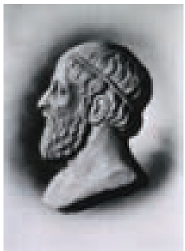
que $a = 6$. Así, la longitud es $3(6) + 5 = 23$, y las dimensiones del rectángulo son 6 cm por 23 cm.

Comprobación Como $23 = 3(6) + 5$ y $6(23) = 138$, la respuesta es correcta. ≡



Pitágoras

Teorema de Pitágoras El **teorema de Pitágoras** es uno de los más usados de la geometría. Muchas de sus aplicaciones implican ecuaciones cuadráticas. A pesar de que se llama así en honor del matemático griego **Pitágoras**, que vivió alrededor de 540 antes de la era cristiana, el resultado se conocía antes de esa época. El teorema postula que en un triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados (catetos). Para un triángulo rectángulo como el que se muestra en la **FIGURA 3.3.2** tenemos la fórmula:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

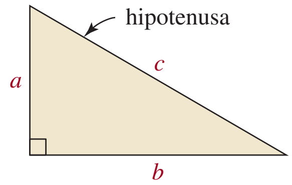


FIGURA 3.3.2 Triángulo rectángulo

Hay un amplio repertorio de demostraciones algebraicas y geométricas de este teorema (véanse los problemas 91 y 92 en los ejercicios 3.3).

EJEMPLO 11 Problema de aceras

En un parque, dos aceras forman un ángulo recto con el patio P, el puesto de refrigerios R y el estacionamiento E, como se muestra en la **FIGURA 3.3.3**. La longitud total de las aceras es 700 m. Al caminar diagonalmente a través del pasto (línea punteada roja) directamente del estacionamiento al patio, los niños acortan la distancia 200 m. ¿Cuál es la longitud de cada acera?

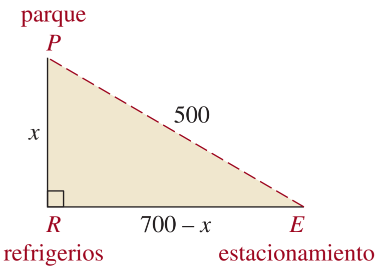


FIGURA 3.3.3 Aceras y atajo diagonal del ejemplo 11

Solución Si designamos

$$x = \text{longitud de la acera del punto } P \text{ a } R$$

entonces

$$700 - x = \text{longitud de la acera de } R \text{ a } E$$

Como la distancia de P a E es 200 metros menor que la longitud total de las dos aceras, tenemos

$$700 - 200 = 500 = \text{distancia de } P \text{ a } E$$

Por el teorema de Pitágoras obtenemos esta relación:

$$x^2 + (700 - x)^2 = (500)^2$$

Reescribimos esta ecuación y resolvemos por factorización:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 1\,400x + 240\,000 &= 0 \\ x^2 - 700x + 120\,000 &= 0 \\ (x - 400)(x - 300) &= 0. \end{aligned}$$

De la última forma de la ecuación vemos de inmediato que $x = 400$ o $x = 300$. Si nos remitimos a la **FIGURA 3.3.3**, si utilizamos $x = 400$ encontramos que la longitud de la acera desde el patio hasta el puesto de refrigerio es 400 m y la longitud de la acera desde el punto de refrigerio hasta el estacionamiento es $700 - 400 = 300$ m. De $x = 300$, encontramos que estas distancias están invertidas. Entonces, hay dos soluciones posibles a este problema.

Comprobación La solución es correcta porque

$$700 = 300 + 400 \quad \text{y} \quad (500)^2 = (300)^2 + (400)^2$$ ≡

EJEMPLO 12 Botellas de vino

Un comisionista de vinos gastó 800 dólares en algunas botellas de vino añejo cabernet sauvignon de California. Si cada botella hubiera costado 4 dólares más, el comisionista habría obtenido 10 botellas menos por los \$800. ¿Cuántas botellas se compraron?

Solución La solución de este problema se basa en la relación siguiente:

$$(\text{costo por botella})(\text{número de botellas}) = 800 \tag{8}$$

Para la compra real, si designamos

$$x = \text{número de botellas compradas}$$

entonces

$$\frac{800}{x} = \text{costo por botella.}$$

Al precio más alto,

$$x - 10 = \text{número de botellas compradas}$$

y

$$\frac{800}{x} + 4 = \text{costo por botella.}$$

Con esta información en la relación (8), obtenemos la ecuación

$$\left(\frac{800}{x} + 4\right)(x - 10) = 800,$$

con la cual despejamos x como sigue:

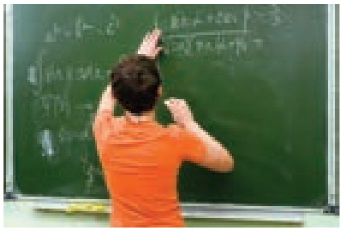
$$\begin{aligned} (800 + 4x)(x - 10) &= 800x \\ 4x^2 - 40x - 8\,000 &= 0 \\ x^2 - 10x - 2\,000 &= 0 \end{aligned}$$

La fórmula cuadrática da

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{8\,100}}{2} = \frac{10 \pm 90}{2}$$

y, por tanto, $x = 50$ o $x = -40$. Como debemos tener un número positivo de botellas adquiridas, se compraron 50 botellas de vino.

Comprobación Si se compraron 50 botellas por 800 dólares, el costo por botella fue de \$800/50 = 16. Si cada botella costara 4 dólares más, entonces el precio por botella habría sido de 20 dólares. A este precio más alto precio, sólo 800/20 = 40 botellas se habrían comprado por 800 dólares. Como 50 − 10 = 40, la respuesta es correcta. ≡



Notas del aula

i) Para resolver una ecuación cuadrática por factorización, debe igualar la expresión cuadrática a cero. En el ejemplo 2, no sirve de nada factorizar

$$4x^2 + 5x = 6 \qquad \text{como} \qquad x(4x + 5) = 6$$

Como el miembro derecho de la ecuación es 6 (y no 0), no podemos concluir nada sobre los factores x y $4x + 5$.

ii) Cuando $b^2 - 4ac = 0$, una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una raíz repetida. Esto significa que el miembro izquierdo de dicha ecuación cuadrática es el cuadrado perfecto de un binomio. En el ejemplo 3, el discriminante de $4x^2 + 4x + 1 = 0$ es $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$. También vimos que el miembro izquierdo de la ecuación tenía la forma equivalente $(2x + 1)^2$. En el ejemplo 7, dejamos a usted expresar el miembro izquierdo de $9x^2 - 24x + 16 = 0$ como un cuadrado perfecto.

iii) En la página 131 vimos que la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene raíces reales cuando el discriminante es negativo, es decir, cuando $b^2 - 4ac < 0$. No interprete que "sin raíces reales" quiere decir "sin raíces". Si contamos una raíz repetida, o una raíz de multiplicidad 2, como dos raíces, entonces *una ecuación cuadrática siempre tiene dos raíces,* ya sea dos raíces reales o dos raíces no reales. Los números no reales se conocen también como **números complejos** y son el tema de estudio de la próxima sección.

3.3 Ejercicios

Las respuestas de problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas 1 a 16, resuelva la ecuación por factorización.

1. $x^2 - 16=0$

2. $y^2 - 17y + 16 = 0$

3. $2x^2 + x - 1 = 0$

4. $8t^2 + 22t + 15 = 0$

5. $1 + 4x + 4x^2 = 0$

6. $4 + 5z - 6z^2 = 0$

7. $u^2 - 12 = 7u$

8. $v^2 + 5v = -4$

9. $25y^2 + 15y = -2$

10. $2a^2 = a + 1$

11. $16b^2 - 1 = 0$

12. $25 - c^2 = 0$

13. $x^3 - 9x = 0$

14. $16p^4 - p^2 = 0$

15. $4q^5 - 25q^3 = 0$

16. $x^4 - 18x^2 + 32 = 0$

Resuelva los problemas 17 a 22 con el método de la raíz cuadrada.

17. $x^2 = 17$

18. $2y^2 = 100$

19. $(v + 5)^2 = 5$

20. $5(w - 1)^2 = 4$

21. $3(t + 1)^2 = 9$

22. $4(s - 3)^2 = 5$

En los problemas 23 a 26, despeje x. Suponga que a, b, c y d representan números reales positivos.

23. $x^2 - b^2 = 0$

24. $x^2 + 2dx + d^2 = 0$

25. $(x - a)^2 = b^2$

26. $(x + c)^2 = d^2$

Resuelva los problemas 27 a 34 completando el cuadrado.

27. $u^2 + 2u - 1 = 0$

28. $v^2 + 3v - 2 = 0$

29. $2k^2 + 5k + 3 = 0$

30. $4b^2 - 4b - 35 = 0$

31. $10x^2 - 20x + 1 = 0$

32. $36 - 16w - w^2 = 0$

33. $9t^2 = 36t - 1$

34. $r = 4r^2 - 1$

Resuelva los problemas 35 a 46 con la fórmula cuadrática.

35. $3x^2 - 7x + 2 = 0$

36. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

37. $9z^2 + 30z + 25 = 0$

38. $1 + 2w - 6w^2 = 0$

39. $2 + 5r - 10r^2 = 0$

40. $8t = -(16t^2 + 1)$

41. $3s - 2s^2 = \frac{3}{2}$

42. $\frac{1}{2}x^2 + x = 5$

43. $2c(c - 1) = 1$

44. $4x^2 = 2(x + 1)$

45. $x^4 - 6x^2 + 7 = 0$

46. $y^4 - 2y^2 = 4$

Resuelva los ejercicios 47 a 56 con cualquier método.

47. $3s^2 - 13s + 4 = 0$

48. $4x^2 + 8x + 4 = 0$

49. $s^2 - 4s - 4 = 0$

50. $2.4 + 1.0y + 0.1y^2 = 0$

51. $8t^2 + 10t + 5 = 0$

52. $r^2 + 2r = 35$

53. $24t^3 - 3t = 0$

54. $9u^2 + 25 = 30u$

55. $4p^2 = 60$

56. $5(c + 1)^2 = 25$

Las fórmulas dadas en los problemas 57 a 62 se presentan frecuentemente en las aplicaciones. Despeje las variables indicadas en términos de las variables restantes. Suponga que todas las variables representan números reales positivos.

57. Volumen de un cilindro: $V = \pi r^2 h$, despeje r

58. Área de un círculo: $A = \pi r^2$, depeje r

59. Área de la superficie de un cilindro: $A = 2\pi r(r + h)$, despeje r

60. Ecuación de una elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{despeje } y$$

61. Cuerpo en caída libre:

$$s = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t, \quad \text{despeje } t$$

62. Ley de la gravitación universal de Newton:

$$F = g\frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad \text{despeje } r$$

63. Determine todos los valores de d de modo que $x^2 + (d + 6)x + 8d = 0$ tenga dos raíces iguales.

64. Determine todos los valores de d de modo que $3dx^2 - 4dx + d + 1 = 0$ tenga dos raíces iguales.

65. Determine la otra raíz de $(k - 2)x^2 - x - 4k = 0$, dado que una raíz es -3.

66. Si x_1 y x_2 son dos raíces reales de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, demuestre que $x_1 + x_2 = -b/a$ y que $x_1 \cdot x_2 = c/a$.

Aplicaciones diversas

67. **Juego con números** La suma de dos números es 22, y la suma de sus cuadrados es 274. Halle los números.

68. **Juego con números** El producto de dos números es 1 más que 3 veces su suma. Halle los números si su diferencia es 9.

69. **Área de un triángulo** La base de un triángulo es 3 cm más larga que la altura. Si el área del triángulo es 119 cm^2, halle la base y la altura.

70. **¿Qué distancia?** En una caminata de 35 km un muchacho hace $\frac{1}{2}$ kilómetro por hora más rápido que otro. Si hace el viaje en una hora 40 minutos menos de tiempo que el otro chico, halle cuánto tiempo toma a cada muchacho hacer la caminata.

71. **Plantar un jardín** Bárbara ha planeado hacer un huerto de legumbres rectangular con un perímetro de 76 m y un área de 360m^2. Determine las dimensiones del huerto.

