio y rango

En el ejemplo 1, como todo número real x se puede elevar al cuadrado, y el resultado x^2 es otro número real, $f(x) = x^2$ es una función de R a R, esto es, $f: R \to R$. En otras palabras, el dominio de f es el conjunto R de los números reales. Usando la notación de intervalos, el dominio también se expresa como $(-\infty, \infty)$. El rango de f es el conjunto de los números reales no negativos, o $[0, \infty)$; esto se debe a que $x^2 \geq 0$ para todo número real x. ≡

Dominio de una función Como se vio antes, en general no se especifica el dominio de una función $y = f(x)$ que se define por una fórmula. A menos que se indique o esté implícito lo contrario, se sobreentiende que:

El dominio de una función f es el mayor subconjunto del conjunto de números reales para los que $f(x)$ es un número real.

A este conjunto se le llama a veces **dominio implícito** de la función. Por ejemplo, no se puede calcular $f(0)$ de la función recíproca $f(x) = 1/x$, ya que $1/0$ no es un número real. En este caso se dice que f está **indefinida** en $x = 0$. Como todo número real *distinto de cero* tiene un recíproco, el dominio de $f(x) = 1/x$ es el conjunto de los números reales excepto 0. Con el mismo razonamiento se ve que la función $g(x) = 1/(x^2 - 4)$ no está definida en $x = -2$ o en $x = 2$, por lo que su dominio es el conjunto de los números reales, excepto -2 y 2. La función raíz cuadrada $h(x) = \sqrt{x}$ no está definida en $x = -1$, porque $\sqrt{-1}$ no es un número real. Para que $h(x) = \sqrt{x}$ esté definido en el sistema de los números reales, se requiere que el **radicando**, que en este caso simplemente es x, sea no negativo. En la desigualdad $x \geq 0$ se ve que el dominio de la función h es el intervalo $[0, \infty)$.

EJEMPLO 3 Dominio y rango

Determine el dominio y el rango de $f(x) = 4 + \sqrt{x - 3}$.

Solución El radicando $x - 3$ debe ser no negativo. Al resolver la desigualdad $x - 3 \geq 0$ se obtiene $x \geq 3$, por lo que el dominio de f es $[3, \infty)$. Ahora, como el símbolo $\sqrt{\ }$ representa la raíz cuadrada principal de un número, $\sqrt{x - 3} \geq 0$ para $x \geq 3$ y, en consecuencia, $4 + \sqrt{x - 3} \geq 4$. El valor mínimo de $f(x)$ está en $x = 3$, y es $f(3) = 4 + \sqrt{0} = 4$. Además, debido a que $x - 3$ y $\sqrt{x - 3}$ crecen cuando x toma valores cada vez mayores, llegamos a la conclusión de que $y \geq 4$. En consecuencia, el rango de f es $[4, \infty)$. ≡

Véase la sección 2.4.

EJEMPLO 4 Dominio de f

Determine el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$.

Solución Como en el ejemplo 3, la expresión bajo el signo radical, el radicando, debe ser no negativa, esto es, el dominio de f es el conjunto de los números reales x para los cuales $x^2 + 2x - 15 \geq 0$ o $(x - 3)(x + 5) \geq 0$. Ya resolvimos esta desigualdad, mediante una tabla de signos, en el ejemplo 1 de la sección 3.7. El conjunto solución de la desigualdad $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$ también es el dominio de f. ≡

EJEMPLO 5 Dominios de dos funciones

Determine el dominio de ***a***) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 15}}$ y ***b***) $h(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 3x - 4}$.

Solución Una función representada por una expresión fraccionaria no está definida en los valores de x para los cuales su denominador es igual a 0.

a) La expresión bajo el radical es la misma que la del ejemplo 4. Como $x^2 + 2x - 15$ está en el denominador, entonces $x^2 + 2x - 15 \neq 0$. Esto excluye a $x = -5$ y $x = 3$. Por añadidura, como $x^2 + 2x - 15$ aparece dentro de un radical se debe cumplir que $x^2 + 2x - 15 > 0$ para todos los demás valores de x. Entonces, el dominio de la función g es la unión de dos intervalos abiertos $(-\infty, -5) \cup (3, \infty)$.

b) Como el denominador de $h(x)$ se puede factorizar,

$$x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$$

se ve que $(x + 1)\ (x - 4) = 0$ para $x = -1$ y $x = 4$. En contraste con la función del inciso *a*), éstos son los *únicos* números para los que h no está definida. Por consiguiente, el dominio de la función h es el conjunto de los números reales, excepto a $x = -1$ y $x = 4$. ≡

Con la notación de intervalos, el dominio de h en el inciso *b*) del ejemplo 5 se puede escribir como sigue:

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, \infty).$$

Como alternativa para esta complicada unión de intervalos disjuntos, también se puede expresar este dominio en notación de conjuntos como $\{x \mid x \text{ un número real } x \neq -1 \text{ y } x \neq 4\}$.

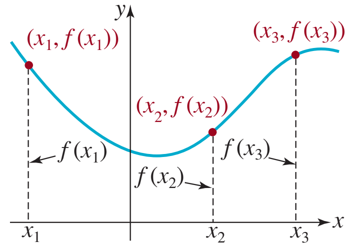


FIGURA 5.1.2 Puntos en la gráfica de una ecuación $y = f(x)$

■ Gráficas

Con frecuencia se usa una función para describir fenómenos en ciencias, ingeniería y comercio. Para interpretar y utilizar datos se aconseja mostrarlos en forma de una gráfica. La gráfica de una función f es la gráfica del conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$, donde x está en el dominio de f. En el plano xy, un par ordenado $(x, f(x))$ es un punto, y entonces la gráfica de una ecuación es un conjunto de puntos. Si una función está definida por una ecuación $y = f(x)$, entonces la gráfica de f es la gráfica de la ecuación. Para obtener puntos de la gráfica de una ecuación $y = f(x)$ se escogen números adecuados $x_1, x_2, x_3 \ldots$ en su dominio, se calculan $f(x_1), f(x_2), f(x_3) \ldots$, se grafican los puntos correspondientes $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3)) \ldots$ y a continuación se unen esos puntos con una curva (**FIGURA 5.1.2**). Téngase en cuenta que:

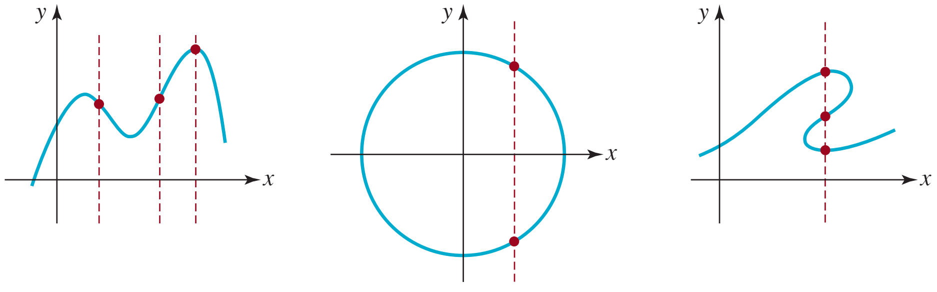
- un valor de x es una distancia dirigida desde el eje y
- un valor de función $f(x)$ es una distancia dirigida desde el eje x.

■ Comportamiento en los extremos

Cabe aclarar algo acerca de las figuras de este libro. Con pocas excepciones, en general es imposible mostrar la gráfica completa de una función, y entonces se muestran sólo las características más importantes de ella. En la **FIGURA 5.1.3*a*)**, nótese que la gráfica baja en sus lados izquierdo y derecho. A menos que se indique lo contrario, podremos suponer que no hay sorpresas más allá de las que hemos mostrado, y que la gráfica sólo continúa en la forma indicada. La gráfica de la figura 5.1.3*a*) indica el llamado **comportamiento en los extremos**, o **comportamiento global** de la función: para un punto (x, y) en la gráfica, los valores de la coordenada y se vuelven infinitos en magnitud en la dirección descendente o negativa a medida que la coordenada x se vuelve infinita en magnitud tanto en la dirección negativa como en la dirección positiva en la recta numérica. Es conveniente describir este comportamiento en los extremos mediante los símbolos

$$y \to -\infty \text{ cuando } x \to -\infty \quad \text{y} \quad y \to -\infty \text{ cuando } x \to \infty \tag{2}$$

El símbolo $\to$ en (2) se lee "tiende a". Así, por ejemplo, $y \to -\infty$ cuando $x \to \infty$ se lee así: "y tiende al infinito por la izquierda cuando x se acerca al infinito".



a) Función *b*) No es una función *c*) No es una función

FIGURA 5.1.3 Prueba de la recta vertical

(Diremos más acerca de este concepto de comportamiento global en el capítulo 6.) Si una gráfica termina en su extremo derecho o izquierdo, lo indicaremos con un punto cuando se necesite mayor claridad (**FIGURA 5.1.4**). Usaremos un punto lleno para representar que el extremo se incluye en la gráfica, y un punto abierto para indicar que el extremo no se incluye en la gráfica.

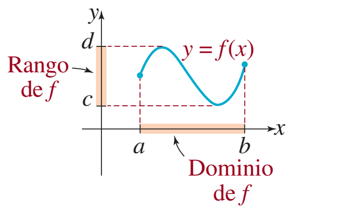


FIGURA 5.1.4 Interpretación gráfica del dominio y rango

■ **Prueba de la recta vertical** De acuerdo con la definición de función, sabemos que a cada x en el dominio de f corresponde sólo un valor $f(x)$ del rango. Eso quiere decir que una recta vertical que corte la gráfica de una función $y = f(x)$ (equivale a escoger una x) sólo lo puede hacer una vez. Al revés, si *cada* recta vertical que corta una gráfica de una ecuación lo hace cuando mucho en un punto, entonces la gráfica es de una función. A esta última proposición se le llama **prueba de la recta vertical** de una función [figura 5.1.3*a*)]. Por otra parte, si *alguna* recta vertical interseca una gráfica de una ecuación más de una vez, la gráfica no es la de una función [figura 5.1.3*b*) y 5.1.3*c*)]. Cuando una recta vertical interseca una gráfica en varios puntos, el mismo número x corresponde a diferentes valores de y, lo que contradice la definición de función.

Si tiene usted una gráfica precisa de una función $y = f(x)$, con frecuencia es posible *ver* el dominio y el rango de f. En la figura 5.1.4 se supone que la curva de color es la gráfica completa de una función f. El dominio de f es, entonces, el intervalo $[a, b]$ en el eje x, y el rango es el intervalo $[c, d]$ en el eje y.

EJEMPLO 6 Regreso al ejemplo 3

En la gráfica de $f(x) = 4 + \sqrt{x - 3}$, de la **FIGURA 5.1.5**, se ve que el dominio y el rango de f son, respectivamente, $[3, \infty)$ y $[4, \infty)$. Esto concuerda con los resultados del ejemplo 3. ≡

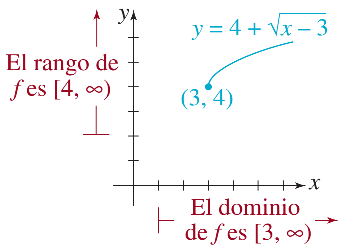
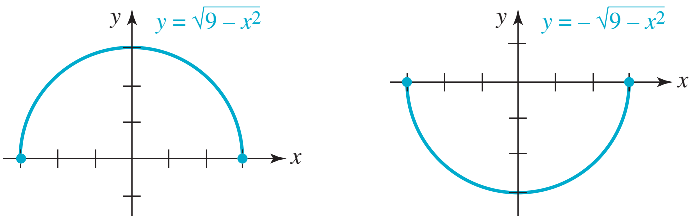


FIGURA 5.1.5 Gráfica de la función f del ejemplo 6

Como se vio en la figura 5.1.3*b*), un círculo no es la gráfica de una función. En realidad, una ecuación como $x^2 + y^2 = 9$ define (al menos) dos funciones de x. Si esta ecuación se resuelve para y en función de x, se obtiene $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Debido a la convención del valor único del signo $\sqrt{\ }$, ambas ecuaciones, $y = \sqrt{9 - x^2}$ y $y = -\sqrt{9 - x^2}$, definen funciones. Como se vio en la sección 4.2, la primera ecuación define un *semicírculo superior*, y la segunda define a un *semicírculo inferior*. De las gráficas que se muestran en la **FIGURA 5.1.6**,



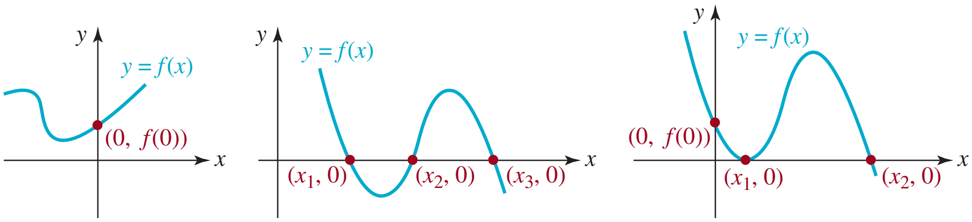
a) Semicírculo superior *b*) Semicírculo inferior

FIGURA 5.1.6 Estos semicírculos son gráficas de funciones el dominio de $y = \sqrt{9 - x^2}$ es $[-3, 3]$ y el rango es $[0, 3]$; el dominio y el rango de $y = -\sqrt{9 - x^2}$ son $[-3, 3]$ y $[-3, 0]$, respectivamente.

Intersecciones con los ejes A fin de graficar una función definida por una ecuación $y = f(x)$, se suele aconsejar que primero se determine si la gráfica de f interseca los ejes. Recuérdese que todos los puntos del eje y tienen la forma $(0, y)$. Así, si 0 está en el dominio de una función f, la **intersección con el eje *y*** es el punto cuya ordenada es $f(0)$; en otras palabras, es $(0, f(0))$ [**FIGURA 5.1.7*a*)**]. De igual modo, todos los puntos en el eje x tienen la forma $(x, 0)$. Eso quiere decir que para determinar las intersecciones con el eje x de la gráfica de $y = f(x)$ se determinan los valores de x que hacen que $y = 0$. Esto es, se debe despejar x de la ecuación $f(x) = 0$. Un número c para el cual

$$f(c) = 0$$

se llama **cero** de la función f, o **raíz** (o **solución**) de la ecuación $f(x) = 0$. Los ceros *reales* de una función f son las coordenadas x de las **intersecciones con el eje *x*** de la gráfica de f. En la figura 5.1.7*b*) hemos ilustrado una función que tiene tres ceros, x_1, x_2 y x_3, porque $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$ y $f(x_3) = 0$. Las tres correspondientes intersecciones con el eje x $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(x_3, 0)$. Naturalmente, la gráfica de una función puede no tener intersecciones con los ejes, lo cual se ve en la figura 5.1.5.



a) Una intersección con el eje *y*   *b*) Tres intersecciones con el eje *x*   *c*) Una intersección con el eje *y* y dos con el eje *x*

FIGURA 5.1.7 Intersecciones de la gráfica de una función f

En el capítulo 6 se abunda en este tema.

Una gráfica no necesariamente tiene que *cortar* un eje coordenado en una intersección. La gráfica podría ser simplemente **tangente** al eje, es decir, podría *tocarlo*. En la figura 5.1.7*c*), la gráfica de $y = f(x)$ es tangente al eje x en $(x_1, 0)$. También, la gráfica de una función f puede tener cuando mucho una intersección con el eje y ya que, si 0 está en el dominio de f, sólo puede corresponderle un valor de y, que sería $y = f(0)$.