72. **Distancia** Un diamante de béisbol es un cuadrado que mide 90 pies de lado. Calcule la distancia de la tercera a la primera base.

73. **Área** Un campo de juego cuadrado tiene una diagonal que mide 100 pies. Calcule el área del campo.

74. **Cercar un jardín** Un jardín de flores tiene la forma de un triángulo rectángulo isósceles con una hipotenusa de 50 pies. ¿Cuántos pies de madera se necesitan para cercar el jardín?

75. **Longitud de los lados** Suponga que la hipotenusa de un triángulo es 10 cm más larga que uno de los lados y ese lado es 10 cm más largo que el otro. Halle la longitud de los tres lados de este triángulo rectángulo.

76. **¿Cuán lejos?** Una escalera de 17 pies se coloca contra el costado de una casa de modo que su base está a 8 pies de la casa. Si se resbala hasta que su base esté a 10 pies de la casa, ¿cuánto resbala hacia abajo la parte superior de la escalera?

77. **Distancia** Dos lanchas de motor salen del muelle al mismo tiempo. Una se dirige al Norte a una velocidad de 18 mi/h y la otra avanza en dirección Oeste a 24 mi/h. Calcule la distancia entre ellas después de 3 horas.

78. **Velocidad** Un motociclista viaja a velocidad constante de 60 mi. Si hubiera ido 10 mi/h más rápido, habría reducido el tiempo de viaje en 1 h. Calcule la velocidad del motociclista.

79. **¿A qué velocidad?** James tardó 1 h más que John en realizar un viaje de 432 millas en automóvil a una velocidad promedio de 6 mi/h menos que John. ¿A qué velocidad iba conduciendo cada uno de ellos?

80. **¿Cuántos?** Un grupo de mujeres planea compartir por partes iguales el costo de \$14 000 de una lancha. En el último minuto, tres de las mujeres se echan para atrás, lo cual eleva la parte que corresponde a cada una de las mujeres restantes en \$1 500. ¿Cuántas mujeres había en el grupo original?

81. **¿Cuántos?** El señor Arthur compra algunas acciones en \$720. Si hubiera comprado las acciones el día anterior, cuando el precio por acción era de \$15 menos, habría comprado cuatro acciones más. ¿Cuántas acciones compró el señor Arthur?

82. Cálculo de dimensiones Un jardín rectangular está rodeado por un sendero de grava que mide 2 pies de ancho. El área que cubre el jardín es de 80 pies cuadrados, y el área que abarca la acera es de 108 pies cuadrados. Calcule las dimensiones del jardín.

83. Ancho Un área cubierta de césped de 50 m por 24 m está rodeada por una acera. Si el área que abarca la acera es de 480 m^2, ¿cuánto mide de ancho?

84. Construcción de una caja abierta Se hace un recipiente con una pequeña hoja de estaño cuadrada cortando un cuadrado de 3 pulgadas de cada esquina y doblando los lados (figura 3.3.4). La caja va a tener un volumen de 48 pulgadas cúbicas. Halle la longitud de uno de los lados de la hoja de estaño original.

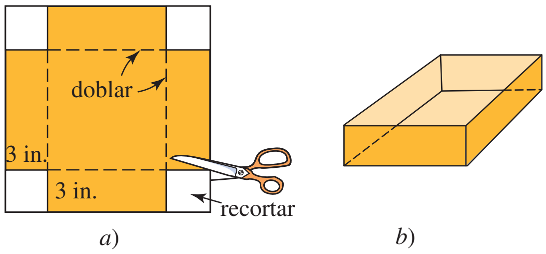


FIGURA 3.3.4 Caja del problema 84

85. Construcción de una caja abierta María tiene una hoja de cartulina con el largo igual al doble de su ancho. Si recorta un cuadrado de 2 pulgadas cuadradas de cada esquina y dobla los lados hacia arriba para formar una caja sin tapa, tendrá una caja con un volumen de 140 pulgadas cúbicas. Halle las dimensiones de la hoja de cartulina original.

86. Longitud Un alambre de 32 cm de longitud se cortó en dos pedazos, y cada parte se dobló para formar un cuadrado. El área total encerrada es de 34 cm^2. Determine la longitud de cada pedazo de alambre.

87. ¿Cuán lejos? Si se lanza desde el suelo un objeto hacia arriba con un ángulo de 45° y una velocidad inicial de v_0 metros por segundo, entonces la altura y en metros arriba del suelo a una distancia horizontal de x metros desde el punto del lanzamiento está dada por la fórmula (figura 3.3.5):

$$y = x - \frac{9.8}{v_0^2}x^2$$

Si se lanza un proyectil con un ángulo de 45° y una velocidad inicial de 12 m/s, ¿a qué distancia del punto de lanzamiento aterrizará?

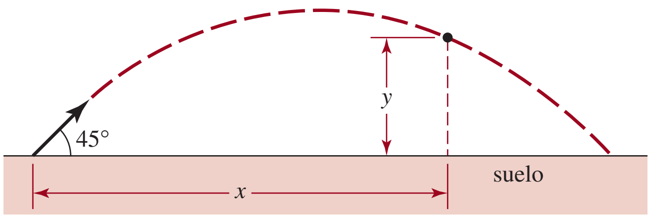


FIGURA 3.3.5 Proyectil del problema 87

88. ¿Cuán lejos? Si una fuente arroja agua con un ángulo de 45° y una velocidad de 7 m/s, ¿a qué distancia del chorro caerá el agua sobre la pileta? Véase la figura 3.3.6 y el problema 87.

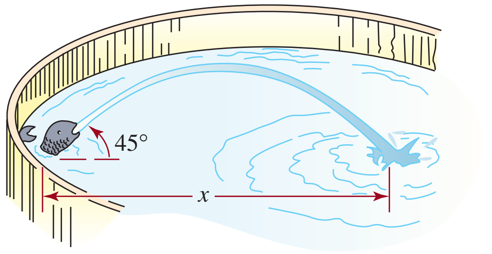


FIGURA 3.3.6 Fuente del problema 88

Para el análisis

En los problemas 89 y 90, aplique la noción de ecuación cuadrática para resolver la ecuación dada. [*Pista:* repase la sección 2.5].

89. $x^{2/3} + 4x^{1/3} - 5 = 0$

90. $r^{1/2} + 30r^{-1/2} - 11 = 0$

91. Una de las pruebas más concisas del teorema de Pitágoras la dio el erudito indio **Bhaskara** (alrededor de 1150 AC). Presentó el diagrama mostrado en la **FIGURA 3.3.7** sin indicaciones que ayudaran al lector; su única "explicación" fue la palabra "¡Mirad!" Suponga que un cuadrado de lado c puede dividirse en cuatro triángulos rectángulos congruentes y un cuadrado de longitud $b - a$ como se muestra. Demuestre que $a^2 + b^2 = c^2$.

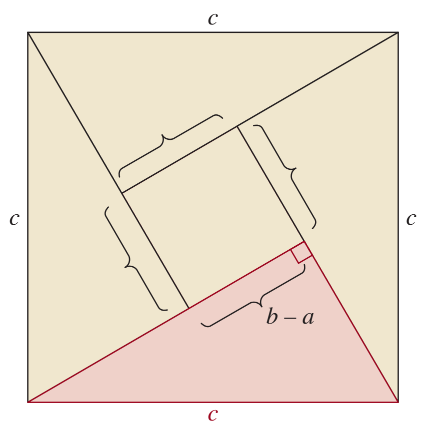


FIGURA 3.3.7 Cuadrado para el problema 91

92. Suponiendo que un cuadrado de lado $a + b$ puede dividirse de dos formas, como en la **FIGURA 3.3.8**, demuestre el teorema de Pitágoras.

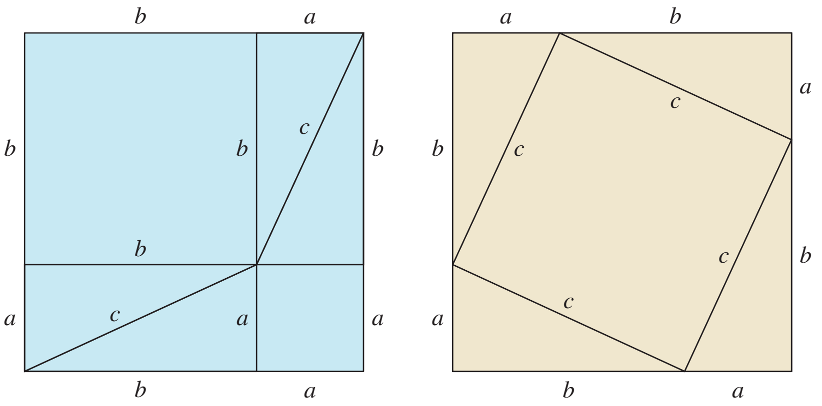


FIGURA 3.3.8 Cuadrados del problema 92

3.4 Números complejos

Introducción En la sección anterior vimos que algunas ecuaciones cuadráticas no tienen solución real. Por ejemplo, $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales porque no hay número real x tal que $x^2 = -1$. En esta sección estudiaremos el conjunto de los **números complejos**, que contiene soluciones a ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$. El conjunto de los números complejos C contiene el conjunto de los números reales R y los números cuyos cuadrados son negativos.

Para obtener los números complejos C, comenzamos por definir la **unidad imaginaria,** que se representa con la letra i, como el número que satisface

$$i^2 = -1$$

Es común escribir

$$i = \sqrt{-1}.$$

Con i podemos definir la raíz cuadrada principal de un número negativo como sigue. Si c es un número real positivo, entonces la **raíz cuadrada principal** de $-c$, simbolizada con $\sqrt{-c}$, se define como

$$\sqrt{-c} = \sqrt{(-1)c} = \sqrt{-1}\sqrt{c} = i\sqrt{c} = \sqrt{c}i. \tag{1}$$

EJEMPLO 1 Raíces cuadradas principales

Halle la raíz cuadrada principal de ***a***) $\sqrt{-4}$ y ***b***) $\sqrt{-5}$.

Solución De (1),

a) $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)(4)} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = i(2) = 2i$

b) $\sqrt{-5} = \sqrt{(-1)(5)} = \sqrt{-1}\sqrt{5} = i\sqrt{5} = \sqrt{5}i.$ ≡

Terminología El sistema de los números complejos contiene la unidad imaginaria i, todos los números reales, productos como bi y b real, lo mismo que sumas como $a + bi$, donde a y b son números reales. En particular, un **número complejo** se define como cualquier expresión de la forma

$$z = a + bi \tag{2}$$

donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. La forma presentada en (2) se llama **forma estándar** de un número complejo. Los números a y b se denominan **parte real** y **parte imaginaria** de z, respectivamente. Se dice que un número complejo de la forma $0 + bi$ es un **número imaginario puro**. Note que escogiendo $b = 0$ en (2) se obtiene un **número real**. Así, el conjunto de los números reales R es un subconjunto del conjunto de los números complejos C.

Tenga mucho cuidado aquí: la parte imaginaria de $a + bi$ *no* es *bi*; *es el número real b*.

EJEMPLO 2 Partes real e imaginaria

a) El número complejo $z = 4 + (-5)i$ se escribe como $z = 4 - 5i$. La parte real de z es 4 y su parte imaginaria es -5.

b) $z = 10i$ es un número imaginario puro.

c) $z = 6 + 0i = 6$ es un número real. ≡

EJEMPLO 3 Escribir en la forma estándar $a + bi$

Exprese lo siguiente en la forma estándar $a + bi$.

a) $-3 + \sqrt{-7}$

b) $2 - \sqrt{-25}$

Solución Usando $\sqrt{-c} = \sqrt{c}i$, con $c > 0$, escribimos:

a) $-3 + \sqrt{-7} = -3 + i\sqrt{7} = -3 + \sqrt{7}i$,

b) $2 - \sqrt{-25} = 2 - i\sqrt{25} = 2 - 5i$. ≡

Para resolver ciertas ecuaciones que implican números complejos es necesario especificar cuándo son iguales dos números complejos.

Definición 3.4.1 Igualdad de números complejos

Dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. Es decir, si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$,

$$z_1 = z_2 \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d$$

EJEMPLO 4 Una ecuación simple

Despeje x y y:

$$(2x + 1) + (-2y + 3)i = 2 - 4i$$

Solución Según la definición 3.4.1 debemos tener

$$2x + 1 = 2 \qquad \text{y} \qquad -2y + 3 = -4$$

Estas ecuaciones dan como resultado $x = \frac{1}{2}$ y $y = \frac{7}{2}$. ≡

La adición y la multiplicación de números complejos se definen como sigue.

Definición 3.4.2 Suma, resta y multiplicación de números complejos

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces

i) su **suma** está dada por $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

ii) su **diferencia** está dada por $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

iii) su **producto** está dado por $z_1 z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$

Propiedades de los números complejos

En la sección 2.1 enunciamos las propiedades básicas del sistema de los números reales. Con la definición de la suma y la multiplicación de números complejos puede demostrarse que estas propiedades básicas también se aplican al sistema de los números complejos. En particular, las leyes asociativa, conmutativa y distributiva se aplican para los números complejos. Observamos además que en la definición 3.4.2 *i*):

*La **suma** de dos números complejos se obtiene sumando sus partes reales e imaginarias correspondientes.*

De igual modo, la definición 3.4.2*ii*) muestra que

*La **diferencia** de dos números complejos se obtiene restando sus partes reales e imaginarias correspondientes.*

Asimismo, en vez de memorizar *iii*) de la definición 3.4.2:

*El **producto** de dos números complejos se obtiene al emplear las leyes asociativa, conmutativa y distributiva y el hecho de que $i^2 = -1$.*

Al aplicar este método vemos que

$$\begin{aligned}
(a + bi)(c + di) &= (a + bi)c + (a + bi)di && \leftarrow \text{ley distributiva}\\
&= ac + (bc)i + (ad)i + (bd)i^2 && \leftarrow \text{ley distributiva}\\
&= ac + (bc)i + (ad)i + (bd)(-1)\\
&= ac + (bd)(-1) + (bc)i + (ad)i && \leftarrow \text{se factoriza } i\\
&= (ac - bd) + (bc + ad)i.
\end{aligned}$$

Éste es el mismo resultado del producto dado por la definición 3.4.2*iii*). Estas técnicas se ilustran en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 5 Suma, resta y multiplicación de números complejos

Si $z_1 = 5 - 6i$ y $z_2 = 2 + 4i$, halle ***a***) $z_1 + z_2$, ***b***) $z_1 - z_2$ y ***c***) $z_1 z_2$.

Solución ***a***) Los colores del diagrama siguiente muestran cómo sumar z_1 y z_2:

sumar las partes reales

$$z_1 + z_2 = (5 - 6i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-6 + 4)i = 7 - 2i.$$

sumar las partes imaginarias

b) De manera análoga al inciso *a*), ahora restamos las partes reales e imaginarias:

$$z_1 - z_2 = (5 - 6i) - (2 + 4i) = (5 - 2) + (-6 - 4)i = 3 - 10i$$

c) Con la ley distributiva, escribimos el producto $(5 - 6i)(2 + 4i)$ como

$$\begin{aligned}
(5 - 6i)(2 + 4i) &= (5 - 6i)2 + (5 - 6i)4i && \leftarrow \text{ley distributiva}\\
&= 10 - 12i + 20i - 24i^2 && \leftarrow \text{se factoriza } i \text{ de los dos términos intermedios y se sustuye } i^2 \text{ por } -1\\
&= 10 - 24(-1) + (-12 + 20)i\\
&= 34 + 8i.
\end{aligned}$$

≡

No todas las propiedades del sistema de los números reales se aplican a los números complejos. En particular, la propiedad de radicales $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ *no* es verdadera cuando tanto a como b son negativos. Para ver esto, considere que

Advertencia

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = ii = i^2 = -1 \qquad \text{mientras que} \qquad \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Entonces, $\sqrt{-1}\sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)}$. Sin embargo, *si sólo* a o b es negativo, entonces sí tenemos que $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

En el conjunto C de números complejos, la **identidad aditiva** es el número $0 = 0 + 0i$ y la **identidad multiplicativa** es el número $1 = 1 + 0i$. El número $-z = -a - bi$ se llama el **inverso aditivo** de $z = a + bi$ porque

$$z + (-z) = z - z = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i = 0.$$

Para obtener el **inverso multiplicativo** de un número complejo $z = a + bi$, introducimos el concepto de **conjugado** de un número complejo.

Definición 3.4.3 Conjugado

Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces el número $\bar{z} = a - bi$ se llama **conjugado** de z.

En otras palabras, el conjugado de un número complejo $z = a + bi$ es el número complejo obtenido al cambiar el signo de su parte imaginaria. Por ejemplo, el conjugado de $8 + 13i$ es $8 - 13i$, y el conjugado de $-5 - 2i$ es $-5 + 2i$.

Los cálculos siguientes muestran que tanto la suma como la multiplicación de un número complejo z y su conjugado $\bar{z}$ son números *reales*:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \tag{3}$$

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2. \tag{4}$$

La última propiedad hace que los conjugados sean muy útiles para hallar el inverso multiplicativo $1/z$, con $z \neq 0$, y para dividir dos números complejos.

Resumamos el procedimiento:

*Para **dividir** un número complejo z_1 por un número complejo z_2, multiplique el numerador y el denominador de z_1/z_2 por el conjugado del denominador z_2. Es decir,*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}$$

y después use el hecho de que el producto $z_2\bar{z}_2$ es la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria de z_2.

EJEMPLO 6 División

Para $z_1 = 3 - 2i$ y $z_2 = 4 + 5i$, exprese cada una de las proposiciones siguientes de la forma $a + bi$.

a) $\dfrac{1}{z_1}$

b) $\dfrac{z_1}{z_2}$

Solución En cada caso, multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador y simplificamos:

$$\textbf{\textit{a)}}\quad \frac{1}{z_1} = \frac{1}{3-2i} = \frac{1}{3-2i}\cdot\overset{\text{Conjugado de } z_1}{\overset{\downarrow}{\frac{3+2i}{3+2i}}} = \frac{3+2i}{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{de (4)}}}{3^2+(-2)^2}} = \overbrace{\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i}^{\text{forma estándar } a+bi}$$

$$\textbf{\textit{b)}}\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{3-2i}{4+5i} = \frac{3-2i}{4+5i}\cdot\frac{4-5i}{4-5i} = \frac{12-8i-15i+10i^2}{4^2+5^2}$$

$$= \frac{2-23i}{41} = \frac{2}{41}-\frac{23}{41}i \quad \leftarrow \text{forma estándar } a+bi$$

≡

Por la definición de la suma y la resta de dos números complejos, se demuestra fácilmente que el conjugado de una suma y resta de dos números complejos es la suma y resta de los conjugados. Esta propiedad, junto con otras tres propiedades del conjugado, se resume como un teorema.

Teorema 3.4.1 Propiedades del conjugado

Sean z_1 y z_2 dos números complejos cualesquiera. Entonces

i) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2,$ *ii)* $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2,$

iii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},$ *iv)* $\bar{\bar{z}} = z.$

Por supuesto, el conjugado de toda suma (multiplicación) finita de números complejos es la suma (multiplicación) de los conjugados.

Ecuaciones cuadráticas Los números complejos posibilitan resolver ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$ cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo. Ahora vemos que las soluciones de la fórmula cuadrática

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{5}$$

representan números complejos. Observe que de hecho las soluciones son conjugados entre sí. Como se muestra en el ejemplo que sigue, estas soluciones pueden escribirse de la forma $z = a + bi$.

EJEMPLO 7 Soluciones complejas

Resuelva $x^2 - 8x + 25 = 0$.

Solución De la fórmula cuadrática, obtenemos

$$x = \frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(25)}}{2} = \frac{8\pm\sqrt{-36}}{2}.$$

Con $\sqrt{-36} = 6i$ obtenemos

$$x = \frac{8\pm 6i}{2} = 4 \pm 3i.$$

Por tanto, el conjunto solución de la ecuación es $\{4-3i, 4+3i\}$. ≡

Soluciones conjugadas Ahora podemos obtener soluciones para cualquier ecuación cuadrática. En particular, si los coeficientes en $ax^2 + bx + c = 0$ son números reales y el discriminante es negativo, vemos de (5) que las raíces aparecen como conjugados pares. Observe en el ejemplo 7 que si $x_1 = 4 - 3i$ y $x_2 = 4 + 3i$, entonces $\bar{x}_2 = x_1$. Además, fácilmente se desprende que $\bar{x}_1 = x_2$.

3.4 Ejercicios

Las respuestas de problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas 1 a 10 halle la potencia indicada de i.

1. i^3
2. i^4
3. i^5
4. i^6
5. i^7
6. i^8
7. i^{-1}
8. i^{-2}
9. i^{-3}
10. i^{-6}

En los problemas 11 a 56 realice la operación indicada. Escriba la respuesta en la forma estándar $a + bi$.

11. $\sqrt{-100}$
12. $-\sqrt{-8}$
13. $-3 - \sqrt{-3}$
14. $\sqrt{-5} - \sqrt{-125} + 5$
15. $(3 + i) - (4 - 3i)$
16. $(5 + 6i) + (-7 + 2i)$
17. $2(4 - 5i) + 3(-2 - i)$
18. $-2(6 + 4i) + 5(4 - 8i)$
19. $i(-10 + 9i) - 5i$
20. $i(4 + 13i) - i(1 - 9i)$
21. $3i(1 + i) - 4(2 - i)$
22. $i + i(1 - 2i) + i(4 + 3i)$
23. $(3 - 2i)(1 - i)$
24. $(4 + 6i)(-3 + 4i)$
25. $(7 + 14i)(2 + i)$
26. $\left(-5 - \sqrt{3}i\right)\left(2 - \sqrt{3}i\right)$
27. $(4 + 5i) - (2 - i)(1 + i)$
28. $(-3 + 6i) + (2 + 4i)(-3 + 2i)$
29. $i(1 - 2i)(2 + 5i)$
30. $i\left(\sqrt{2} - i\right)\left(1 - \sqrt{2}i\right)$
31. $(1 + i)(1 + 2i)(1 + 3i)$
32. $(2 + i)(2 - i)(4 - 2i)$
33. $(1 - i)\,[2(2 - i) - 5(1 + 3i)]$
34. $(4 + i)[i(1 + 3i) - 2(-5 + 3i)]$
35. $(4 + i)^2$
36. $(3 - 5i)^2$
37. $(1 - i)^2(1 + i)^2$
38. $(2 + i)^2(3 + 2i)^2$
39. $\dfrac{1}{4 - 3i}$
40. $\dfrac{5}{3 + i}$
41. $\dfrac{4}{5 + 4i}$
42. $\dfrac{1}{-1 + 2i}$
43. $\dfrac{i}{1 + i}$
44. $\dfrac{i}{4 - i}$
45. $\dfrac{4 + 6i}{i}$
46. $\dfrac{3 - 5i}{i}$
47. $\dfrac{1 + i}{1 - i}$
48. $\dfrac{2 - 3i}{1 + 2i}$
49. $\dfrac{4 + 2i}{2 - 7i}$
50. $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i}{4 + 2i}$
51. $i\left(\dfrac{10 - i}{1 + i}\right)$

52. $i\left(\dfrac{1 - 2\sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i}\right)$

53. $(1 + i)\dfrac{2i}{1 - 5i}$

54. $(5 - 3i)\dfrac{1 - i}{2 - i}$

55. $4 - 9i + \dfrac{25i}{2 + i}$

56. $i\left(-6 + \dfrac{11}{5}i\right) + \dfrac{2 + i}{2 - i}$

En los problemas 57 a 64, despeje x y y según la definición 3.4.1.

57. $2(x + yi) = i(3 - 4i)$

58. $(x + yi) + 4(1 - i) = 5 - 7i$

59. $i(x + yi) = (1 - 6i)(2 + 3i)$

60. $10 + 6yi = 5x + 24i$

61. $(1 + i)(x - yi) = i(14 + 7i) - (2 + 13i)$

62. $i^2(1 - i)(1 + i) = 3x + yi + i(y + xi)$

63. $x + yi = \dfrac{i^3}{2 - i}$

64. $25 - 49i = x^2 - y^2 i$

En los problemas 65 a 76, resuelva la ecuación dada.