EJEMPLO 7 Intersecciones con los ejes

Determine las intersecciones con los ejes coordenados de la función indicada.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$ ***b***) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x}$

Solución ***a***) Como 0 está en el dominio de f, $f(0) = -2$ es la coordenada y de la intersección con el eje y de la gráfica de f. La intersección con el eje y es el punto $(0, -2)$. Para obtener las intersecciones con el eje x se debe determinar si f tiene ceros reales, esto es, soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$. En virtud de que el miembro izquierdo de la ecuación $x^2 + 2x - 2 = 0$ no tiene factores obvios, se aplica la fórmula general de segundo grado para obtener $x = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{12})$. Debido a que $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$, los ceros de f son los números $1 - \sqrt{3}$ y $1 + \sqrt{3}$. Las intersecciones con el eje x son los puntos $(1 - \sqrt{3}, 0)$ y $(1 + \sqrt{3}, 0)$.

b) Como 0 no está en el dominio de f ($f(0) = -3/0$ no está definida), la gráfica de f no tiene intersección con el eje y. Ahora, como f es una expresión fraccionaria, la única forma en que $f(x) = 0$ es hacer que el numerador sea igual a cero. Si se factoriza el miembro izquierdo de $x^2 - 2x - 3 = 0$, se obtiene $(x + 1)(x - 3) = 0$. Por consiguiente, los números -1 y 3 son los ceros de f. Las intersecciones con el eje x son los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$. ≡

■ **Determinación aproximada de los ceros** Aun cuando sea obvio que la gráfica de una función $y = f(x)$ tenga intersecciones con el eje x, no siempre es posible resolver la ecuación $f(x) = 0$. De hecho, es *imposible* resolver exactamente algunas ecuaciones; a veces lo mejor que se puede hacer es **aproximar** los ceros de la función. Una forma de hacerlo es trazar una gráfica muy exacta de f.

◄ En la sección 6.5 veremos otra forma de aproximar los ceros de una función

EJEMPLO 8 Intersecciones con los ejes

Con ayuda de un graficador, la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x + 4$ se ve en la **FIGURA 5.1.8**. De $f(0) = 4$, se observa que el punto de intersección con el eje y es $(0, 4)$. Como se ve en la figura, parece que hay una sola intersección con el eje x, cuya abscisa puede ser -1.7 o -1.8. Sin embargo, no hay forma de determinar con exactitud las raíces de la ecuación $x^3 - x + 4 = 0$. Sin embargo, se puede calcular aproximadamente, o *aproximar* la raíz real de esta ecuación con ayuda de la función *find root* de una calculadora graficadora o un programa de álgebra para computadora. De este modo se ve que $x \approx -1.796$, por lo que la abscisa al origen aproximada es $(-1.796, 0)$. Para comprobar, obsérvese que el valor de la función

$$f(-1.796) = (-1.796)^3 - (-1.796) + 4 \approx 0.0028$$

es cercano a cero. ≡

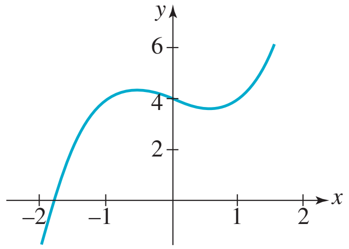


FIGURA 5.1.8 Abscisa al origen aproximada del ejemplo 8

Notas del aula

Al trazar la gráfica de una función nunca debe graficar muchos puntos a mano. Es algo que hacen bien las calculadoras graficadoras o las computadoras. Por otra parte, nunca debe dependerse de una calculadora para obtener una gráfica. Créalo o no, hay profesores que no permiten usar calculadoras graficadoras en los exámenes. En general, no hay objeción al empleo de calculadoras o computadoras como auxiliares para comprobar los problemas de tarea, pero en la clase, los profesores quieren ver el fruto de la mente de sus alumnos, es decir, su capacidad para analizar. Por ello, le recomendamos desarrollar su destreza para trazar gráficas, hasta el punto de poder bosquejar rápidamente, a mano, una función, al tener una familiaridad básica con los tipos de funciones, y graficando un mínimo de puntos bien escogidos. Las transformaciones que se estudian en la próxima sección también ayudan a trazar una gráfica.

5.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-11.

En los problemas 1 a 6, calcule los valores indicados de la función.

1. Si $f(x) = x^2 - 1$; $f(-5)$, $f(-\sqrt{3})$, $f(3)$ y $f(6)$

2. Si $f(x) = -2x^2 + x$; $f(-5)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(2)$ y $f(7)$

3. Si $f(x) = \sqrt{x + 1}$; $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$ y $f(5)$

4. Si $f(x) = \sqrt{2x + 4}$; $f(-\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{5}{2})$ y $f(4)$

5. Si $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$; $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(\sqrt{2})$

6. Si $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 2}$; $f(-\sqrt{2})$, $f(-1)$, $f(0)$ y $f(\frac{1}{2})$

En los problemas 7 y 8 determine

$$f(x),\ f(2a),\ f(a^2),\ f(-5x),\ f(2a + 1) \text{ y } f(x + h)$$

de la función dada f, y simplifique todo lo posible.

7. $f(\quad) = -2(\quad)^2 + 3(\quad)$

8. $f(\quad) = (\quad)^3 - 2(\quad)^2 + 20$

9. ¿Para qué valores de x es $f(x) = 6x^2 - 1$ igual a 23?

10. ¿Para qué valores de x es $f(x) = \sqrt{x - 4}$ igual a 4?

En los problemas 11 a 20, determine el dominio de la función f.

11. $f(x) = \sqrt{4x - 2}$

12. $f(x) = \sqrt{15 - 5x}$

13. $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{1 - x}}$

14. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x - 1}}$

15. $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x(x - 3)}$

16. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10x + 25}$

18. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4x - 12}$

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 1}$

En los problemas 21 a 26, use el método de la tabla de signos para determinar el dominio de la función f.

21. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

22. $f(x) = \sqrt{x(4 - x)}$

23. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

24. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 10}$

25. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3 - x}{x + 2}}$

26. $f(x) = \sqrt{\dfrac{5 - x}{x}}$

En los problemas 27 a 30, determine si la gráfica que muestra la figura es la de una función.

27.

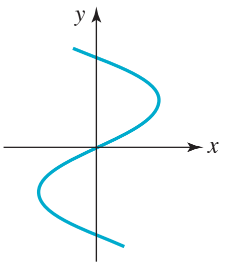


FIGURA 5.1.9 Gráfica del problema 27

28.

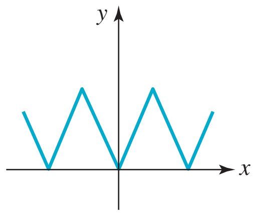


FIGURA 5.1.10 Gráfica del problema 28

29.

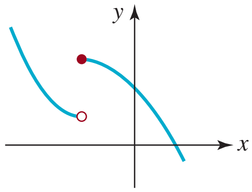


FIGURA 5.1.11 Gráfica del problema 29

30.

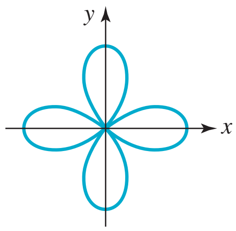


FIGURA 5.1.12 Gráfica del problema 30

En los problemas 31 a 34 use la gráfica de la función f que se ve en la figura para determinar su dominio y su rango.

31.

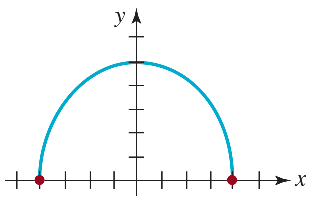


FIGURA 5.1.13 Gráfica del problema 31

32.

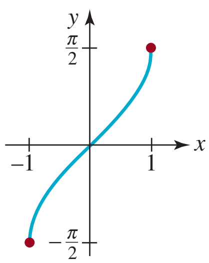


FIGURA 5.1.14 Gráfica del problema 32

33.

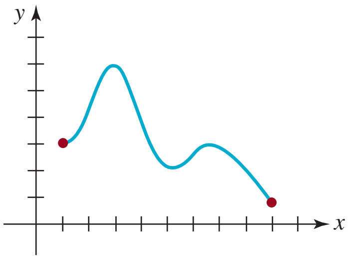


FIGURA 5.1.15 Gráfica del problema 33

34.

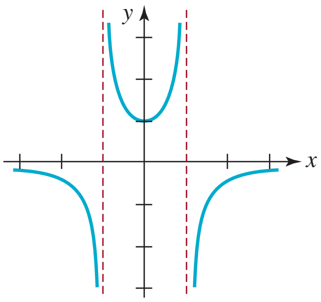


FIGURA 5.1.16 Gráfica del problema 34

En los problemas 35 a 42, determine los ceros de la función dada f.

35. $f(x) = 5x + 6$

36. $f(x) = -2x + 9$

37. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

38. $f(x) = x^2 - 2x - 1$

39. $f(x) = x(3x - 1)(x + 9)$

40. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

41. $f(x) = x^4 - 1$

42. $f(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$

En los problemas 43 a 50, calcule las intersecciones con los ejes coordenados, si las hay, de la gráfica de la función indicada f. No trace la gráfica.

43. $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$

44. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

45. $f(x) = 4(x - 2)^2 - 1$

46. $f(x) = (2x - 3)(x^2 + 8x + 16)$

47. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 16}$

48. $f(x) = \dfrac{x(x + 1)(x - 6)}{x + 8}$

49. $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$

50. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2x - 3}$

En los problemas 51 y 52, encuentre dos funciones $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ definidas por la ecuación indicada. Determine el dominio de las funciones f_1 y f_2.

51. $x = y^2 - 5$

52. $x^2 - 4y^2 = 16$

En los problemas 53 y 54, use la gráfica de la función f que se ve en la figura para estimar los valores de $f(-3), f(-2), f(-1), f(1), f(2)$ y $f(3)$. Aproxime la intersección con el eje y.

53.

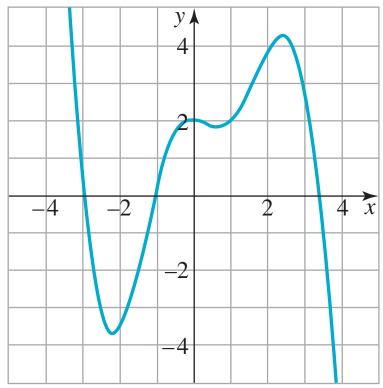


FIGURA 5.1.17 Gráfica del problema 53

54.

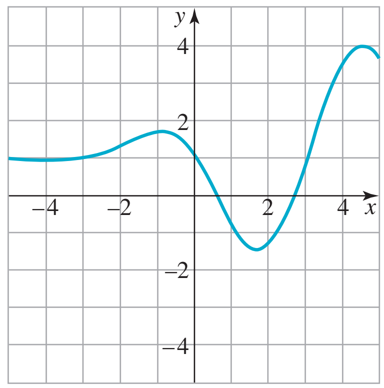


FIGURA 5.1.18 Gráfica del problema 54

En los problemas 55 y 56, use la gráfica de la función f que muestra la figura para estimar los valores de $f(-2), f(-1.5), f(0.5), f(1), f(2)$ y $f(3.2)$. Aproxime las intersecciones con el eje x.

55.

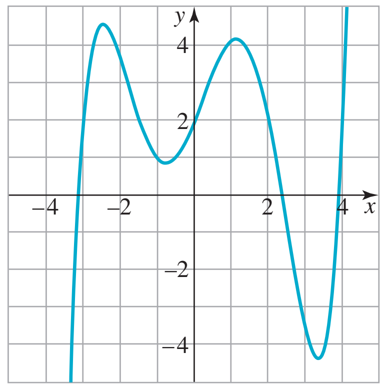


FIGURA 5.1.19 Gráfica del problema 55

56.

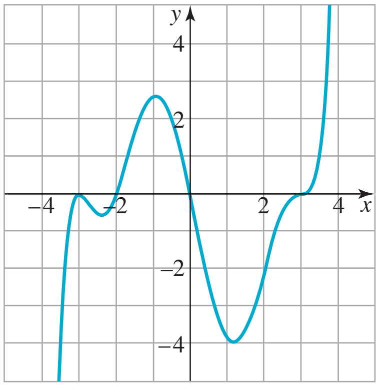


FIGURA 5.1.20 Gráfica del problema 56

57. **Función factorial** En el estudio de las matemáticas, algunas de las funciones con las que se encontrará tienen como dominio el conjunto de los enteros positivos n. La función factorial $f(n) = n!$ se define como el producto de los primeros n enteros positivos, esto es,

$$f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n.$$

a) Calcule $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$ y $f(7)$.
b) Demuestre que $f(n + 1) = f(n) \cdot (n + 1)$.
c) Simplifique $f(n + 2)/f(n)$.

58. **Una función de suma** Otra función de un entero positivo n expresa la suma de los primeros n enteros positivos elevados al cuadrado:

$$S(n) = \tfrac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

a) Calcule el valor de la suma $1^2 + 2^2 + \cdots + 99^2 + 100^2$.
b) Calcule n tal que $300 < S(n) < 400$. [*Pista:* use una calculadora].

☰ Para la discusión

59. Deduzca la ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo dominio sea ***a***) $[3, \infty)$, ***b***) $(3, \infty)$.
60. Deduzca la ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo rango sea ***a***) $[3, \infty)$, ***b***) $(3, \infty)$.
61. ¿Cuál es el único punto que puede ser tanto una intersección con el eje x como una con el eje y en la gráfica de la función $y = f(x)$?
62. Considere la función $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$. Después de factorizar el denominador y cancelar el factor común, escribimos $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$. Explique: ¿está $x = 1$ dentro del dominio de $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$?

5.2 Simetría y transformaciones

Introducción En esta sección describiremos dos ayudas para trazar gráficas de función en forma rápida y exacta. Si usted determina antes que la gráfica de una función tiene alguna *simetría*, entonces puede disminuir el trabajo a la mitad. Además, el trazo de una gráfica de una función aparentemente complicada se acelera si se reconoce que en realidad la gráfica que se pide es una *transformación* de la gráfica de una función más sencilla. Esta última ayuda de graficado se basa en los conocimientos anteriores del lector acerca de las gráficas de algunas funciones básicas.

Funciones potencia Una función que tenga la forma

$$f(x) = x^n$$

donde n representa un número real, se llama **función potencia**. El dominio de una función potencia depende de la potencia n. Por ejemplo, ya se ha visto, en la sección 5.1, que para $n = 2$, $n = \frac{1}{2}$ y $n = -1$, respectivamente, que:

- el dominio de $f(x) = x^2$ es el conjunto R de los números reales, o sea $(-\infty, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ es el conjunto R de los números reales, excepto $x = 0$.