65. $x^2 + 9 = 0$

66. $x^2 + 8 = 0$

67. $2x^2 = -5$

68. $3x^2 = -1$

69. $2x^2 - x + 1 = 0$

70. $x^2 - 2x + 10 = 0$

71. $x^2 + 8x + 52 = 0$

72. $3x^2 + 2x + 5 = 0$

73. $4x^2 - x + 2 = 0$

74. $x^2 + x + 2 = 0$

75. $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

76. $2x^4 + 9x^2 + 4 = 0$

77. Las dos raíces cuadradas del número complejo i son los dos números z_1 y z_2 que son las soluciones de la ecuación $z^2 = i$. Sea $z = x + iy$ y calcule z^2. Luego use la definición 3.4.1 para obtener z_1 y z_2.

78. Proceda como en el problema 77 para calcular dos números z_1 y z_2 que satisfagan la ecuación $z^2 = -3 + 4i$.

Para la discusión

En los problemas 79 a 82, demuestre las propiedades dadas que implican los conjugados de $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$.

79. $\bar{z}_1 = z_1$ si y sólo si z_1 es un número real.

80. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

81. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

82. $\overline{z_1^2} = (\bar{z}_1)^2$

3.5 Desigualdades lineales

Introducción En la sección 2.2 definimos las relaciones de orden como "mayor que" y "menor que" y vimos cómo interpretarlas en la recta de los números reales. En esta sección nos interesa resolver varios tipos de desigualdades (o inecuaciones) con una variable x. Si un número real se sustituye por la variable x en una desigualdad como

$$3x - 7 > 4 \tag{1}$$

y si el resultado es una proposición verdadera, entonces se dice que ese número es una **solución** de la desigualdad. Por ejemplo, 5 es una solución de (1) porque si x se sustituye por 5, la desigualdad resultante $3(5) - 7 > 5$ se simplifica a la proposición verdadera $8 > 5$. La palabra **resolver** significa que debemos obtener el conjunto de *todas* las soluciones de una desigualdad como (1). Este conjunto se denomina **conjunto solución** de la desigualdad. Se dice que dos desigualdades son **equivalentes** si tienen exactamente el mismo conjunto solución. La representación del conjunto solución en la recta numérica es la **gráfica** de la desigualdad.

Resolvemos una desigualdad encontrando una equivalente con soluciones obvias. En la lista siguiente se resumen tres operaciones que resultan en desigualdades equivalentes.

Teorema 3.5.1 Operaciones que producen desigualdades equivalentes

Supóngase que a y b son números reales y c es un número real distinto de cero. Entonces, la desigualdad $a < b$ es equivalente a

i) $a + c < b + c$

ii) $a \cdot c < b \cdot c,$ para $c > 0$

iii) $a \cdot c > b \cdot c,$ para $c < 0$

DEMOSTRACIÓN DE *i*)

Para demostrar el inciso *i*), partimos del supuesto que $a < b$. Entonces, de la definición 2.2.1 se desprende que $b - a$ es positivo. Si sumamos $c - c = 0$ a un número positivo, la suma es positiva. Por tanto,

$$\begin{aligned} b - a &= b - a + (c - c) \\ &= b + c - a - c \\ &= (b + c) - (a + c) \end{aligned}$$

es un número positivo. En consecuencia, tenemos que $a + c < b + c$. ≡

Las operaciones de *i*) a *iii*) del teorema 3.5.1 también son verdaderas con $>$ en lugar de $<$ y $<$ en lugar de $>$. Además, *i*) a *iii*) pueden formularse para las relaciones de orden $\leq$ y $\geq$. Dejamos la comprobación de *ii*) y *iii*) como ejercicios (véanse los problemas 55 y 56 en los ejercicios 3.5).

La propiedad *iii*) del teorema 3.5.1 se olvida a menudo al resolver desigualdades. Expresada con palabras, la propiedad *iii*) postula que

Advertencia

Si una desigualdad se multiplica por un número negativo, la dirección de la desigualdad se invierte.

Por ejemplo, si multiplicamos la desigualdad $-2 < 5$ por -3, el símbolo *menor que* cambia al símbolo *mayor que:*

$$-2(-3) > 5(-3) \quad \text{o} \quad 6 > -15$$

Resolución de desigualdades lineales Cualquier desigualdad que pueda escribirse de una de las formas

$$ax + b < 0, \quad \text{con } ax + b > 0 \tag{2}$$

$$ax + b \geq 0, \quad \text{con } ax + b \geq 0 \tag{3}$$

donde a y b son números reales, se llama **desigualdad lineal** en la variable x. La desigualdad en (1) es un ejemplo de una desigualdad lineal, puesto que por el inciso *i*) del teorema 3.5.1 podemos sumar -4 a ambos lados para obtener

$$3x - 7 + (-4) > 4 + (-4)$$

o $3x - 11 > 0$, que coincide con la segunda forma en (2).

En los ejemplos que siguen aplicamos las operaciones *i*) a *iii*) del teorema 3.5.1 para resolver desigualdades lineales.

EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva $8x + 4 < 16 + 5x$.

Solución Obtenemos desigualdades equivalentes con las operaciones del teorema 3.5.1:

$$\begin{aligned} 8x + 4 &< 16 + 5x \\ 8x + 4 - 4 &< 16 + 5x - 4 && \leftarrow \text{por } i) \text{ del teorema 3.5.1} \\ 8x &< 12 + 5x \\ 8x - 5x &< 12 + 5x - 5x && \leftarrow \text{por } i) \text{ del teorema 3.5.1} \\ 3x &< 12 \\ \left(\tfrac{1}{3}\right)3x &< \left(\tfrac{1}{3}\right)12 && \leftarrow \text{por } ii) \text{ del teorema 3.5.1} \\ x &< 4. \end{aligned}$$

En notación de conjuntos, el conjunto solución de la desigualdad dada es

$$\{x \mid x \text{ es real y } x < 4\}$$ ≡

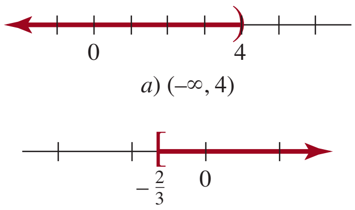
EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva $\frac{1}{2} - 3x \leq \frac{5}{2}$.

Solución Las desigualdades siguientes son equivalentes (debe ser capaz de explicar cada paso).

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} - 3x &\leq \tfrac{5}{2} \\ -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 3x &\leq -\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{2} \\ -3x &\leq \tfrac{4}{2} \\ -3x &\leq 2 \\ \left(-\tfrac{1}{3}\right)(-3x) &\geq \left(-\tfrac{1}{3}\right)2 \\ x &\geq -\tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto solución de la desigualdad dada es $\{x \mid x \text{ es real y } x \geq -\frac{2}{3}\}$. ≡



a) $(-\infty, 4)$

b) $\left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$

FIGURA 3.5.1 Conjuntos solución de los ejemplos 1 y 2 en notación de intervalos

Notación de intervalos

El conjunto solución del ejemplo 1 se representa gráficamente en la recta numérica de la figura 3.5.1*a*) como una flecha de color que apunta a la izquierda sobre la recta. En la figura, el paréntesis a la derecha en 4 *no* se incluye en el conjunto solución. Debido a que el conjunto solución se extiende de manera indefinida a la izquierda, o en dirección negativa, la desigualdad $x < 4$ también puede escribirse como $-\infty < x < 4$, donde ∞ es el **símbolo de infinito**. En otras palabras, el conjunto solución de la desigualdad $x < 4$ es

$$\{x \mid x \text{ es real y } x < 4\} = \{x \mid -\infty < x < 4\}$$

Con la **notación de intervalos** este conjunto de números reales se escribe $(-\infty, 4)$ y es ejemplo de un **intervalo no acotado** o **infinito**. La gráfica del conjunto solución del ejemplo 2,

$$\{x \mid x \text{ es real y } x \geq -\tfrac{2}{3}\} = \{x \mid -\tfrac{2}{3} \leq x < \infty\}$$

se muestra en la figura 3.5.1*b*), donde el corchete izquierdo en $-\frac{2}{3}$ indica que $-\frac{2}{3}$ está incluido en el conjunto solución. En notación de intervalos, este conjunto es el intervalo no acotado $[-\frac{2}{3}, \infty)$. En la tabla 3.5.1 se resumen varias desigualdades y sus conjuntos solución, así como las notaciones de intervalos, nombres y gráficas. En cada una de las primeras cuatro entradas de la tabla, los números a y b se denominan **extremos** del intervalo. Como conjunto, el **intervalo abierto**

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

TABLA 3.5.1 Desigualdades e intervalos

Desigualdad	Conjunto solución	Notación de intervalos	Nombre	Gráfica
$a < x < b$	$\{x \mid a < x < b\}$	(a, b)	Intervalo abierto	
$a \leq x \leq b$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	Intervalo cerrado	
$a < x \leq b$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	Intervalo semiabierto	
$a \leq x < b$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	Intervalo semiabierto	
$a < x$	$\{x \mid a < x < \infty\}$	(a, ∞)		
$x < b$	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	$(-\infty, b)$		
$x \leq b$	$\{x \mid -\infty < x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	Intervalos no acotados o infinitos	
$a \leq x$	$\{x \mid a \leq x < \infty\}$	$[a, \infty)$		
$-\infty < x < \infty$	$\{x \mid -\infty < x < \infty\}$	$(-\infty, \infty)$		

no incluye ninguno de los extremos, en tanto que el **intervalo cerrado**

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

incluye los dos extremos. Observe también que la gráfica del último intervalo de la tabla 3.5.1, que se extiende indefinidamente tanto a la izquierda como a la derecha, es toda la recta de los números reales. La notación de intervalo $(-\infty, \infty)$ se usa por lo general para representar el conjunto R de los números reales.

Cuando examine la tabla 3.5.1, tenga muy presente que los **símbolos de infinito** $-\infty$ ("menos infinito") e ∞ ("infinito") no representan números reales y *nunca* deben manipularse aritméticamente como si fueran un número. Los símbolos de infinito son solamente artificios de notación; $-\infty$ e ∞ se emplean para indicar que no existen límites en dirección negativa ni en dirección positiva, respectivamente. Por tanto, cuando utilice notación de intervalos, los símbolos $-\infty$ e ∞ no pueden aparecer jamás al lado de un corchete cuadrado; es decir, la expresión $(2, \infty]$ no tiene sentido. Además, observe que la última entrada de la tabla 3.5.1 indica que el intervalo no acotado $(-\infty, \infty)$ es toda la recta de los números reales. Cuando se remite a todo el conjunto de los números reales R es práctica común utilizar los símbolos R y $(-\infty, \infty)$ de manera indistinta.

Vuelva a leer las últimas dos oraciones.

Desigualdades simultáneas Una desigualdad de la forma

$$a < x < b$$

se denomina en ocasiones **desigualdad simultánea** porque el número x está *entre* los números a y b; en otras palabras, $x > a$ y simultáneamente $x < b$. Por ejemplo, el conjunto de los números reales que satisfacen $2 < x < 5$ es la intersección de los intervalos $(2, \infty)$ y $(-\infty, 5)$ definidos, respectivamente, por las desigualdades $2 < x$ y $x < 5$. Recuerde de la sección 2.1 que la **intersección** de dos conjuntos A y B, que se escribe $A \cap B$, es el conjunto de elemen-

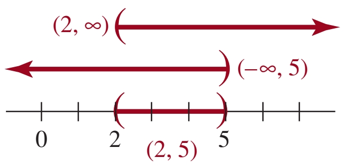


FIGURA 3.5.2 Los números en (2, 5) son los números que tanto (2, ∞) como (−∞, 5) tienen en común

tos que se hallan tanto en A como en B; en otras palabras, los elementos que son *comunes* a los dos conjuntos. Como se ilustra en la **FIGURA 3.5.2**, el conjunto solución de la desigualdad $2 < x < 5$ es la intersección de los conjuntos $(2, \infty)$ y $(-\infty, 5)$. El conjunto $(2, \infty) \cap (-\infty, 5) = (2, 5)$ puede verse si se superponen las flechas rojas de la figura.

■ **Resolución de desigualdades simultáneas** Como se muestra en los próximos ejemplos, usualmente podemos resolver desigualdades simultáneas aislando la variable que se halla en medio de los signos. Las operaciones *i*) a *iii*) del teorema 3.5.1 se aplican en ambas partes de la desigualdad al mismo tiempo.

EJEMPLO 3 Resolución de una desigualdad simultánea

Resuelva $-7 \leq 2x + 1 < 19$. Dé las soluciones en notación de intervalo y trace la gráfica correspondiente.

Solución Obtenemos desigualdades equivalentes como sigue:

$$\begin{aligned} -7 &\leq 2x + 1 < 19 \\ -7 - 1 &\leq 2x + 1 - 1 < 19 - 1 && \leftarrow \text{por } i\text{) del teorema 3.5.1} \\ -8 &\leq 2x < 18 \\ \left(\tfrac{1}{2}\right)(-8) &\leq \left(\tfrac{1}{2}\right)2x < \left(\tfrac{1}{2}\right)18 && \leftarrow \text{por } ii\text{) del teorema 1.5.1} \\ -4 &\leq x < 9. \end{aligned}$$

FIGURA 3.5.3 Conjunto solución del ejemplo 3

Por tanto, las soluciones de la desigualdad son todos los números del intervalo $[-4, 9)$. La gráfica se muestra en la **FIGURA 3.5.3**. ≡

Advertencia ▶

Se acostumbra escribir desigualdades simultáneas con el número menor a la izquierda. Por ejemplo, pese a que $5 > x > 2$ es técnicamente correcto, debe escribirse como $2 < x < 5$ para mostrar el orden en la recta numérica. En el ejemplo 4 se ilustra este aspecto.

EJEMPLO 4 Resolución de una desigualdad simultánea

Resuelva $-1 < 1 - 2x < 3$. Dé las soluciones en notación de intervalos y trace la gráfica respectiva.

Solución Debe explicar por qué las siguientes son desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned} -1 &< 1 - 2x < 3 \\ -1 - 1 &< -1 + 1 - 2x < -1 + 3 \\ -2 &< -2x < 2 \end{aligned}$$

Aislamos la variable x en medio de la desigualdad simultánea multiplicando por $-\frac{1}{2}$. Como la multiplicación por un número negativo invierte la dirección de las desigualdades,

símbolos de desigualdad invertidos

$$\begin{aligned} \left(-\tfrac{1}{2}\right)(-2) &\overset{\downarrow}{>} \left(-\tfrac{1}{2}\right)(-2x) \overset{\downarrow}{>} \left(-\tfrac{1}{2}\right)2 \\ 1 &> x > -1. \end{aligned}$$

FIGURA 3.5.4 Conjunto solución del ejemplo 4

Para expresar esta solución en notación de intervalos, primero la reescribimos poniendo el número menor a la izquierda; es decir, $-1 < x < 1$. Por tanto, el conjunto solución se expresa como el intervalo abierto $(-1, 1)$, el cual se muestra en la **FIGURA 3.5.4**. ≡

En el ejemplo 5 se ilustra una aplicación de las desigualdades.

EJEMPLO 5 Cantidad anual de ventas

A la señora Johnson se le pagan \$15 000 al año más una comisión de 8% sobre sus ventas. ¿Qué ventas anuales corresponderían a un ingreso anual entre \$23 000 y \$27 000?

Solución Si x representa la cantidad en dinero de las ventas anuales de la señora Johnson, entonces $15\ 000 + 0.08x$ es igual a su ingreso anual. Por tanto, queremos hallar x tal que

$$23\ 000 \leq 15\ 000 + 0.08x \leq 27\ 000$$

Resolvemos esta desigualdad como sigue:

$$\begin{aligned} 8\ 000 &\leq 0.08x \leq 12\ 000 \\ \left(\tfrac{100}{8}\right)8\ 000 &\leq \left(\tfrac{100}{8}\right)(0.08)x \leq \left(\tfrac{100}{8}\right)12\ 000 \\ 100\ 000 &\leq x \leq 150\ 000. \end{aligned}$$

Así, las ventas anuales de la señora Johnson deben estar entre \$100 000 y \$150 000 para que su ingreso anual oscile entre \$23 000 y \$27 000. ≡

3.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-8.

En los problemas 1 a 8, escriba la desigualdad en notación de intervalos y luego trace la gráfica del intervalo.

1. $x < 0$

2. $0 < x < 5$

3. $x \geq 5$

4. $-1 \leq x$

5. $8 < x \leq 10$

6. $-5 < x \leq -3$

7. $-2 \leq x \leq 4$

8. $x > -7$

En los problemas 9 a 14, escriba el intervalo dado como una desigualdad.

9. $[-7, 9]$

10. $[1, 15)$

11. $(-\infty, 2)$

12. $[-5, \infty)$

13. $(4, 20]$

14. $\left(-\frac{1}{2}, 10\right)$

En los problemas 15 a 18, resuelva la desigualdad dada e indique dónde se usan las operaciones *i*) *iii*) del teorema 3.5.1.

15. $4x + 4 \geq x$

16. $-x + 5 < 4x - 10$

17. $0 < 2(4 - x) < 6$

18. $-3 \leq \dfrac{4 - x}{4} < 7$

En los problemas 19 a 34, resuelva la desigualdad lineal dada. Escriba el conjunto solución en notación de intervalos. Trace la gráfica del conjunto solución.

19. $x + 3 > -2$

20. $3x - 9 < 6$

21. $\frac{3}{2}x + 4 \leq 10$

22. $5 - \frac{5}{4}x \geq -4$

23. $\frac{3}{2} - x > x$

24. $-(1 - x) \geq 2x - 1$

25. $2 + x \geq 3(x - 1)$

26. $-7x + 3 \leq 4 - x$

27. $-\frac{20}{3} < \frac{2}{3}x < 4$

28. $-3 \leq -x < 2$

29. $-7 < x - 2 < 1$

30. $3 < x + 4 \leq 10$

31. $7 < 3 - \frac{1}{2}x \leq 8$

32. $100 + x \leq 41 - 6x \leq 121 + x$

33. $-1 \leq \dfrac{x - 4}{4} < \frac{1}{2}$

34. $2 \leq \dfrac{4x + 2}{-3} \leq 10$

En los problemas 35 a 38, escriba la expresión $|x - 2| + |x - 5|$ sin los símbolos de valor absoluto si x es un número dentro del intervalo dado.

35. $(-\infty, 1)$

36. $(7, \infty)$

37. $(3, 4]$

38. $[2, 5]$

En los problemas 39 a 42, escriba la expresión $|x + 1| - |x - 3|$ sin los símbolos de valor absoluto si x es un número dentro del intervalo dado.

39. $[-1, 3)$

40. $(0, 1)$

41. (π, ∞)

42. $(-\infty, -5)$

≡ Aplicaciones diversas

43. Juego de números Si 7 veces un número se disminuye en 5, el resultado es menor que 47. ¿Qué puede concluirse sobre el número?

44. Intento para obtener 80 James obtuvo en dos de sus exámenes 71 y 82 puntos de 100. ¿Cuánto debe obtener en el tercer examen para tener un promedio de 80 o más?

45. Qué ganga Se ofrece un descuento de 50¢ en la compra de un frasco de 4 onzas de café instantáneo, y el frasco de 2.5 onzas cuesta \$3.00. ¿A qué precio sería más económico el frasco grande?

46. Fiebre En general, se considera que una persona tiene fiebre si tiene una temperatura oral mayor que 98.6 °F. ¿Qué temperatura en la escala Celsius indica fiebre? [*Pista:* recuerde el problema 67 de los ejercicios 3.1, en el que $T_F = 9/5T_C + 32$, donde T_C es grados Celsius y T_F es grados Fahrenheit].

47. Viaje en taxi Un taxi cobra 90¢ por el primer cuarto de milla y 30¢ por cada cuarto de milla adicional. ¿Qué distancia en cuartos de milla puede viajar una persona y deber entre \$3 y \$6?

48. Por lo menos es un trabajo Un vendedor triunfador pasa normalmente entre 5 y 15 horas de una semana de 40 horas trabajando en la oficina. ¿Cuánto tiempo le queda al vendedor para ponerse en contacto con sus clientes fuera de la oficina?

≡ Para la discusión

En los problemas 49 a 54, indique falso o verdadero.

49. Si $a <$ b, entonces $a - 16 < b - 16$. ________

50. Si $a < b$, entonces $-a < -b$. ________

51. Si $0 < a$, entonces $a < a + a$. ________

52. Si $a < 0$, entonces $a + a < a$. ________

53. Si $1 < a$, entonces $\dfrac{1}{a} < 1$. ________

54. Si $a < 0$, entonces $\dfrac{a}{-a} < 0$. ________

55. Demuestre la operación *ii*) del teorema 3.5.1 utilizando el hecho de que el producto de dos números positivos es positivo.

56. Demuestre la operación *iii*) del teorema 3.5.1 utilizando el hecho de que el producto de un número positivo y uno negativo es negativo.

57. Si $0 < a < b$, demuestre que $1/b < 1/a$. ¿Es necesaria la restricción que a es positivo? Explique.

58. ***a***) Si $0 < a < b$, demuestre que $a^2 < b^2$.
b) ¿Cuál es la relación entre a^2 y b^2 si $a < b$? ¿Si $b < a < 0$?

3.6 Ecuaciones y desigualdades con valor absoluto

Introducción Ya vimos que el **valor absoluto** de un número real x es una cantidad no negativa definida como

Se recomienda ampliamente repasar la sección 2.2.

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

En esta sección nos centramos en dos cosas: resolver *ecuaciones* y *desigualdades* que implican valor absoluto.

Ecuaciones de valor absoluto En (1) nos damos cuenta de inmediato de que $|6| = 6$, pues $6 > 0$ y $|-6| = -(-6) = 6$, porque $-6 < 0$. Este ejemplo sencillo indica que la ecuación $|x| = 6$ tiene dos soluciones: $x = 6$ y $x = -6$. El primer teorema resume sucintamente cómo resolver una ecuación de valor absoluto.

Teorema 3.6.1 Ecuación de valor absoluto

Si a denota un número real positivo, entonces

$$|x| = a \quad \text{si y sólo si} \quad x = -a \quad \text{o} \quad x = a. \tag{2}$$

En (2), tenga en cuenta que el símbolo x representa cualquier cantidad.

EJEMPLO 1 Ecuaciones de valor absoluto

Resuelva *a*) $|-2x| = 9$ *b*) $|5x - 3| = 8$.

Solución ***a***) Usamos (2) y sustituimos el símbolo x por $-2x$ y la identificación $a = 9$:

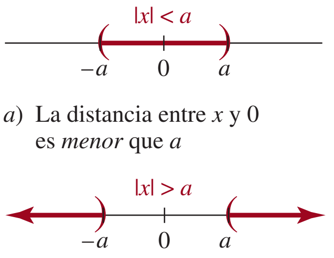
$$-2x = -9 \qquad \text{o} \qquad -2x = 9$$

Resolvemos cada una de estas ecuaciones. A partir de $-2x = -9$ obtenemos $x = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}$. Luego, de $-2x = 9$, obtenemos $x = \frac{9}{-2} = -\frac{9}{2}$. El conjunto solución es $\{\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\}$.

b) A partir de (2), sustituimos x por $5x - 3$ y $a = 8$:

$$5x - 3 = -8 \qquad \text{o} \qquad 5x - 3 = 8$$

Resolvemos cada una de estas ecuaciones lineales y obtenemos, $x = -1$ y $x = \frac{11}{5}$. El conjunto solución de la ecuación original es $\{-1, \frac{11}{5}\}$. ≡



a) La distancia entre x y 0 es *menor* que a

b) La distancia entre x y 0 es *mayor* que a

FIGURA 3.6.1 Interpretación gráfica de $|x| < a$ y $|x| > a$

Desigualdades de valor absoluto Muchas aplicaciones importantes de las desigualdades implican también valores absolutos. Recuerde que en la sección 2.2 $|x|$ representa la distancia a lo largo de la recta numérica desde x hasta el origen. Así, la desigualdad $|x| < a$ $(a > 0)$ significa que la distancia desde x hasta el origen es menor que a. Podemos ver en la **FIGURA 3.6.1*a*)** que éste es el conjunto de los números reales x tales que $-a < x < a$. Por otra parte, $|x| > a$ significa que la distancia desde x hasta el origen es mayor que a. Por tanto, como muestra la figura 3.6.1*b*), $x < -a$ o $x > a$. Estas observaciones geométricas indican la interpretación siguiente de dos clases de desigualdades de valor absoluto.