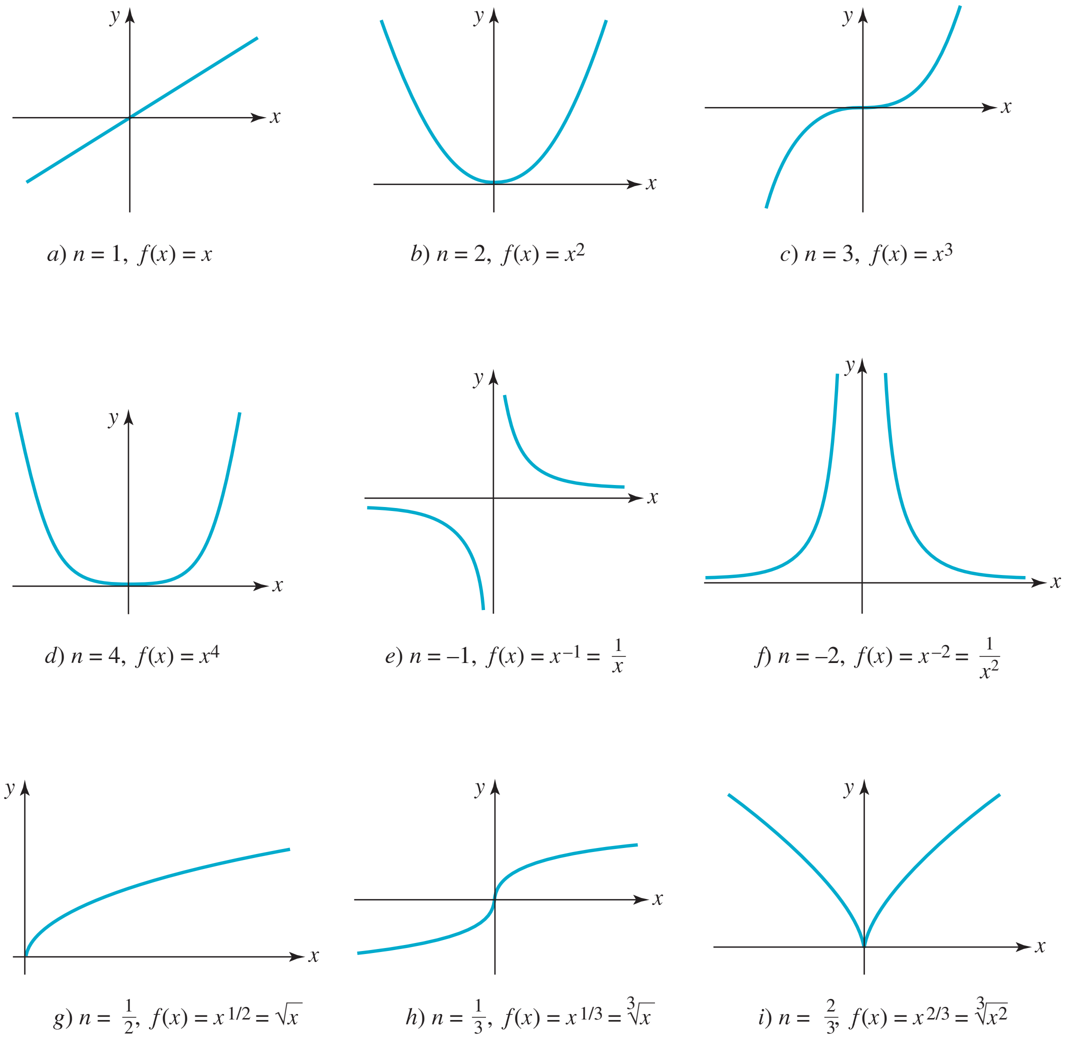


FIGURA 5.2.1 Breve catálogo de la función potencia, $f(x) = x^n$, para varias n

Las funciones sencillas de potencia, o las versiones modificadas de esas funciones se presentan con tanta frecuencia en los problemas que no es necesario gastar tiempo valioso graficándolas. Sugerimos que se aprenda (memorice) el breve catálogo de gráficas de funciones de potencia de la **FIGURA 5.2.1**. Probablemente ya sepa que la gráfica del inciso *a*) de la figura es una **recta**, y que la gráfica del inciso *b*) se llama **parábola**.

■ Simetría En la sección 4.2 describimos la simetría de una gráfica respecto al eje y, al eje x y al origen. De esos tres tipos de simetrías, la gráfica de una función puede ser simétrica respecto al eje y o al origen, pero la gráfica de una función distinta de cero *no puede* ser simétrica respecto al eje x (véase el problema 43 en los ejercicios 5.2). Si la gráfica de una función es simétrica respecto al eje y entonces, como sabemos, los puntos (x, y) y $(-x, y)$ están incluidos en la gráfica de f. Del mismo modo, si la gráfica de una función es simétrica respecto al origen, los puntos (x, y) y $(-x, -y)$ aparecen en la gráfica. Para las funciones, las dos siguientes pruebas de simetría son equivalentes a las pruebas *i*) y *ii*), respectivamente, de la página 180.

¿Puede usted explicar *por qué* la gráfica de una función no puede ser simétrica respecto al eje x?

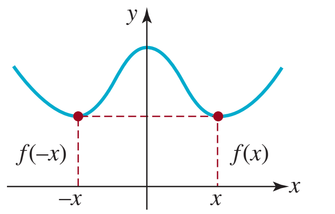


FIGURA 5.2.2 Función par; la gráfica tiene simetría con respecto al eje y

> **Definición 5.2.1 Funciones pares e impares**
>
> Suponga que por cada x en el dominio de una función f, $-x$ también está incluida en su dominio. Se dice que
>
> *i*) Una función f es **par** si $f(-x) = f(x)$.
>
> *ii*) Una función f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$.

En la **FIGURA 5.2.2** observe que si f es una función par y

$$(x, \overset{\substack{f(x)\\ \downarrow}}{y}) \text{ es un punto en su gráfica, entonces necesariamente } (-x, \overset{\substack{f(-x)\\ \downarrow}}{y}) \tag{1}$$

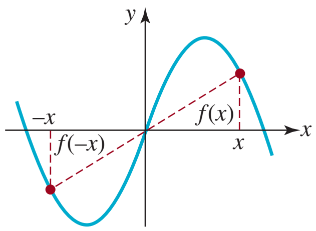


FIGURA 5.2.3 Función impar; la gráfica tiene simetría respecto al origen

también está en su gráfica. De igual modo, en la **FIGURA 5.2.3** se ve que si f es una función impar y

$$(x, \overset{\substack{f(x)\\ \downarrow}}{y}) \text{ es un punto en su gráfica, entonces necesariamente } (-x, \overset{\substack{f(-x)\,=\,-f(x)\\ \downarrow}}{-y}) \tag{2}$$

está en su gráfica. Hemos demostrado el teorema siguiente.

> **Teorema 5.2.1 Simetría**
>
> *i*) Una función f es par si y sólo si su gráfica es simétrica respecto al eje y.
>
> *ii*) Una función f es impar si y sólo si su gráfica es simétrica respecto al origen.

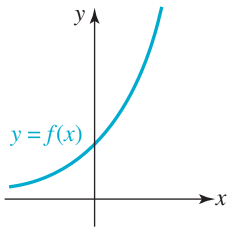


FIGURA 5.2.4 La función no es par ni impar: no hay simetría respecto al eje y ni al origen

El examen de las figuras 5.2.2 y 5.2.3 muestra que las gráficas son simétricas respecto al eje y y al origen, respectivamente. La función cuya gráfica se presenta en la **FIGURA 5.2.4** no es par ni impar y, por tanto, su gráfica no tiene simetría respecto al eje y o al origen.

En vista de la definición 5.2.1 y el teorema 5.2.1, podemos determinar la simetría de la gráfica de una función en forma algebraica.

EJEMPLO 1 Funciones impares y pares

a) $f(x) = x^3$ es una función impar, porque de acuerdo con la definición 5.2.1*ii*)

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3x^3 = -x^3 = -f(x).$$

Al inspeccionar la figura 5.2.1*c*) se ve que la gráfica de $f(x) = x^3$ es simétrica con respecto al origen. Por ejemplo, ya que $f(1) = 1$, entonces $(1, 1)$ es un punto de la gráfica de $y = x^3$. Como f es una función impar, $f(-1) = -f(1)$ implica que $(-1, -1)$ está en la gráfica.

b) $f(x) = x^{2/3}$ es una función par, porque de acuerdo con la definición 5.2.1*i*) y las leyes de los exponentes,

$$f(-x) = (-x)^{2/3} = (-1)^{2/3}x^{2/3} = (\overset{\substack{\text{la raíz cúbica de } -1 \text{ es } -1\\ \downarrow}}{\sqrt[3]{-1}})^2x^{2/3} = (-1)^2x^{2/3} = x^{2/3} = f(x).$$

En la figura 5.2.1*i*), se ve que la gráfica de *f* es simétrica respecto al eje *y*. Por ejemplo, como $f(8) = 8^{2/3} = 4$, $(8, 4)$ es un punto de la gráfica de $y = x^{2/3}$. Como *f* es una función par, $f(-8) = f(8)$ implica que $(-8, 4)$ está en la misma gráfica.

***c*)** $f(x) = x^3 + 1$ no es par ni impar. En

$$f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$$

se ve que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$. Por tanto, la gráfica de *f* no es simétrica respecto al eje *y* ni simétrica respecto al origen. ≡

Las gráficas de la figura 5.2.1, donde el inciso *g*) es la única excepción, tienen simetría, ya sea respecto al eje *y* o al origen. Las funciones de las figuras 5.2.1*b*), *d*), *f*) e *i*) son pares, mientras que las de las figuras 5.2.1*a*), *c*), *e*) y *h*) son impares.

Con frecuencia se puede trazar la gráfica de una función aplicando cierta transformación a la gráfica de una función más simple (como las de la figura 5.2.1). A continuación examinaremos dos clases de transformaciones gráficas: las rígidas y las no rígidas.

Transformaciones rígidas Una **transformación rígida** de una gráfica es aquella que sólo cambia la *posición* de la gráfica en el plano *xy*, pero no su forma. Por ejemplo, el círculo $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ con centro en $(2, 3)$ y radio $r = 1$ tiene *exactamente* la misma forma que el círculo $x^2 + y^2 = 1$, con centro en el origen. Se puede imaginar que la gráfica de $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ es la de $x^2 + y^2 = 1$, pero desplazada dos unidades horizontalmente a la derecha, y después desplazada tres unidades verticalmente hacia arriba. En el caso de la gráfica de una función $y = f(x)$, examinaremos cuatro clases de desplazamientos o traslaciones.

Teorema 5.2.2 Desplazamientos verticales y horizontales

Supongamos que $y = f(x)$ es una función y que c es una constante positiva. Entonces, la gráfica de

i) $y = f(x) + c$ es la gráfica de *f* desplazada *c* unidades verticalmente **hacia arriba**,

ii) $y = f(x) - c$ es la gráfica de *f* desplazada *c* unidades verticalmente **hacia abajo**,

iii) $y = f(x + c)$ es la gráfica de *f* desplazada *c* unidades horizontalmente **hacia la izquierda**,

iv) $y = f(x - c)$ es la gráfica de *f* desplazada *c* unidades horizontalmente **hacia la derecha**.

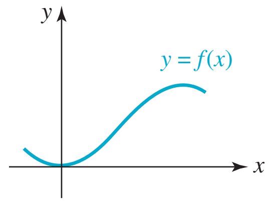
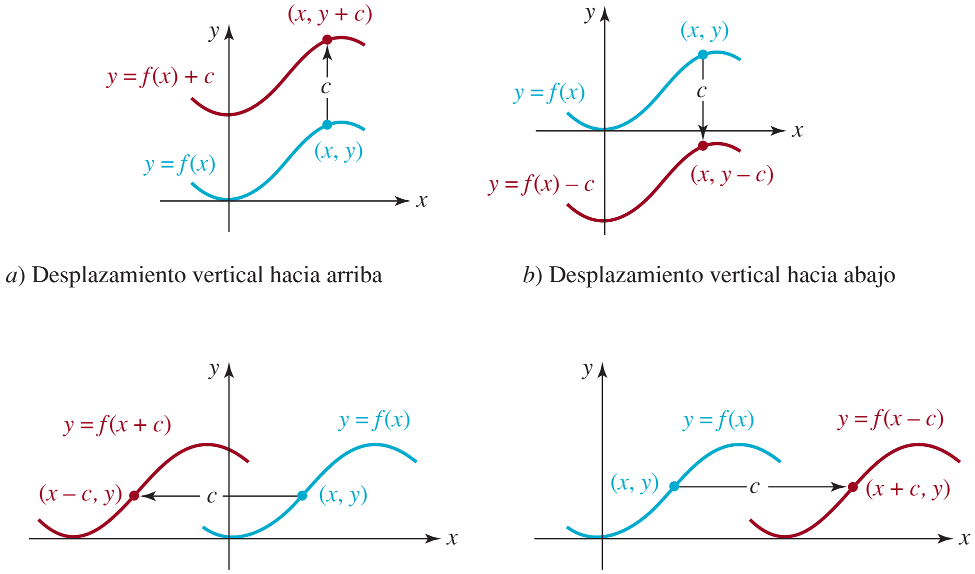


FIGURA 5.2.5 Gráfica de $y = f(x)$

Examinemos la gráfica de una función $y = f(x)$, que se ve en la **FIGURA 5.2.5**. Los desplazamientos de la gráfica que se describen en *i*) a *iv*) del teorema anterior son las gráficas, en rojo, de los incisos *a*) a *d*) de la **FIGURA 5.2.6**. Si un punto de la gráfica de $y = f(x)$ es (x, y), y la gráfica de *f* está desplazada, digamos que $c > 0$ unidades hacia arriba; entonces $(x, y + c)$ es un punto de la nueva gráfica. En general, las coordenadas *x* no cambian debido a un desplazamiento vertical [figuras 5.2.6*a*) y 5.2.6*b*)]. De igual modo, en un desplazamiento horizontal, las coordenadas *y* de los puntos en la gráfica desplazada son iguales que en la gráfica original [figuras 5.2.6*c*) y 5.2.6*d*)].

EJEMPLO 2 Desplazamientos horizontales y verticales

Las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = (x + 1)^2$ y $y = (x - 1)^2$ se obtienen a partir de la gráfica (en azul) de $f(x) = x^2$ en la **FIGURA 5.2.7*a*)** desplazando esta gráfica, respectiva-



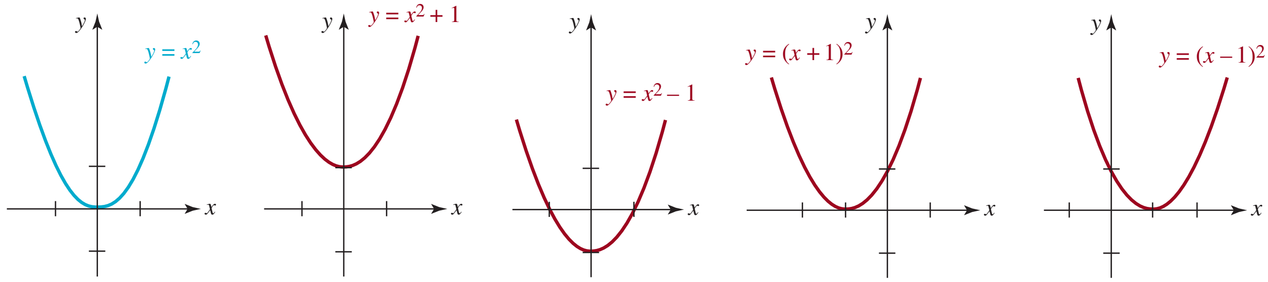
a) Desplazamiento vertical hacia arriba

b) Desplazamiento vertical hacia abajo

c) Desplazamiento horizontal hacia la izquierda

d) Desplazamiento horizontal hacia la derecha

FIGURA 5.2.6 Desplazamientos verticales y horizontales de la gráfica de $y = f(x)$, por una cantidad $c > 0$



a) Punto de partida

b) Desplazamiento hacia arriba

c) Desplazamiento hacia abajo

d) Desplazamiento hacia la izquierda

e) Desplazamiento hacia la derecha

FIGURA 5.2.7 Gráficas desplazadas del ejemplo 2

mente, 1 unidad hacia arriba (figura 5.2.7*b*), 1 unidad hacia abajo (figura 5.2.7*c*), 1 unidad hacia la izquierda (figura 5.2.7*d*) y 1 unidad hacia la derecha (figura 5.2.7*e*). ≡

Combinación de desplazamientos En general, la gráfica de una función

$$y = f(x \pm c_1) \pm c_2 \tag{3}$$

donde c_1 y c_2 son constantes positivas, combina un desplazamiento horizontal (hacia la izquierda o la derecha) con un desplazamiento vertical (hacia arriba o hacia abajo). Por ejemplo, la gráfica de $y = f(x - c_1) + c_2$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada c_1 unidades hacia la derecha, y después c_2 unidades hacia arriba.

El orden en que se hacen los desplazamientos es irrelevante. Podría hacer primero el desplazamiento hacia arriba, y después a la derecha.

EJEMPLO 3 Desplazamiento vertical y horizontal de una gráfica

Grafique $y = (x + 1)^2 - 1$.