Teorema 3.6.2 Desigualdades de valor absoluto

i) $|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$.

ii) $|x| > a$ si y sólo si $x < -a$ o $x > a$.

Los incisos *i*) y *ii*) del teorema 3.6.2 también son verdaderos con $\leq$ en lugar de $<$ y $\geq$ en lugar de $>$.

EJEMPLO 2 Dos desigualdades de valor absoluto

Resuelva las desigualdades ***a***) $|x| < 1$ ***b***) $|x| \geq 5$.

Solución ***a***) Según *i*) del teorema 3.6.2, la desigualdad $|x| < 1$ equivale a la desigualdad simultánea $-1 < x < 1$. Por tanto, el conjunto solución de $|x| < 1$ es el intervalo $(-1, 1)$.

b) Según *ii*) del teorema 3.6.2, la desigualdad $|x| \geq 5$ equivale a la pareja de desigualdades: $x \leq -5$ o $x \geq 5$. Por consiguiente, $|x| \geq 5$ se satisface para números dentro del intervalo $(-\infty, -5]$ o del intervalo $[5, \infty)$. ≡

Puesto que el conjunto solución del inciso *b*) del ejemplo 2 consta de dos intervalos disjuntos, es decir, que no se intersecan, no se puede expresar como un solo intervalo. Lo mejor que podemos hacer es escribir el conjunto solución como la unión de los dos intervalos. Recuerde que en la sección 2.1 explicamos que la **unión** de dos conjuntos A y B, que se escribe $A \cup B$, es el conjunto de elementos que se encuentran ya sea en A o en B. Por tanto, el conjunto solución del ejemplo 2*b*) se puede escribir $(-\infty, -5] \cup [5, \infty)$.

EJEMPLO 3 Desigualdad de valor absoluto

Resuelva $|3x - 7| < 1$ y grafique el conjunto solución.

Solución Si sustituimos x por $3x - 7$ y a por el número 1, la propiedad *i*) del teorema 3.6.2 produce la desigualdad simultánea equivalente

$$-1 < 3x - 7 < 1$$

Para resolver comenzamos por sumar 7 en las desigualdades:

$$\begin{aligned} 1 + 7 < 3x - 7 + 7 &< 1 + 7 \\ 6 < 3x &< 8 \end{aligned}$$

Al multiplicar la última desigualdad por $\frac{1}{3}$ se obtiene

$$\begin{aligned} (\tfrac{1}{3})6 < (\tfrac{1}{3})3x &< (\tfrac{1}{3})8 \\ 2 < x &< \tfrac{8}{3}. \end{aligned}$$

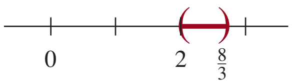


FIGURA 3.6.2 Conjunto solución del ejemplo 3

El conjunto solución es el intervalo abierto $(2, \frac{8}{3})$ mostrado en la **FIGURA 3.6.2**. ≡

EJEMPLO 4 Desigualdad de valor absoluto

Resuelva $|3x - 4| \leq 0$.

Solución Como el valor absoluto de una expresión nunca es negativo, los únicos valores que satisfacen la desigualdad dada son aquellos para los cuales

$$|3x - 4| = 0 \quad \text{o} \quad 3x - 4 = 0$$

Entonces, el conjunto solución consta del número $\frac{4}{3}$. ≡

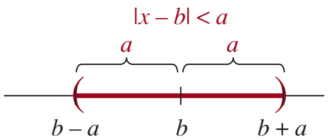


FIGURA 3.6.3 La distancia entre x y b es menor que a

Una desigualdad tal que $|x - b| < a$ también puede interpretarse en términos de la distancia en la recta numérica. Puesto que $|x - b|$ es la distancia entre x y b, una desigualdad tal que $|x - b| < a$ se satisface por todos los números reales x cuya distancia entre x y b sea menor que a. Este intervalo se muestra en la **FIGURA 3.6.3**. Observe que cuando $b = 0$ obtenemos la propiedad *i*) anterior. Asimismo, el conjunto de números que satisfacen $|x - b| > a$ son los números x cuya distancia entre x y b es mayor que a.

EJEMPLO 5 Desigualdad de valor absoluto

Resuelva $|4 - \frac{1}{2}x| \geq 7$ y grafique el conjunto solución.

Solución Sustituimos x por $4 - \frac{1}{2}x$, $a = 7$ y cambiamos $>$ por $\geq$ y vemos, por *ii*) del teorema 3.6.2, que

$$|4 - \tfrac{1}{2}x| \geq 7$$

equivale a las dos desigualdades

$$4 - \tfrac{1}{2}x \leq -7 \quad \text{o} \quad 4 - \tfrac{1}{2}x \geq 7$$

Resolvemos cada una de estas desigualdades por separado. Tenemos primero

$$\begin{aligned} 4 - \tfrac{1}{2}x &\leq -7 \\ -\tfrac{1}{2}x &\leq -11 \\ (-2)\left(-\tfrac{1}{2}\right)x &\geq (-2)(-11) \quad \leftarrow \text{la multiplicación por } -2 \text{ invierte de la dirección de la desigualdad} \\ x &\geq 22. \end{aligned}$$

En notación de intervalo esto es $[22, \infty)$. Luego resolvemos

$$\begin{aligned} 4 - \tfrac{1}{2}x &\geq 7 \\ -\tfrac{1}{2}x &\geq 3 \\ x &\leq -6. \end{aligned}$$

En notación de intervalo esto se escribe $(-\infty, -6]$. Como cualquier número real que satisfaga bien sea $4 - \frac{1}{2}x \leq -7$ o $4 - \frac{1}{2}x \geq 7$ también satisface $|4 - \frac{1}{2}x| \geq 7$, las soluciones son los números que están en la unión de los dos intervalos disjuntos: $(-\infty, -6] \cup [22, \infty)$. La gráfica de estas soluciones se muestra en la **FIGURA 3.6.4**. ≡

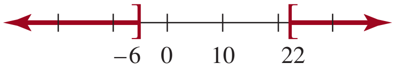


FIGURA 3.6.4 El conjunto solución del ejemplo 5 es la unión de estos dos conjuntos disjuntos

Observe que en la figura 3.6.1*a*) el número 0 es el punto medio del intervalo de solución de $|x| < a$ y que en la figura 3.6.3 el número b es el punto medio del intervalo de solución de la desigualdad $|x - b| < a$. Con esto en mente, resuelva el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 6 Construcción de una desigualdad de valor absoluto

Halle una desigualdad de la forma $|x - b| < a$ cuyo conjunto solución sea el intervalo abierto $(4, 8)$.

Solución El punto medio del intervalo $(4, 8)$ es $m = \dfrac{4 + 8}{2} = 6$. La distancia entre el punto medio m y uno de los extremos del intervalo es $d(m, 8) = |8 - 6| = 2$. Por tanto, como $b = 6$ y $a = 2$, la desigualdad requerida es $|x - 6| < 2$. ≡

3.6 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-8.

En los problemas 1 a 10, resuelva la ecuación dada.

1. $|4x - 1| = 2$

2. $|5v - 4| = 7$

3. $\left|\frac{1}{4} - \frac{3}{2}y\right| = 1$

4. $|2 - 16t| = 0$

5. $\left|\dfrac{x}{x - 1}\right| = 2$

6. $\left|\dfrac{x + 1}{x - 2}\right| = 4$

7. $|x^2 - 8| = 1$

8. $|x^2 + 3x| = 4$

9. $|x^2 - 2x| = 1$

10. $|x^2 + 5x - 3| = 3$

En los problemas 11 a 22, resuelva la desigualdad, exprese la solución utilizando la notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

11. $|-5x| < 4$

12. $|3x| > 18$

13. $|3 + x| > 7$

14. $|x - 4| \leq 9$

15. $|2x - 7| \leq 1$

16. $\left|5 - \frac{1}{3}x\right| < \frac{1}{2}$

17. $|x + \sqrt{2}| \geq 1$

18. $|6x + 4| > 4$

19. $\left|\dfrac{3x - 1}{-4}\right| < 2$

20. $\left|\dfrac{2 - 5x}{3}\right| \geq 5$

21. $|x - 5| < 0.01$

22. $|x - (-2)| < 0.001$

En los problemas 23 a 26, proceda como en el ejemplo 6 y halle una desigualdad $|x - b| < a$ o $|x - b| > a$ cuyo conjunto solución sea el intervalo dado.

23. $(-3, 11)$

24. $(1, 2)$

25. $(-\infty, 1) \cup (9, \infty)$

26. $(-\infty, -3) \cup (13, \infty)$

En los problemas 27 y 28, halle una desigualdad de valor absoluto cuya solución sea el conjunto de los números reales x que satisfaga la condición dada. Exprese cada conjunto utilizando notación de intervalos.

27. Mayor o igual que 2 unidades de -3.

28. Menor que $\frac{1}{2}$ unidad de 3.5.

Aplicaciones diversas

29. **Comparación de edades** Las edades de Bill y Mary, A_B y A_M, respectivamente, difieren cuando mucho 3 años. Escriba este hecho usando símbolos de valor absoluto.

30. **Supervivencia** Su calificación en el primer examen fue de 72%. La calificación de medio periodo es el promedio de la calificación del primer examen y la del examen de medio periodo. Si los límites de la calificación B va de 80 a 89%, ¿qué calificaciones debe obtener en el examen de medio periodo para que la calificación de medio semestre sea B?

31. **Peso del café** El peso p de tres cuartas partes de los tarros de café llenados por un procesador de alimentos satisface

$$\left|\frac{p - 12}{0.05}\right| \leq 1,$$

donde p se mide en onzas. Determine el intervalo en el cual se halla p.

32. **Peso de latas** Se diseña una balanza que sea precisa hasta 0.25 onzas. Si en la balanza se colocan juntas dos latas de sopa idénticas y se halla que tienen un peso combinado de 33.15 onzas, ¿cuál es el mayor y el menor peso posible de una de las latas?

33. **La parte correcta** Se especifica que una parte exacta de un motor pequeño tiene un diámetro de 0.623 cm. Para que la parte encaje correctamente, su diámetro debe estar a 0.005 cm del diámetro especificado. Escriba una desigualdad con valor absoluto que tenga como soluciones todos los diámetros posibles de las partes que encajarán. Resuelva la desigualdad para determinar esos diámetros.

34. **Consumo de agua** La necesidad diaria de agua calculada para cierta ciudad está dada por

$$|N - 3\,725\,000| < 100\,000,$$

donde N es el número de galones de agua utilizados por día. Halle la mayor y la menor necesidad diaria de agua.

Para la discusión

En los problemas 35 y 36, explique cómo resolvería la desigualdad y la ecuación dadas. Ponga en práctica sus ideas.

35. $\left|\dfrac{x + 5}{x - 2}\right| \leq 3$

36. $|5 - x| = |1 - 3x|$

37. La distancia entre el número x y 5 es $|x - 5|$.
   a) En palabras, describa la interpretación gráfica de las desigualdades $0 < |x - 5|$ y $0 < |x - 5| < 3$.
   b) Resuelva cada desigualdad del inciso *a*) y escriba cada conjunto solución en notación de intervalos.

38. Interprete $|x - 3|$ como la distancia entre el número x y 3. Dibuje en la recta numérica el conjunto de números reales que satisface $2 < |x - 3| < 5$.

39. Resuelva la desigualdad simultánea $2 < |x - 3| < 5$; para ello, resuelva primero $|x - 3| < 5$ y luego $2 < |x - 3|$. Tome la intersección de los dos conjuntos solución y compárela con su dibujo del problema 38.