Solución De acuerdo con lo anterior, se ve que (3) es de la forma $y = f(x + c_1) - c_2$, con $c_1 = 1$ y $c_2 = 1$. Así, la gráfica de $y = (x + 1)^2 - 1$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada

1 unidad hacia la izquierda, seguida de un desplazamiento de 1 unidad hacia abajo. Esta gráfica se muestra en la **FIGURA 5.2.8**. ≡

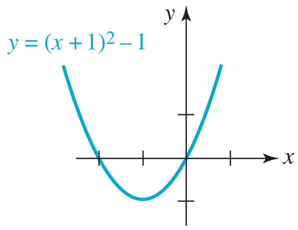


FIGURA 5.2.8 Gráfica desplazada del ejemplo 3

En la gráfica de la figura 5.2.8 se observa de inmediato que el rango de la función $y = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x$ es el intervalo $[-1, \infty)$ del eje y. También note que la gráfica tiene las intersecciones con el eje x en $(0, 0)$ y $(-2, 0)$; el lector debe comprobarlo resolviendo $x^2 + 2x = 0$. Además, si volvemos a examinar la figura 5.1.5 de la sección 5.1, veremos que la gráfica de $y = 4 + \sqrt{x - 3}$ es la gráfica de la función raíz cuadrada, $f(x) = \sqrt{x}$ (figura 5.2.1*g*) desplazada 3 unidades hacia la derecha y después 4 unidades hacia arriba.

Otra forma de transformar rígidamente la gráfica de una función es con una **reflexión** respecto a un eje coordenado.

Teorema 5.2.3 Reflexiones

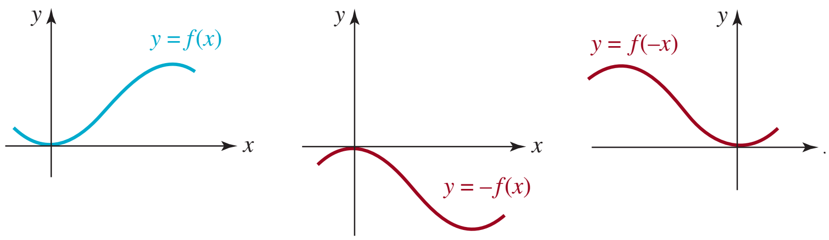
Supongamos que $y = f(x)$ es una función. Entonces, la gráfica de

i) $y = -f(x)$ es la gráfica de f reflejada en el **eje x**,

ii) $y = f(-x)$ es la gráfica de f reflejada en el **eje y**.

Reflexión o imagen especular respecto al eje vertical

En el inciso *a*) de la **FIGURA 5.2.9** se ha repetido la gráfica de una función $y = f(x)$ que se presentó en la figura 5.2.5. Las reflexiones de esta gráfica, descritas en *i*) y *ii*) del teorema anterior, se ilustran en las figuras 5.2.9*b*) y 5.2.9*c*). Si (x, y) representa un punto de la gráfica de $y = f(x)$, entonces el punto $(x, -y)$ está en la gráfica de $y = -f(x)$ y $(-x, y)$ lo está en la de $y = f(-x)$. Cada una de esas reflexiones es una imagen especular de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje coordenado respectivo.



a) Punto de partida *b*) Reflexión en el eje x *c*) Reflexión en el eje y

FIGURA 5.2.9 Reflexiones en los ejes coordenados

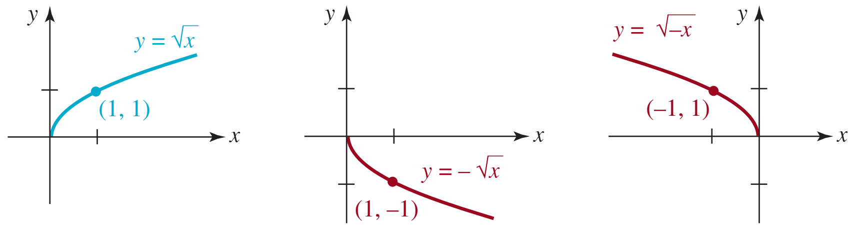
EJEMPLO 4 Reflexiones

Grafique ***a***) $y = -\sqrt{x}$ ***b***) $y = \sqrt{-x}$.

Solución El punto de partida es la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ [**FIGURA 5.2.10*a***)].

a) La gráfica de $y = -\sqrt{x}$ es la reflexión de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el eje x. Obsérvese que, en la figura 5.2.10*b*), ya que $(1, 1)$ está en la gráfica de f, el punto $(1, -1)$ está en la gráfica de $y = -\sqrt{x}$.

b) La gráfica de $y = \sqrt{-x}$ es la reflexión de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el eje y. Obsérvese que, en la figura 5.2.10*c*), como $(1, 1)$ está en la gráfica de f el punto $(-1, 1)$ está en la gráfica de $y = \sqrt{-x}$. La función $y = \sqrt{-x}$ se ve algo extraña, pero téngase en cuenta que su dominio está determinado por el requisito $-x \geq 0$, o lo que es lo mismo, $x \leq 0$, por lo que la gráfica reflejada está definida en el intervalo $(-\infty, 0]$.



a) Punto de partida *b*) Reflexión en el eje *x* *c*) Reflexión en el eje *y*

FIGURA 5.2.10 Gráficas del ejemplo 4

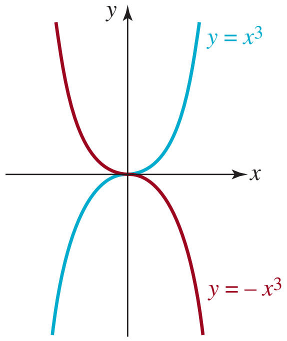


FIGURA 5.2.11 Reflexión de una función impar en el eje *y*

Si una función *f* es par, entonces $f(-x) = f(x)$ demuestra que una reflexión en el eje *y* sería exactamente la misma gráfica. Si una función es impar, entonces, con $f(-x) = -f(x)$, se ve que una reflexión de la gráfica de *f* en el eje *y* es idéntica a la gráfica de *f* reflejada en el eje *x*. En la **FIGURA 5.2.11** la curva en azul es la gráfica de la función impar $f(x) = x^3$; la curva roja es la gráfica de $y = f(-x) = (-x)^3 = -x^3$. Nótese que si la curva en azul se refleja en el eje *y* o en el eje *x*, se obtiene la curva roja.

Transformaciones no rígidas

Si una función *f* se multiplica por una constante $c > 0$, cambia la forma de la gráfica, pero se conserva, *aproximadamente*, su forma original. La gráfica de $y = cf(x)$ es la de $y = f(x)$ deformada de manera vertical; la gráfica de *f* se estira (o se alarga, o se elonga) verticalmente, o se comprime (o se aplana) de manera vertical, lo cual depende del valor de *c*. El estiramiento o la compresión de una gráfica son ejemplos de **transformaciones no rígidas**.

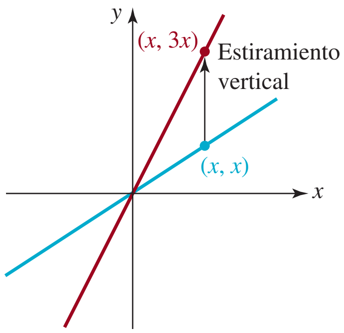


FIGURA 5.2.12 Estiramiento vertical de la gráfica de $f(x) = x$

Teorema 5.2.4 Estiramientos y compresiones verticales

Supongamos que $y = f(x)$ es una función y que *c* es una constante positiva. Entonces, la gráfica de $y = cf(x)$ es la gráfica de *f*

i) estirada verticalmente por un factor de *c* unidades, si $c > 1$,

ii) comprimida verticalmente por un factor de *c* unidades, si $0 < c < 1$.

Si (x, y) representa un punto en la gráfica de *f*, entonces el punto (x, cy) está en la gráfica de *cf*. Las gráficas de $y = x$ y de $y = 3x$ se comparan en la **FIGURA 5.2.12**; la ordenada de un punto en la gráfica de $y = 3x$ es 3 veces mayor que la ordenada del punto con la misma abscisa, en la gráfica de $y = x$. La comparación de las gráficas de $y = 10x^2$ (gráfica en azul) y $y = \frac{1}{10}x^2$ (gráfica en rojo) de la **FIGURA 5.2.13** es algo más drástica; la gráfica de $y = \frac{1}{10}x^2$ tiene un aplastamiento vertical considerable, en especial cerca del origen. Nótese que en esta descripción, *c* es positiva. Para trazar la gráfica de $y = -10x^2$ imagínela como $y = -(10x^2)$, lo cual quiere decir que primero se estira verticalmente la gráfica de $y = x^2$ por un factor de 10 y después se refleja esa gráfica en el eje *x*.

En el ejemplo siguiente se ilustran el deslizamiento, la reflexión y el estiramiento de una gráfica.

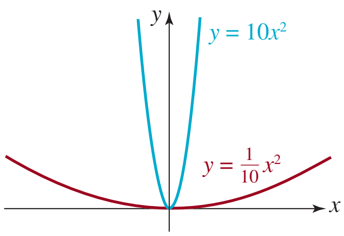


FIGURA 5.2.13 Estiramiento vertical (azul) y compresión vertical (rojo) de la gráfica de $f(x) = x^2$

EJEMPLO 5 Combinación de transformaciones

Grafique $y = 2 - 2\sqrt{x - 3}$.

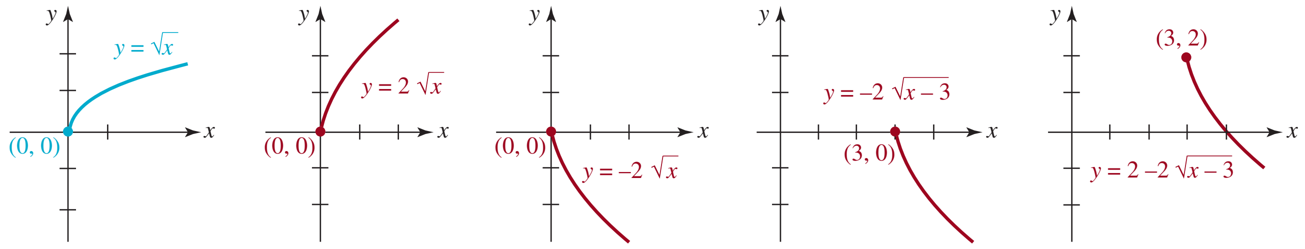
Solución El lector debe reconocer que la función dada es producto de cuatro transformaciones de la función básica $f(x) = \sqrt{x}$:

desplazamiento vertical hacia arriba ↓ desplazamiento horizontal hacia la derecha ↓

$$y = 2 - 2\sqrt{x - 3}$$

↑ reflexión en el eje y ↑ estiramiento vertical

Comenzaremos con la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ de la **FIGURA 5.2.14*a***). A continuación, se estira verticalmente esa gráfica, por un factor de 2, para obtener $y = 2\sqrt{x}$ en la figura 5.2.14*b*), que se refleja en el eje x, para obtener $y = -2\sqrt{x}$, de la figura 5.2.14*c*). Esta tercera gráfica se desplaza 3 unidades hacia la derecha, para obtener $y = -2\sqrt{x - 3}$ en la figura 5.2.14*d*). Por último, la cuarta gráfica se desplaza 2 unidades hacia arriba, para obtener $y = 2 - 2\sqrt{x - 3}$, de la figura 5.2.14*e*). Nótese que el punto (0, 0) de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ queda fijo en el estiramiento vertical y en la reflexión en el eje x, pero bajo el primer desplazamiento (horizontal), el punto (0, 0) se mueve a (3, 0) y en el segundo desplazamiento (vertical), el punto (3, 0) se mueve a (3, 2).



a) Punto de partida

b) Estiramiento vertical

c) Reflexión en el eje x

d) Desplazamiento hacia la derecha

e) Desplazamiento hacia arriba

FIGURA 5.2.14 La gráfica de $y = 2 - 2\sqrt{x - 3}$ del ejemplo 5 se muestra en el inciso *e*)

5.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-11.

En los problemas 1 a 10, use (1) y (2) para determinar si la función $y = f(x)$ es par, impar o ni par ni impar. No haga la gráfica.

1. $f(x) = 4 - x^2$

2. $f(x) = x^2 + 2x$

3. $f(x) = x^3 - x + 4$

4. $f(x) = x^5 + x^3 + x$

5. $f(x) = 3x - \dfrac{1}{x}$

6. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

7. $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$

8. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}$

9. $f(x) = |x^3|$

10. $f(x) = x|x|$

En los problemas 11 a 14, indique si la función $y = f(x)$, cuya gráfica se presenta, es par, impar o ni par ni impar.

11.

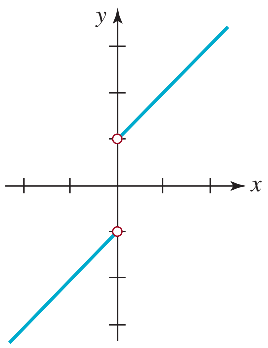


FIGURA 5.2.15 Gráfica para el problema 11

12.

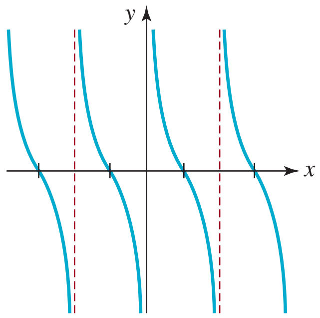


FIGURA 5.2.16 Gráfica para el problema 12

13.

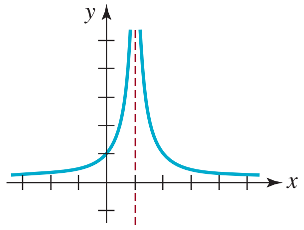


FIGURA 5.2.17 Gráfica para el problema 13

14.

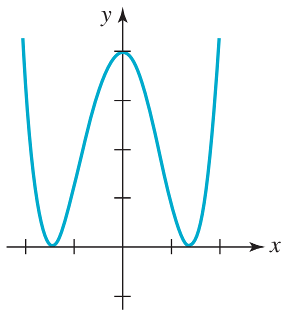


FIGURA 5.2.18 Gráfica para el problema 14

En los problemas 15 a 18, complete la gráfica de la función dada $y = f(x)$ ***a***) si f es una función par, y ***b***) si f es una función impar.

15.

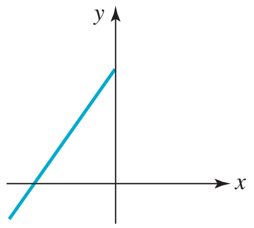


FIGURA 5.2.19 Gráfica para el problema 15

16.

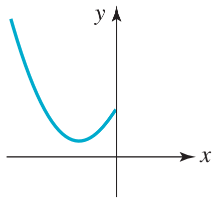


FIGURA 5.2.20 Gráfica para el problema 16

17.

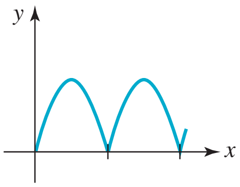


FIGURA 5.2.21 Gráfica para el problema 17

18.

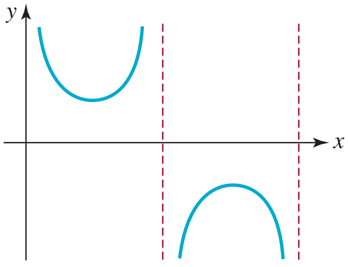


FIGURA 5.2.22 Gráfica para el problema 18

En los problemas 19 y 20, suponga que $f(-2) = 4$ y que $f(3) = 7$. Determine $f(2)$ y $f(-3)$.

19. Si f es una función par.

20. Si f es una función impar.

En los problemas 21 y 22, suponga que $g(-1) = -5$ y que $g(4) = 8$. Determine $g(1)$ y $g(-4)$.

21. Si g es una función impar.

22. Si g es una función par.

En los problemas 23 a 32, los puntos $(-2, 1)$ y $(3, -4)$ están en la gráfica de la función $y = f(x)$. Determine los puntos correspondientes en la gráfica que obtuvo con las transformaciones dadas.

23. La gráfica de f desplazada 2 unidades hacia arriba.

24. La gráfica de f desplazada 5 unidades hacia abajo.

25. La gráfica de f desplazada 6 unidades hacia la izquierda.

26. La gráfica de f desplazada 1 unidad hacia la derecha.

27. La gráfica de f desplazada 1 unidad hacia arriba y 4 unidades hacia la izquierda.

28. La gráfica de f desplazada 3 unidades hacia abajo y 5 unidades hacia la derecha.

29. La gráfica de f reflejada en el eje y.

30. La gráfica de f reflejada en el eje x.

31. La gráfica de f estirada verticalmente por un factor de 15 unidades.

32. La gráfica de f comprimida verticalmente por un factor de $\frac{1}{4}$ de unidad, y después reflejada en el eje x.

En los problemas 33 a 36, use la gráfica de la función $y = f(x)$ que se indica en la figura, para graficar las funciones siguientes:

a) $y = f(x) + 2$ *b*) $y = f(x) - 2$
c) $y = f(x + 2)$ *d*) $y = f(x - 5)$
e) $y = -f(x)$ *f*) $y = f(-x)$

33.

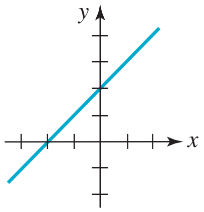


FIGURA 5.2.23 Gráfica para el problema 33

34.

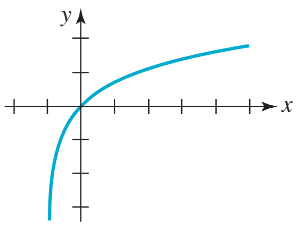


FIGURA 5.2.24 Gráfica para el problema 34

35.

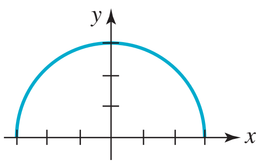


FIGURA 5.2.25 Gráfica para el problema 35

36.

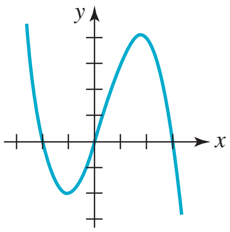


FIGURA 5.2.26 Gráfica para el problema 36

En los problemas 37 y 38, use la gráfica de la función $y = f(x)$ que muestra la figura, para graficar las funciones siguientes.

a) $y = f(x) + 1$ *b*) $y = f(x) - 1$
c) $y = f(x + \pi)$ *d*) $y = f(x - \pi/2)$
e) $y = -f(x)$ *f*) $y = f(-x)$
g) $y = 3f(x)$ *h*) $y = -\frac{1}{2}f(x)$

37.

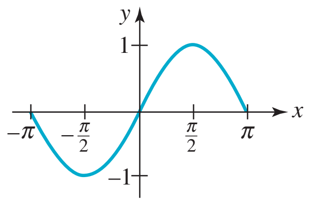


FIGURA 5.2.27 Gráfica para el problema 37

38.

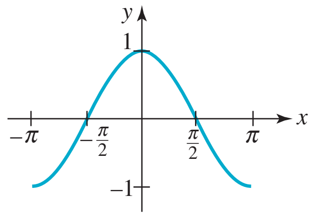


FIGURA 5.2.28 Gráfica para el problema 38

En los problemas 39 a 42, halle la ecuación de la gráfica final después de aplicar las transformaciones indicadas a la gráfica de $y = f(x)$.

39. La gráfica de $f(x) = x^3$ desplazada 5 unidades hacia arriba y 1 unidad hacia la derecha.

40. La gráfica de $f(x) = x^{2/3}$, estirada verticalmente 3 unidades, y a continuación desplazada 2 unidades hacia la derecha.

41. La gráfica de $f(x) = x^4$, reflejada en el eje x y desplazada 7 unidades hacia la izquierda.

42. La gráfica de $f(x) = 1/x$, reflejada en el eje y y desplazada 5 unidades hacia la izquierda y 10 unidades hacia abajo.

Para la discusión

43. Explique por qué la gráfica de una función $y = f(x)$ no puede ser simétrica respecto al eje x.

44. ¿Qué puntos, si los hay, en la gráfica de $y = f(x)$ permanecen fijos, esto es, igual en la gráfica resultante después de un estiramiento o una compresión vertical? ¿Y después de una reflexión en el eje x? ¿Después de una reflexión en el eje y?

45. Indique la relación que hay entre las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(|x|)$.

46. Indique qué relación hay entre las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(cx)$, donde $c > 0$ es una constante. Considere dos casos: $0 < c < 1$ y $c > 1$.

47. Revise las gráficas de $y = x$ y $y = 1/x$, de la figura 5.2.1. A continuación indique cómo obtener la gráfica de la recíproca $y = 1/f(x)$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$. Trace la gráfica de $y = 1/f(x)$ a partir de la función cuya gráfica se ve en la figura 5.2.26.

48. En términos de transformaciones de gráficas, describa la relación entre la gráfica de la función $y = f(cx)$, donde c es una constante, y la gráfica de $y = f(x)$. Considere dos casos: $c > 1$ y $0 < c < 1$. Ilustre sus respuestas con varios ejemplos.

5.3 Funciones lineal y cuadrática

Las funciones polinomiales se estudian a fondo en el capítulo 6.

Introducción Cuando n es un entero no negativo, la función potencia $f(x) = x^n$ es sólo un caso especial de una clase de funciones llamadas **funciones polinomiales**. Una función polinomial tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{1}$$

donde n es un entero no negativo. Las tres funciones consideradas en esta sección, $f(x) = a_0$, $f(x) = a_1x + a_0$ y $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ son funciones polinomiales. En las definiciones que siguen cambiamos los coeficientes de estas funciones por símbolos más convenientes.

Definición 5.3.1 Función constante

Una **función constante** $y = f(x)$ es una que tiene la forma

$$f(x) = a \tag{2}$$

donde a es una constante.

Definición 5.3.2 Función lineal

Una **función lineal** $y = f(x)$ es aquella que tiene la forma

$$f(x) = ax + b \tag{3}$$

donde $a \neq 0$ y b son constantes.

En la forma $y = a$ sabemos, por lo aprendido en la sección 4.3, que la gráfica de una función constante es simplemente una recta horizontal. Del mismo modo, cuando se escribe como $y = ax + b$, reconocemos una función lineal como la forma pendiente-intersección de una recta, donde el símbolo a desempeña el papel de la pendiente m. Por tanto, la gráfica de toda función lineal es una recta no horizontal con pendiente. El **dominio** de una función constante y de una función lineal es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$.

La función de segundo grado $y = x^2$ que desempeñó un papel importante en la sección 5.2 es miembro de una familia de funciones llamadas **funciones cuadráticas**.

Definición 5.3.3 Función cuadrática

Una **función cuadrática** $y = f(x)$ es una función que tiene la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{4}$$

donde $a \neq 0$, b y c son constantes.

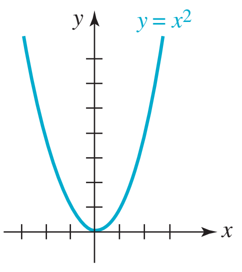


FIGURA 5.3.1 Gráfica de la parábola más sencilla

Gráficas La gráfica de toda función cuadrática, a la que se le llama **parábola**, tiene la misma forma básica que la función de elevar al cuadrado, $y = x^2$, que se muestra en la **FIGURA 5.3.1**. En los ejemplos presentados a continuación veremos que las gráficas de las funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ sólo son transformaciones de la gráfica de $y = x^2$:

- La gráfica de $f(x) = ax^2$, con $a > 0$, es la gráfica de $y = x^2$, **estirada** verticalmente cuando $a > 1$ y **comprimida** verticalmente cuando $0 < a < 1$.

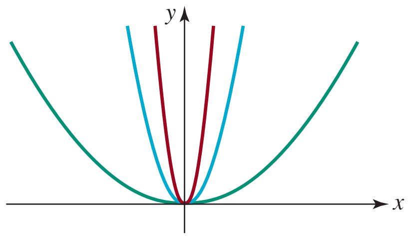
- La gráfica de $f(x) = ax^2$, $a < 0$, es la gráfica de $y = ax^2$, $a > 0$, **reflejada** en el eje x.
- La gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $b \neq 0$, es la gráfica de $y = ax^2$ **desplazada** horizontal o verticalmente.

De acuerdo con los dos primeros puntos de esta lista, se llega a la conclusión de que la gráfica de una función cuadrática se abre hacia arriba, como en la figura 5.3.1, si $a > 0$ y se abre hacia abajo si $a < 0$.

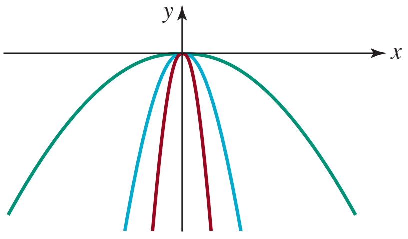
EJEMPLO 1 Estiramiento, compresión y reflexión

a) Las gráficas de $y = 4x^2$ y $y = \frac{1}{10}x^2$ son, respectivamente, un estiramiento vertical y una compresión vertical de la gráfica de $y = x^2$. Las gráficas de esas funciones se muestran en la **FIGURA 5.3.2*a***); la gráfica de $y = 4x^2$ se ve en rojo, la de $y = \frac{1}{10}x^2$ es verde, y la de $y = x^2$ está en azul.

b) Las gráficas de $y = -4x^2$, $y = -\frac{1}{10}x^2$ y $y = -x^2$ se obtienen a partir de las gráficas de las funciones del inciso *a*), reflejándolas en el eje x [figura 5.3.2*b*)].



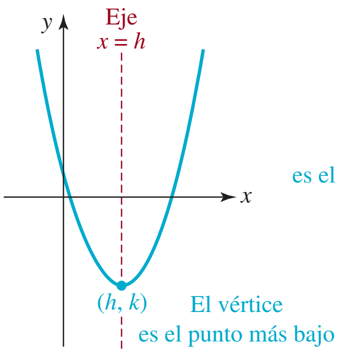
a) La gráfica en rojo es un estiramiento vertical de la gráfica en azul; la gráfica en verde es una compresión vertical de la gráfica en azul



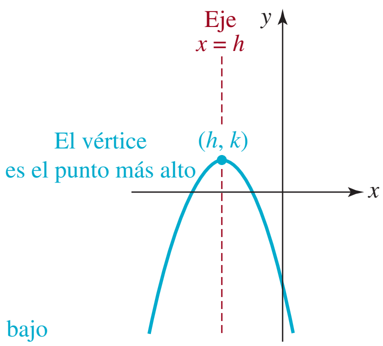
b) Reflexiones en el eje x

FIGURA 5.3.2 Gráficas de las funciones cuadráticas del ejemplo 1

Vértice y eje Si la gráfica de una función cuadrática se abre hacia arriba, $a > 0$ (o hacia abajo, $a < 0$), el punto más bajo (más alto) (h, k) de la parábola se llama **vértice**. Todas las parábolas son simétricas respecto a una recta vertical que pasa por el vértice (h, k). La recta $x = h$ se llama **eje de simetría**, o simplemente **eje** de la parábola (**FIGURA 5.3.3**).



a) $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$



b) $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$

FIGURA 5.3.3 Vértice y eje de una parábola

Forma normal El vértice de una parábola puede determinarse ordenando la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ en su **forma normal**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k. \tag{5}$$

Véanse las secciones 3.3 y 4.2.

La forma (5) se obtiene a partir de la ecuación (4), *completando el cuadrado* en x. Para completar el cuadrado en la ecuación (4) se comienza factorizando el número a de todos los términos que contienen a la variable x:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c. \end{aligned}$$

Dentro de los paréntesis se suma y se resta el cuadrado de la mitad del coeficiente de x:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \overset{\text{cuadrado de } \frac{b}{2a}}{\overset{\downarrow}{\frac{b^2}{4a^2}}} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c && \leftarrow \text{los términos en color suman 0} \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c && \leftarrow \text{nótese que } a \cdot \left(-\frac{b^2}{4a^2}\right) = -\frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned} \tag{6}$$

La última expresión es la ecuación (5), en la cual se iguala $h = -b/2a$ y $k = (4ac - b^2)/4a$. Si $a > 0$, entonces por necesidad $a(x - h)^2 \geq 0$. Por consiguiente, $f(x)$ en la ecuación (5) es mínima cuando $(x - h)^2 = 0$; esto es, cuando $x = h$. Con un argumento similar se demuestra que si $a < 0$ en (5), $f(x)$ es un valor máximo para $x = h$. Por consiguiente, (h, k) es el vértice de la parábola. La ecuación del eje x de la parábola es $x = h$ o $x = -b/2a$.

Recomendamos mucho que *no memorice* el resultado del último renglón de las ecuaciones (6), sino que practique cada vez completar el cuadrado. Sin embargo, si el profesor permite la memorización para ahorrar tiempo, el vértice se puede determinar calculando las coordenadas del punto

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right). \tag{7}$$

Intersecciones con los ejes La gráfica de la ecuación (4) tiene siempre una **intersección con el eje *y*** puesto que 0 está en el dominio de f. De $f(0) = c$ se advierte que la intersección de una función cuadrática con el eje y es $(0, c)$. Para determinar si la gráfica tiene intersecciones con el eje x se debe resolver la ecuación $f(x) = 0$. Eso se puede hacer por factorización o usando la fórmula cuadrática. Recuerde que una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, tiene las soluciones

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Distinguiremos tres casos, de acuerdo con el signo algebraico del discriminante $b^2 - 4ac$.

- Si $b^2 - 4ac > 0$ hay dos soluciones reales distintas, x_1 y x_2. La parábola corta el eje x en $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ hay una sola solución real x_1. El vértice de la parábola está en el eje x, en $(x_1, 0)$. La parábola es tangente al eje x, es decir, lo toca en ese punto.
- Si $b^2 - 4ac < 0$ no hay soluciones reales. La parábola no cruza al eje x.

Como verá en el ejemplo que sigue, se puede obtener un bosquejo razonable de una parábola graficando las intersecciones con los ejes coordenados y el vértice.

EJEMPLO 2 Gráfica usando las intersecciones con los ejes y el vértice

Grafique $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Solución Como $a = 1 > 0$, se ve que la parábola se abre hacia arriba. De $f(0) = -3$, se obtiene la intersección con el eje y en $(0, -3)$. Para ver si hay intersecciones con el eje x se resuelve $x^2 - 2x - 3 = 0$. Factorizando:

$$(x + 1)(x - 3) = 0,$$

y se ve que las soluciones son $x = -1$ y $x = 3$. Las intersecciones con el eje x están en $(-1, 0)$ y en $(3, 0)$. Para ubicar el vértice se completa el cuadrado:

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 4.$$

De este modo llegamos a la forma normal, que es $f(x) = (x - 1)^2 - 4$. Si $h = 1$ y $k = -4$, la conclusión es que el vértice está en $(1, -4)$. Con esta información trazamos una parábola que pase por estos cuatro puntos, como se ve en la **FIGURA 5.3.4**.

Una última observación. Al ubicar el vértice, en forma automática se determina el rango de una función cuadrática. En este ejemplo, $y = -4$ es el número menor del rango de f, por lo que el rango de f es el intervalo $[-4, \infty)$ en el eje y. ≡

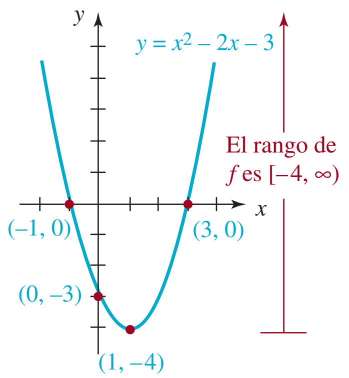


FIGURA 5.3.4 Parábola del ejemplo 2

EJEMPLO 3 El vértice está en la intersección con el eje *x*

Grafique $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$.