40. Suponga que a y b son números reales y que el punto a se halla a la izquierda del punto b en la recta de los números reales. Sin resolver propiamente la desigualdad,

$$\left|x - \frac{a + b}{2}\right| < \frac{b - a}{2},$$

explique su conjunto solución.

3.7 Desigualdades polinomiales y racionales

Introducción En las secciones 3.5 y 3.6 resolvimos desigualdades lineales, es decir, desigualdades que contienen una sola variable x y que pueden escribirse en las formas $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$ y así sucesivamente. Como $ax + b$ es un polinomio lineal, las desigualdades lineales son sólo un caso especial de una clase más amplia de desigualdades que implican polinomios. Si $P(x)$ representa un polinomio de grado arbitrario, las desigualdades que pueden escribirse en las formas

Repase en la sección 2.6 la definición de polinomio

$$P(x) > 0, \quad P(x) < 0, \quad P(x) \geq 0 \quad \text{y} \quad P(x) \leq 0 \tag{1}$$

se llaman **desigualdades polinomiales.** Las desigualdades que incluyen el cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0, \tag{2}$$

se llaman **desigualdades racionales**. En lo que respecta a las desigualdades racionales, supondremos que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes. Por ejemplo:

$$x^2 - 2x - 15 \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{x(x-1)}{x+2} \leq 0$$

son una desigualdad polinomial y una desigualdad racional, respectivamente.

En esta sección estudiaremos un método para resolver desigualdades polinomiales y racionales.

Desigualdades polinomiales En los próximos tres ejemplos ilustramos el **método de la tabla de signos** para resolver las desigualdades polinomiales. Las **propiedades del signo de un producto** de números reales que se presentan a continuación son fundamentales para preparar una tabla de signos de una desigualdad polinomial:

El producto de dos números reales es positivo (negativo) si y sólo si los números tienen signos iguales (opuestos). (3)

Es decir, si los signos de los números son $(+)(+)$ o $(-)(-)$, su producto será positivo, y si tienen signos diferentes $(+)(-)$ o $(-)(+)$, su producto será negativo.

A continuación se presentan algunos de los pasos básicos del método de la tabla de signos que se ilustra en el primer ejemplo. Usamos el hecho de que un polinomio $P(x)$ puede cambiar de signo sólo en un número c con el cual $P(c) = 0$. Un número c con el que $P(c) = 0$ se denomina **cero** del polinomio.

REGLAS PARA RESOLVER DESIGUALDADES POLINOMIALES

i) Use las propiedades de las desigualdades para replantear la desigualdad dada en forma tal que todas las variables y constantes diferentes de cero se encuentren del mismo lado del símbolo de desigualdad y el número 0 quede del otro lado. Es decir, plantee la desigualdad en una de las formas dadas en 1.

ii) Luego, si es posible, factorice el polinomio $P(x)$ en factores lineales $ax + b$.

iii) Marque la recta numérica en los ceros reales de $P(x)$. Estos números dividen la recta numérica en intervalos.

iv) En cada uno de estos intervalos, determine el signo de cada factor y luego determine el signo del producto aplicando las propiedades de los signos de un producto (3).

EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad polinomial

Resuelva $x^2 \geq -2x + 15$.

Solución Primero reescribimos la desigualdad con todos los términos a la izquierda del símbolo de desigualdad y el 0 a la derecha. Por las propiedades de las desigualdades,

$$x^2 \geq -2x + 15 \quad \text{equivale a} \quad x^2 + 2x - 15 \geq 0.$$

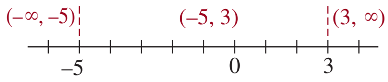


FIGURA 3.7.1 Tres intervalos disjuntos del ejemplo 1

Véase (3) sobre las propiedades de los signos de los productos.

Después de factorizar, la última expresión es igual a $(x + 5)(x - 3) \geq 0$.

A continuación indicamos en la recta numérica en qué punto cada factor es 0, en este caso, $x = -5$ y $x = 3$. Como se ilustra en la **FIGURA 3.7.1**, esto divide la recta numérica en tres intervalos disjuntos, es decir, tres intervalos sin intersección: $(-\infty, -5)$, $(-5, 3)$ y $(3, \infty)$. Observe también que, puesto que la desigualdad requiere que el producto no sea negativo, es decir, "mayor o *igual a* 0", los números -5 y 3 son dos soluciones. A continuación, debemos determinar los signos de los factores $x + 5$ y $x - 3$ en cada uno de los tres intervalos. Necesitamos intervalos en los que los dos factores sean positivos o los dos negativos, porque sólo así su producto será positivo. Puesto que los factores lineales $x + 5$ y $x - 3$ no pueden cambiar de signo dentro de estos intervalos, basta obtener el signo de cada factor en sólo *un* número de prueba elegido dentro de cada intervalo. Por ejemplo, en el intervalo $(-\infty, -5)$, si usamos $x = -10$ como número de prueba, entonces

Intervalo	$(-\infty, -5)$	
Signo de $x + 5$	$-$	$\leftarrow$ en $x = -10$, $x + 5 = -10 + 5 < 0$
Signo de $x - 3$	$-$	$\leftarrow$ en $x = 10$, $x - 3 = -10 - 3 < 0$
Signo de $(x + 5)(x - 3)$	$+$	$\leftarrow(-)(-)$ es $(+)$

Véase el ejemplo 2*b*) en la sección 3.6.

Continuando de esta manera con los dos intervalos restantes, obtenemos la tabla de signos de la **FIGURA 3.7.2**. Como se observa en la tercera línea de esta figura, el producto $(x + 5)(x - 3)$ no es negativo en ninguno de los intervalos disjuntos no acotados $(-\infty, -5]$ o $[3, \infty)$. Por tanto, el conjunto solución es $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$.

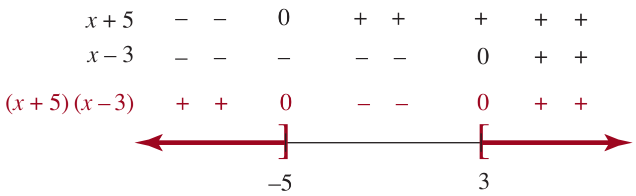


FIGURA 3.7.2 Tabla de signos del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad polinomial

Resuelva $x < 10 - 3x^2$.

Solución Primero reescribimos la desigualdad poniendo todos los términos diferentes de 0 en el mismo lado: $3x^2 + x - 10 < 0$. Al factorizar este polinomio cuadrático tenemos

$$(3x - 5)(x + 2) < 0.$$

En el diagrama de signos de la **FIGURA 3.7.3** vemos (en rojo) que este producto es negativo para los números del intervalo abierto $(-2, \frac{5}{3})$. Por el símbolo estricto "menor que" de la desigualdad, los extremos de los números del intervalo no se incluyen en el conjunto solución.

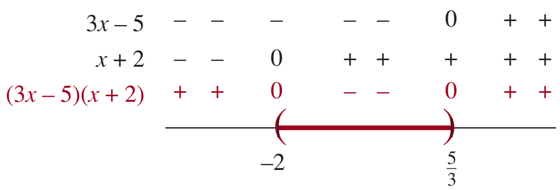


FIGURA 3.7.3 Tabla de signos del ejemplo 2

EJEMPLO 3 Resolución de una desigualdad polinomial

Resuelva $(x - 4)^2(x + 8)^3 > 0$

Solución En vista de que la desigualdad dada ya tiene la forma apropiada para el método de la tabla de signos (una expresión factorizada a la izquierda del símbolo de desigualdad y 0 a la derecha), primero debemos hallar los números donde cada factor es 0, en este caso, $x = 4$ y $x = -8$. Colocamos estos números en la recta numérica y determinamos tres intervalos. Luego, en cada intervalo consideramos los signos de las potencias de cada factor lineal. Debido a la potencia par, nos damos cuenta de que $(x - 4)^2$ nunca es negativo. Sin embargo, debido a la potencia impar, $(x + 8)^3$ tiene el mismo signo que el factor $x + 8$. Observe que los números $x = 4$ y $x = -8$ no son soluciones de la desigualdad por el estricto símbolo de desigualdad “mayor que”. Por tanto, como se observa (en rojo) en la **FIGURA 3.7.4**, el producto de los factores $(x - 4)^2(x + 8)^3$ no es negativo para los números del conjunto $(-8, 4) \cup (4, \infty)$.

$(x-4)^2$	+ +	+	+ +	0	+ +
$(x+8)^3$	− −	0	+ +	+	+ +
$(x-4)^2\,(x+8)^3$	− −	0	+ +	0	+ +

FIGURA 3.7.4 Tabla de signos del ejemplo 3

Desigualdades racionales

Ahora estudiaremos las desigualdades racionales del tipo que se muestra en (2). Las desigualdades racionales pueden resolverse mediante el procedimiento anterior, excepto que colocamos los ceros tanto del numerador $P(x)$ como del denominador $Q(x)$ en la recta numérica y usamos las **propiedades de los signos de un cociente**.

El cociente de dos números reales es positivo (negativo) si y sólo si los números tienen los signos iguales (opuestos). (4)

EJEMPLO 4 Resolución de una desigualdad racional

Resuelva $\dfrac{x + 1}{x + 3} \le -1$.

Solución Para utilizar las propiedades de los signos de un cociente (4) debemos tener todos los términos diferentes de cero en el mismo lado de la desigualdad (exactamente de la misma forma como lo hicimos en las desigualdades polinomiales). Así, agregamos 1 en ambos lados de la desigualdad y luego combinamos términos para obtener una desigualdad racional equivalente:

$$\frac{x + 1}{x + 3} + 1 \le 0$$

$$\frac{x + 1}{x + 3} + \overbrace{\frac{x + 3}{x + 3}}^{1} \le 0 \quad \leftarrow \text{denominador común}$$

$$\frac{2x + 4}{x + 3} \le 0.$$

Utilizando el hecho de que $2x + 4 = 0$ cuando $x = -2$ y $x + 3 = 0$ cuando $x = -3$, preparamos la tabla de signos que se muestra en la figura 3.7.5. En esta tabla vemos que el número -3 no es una solución, ya que $(2x + 4) / (x + 3)$ no está definida para $x = -3$, pero el número -2 se incluye en el conjunto solución debido a que $(2x + 4) / (x + 3)$ es cero para $x = -2$. El conjunto solución es el intervalo $(-3, -2]$.

$2x + 4$	–	–	–	–	–	0	+	+
$x + 3$	–	–	0	+	+	+	+	+
$\dfrac{2x + 4}{x + 3}$	+	+	no definido	–	–	0	+	+
			-3			-2		

FIGURA 3.7.5 Tabla de signos del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Resolución de una desigualdad racional

Resuelva $x \leq 3 - \dfrac{6}{x + 2}$.