Solución La gráfica de esta función cuadrática es una parábola que se abre hacia abajo, porque $a = -4 < 0$. Para completar el cuadrado se comienza sacando a –4 como factor común de los dos términos en x:

$$\begin{aligned} f(x) &= -4x^2 + 12x - 9 \\ &= -4(x^2 - 3x) - 9 \\ &= -4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) - 9 \\ &= -4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - 9 + 9 \quad \leftarrow \begin{array}{l} 9 = (-4)\cdot(-\frac{9}{4}) \\ \text{de la línea anterior} \end{array} \\ &= -4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right). \end{aligned}$$

Entonces, la forma normal es $f(x) = -4(x - \frac{3}{2})^2$. Con $h = \frac{3}{2}$ y $k = 0$, se ve que el vértice está en $(\frac{3}{2}, 0)$. La intersección con el eje y está en $(0, f(0)) = (0, -9)$. Al resolver $-4x^2 + 12x - 9 = -4(x - \frac{3}{2})^2 = 0$ se ve que sólo hay un corte con el eje x, en $(\frac{3}{2}, 0)$, lo cual era de esperarse, porque el vértice $(\frac{3}{2}, 0)$ está en el eje x. Como se ve en la **FIGURA 5.3.5**, se puede obtener un esquema aproximado sólo con estos dos puntos. La parábola es tangente al eje x en $(\frac{3}{2}, 0)$. ≡

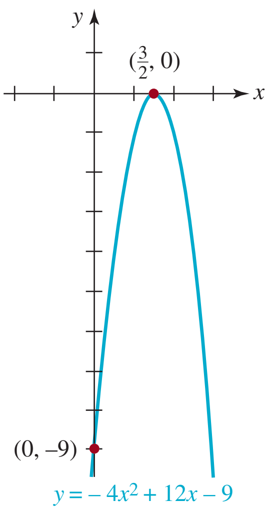


FIGURA 5.3.5 Parábola del ejemplo 3

EJEMPLO 4 Uso de la ecuación (7) para encontrar el vértice

Grafique $f(x) = x^2 + 2x + 4$.

Solución La gráfica es una parábola que se abre hacia arriba, porque $a = 1 > 0$. Para fines de ilustración, usaremos esta vez la ecuación (7) para determinar el vértice. Con $b = 2$, $-b/2a = -2/2 = -1$, y

$$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 4 = 3$$

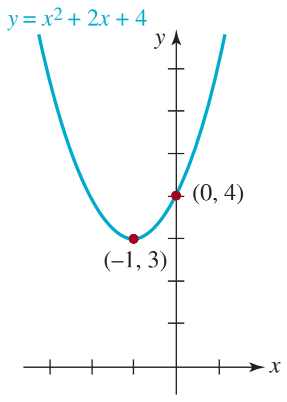


FIGURA 5.3.6 Parábola del ejemplo 4

el vértice está en $(-1, f(-1)) = (-1, 3)$. La intersección con el eje y está en $(0, f(0)) = (0, 4)$, pero la fórmula cuadrática indica que la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 + 2x + 4 = 0$ no tiene soluciones reales. En vista de lo anterior, la gráfica no tiene intersección con el eje x. Como el vértice está arriba del eje x y la parábola se abre hacia arriba, la gráfica debe estar toda arriba del eje x [**FIGURA 5.3.6**]. ≡

■ Gráficas por transformaciones La forma normal, ecuación (5), describe con claridad cómo se traza la gráfica de cualquier función cuadrática a partir de la gráfica de $y = x^2$, comenzando con una transformación no rígida, seguida por dos transformaciones rígidas:

- $y = ax^2$ es la gráfica de $y = x^2$ estirada o comprimida verticalmente.
- $y = a(x - h)^2$ es la gráfica de $y = ax^2$ desplazada $|h|$ unidades horizontalmente.
- $y = a(x - h)^2 + k$ es la gráfica de $y = a(x - h)^2$ desplazada $|k|$ unidades verticalmente.

En la **FIGURA 5.3.7** se ilustran los desplazamientos horizontal y vertical en el caso donde $a > 0$, $h > 0$ y $k > 0$.

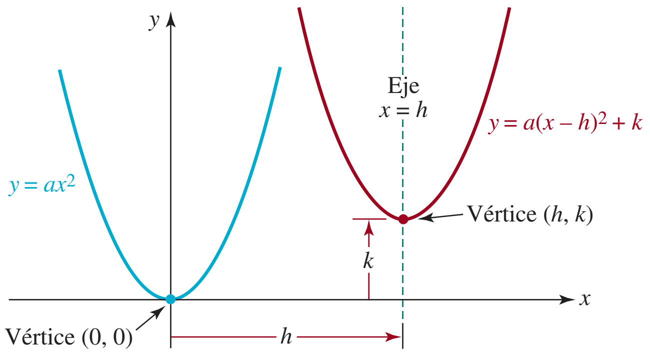


FIGURA 5.3.7 La gráfica en rojo se obtiene desplazando la gráfica en azul h unidades hacia la derecha, y k unidades hacia arriba

EJEMPLO 5 Gráficas con desplazamiento horizontal

Compare las gráficas de ***a***) $y = (x - 2)^2$ y ***b***) $y = (x + 3)^2$.

Solución La gráfica en línea interrumpida azul, en la **FIGURA 5.3.8**, es la gráfica de $y = x^2$. Al comparar las funciones *a*) y *b*) con la ecuación (6), se ve en cada caso que $a = 1$ y $k = 0$. Eso quiere decir que ninguna de ellas tiene estiramiento o compresión verticales, y que ninguna está desplazada verticalmente.

a) Igualando $h = 2$, la gráfica de $y = (x - 2)^2$ es la gráfica de $y = x^2$ desplazada horizontalmente 2 unidades hacia la derecha. El vértice (0, 0) de $y = x^2$ se convierte en el vértice (2, 0) de $y = (x - 2)^2$. Véase la gráfica en rojo de la figura 5.3.8.

b) Si hacemos que $h = -3$, la gráfica de $y = (x + 3)^2$ es la gráfica de $y = x^2$ desplazada $|-3| = 3$ unidades horizontalmente hacia la izquierda. El vértice (0, 0) de $y = x^2$ se convierte en el vértice $(-3, 0)$ de $y = (x + 3)^2$. Vea la gráfica en verde de la figura 5.3.8. ≡

EJEMPLO 6 Gráfica desplazada

Grafique $y = 2(x - 1)^2 - 6$.

Solución Ésta es la gráfica de $y = x^2$ estirada hacia arriba verticalmente, seguida por un desplazamiento horizontal de 1 unidad hacia la derecha, y después por un desplazamiento vertical de 6 unidades hacia abajo. En la **FIGURA 5.3.9**, el lector debe notar la forma en que el vértice (0, 0) de la gráfica de $y = x^2$ se mueve al punto (1, –6) en la gráfica de

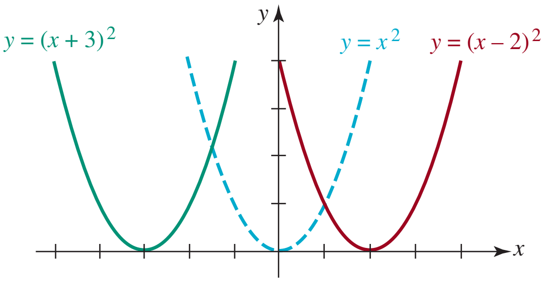
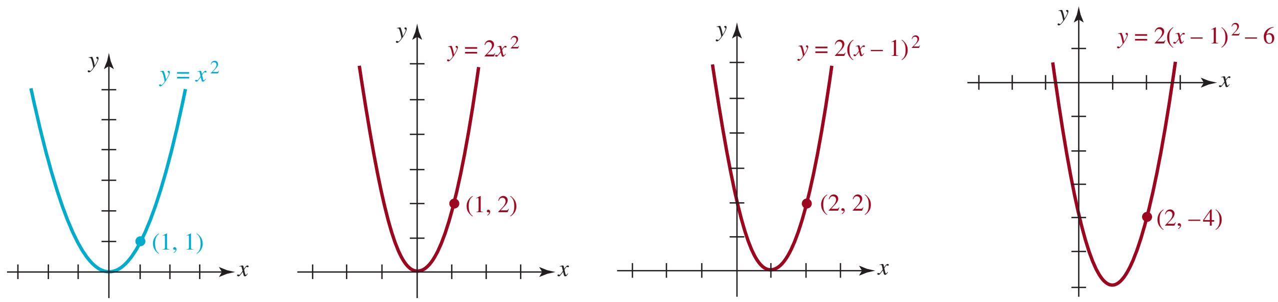


FIGURA 5.3.8 Gráficas desplazadas del ejemplo 5

$y = 2(x - 1)^2 - 6$ como resultado de estas transformaciones. También debe comprender la forma en que el punto (1, 1) de la figura 5.3.9*a*) termina siendo el punto (2, −4) de la figura 5.3.9*d*).



a) Parábola básica *b*) Estiramiento vertical *c*) Desplazamiento horizontal *d*) Desplazamiento vertical

FIGURA 5.3.9 Gráficas del ejemplo 6

≡

■ Solución gráfica de desigualdades Las gráficas pueden ayudar a resolver ciertas desigualdades cuando una tabla de signos no es útil porque la función cuadrática no se factoriza en forma cómoda. Por ejemplo, la función cuadrática del ejemplo 6 equivale a $y = 2x^2 - 4x - 4$. Si se nos pidiera resolver la desigualdad $2x^2 - 4x - 4 \geq 0$, en la figura 5.3.9*d*) veríamos que $y \geq 0$ hacia la izquierda de la intersección con el eje *x* en el eje de las *x* negativas, y a la derecha de la intersección con el eje *x* en el eje de las *x* positivas. Las abscisas de estas intersecciones, obtenidas resolviendo $2x^2 - 4x - 4 = 0$ con la fórmula cuadrática, son $1 - \sqrt{3}$ y $1 + \sqrt{3}$. Entonces, la solución de $2x^2 - 4x - 4 \geq 0$ es $(-\infty, 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}, \infty)$.

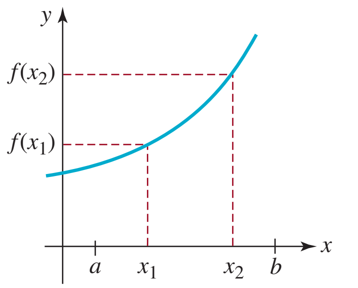
■ Funciones crecientes y decrecientes Hemos visto en las figuras 4.3.2*a*) y 4.3.2*b*) que si $a > 0$ (que, como acabamos de ver, hace las veces de *m*), los valores de una función lineal $f(x) = ax + b$ crecen cuando *x* aumenta, en tanto que para $a < 0$, los valores de $f(x)$ disminuyen cuando *x* aumenta. Los conceptos creciente y decreciente se pueden extender a *cualquier* función. La posibilidad de determinar intervalos en los que una función *f* crece o decrece desempeña un papel importante en aplicaciones de cálculo.

Definición 5.3.4 Funciones crecientes y decrecientes

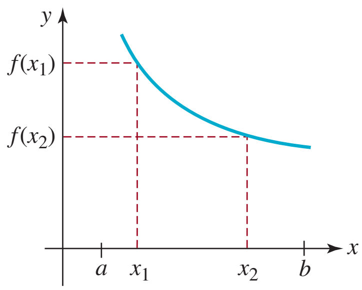
Suponga que $y = f(x)$ es una función definida en un intervalo y que x_1 y x_2 son dos números cualesquiera en el intervalo tales que $x_1 < x_2$. Entonces, la función *f* es

i) **creciente** en el intervalo, si $f(x_1) < f(x_2)$ (8)

ii) **decreciente** en el intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$ (9)



a) $f(x_1) < f(x_2)$



b) $f(x_1) > f(x_2)$

FIGURA 5.3.10 La función *f* es creciente en [*a*, *b*] en *a*); y decreciente en [*a*, *b*] en *b*)

En la **FIGURA 5.3.10*a*)** la función *f* es creciente en el intervalo [*a*, *b*], en tanto que *f* es decreciente en el intervalo [*a*, *b*] en la figura 5.3.10*b*). Una función lineal $f(x) = ax + b$

es creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$ en el caso de $a > 0$, y decreciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$ cuando $a < 0$. Del mismo modo, si $a > 0$, entonces la función cuadrática f en (5) es decreciente en el intervalo $(-\infty, h]$ y creciente en el intervalo $[h, \infty)$. Si $a < 0$, tenemos precisamente lo contrario, es decir, f es creciente en $(-\infty, h]$ y decreciente en $[h, \infty)$. Si examinamos de nuevo la figura 5.3.6, veremos que $f(x) = x^2 + 2x + 4$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1]$ y creciente en $[-1, \infty)$. En general, si h es la coordenada x del vértice de una función cuadrática f, entonces f cambia ya sea de creciente a decreciente o de decreciente a creciente en $x = h$. Por ello, el vértice (h, k) de la gráfica de una función cuadrática se llama también **punto de inflexión** de la gráfica de f.

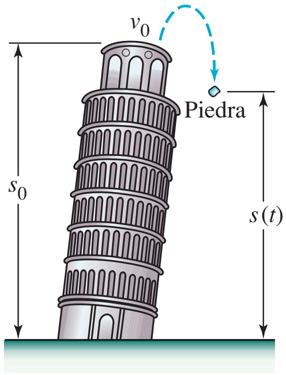


FIGURA 5.3.11 Piedra lanzada hacia arriba desde una altura inicial s_0

Objeto en caída libre En términos generales, una ecuación o una función que se construye con base en ciertos supuestos sobre alguna situación o fenómeno del mundo real con la intención de describir dicho fenómeno se denomina **modelo matemático**. Supongamos que un objeto, como una pelota, se lanza ya sea directamente hacia arriba (hacia abajo) o simplemente se deja caer desde una altura inicial s_0. Entonces, si la dirección positiva se toma hacia arriba, la altura $s(t)$ del objeto sobre el suelo se determina con la función cuadrática

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0, \tag{10}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad (-32 pies/s^2 o -9.8 m/s^2); v_0 es la velocidad inicial que se imparte al objeto, y t es el tiempo, expresado en segundos (**FIGURA 5.3.11**). Si se deja caer el objeto, entonces $v_0 = 0$. Para deducir la ecuación (10) se supone que el movimiento se efectúa cerca de la superficie terrestre, y entonces no se tiene en cuenta los efectos de retardo debidos a la resistencia del aire. También, la velocidad del objeto cuando está en el aire se determina con la función lineal

$$v(t) = gt + v_0. \tag{11}$$

(Véanse los problemas 59 a 62, en los ejercicios 5.3.)

5.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-12.

En los problemas 1 y 2, halle una función lineal (3) que satisfaga las dos condiciones dadas.

1. $f(-1) = 5, f(1) = 6$
2. $f(-1) = 1 + f(2), f(3) = 4f(1)$

En los problemas 3 a 6, halle el punto de intersección de las gráficas de las funciones lineales dadas. Dibuje las dos rectas.

3. $f(x) = -2x + 1, g(x) = 4x + 6$
4. $f(x) = 2x + 5, g(x) = \frac{3}{2}x + 5$
5. $f(x) = 4x + 7, g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$
6. $f(x) = 2x - 10, g(x) = -3x$

En los problemas 7 a 12, para la función dada, calcule el cociente $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, donde h es una constante.

7. $f(x) = -9x + 12$
8. $f(x) = \frac{4}{3}x - 5$
9. $f(x) = -x^2 + x$
10. $f(x) = 5x^2 - 7x$
11. $f(x) = x^2 - 4x + 2$
12. $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$

En los problemas 13 a 18, trace la gráfica de la función f indicada.

13. $f(x) = 2x^2$
14. $f(x) = -2x^2$
15. $f(x) = 2x^2 - 2$
16. $f(x) = 2x^2 + 5$
17. $f(x) = -2x^2 + 1$
18. $f(x) = -2x^2 - 3$

En los problemas 19 a 30, en el caso de la función cuadrática f:

a) Determine todas las intersecciones con los ejes de la gráfica de f.
b) Exprese la función f en la forma normal.
c) Determine el vértice y el eje de simetría.
d) Trace la gráfica de f.

19. $f(x) = x(x + 5)$

20. $f(x) = -x^2 + 4x$

21. $f(x) = (3 - x)(x + 1)$

22. $f(x) = (x - 2)(x - 6)$

23. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

24. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

25. $f(x) = 4x^2 - 4x + 3$

26. $f(x) = -x^2 + 6x - 10$

27. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$

28. $f(x) = x^2 - 2x - 7$

29. $f(x) = x^2 - 10x + 25$

30. $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

En los problemas 31 y 32, calcule el valor máximo o el valor mínimo de la función f. Indique cuál es el rango de la función f.

31. $f(x) = 3x^2 - 8x + 1$

32. $f(x) = -2x^2 - 6x + 3$

En los problemas 33 a 36, determine el intervalo más grande en el que la función f sea creciente, y el intervalo más grande en el que la función f sea decreciente.

33. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 25$

34. $f(x) = -(x + 10)^2$

35. $f(x) = -2x^2 - 12x$

36. $f(x) = x^2 + 8x - 1$

En los problemas 37 a 42, describa, en palabras, cómo se puede obtener la gráfica de la función indicada a partir de la gráfica de $y = x^2$, mediante transformaciones rígidas o no rígidas.

37. $f(x) = (x - 10)^2$

38. $f(x) = (x + 6)^2$

39. $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 4)^2 + 9$

40. $f(x) = 10(x - 2)^2 - 1$

41. $f(x) = (-x - 6)^2 - 4$

42. $f(x) = -(1 - x)^2 + 1$

En los problemas 43 a 48, la gráfica que se ve es $y = x^2$, desplazada y/o reflejada en el plano xy. Escriba la ecuación de la gráfica.

43.

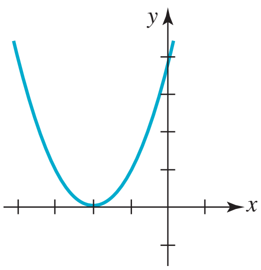


FIGURA 5.3.12 Gráfica para el problema 43

44.

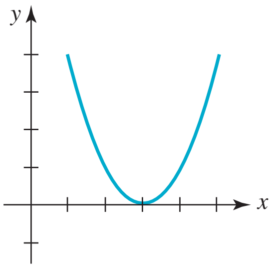


FIGURA 5.3.13 Gráfica para el problema 44

45.

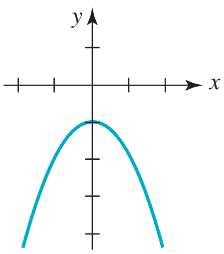


FIGURA 5.3.14 Gráfica para el problema 45

46.

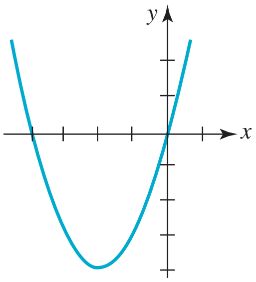


FIGURA 5.3.15 Gráfica para el problema 46

47.

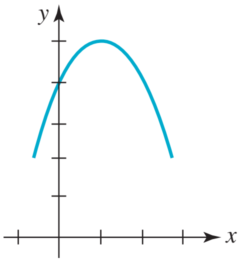


FIGURA 5.3.16 Gráfica para el problema 47

48.

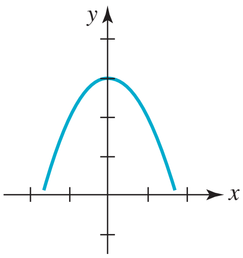


FIGURA 5.3.17 Gráfica para el problema 48

En los problemas 49 y 50, deduzca la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ que satisfaga las condiciones dadas.

49. f tiene los valores $f(0) = 5$, $f(1) = 10$ y $f(-1) = 4$

50. Su gráfica pasa por $(2, -1)$ y los ceros de f son 1 y 3

En los problemas 51 y 52, deduzca las funciones cuadráticas en su forma normal $f(x) = a(x - h)^2 + k$, que satisfaga las condiciones indicadas.

51. El vértice de la gráfica de f está en $(1, 2)$, y la gráfica pasa por $(2, 6)$.

52. El valor máximo de f es 10; el eje de simetría es $x = -1$ y la intersección con el eje y es $(0, 8)$.

En los problemas 53 a 56, trace la región del plano xy que está acotada entre las gráficas de las funciones indicadas. Determine los puntos de intersección de las gráficas.

53. $y = -x + 4, \quad y = x^2 + 2x$

54. $y = 2x - 2, \quad y = 1 - x^2$

55. $y = x^2 + 2x + 2, \quad y = -x^2 - 2x + 2$

56. $y = x^2 - 6x + 1, \quad y = -x^2 + 2x + 1$

57. ***a***) Exprese, en función de x, el cuadrado de la distancia d del punto (x, y) en la gráfica de $y = 2x$, al punto $(5, 0)$ indicado en la **FIGURA 5.3.18**.

b) Use la función del inciso *a*) para calcular el punto (x, y) que es el más cercano a $(5, 0)$.

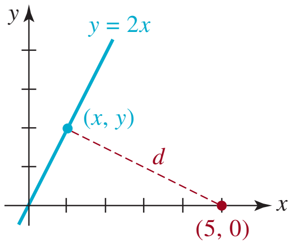


FIGURA 5.3.18 Distancia para el problema 57

Aplicaciones diversas

58. Tiro con arco Como se ve en la **FIGURA 5.3.19**, una flecha disparada con un ángulo de 45° con respecto a la horizontal, describe un arco parabólico definido por la ecuación $y = ax^2 + x + c$. Use el hecho de que la flecha se lanza a una altura vertical de 6 pies, y recorre una distancia horizontal de 200 pies, para calcular los coeficientes a y c. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la flecha?

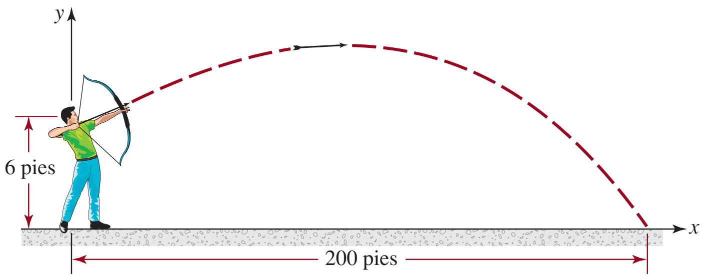


FIGURA 5.3.19 Flecha para el problema 58

59. Otro tiro con arco Se dispara una flecha verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 64 pies/s, desde un punto que está a 6 pies arriba del suelo (**FIGURA 5.3.20**).

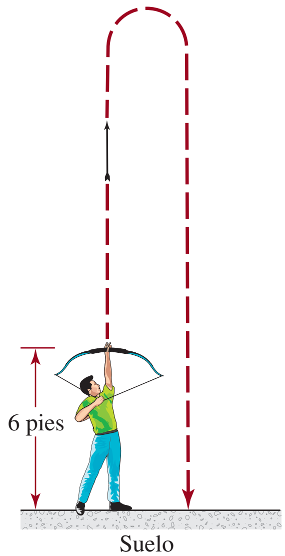


FIGURA 5.3.20 Flecha del problema 59

a) Calcule la altura $s(t)$ y la velocidad $v(t)$ de la flecha cuando el tiempo es $t \geq 0$.
b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la flecha? ¿Cuál es la velocidad de la flecha en el momento en que alcanza su altura máxima?
c) ¿En qué momento (tiempo) la flecha regresa al nivel de los 6 pies? ¿Cuál es su velocidad en ese momento?

60. Cuán alto La altura sobre el piso a la que llega un cohete de juguete lanzado hacia arriba desde la azotea de un edificio, se determina mediante $s(t) = -16t^2 + 96t + 256$.
a) ¿Cuál es la altura del edificio?
b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el cohete?
c) Calcule el tiempo para que el cohete llegue al suelo.

61. Velocidad del impacto Se deja caer una pelota desde el techo de un edificio, que está a 122.5 metros sobre el nivel del suelo.
a) ¿Cuál es la altura y la velocidad de la pelota cuando $t = 1$ s?
b) ¿En qué tiempo llega la pelota al suelo?
c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota al chocar con el suelo?

62. Un cuento verdadero salvo que… Hace pocos años, un periódico informó que un escapista planeaba saltar de un puente en el río Mississippi, cargado con 70 lb de cadenas y esposas. En el artículo se afirmaba que la altura del puente era de 48 pies, y que la velocidad de impacto del escapista, al llegar al agua, sería de 85 millas por hora. Suponiendo que sólo se dejara caer desde el puente, entonces su altura (en pies) y su velocidad (en pies/segundo), a los t segundos después de saltar del puente, se definen con las funciones $s(t) = -16t^2 + 48$, y $v(t) = -32t$, respectivamente. Determine si la velocidad de impacto estimada por el periódico era la correcta.

63. Termómetros La relación funcional entre grados Celsius T_C y grados Fahrenheit T_F es lineal.
a) Exprese T_F como función de T_C si (0 °C, 32 °F) y (60 °C, 140 °F) están en la gráfica de T_F.
b) Muestre que el punto de ebullición de 100 °C equivale en la escala Fahrenheit a 212 °F (**FIGURA 5.3.21**).

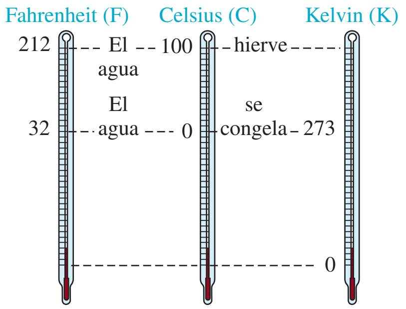


FIGURA 5.3.21 Termómetros para los problemas 63 y 64

64. Más de termómetros La relación funcional entre grados Celsius T_C y temperaturas medidas en unidades kelvin T_K es lineal.
a) Exprese T_K como función de T_C si (0 °C, 273 K) y (27 °C, 300 K) están en la gráfica de T_K.
b) Exprese el punto de ebullición de 100 °C en unidades kelvin (figura 5.3.21).
c) El cero absoluto se define como 0 K. ¿Cuánto es 0 K en grados Celsius?
d) Exprese T_K como función lineal de T_F.
e) ¿Cuánto es 0 K en grados Fahrenheit?

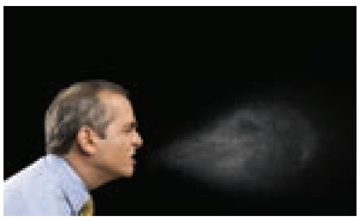
65. Interés simple Cuando se trata de interés simple, la cantidad A acumulada a través del tiempo es la función lineal $A = P + Prt$, donde P es el capital, t se mide en años y r es la tasa de interés anual (expresada como decimal). Calcule A después de 20 años si el capital es $P = \$1\,000$ y la tasa de interés anual es de 3.4%. ¿Qué sucede cuándo $A = \$2\,200$?

66. Depreciación lineal La depreciación en línea recta, o lineal es cuando un objeto pierde todo su valor inicial de A dólares a lo largo de un periodo de n años por una cantidad A/n cada año. Si un objeto que cuesta \$20 000 cuando es nuevo se deprecia linealmente a lo largo de 25 años, determine una función lineal que dé su valor V después de x años, donde $0 \leq x \leq 25$. ¿Cuál es el valor del objeto al cabo de 10 años?

67. Difusión de una enfermedad Un modelo de la difusión de un virus catarral supone que dentro de una población de P personas, la rapidez con la que se difunde una enfermedad es proporcional tanto a la cantidad D de personas que ya son portadores de ella, como a la cantidad $P - D$ de personas que todavía no están infectadas. Matemáticamente, el modelo se define con la función cuadrática

$$R(D) = kD(P - D)$$

donde $R(D)$ es la rapidez de difusión del virus del catarro (en casos por día) y $k > 0$ es una constante de proporcionalidad.



Difusión de un virus

a) Demuestre que si la población P es constante, entonces la enfermedad se extiende con más rapidez cuando exactamente la mitad de la población es portadora del catarro.

b) Suponga que en un pueblo de 10 000 personas hay 125 enfermas el domingo, y que el lunes se presentan 37 casos nuevos. Estime el valor de la constante k.

c) Use el resultado del inciso *b*) para estimar los casos nuevos que se presentarán el martes. [*Pista:* la cantidad de personas portadoras de catarro, el lunes, es $162 = 125 + 37$].

d) Estime la cantidad de casos nuevos el miércoles, jueves, viernes y sábado.

Para la discusión

68. Considere la función lineal $f(x) = \frac{5}{2}x - 4$. Si x cambia 1 unidad, ¿cuántas unidades cambiará y? ¿Y si x cambia 2 unidades o n (n es un entero positivo) unidades?

69. Considere el intervalo $[x_1, x_2]$ y la función lineal $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$. Demuestre que

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

e interprete este resultado geométricamente para $a > 0$.

70. En los problemas 60 y 62 ¿cuál es el dominio de la función $s(t)$? [*Pista:* no es $(-\infty, \infty)$].

71. En la Luna, la aceleración debida a la gravedad es la sexta parte de la que hay en la Tierra. Si se lanza verticalmente hacia arriba una pelota desde la superficie lunar, ¿alcanzaría una altura máxima seis veces mayor que la que alcanza en la Tierra, cuando tiene la misma velocidad inicial? Argumente su respuesta.

72. Suponga que la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene dos ceros reales distintos. ¿Cómo demostraría usted que la abscisa del vértice es el punto medio del segmento de recta que une a las intersecciones con el eje x? Ponga en práctica sus ideas.

5.4 Funciones definidas por partes

Introducción Una función f puede contener dos o más expresiones o fórmulas, cada una de ellas definida para diferentes partes del dominio de f. Una función definida de esta manera se llama **función definida por partes**. Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

no son dos funciones, sino una sola en la que la regla de correspondencia está en dos partes. En este caso, una parte se usa para los números reales negativos ($x < 0$) y la otra para los números no negativos ($x \geq 0$); el dominio de f es la unión de las partes $(-\infty, 0) \cup [0, \infty) = (-\infty, \infty)$. Por ejemplo, como $-4 < 0$, la regla indica que se eleve al cuadrado el número:

$$f(-4) = (-4)^2 = 16;$$

pero, por otra parte, como $6 \geq 0$, se suma 1 al número:

$$f(6) = 6 + 1 = 7.$$

Función de importe postal La tarifa postal en Estados Unidos para cartas, tarjetas o paquetes es un caso real de una función definida por partes. Cuando se escribió este libro, el porte por mandar una carta en sobre tamaño normal, por correo de primera clase, depende de su peso en onzas:

$$\text{Importe} = \begin{cases} \$0.44, & 0 < \text{peso} \leq 1 \text{ onza} \\ \$0.61, & 1 < \text{peso} \leq 2 \text{ onzas} \\ \$0.78, & 2 < \text{peso} \leq 3 \text{ onzas}, \\ \quad\vdots & \\ \$2.92, & 12 < \text{peso} \leq 13 \text{ onzas}. \end{cases} \tag{1}$$

La regla, en las ecuaciones (1), es una función P formada por 14 partes (las cartas con más de 13 onzas se envían por correo prioritario). Un valor $P(w)$ es una de catorce constantes; la constante cambia de acuerdo con el peso w (en onzas) de la carta.* Por ejemplo,

$$P(0.5) = \$0.44, P(1.7) = \$0.61, P(2.2) = \$0.78, P(2.9) = \$0.78,$$
$$\text{y } P(12.1) = \$2.92.$$

El dominio de la función P es la unión de las partes:

$$(0, 1] \cup (1, 2] \cup (2, 3] \cup \cdots \cup (12, 13] = (0, 13].$$

EJEMPLO 1 Gráfica de una función definida por partes

Grafique la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

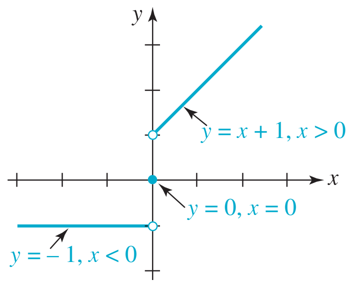


FIGURA 5.4.1 Gráfica de la función definida en partes del ejemplo 1

Solución Aunque el dominio de f consiste en todos los números reales $(-\infty, \infty)$, cada parte de la función se define en una parte diferente de su dominio. Trazaremos

- la recta horizontal $y = -1$ para $x < 0$,
- el punto $(0, 0)$ para $x = 0$, y
- la recta $y = x + 1$ para $x > 0$.

La gráfica se muestra en la **FIGURA 5.4.1**. ≡

El punto lleno en el origen de la figura 5.4.1 indica que la función (2) está definida en $x = 0$ sólo por $f(0) = 0$; los puntos vacíos indican que las fórmulas correspondientes a $x < 0$ y a $x > 0$ no definen f en $x = 0$. Como estamos construyendo funciones, vamos a considerar la definición:

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases} \tag{3}$$

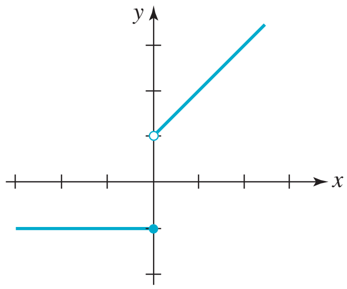


FIGURA 5.4.2 Gráfica de la función g definida en (3)

La gráfica de g que se ve en la **FIGURA 5.4.2** se parece mucho a la gráfica de la función (2), pero (2) y (3) no son la misma función porque $f(0) = 0$, pero $g(0) = -1$.

■ Función máximo entero A continuación describiremos una función definida en intervalos, que se parece a la función (1), de "importe postal", porque ambas son ejemplos de *funciones escalón*: cada función es constante en un intervalo, y a continuación salta a otro valor constante en el siguiente intervalo vecino. Esta nueva función, que tiene muchas notaciones, se representa aquí con $f(x) = [\![x]\!]$ y se define mediante la regla

$$[\![x]\!] = n, \quad \text{donde } n \text{ es un entero que satisface } n \leq x < n + 1. \tag{4}$$

La función f se llama **función máximo entero** (o función entero mayor) porque (4), traducida en palabras, quiere decir que:

$f(x)$ es el entero mayor n que es menor o igual a x.

* En (1) no se muestra el hecho de que el franqueo de una carta cuyo peso se sitúa en el intervalo (3, 4] queda determinado por si el peso se sitúa en (3, 3.5] o (3.5, 4]. Éste es el único intervalo que se divide de este modo.

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} &f(6) = {\color{red}6} \text{ porque } {\color{red}6} \leq x = 6, && f(-1.5) = {\color{red}-2} \text{ porque } {\color{red}-2} \leq x = -1.5,\\ &f(0.4) = {\color{red}0} \text{ porque } {\color{red}0} \leq x = 0.4, && f(7.6) = {\color{red}7} \text{ porque } {\color{red}7} \leq x = 7.6,\\ &f(\pi) = {\color{red}3} \text{ porque } {\color{red}3} \leq x = \pi, && f(-\sqrt{2}) = {\color{red}-2} \text{ porque } {\color{red}-2} \leq x = -\sqrt{2}, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. El dominio de f es el conjunto de los números reales, y consiste en la unión de una cantidad infinita de intervalos disjuntos; en otras palabras, $f(x) = [\![x]\!]$ es una función definida por partes, expresada por

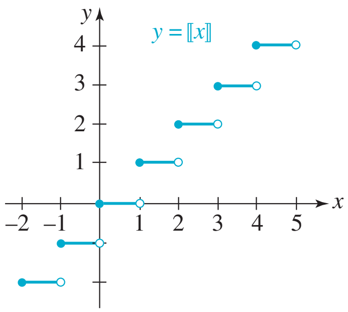


FIGURA 5.4.3 Función máximo entero

$$f(x) = [\![x]\!] = \begin{cases} \vdots \\ -2, & -2 \leq x < -1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x < 3 \\ \vdots \end{cases} \tag{5}$$

El rango de f es el conjunto de los enteros. En la **FIGURA 5.4.3** se muestra una parte de la gráfica de f en el intervalo cerrado $[-2, 5]$.

En computación, la función máximo entero $f(x) = [\![x]\!]$ se llama **función piso**, y se representa con $f(x) = \lfloor x \rfloor$. (Véanse los problemas 47, 48 y 53, en los ejercicios 5.4.)

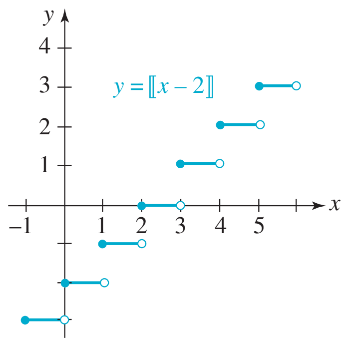


FIGURA 5.4.4 Gráfica desplazada del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Gráfica desplazada

Grafique $y = [\![x - 2]\!]$.

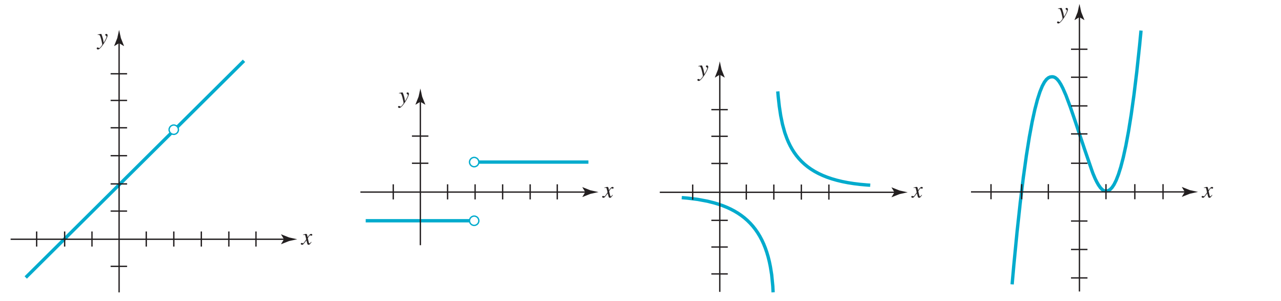
Solución La función es $y = f(x - 2)$, donde $f(x) = [\![x]\!]$. Entonces, la gráfica de la figura 5.3.3 se desplaza a la derecha 2 unidades horizontalmente. Nótese, en la figura 5.4.3, que si n es un entero, entonces $f(n) = [\![n]\!] = n$. Pero en la **FIGURA 5.4.4**, para $x = n$, $y = n - 2$. ≡

Funciones continuas La gráfica de una **función continua** no tiene agujeros, espacios vacíos finitos ni interrupciones infinitas. Si bien la definición formal de continuidad de una función es un tema importante de discusión en cálculo, en este curso basta imaginarla en términos informales. Con frecuencia, una función continua se caracteriza al decir que su gráfica puede trazarse "sin levantar el lápiz del papel". Los incisos *a*) a *c*) de la **FIGURA 5.4.5** ilustran funciones que *no son* continuas, es decir, son **discontinuas**, en $x = 2$. La función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2, \quad \text{con } x \neq 2,$$

de la figura 5.4.5*a*) tiene un agujero en la gráfica (no está el punto $(2, f(2))$); la función $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$ de la figura 5.4.5*b*) tiene un hueco o salto finito en su gráfica, en $x = 2$; la función $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ en la figura 5.4.5*c*) tiene una interrupción infinita en su gráfica, en $x = 2$. La función $f(x) = x^3 - 3x + 2$ es continua; su gráfica se ve en la figura 5.4.5*d*); no tiene agujeros, huecos ni interrupciones infinitas.

El lector debe tener en cuenta que las funciones constantes, lineales y cuadráticas son continuas. Las funciones definidas por partes pueden ser continuas o discontinuas. Las funciones en (2), (3) y (4) son discontinuas.



a) Hueco en la gráfica *b*) Hueco finito en la gráfica *c*) Salto infinito en la gráfica *d*) Sin agujeros, huecos ni saltos

FIGURA 5.4.5 Funciones discontinuas *a*) a *c*); función continua *d*)

■ **Función valor absoluto** A la función $y = |x|$ se le llama **función valor absoluto**. Para obtener su gráfica se trazan sus dos partes, que consisten en semirrectas perpendiculares [**FIGURA 5.4.6*a*)**]:

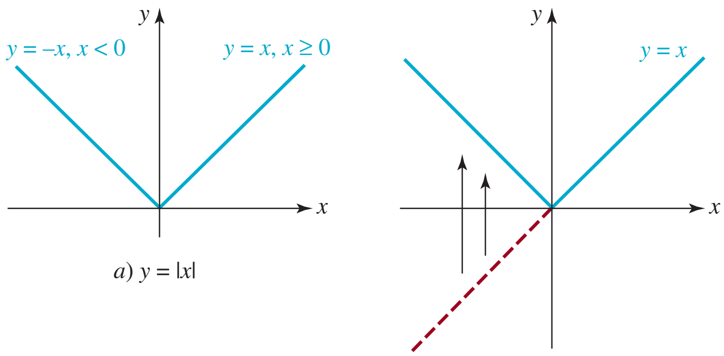
$$y = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Como $y \geq 0$ para toda x, otra forma de graficar (6) es tan sólo trazar la recta $y = x$ y reflejar en el eje x la parte de la recta que está debajo de él [figura 5.4.6*b*)]. El dominio de (6) es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$, y como se ve en la figura 5.4.6*a*), la función valor absoluto es una función par, decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, \infty)$; además, es continua.

En algunas aplicaciones interesa la gráfica de valor absoluto de una función arbitraria $y = f(x)$. En otras palabras, de $y = |f(x)|$. Como $|f(x)|$ es no negativa para todos los números x en el dominio de f, la gráfica de $y = |f(x)|$ no se prolonga abajo del eje x. Además, la definición de valor absoluto de $f(x)$ es

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{si } f(x) \geq 0, \end{cases} \tag{7}$$

demuestra que se debe negar $f(x)$ cuando $f(x)$ sea negativa. No hay necesidad de preocuparse por resolver las desigualdades en (7); para obtener la gráfica de $y = |f(x)|$ se puede proceder igual que hicimos en la figura 5.4.6*b*): con cuidado trazar la gráfica de $y = f(x)$ y a continuación reflejar en el eje x todas las partes de la gráfica que estén abajo de ese eje.



a) $y = |x|$

b) Se refleja esta parte de $y = x$ en el eje x

FIGURA 5.4.6 Función valor absoluto, ecuación (6)

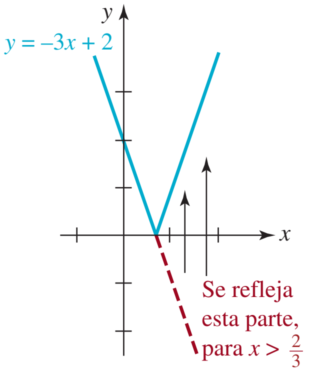


FIGURA 5.4.7 Gráfica de la función del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Valor absoluto de una función

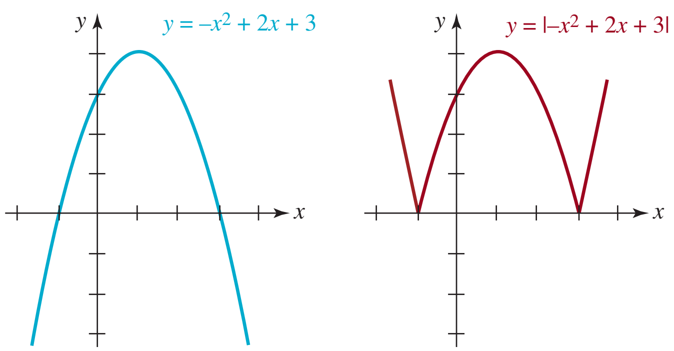
Grafique $y = |-3x + 2|$.

Solución Primero trazaremos la gráfica de la función lineal $f(x) = -3x + 2$. Nótese que, como la pendiente es negativa, f es decreciente, y su gráfica interseca el eje x en $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Se traza con línea de puntos la gráfica para $x > \frac{2}{3}$, porque esa parte está abajo del eje x. Por último, reflejamos hacia arriba la parte sobre el eje x para obtener la gráfica en forma de v con línea azul continua, de la **FIGURA 5.4.7**. Como $f(x) = x$ es una función lineal simple, no debe sorprender que la gráfica del valor absoluto de toda función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, dé como resultado una gráfica parecida a la de la función valor absoluto de la figura 5.4.6*a*). ≡

EJEMPLO 4 Valor absoluto de una función

Grafique $y = |-x^2 + 2x + 3|$.

Solución Lo mismo que en el ejemplo 3, comenzaremos trazando la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, calculando las intersecciones con los ejes: $(-1, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$, y como f es una función cuadrática, su vértice, que está en $(1, 4)$. Observe que, en la **FIGURA 5.4.8*a*)**, $y < 0$ para $x < -1$ y para $x > 3$. Esas partes de la gráfica de f se reflejan en el eje x, para obtener la gráfica de $y = |-x^2 + 2x + 3|$ que vemos en la figura 5.4.8*b*).



a) *b*)

FIGURA 5.4.8 Gráficas de las funciones del ejemplo 4 ≡

5.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-13.

En los problemas 1 a 4 determine los valores indicados de la función f definida por partes:

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, \ (-7) & x = 2 \end{cases}$;

$f(0), f(2), f(-7)$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & x \neq \pm 1 \\ 3, & x = -1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$;

$f(-1), f(1), f(3)$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 1 \\ -x^3, & x < 1 \end{cases};$

$f(1), f(0), f(-2), f(\sqrt{2})$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 < x < 1; \\ x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

$f(-\frac{1}{2}), f(\frac{1}{3}), f(4), f(6.2)$

5. Si la función *f* definida por partes es

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ es número racional} \\ 0, & x \text{ es número irracional,} \end{cases}$$

halle cada uno de los valores siguientes.

***a*)** $f(\frac{1}{3})$
***b*)** $f(-1)$
***c*)** $f(\sqrt{2})$
***d*)** $f(1.\overline{12})$
***e*)** $f(5.72)$
***f*)** $f(\pi)$

6. ¿Cuál es la intersección con el eje *y* de la gráfica de la función *f* del problema 5?

7. Determine los valores de *x* para los cuales la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x < 0 \\ x^2 - 2, & x \geq 0, \end{cases}$$

es igual al número indicado.

***a*)** 7
***b*)** 0
***c*)** -1
***d*)** -2
***e*)** 1
***f*)** -7

8. Determine los valores de *x* para los cuales la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^2, & x > 0, \end{cases}$$

es igual al número indicado.

***a*)** 1
***b*)** 0
***c*)** 4
***d*)** $\frac{1}{2}$
***e*)** 2
***f*)** -4

En los problemas 9 a 34, trace la gráfica de la función definida por partes que se indique. Halle todas las intersecciones con los ejes de la gráfica. Indique todos los números para los cuales la función es discontinua.

9. $y = \begin{cases} -x, & x \leq 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}$

10. $y = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

11. $y = \begin{cases} -3, & x < -3 \\ x, & -3 \leq x \leq 3 \\ 3, & x > 3 \end{cases}$

12. $y = \begin{cases} -x^2 - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$

13. $y = [\![x + 2]\!]$

14. $y = 2 + [\![x]\!]$

15. $y = -[\![x]\!]$

16. $y = [\![-x]\!]$

17. $y = |x + 3|$

18. $y = -|x - 4|$

19. $y = 2 - |x|$

20. $y = -1 - |x|$

21. $y = -2 + |x + 1|$

22. $y = 1 - \frac{1}{2}|x - 2|$

23. $y = -|5 - 3x|$

24. $y = |2x - 5|$

25. $y = |x^2 - 1|$

26. $y = |4 - x^2|$

27. $y = |x^2 - 2x|$

28. $y = |-x^2 - 4x + 5|$

29. $y = ||x| - 2|$

30. $y = |\sqrt{x} - 2|$

31. $y = |x^3 - 1|$

32. $y = |[\![x]\!]|$

33. $y = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ |x - 1|, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$

34. $y = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 1 - |x - 1|, & 0 \leq x \leq 2 \\ x - 2, & x > 2 \end{cases}$