Solución Para empezar, reescribimos la desigualdad con todas las variables y constantes diferentes de cero a la izquierda y 0 a la derecha del signo de desigualdad:

$$x - 3 + \frac{6}{x + 2} \leq 0.$$

Ahora colocamos los términos sobre un común denominador,

Algo que *no* se debe hacer es multiplicar la desigualdad por $x + 2$ para despejar el denominador. Véase el problema 57 de los ejercicios 3.7.

$$\frac{(x - 3)(x + 2) + 6}{x + 2} \leq 0 \quad \text{y simplificamos a} \quad \frac{x(x - 1)}{x + 2} \leq 0. \tag{5}$$

Ahora los números que componen los tres factores lineales en la última expresión igual a 0 son -2, 0 y 1. En la recta numérica, estos tres números determinan cuatro intervalos. Por la condición “menor o *igual a* 0” vemos que 0 y 1 pertenecen al conjunto solución. Sin embargo, -2 se excluye porque al sustituir este valor en la expresión fraccionaria resulta un denominador de cero (y la fracción no estaría definida). Como se ve en la tabla de signos de la **FIGURA 3.7.6**, el conjunto solución es $(-\infty, -2) \cup [0, 1]$.

x	–	–	–	–	–	0	+	+	+	+	+
$x - 1$	–	–	–	–	–	–	–	–	0	+	+
$x + 2$	–	–	0	+	+	+	+	+	+	+	+
$x(x - 1)/(x + 2)$	–	–	no definido	+	+	0	–	–	0	+	+
			-2			0			1		

FIGURA 3.7.6 Tabla de signos del ejemplo 5

Notas del aula

i) La terminología empleada en matemáticas a menudo varía de un maestro a otro y de un libro a otro. Por ejemplo, las desigualdades que llevan los símbolos $<$ o $>$ se denominan a veces desigualdades *estrictas,* en tanto que las que usan $\leq$ o $\geq$ se llaman *no estrictas* (véase la sección 2.2). Como otro ejemplo, los *enteros positivos* 1, 2, 3, … a menudo se conocen como *números naturales.*

ii) Suponga que el conjunto solución de una desigualdad consta de números tales que $x < -1$ o $x > 3$. Una respuesta que aparece mucho en las tareas, cuestionarios y exámenes es $3 < x < -1$. Esto se debe a que no se entiende bien la idea de *simultaneidad.* La proposición $3 < x < -1$ significa que $x > 3$ y, al mismo tiempo, $x < -1$. Si esto se traza en una recta numérica, se verá que es imposible que la misma x satisfaga las dos desigualdades. Lo mejor que podemos hacer para reescribir “$x < -1$ o $x > 3$” es usar la unión de los intervalos $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$.

iii) He aquí otro error frecuente. La notación $a < x > b$ no tiene sentido. Por ejemplo, si tenemos $x > -2$ y $x > 6$, sólo los números $x > 6$ satisfacen *ambas* condiciones.
iv) En el aula oímos con frecuencia la respuesta "positivo" cuando en realidad el alumno quiere decir "no negativo". Pregunta: x bajo el signo de raíz cuadrada $\sqrt{x}$ debe ser positivo, ¿cierto? Levanten la mano. Invariablemente se levantan muchas manos. Respuesta correcta: x debe ser no negativo, es decir, $x \geq 0$. No olvide que $\sqrt{0} = 0$.

3.7 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-8.

En los problemas 1 a 40, resuelva la desigualdad y exprese las soluciones en notación de intervalos.

1. $x^2 + 2x - 15 > 0$
2. $3x^2 - x - 2 \leq 0$
3. $x^2 - 8x + 12 < 0$
4. $6x^2 + 14x + 4 \geq 0$
5. $x^2 - 5x \geq 0$
6. $x^2 - 4x + 4 \geq 0$
7. $3x^2 - 27 < 0$
8. $4x^2 + 7x \leq 0$
9. $4x^2 - 4x + 1 < 0$
10. $12x^2 > 27x + 27$
11. $x^2 - 16 < 0$
12. $x^2 - 5 > 0$
13. $x^2 - 12 \leq 0$
14. $9x > 2x^2 - 18$
15. $x^2 + 6x \leq -9$
16. $9x^2 + 30x > -25$
17. $\dfrac{x - 3}{x + 2} < 0$
18. $\dfrac{x + 5}{x} \geq 0$
19. $\dfrac{2x + 6}{x - 3} \leq 0$
20. $\dfrac{3x - 1}{x + 2} > 0$
21. $\dfrac{x + 1}{x - 1} + 2 > 0$
22. $\dfrac{x - 2}{x + 3} \leq 1$
23. $\dfrac{2x - 3}{5x + 2} \geq -2$
24. $\dfrac{3x - 1}{2x - 1} < -4$
25. $\dfrac{5}{x + 8} < 0$
26. $\dfrac{10}{2x + 5} \geq 0$
27. $\dfrac{1}{x^2 + 9} < 0$
28. $\dfrac{1}{x^2 - 1} < 0$
29. $\dfrac{x(x - 1)}{x + 5} \geq 0$
30. $\dfrac{(1 + x)(1 - x)}{x} \leq 0$
31. $\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} \leq 1$
32. $\dfrac{x}{x^2 - 1} > 0$
33. $-(x + 1)(x + 2)(x + 3) < 0$
34. $-2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3) \leq 0$
35. $(x^2 - 1)(x^2 - 4) \leq 0$
36. $(x - 1)^2(x + 3)(x + 5) > 0$
37. $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2(x + 5)^3 < 0$
38. $x^2(x - 2)(x - 3)^5 \geq 0$
39. $\dfrac{(x + 3)^2(x + 4)(x - 5)^3}{x^2 - x - 20} > 0$
40. $\dfrac{9x^2 - 6x + 1}{x^3 - x^2} \leq 0$

En los problemas 41 a 44, resuelva la desigualdad y exprese las soluciones en notación de intervalos. Tal vez necesite la fórmula cuadrática para factorizar la expresión cuadrática.

41. $x^2 - x - 1 > 0$
42. $6x^2 < 3x + 5$
43. $\dfrac{5x - 2}{x^2 + 1} \leq 1$

44. $\dfrac{x^2}{x-1} \geq -1$

En los problemas 45 y 46, resuelva las desigualdades y exprese cada solución en notación de intervalos.

45. ***a***) $x^2 < x$ ***b***) $x^2 > x$

46. ***a***) $1/x < x$ ***b***) $x < 1/x$

47. Si $x^2 \leq 1$, ¿es necesariamente verdadero que $x \leq 1$? Explique.

48. Si $x^2 \geq 4$, ¿es necesariamente verdadero que $x \geq 2$? Explique.

49. Si 7 veces el cuadrado de un número positivo se reduce en 3, el resultado es mayor que 60. ¿Qué puede determinarse sobre el número?

50. Los lados de un cuadrado se extienden para formar un rectángulo. Como se muestra en la **FIGURA 3.7.7**, un lado se extiende 2 cm y el otro 5 cm. Si el área del rectángulo resultante es menor de 130 cm^2, ¿cuáles son las posibles longitudes de un lado del cuadrado original?

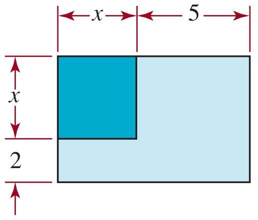


FIGURA 3.7.7 Rectángulo para el problema 50

51. Un **polígono** es una figura cerrada formada por la unión de segmentos de recta. Por ejemplo, un *triángulo* es un polígono de tres lados. En la figura 3.7.8 se ilustra un polígono de ocho lados que se llama *octágono*. Una *diagonal* de un polígono se define como un segmento de recta que une dos vértices no adyacentes. El número de diagonales d en un polígono de n lados se expresa por medio de $d = \frac{1}{2}(n-1)\,n - n$. ¿En qué polígonos el número de diagonales es superior a 35?

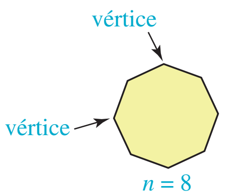


FIGURA 3.7.8 Octágono para el problema 51

52. El número total de puntos t, en un arreglo triangular con n filas está dado por (figura 3.7.9)

$$t = \frac{n(n+1)}{2}.$$

¿Cuántas filas puede tener el arreglo si el número total de puntos debe ser menor de 5.050?

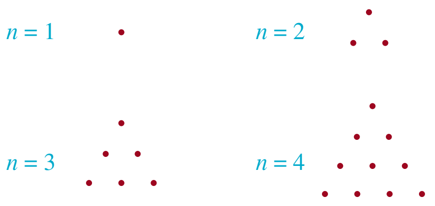


FIGURA 3.7.9 Arreglos triangulares de puntos para el problema 52

Aplicaciones diversas

53. Jardín de flores Un arriate debe ser dos veces más largo que ancho. Si el área cercada debe ser mayor que 98 m^2, ¿qué se puede concluir sobre el ancho del arriate?

54. Intensidad de la luz La intensidad I en lúmenes de una cierta fuente de luz en un punto a r centímetros de la fuente está dada por $I = 625/r^2$. ¿A qué distancias de la fuente de luz la intensidad es menor que 25 lúmenes?

55. Resistores paralelos Un resistor de 5 ohmios y un resistor variable se colocan en paralelo. La resistencia resultante R_T está dada por $R_T = 5R/(5+R)$. Determine los valores del resistor variable R con los cuales la resistencia resultante R_T será mayor que 2 ohmios.

56. Todo lo que sube… Con la ayuda del cálculo es fácil demostrar que la altura s de un proyectil lanzado en dirección vertical ascendente desde una altura inicial s_0 a una velocidad inicial de v_0 está dada por $s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$, donde t es el tiempo en segundos y $g = 32$ pies/s². Si un cohete de juguete se dispara en dirección vertical ascendente desde el nivel del suelo, $s_0 = 0$. Si la velocidad inicial es de 72 pies/s, ¿durante qué intervalo de tiempo estará el cohete a más de 80 pies del suelo?

Para la discusión

57. En el ejemplo 5, explique por qué no debemos multiplicar la última expresión en (2) por $x + 2$.

Repaso de conceptos Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Ecuaciones:
- raíz
- identidad
- ecuación condicional
- ecuaciones equivalentes
- ecuación lineal
- ecuación cuadrática
- ecuación polinomial
- ecuación de valor absoluto

Solución:
- conjunto solución
- solución extraña
- comprobación de una solución

Completar el cuadrado

Fórmula cuadrática:
- discriminante

Teorema de Pitágoras

Números complejos:
- forma estándar
- parte real
- parte imaginaria
- conjugado
- suma de dos
- diferencia de dos
- producto de dos
- cociente de dos
- inverso multiplicativo

Número imaginario puro

Ecuación de dos números complejos

Desigualdades:
- desigualdades equivalentes
- desigualdad simultánea
- desigualdad de valor absoluto
- desigualdad lineal
- desigualdad polinomial
- desigualdad racional

Notación de intervalos:
- intervalo abierto
- intervalo cerrado
- intervalo semiabierto

Propiedad de los signos de los productos

Tabla de signos

Cero de un polinomio

CAPÍTULO 3 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-9.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 10 responda verdadero o falso.

1. $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$. _____
2. $\dfrac{1}{\sqrt{-50}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{10}i$. _____
3. $|-3t+6| = 3|t-2|$. _____
4. Si $-3x \geq 6$, entonces $x \geq -2$. _____
5. El número 3.5 forma parte del conjunto solución de $\left|\dfrac{2-4x}{5}\right| > 2.5$. _____
6. El conjunto solución de $|4x - 6| \geq -1$ es $(-\infty, \infty)$. _____
7. Para cualquier número real x, $|-x^2 - 25| = x^2 + 25$. _____
8. Si $\bar{z} = z$, entonces z debe ser un número real. _____
9. La desigualdad $\dfrac{100}{x^2+64} \leq 0$ no tiene solución. _____
10. Si x es un número real, entonces $|x| = |-x|$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 10, llene los espacios en blanco.

1. Una desigualdad cuyo conjunto solución es $(-\infty, 9]$ es _______________.
2. El conjunto solución de la desigualdad $-3 < x \leq 8$ como intervalo es _______________.
3. La parte imaginaria del número completo $4 - 6i$ es _______________.
4. $(1-\sqrt{-5})(-3+\sqrt{-2})$ _______________.
5. Si $|15 - 2x| = x$, entonces $x =$ _______________.
6. El conjunto solución de la ecuación $|x| = |x+1|$ es _______________.
7. El conjunto de números reales x cuya distancia entre x y $\sqrt{2}$ es mayor que 3 queda definido por la desigualdad de valor absoluto _______________.
8. Si x está en el intervalo $(4, 8)$, entonces $|x-4| + |x-8| =$ _______________.
9. Si $a < 0$, entonces $|-a| =$ _______________.
10. Si $y \geq 0$ y $x^2 - 2x + 1 = y$, entonces $x =$ _______________.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 a 26, resuelva la ecuación dada.

1. $\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = x - \frac{1}{3}$

2. $4(1 - x) = x - 3(x + 1)$

3. $4 - \frac{1}{t} = 3 + \frac{3}{t}$

4. $\frac{4}{r + 1} - 5 = 4 - \frac{3}{r + 1}$

5. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{5}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$

6. $\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{x - 1} = \frac{3}{x + 1}$

7. $(1 - y)(y - 1) = y^2$

8. $x(2x - 1) = 3$

9. $4x^2 + 10x - 24 = 0$

10. $3x^2 + x - 10 = 0$

11. $16x^2 + 9 = 24x$

12. $x^2 - 17 = 0$

13. $2x^2 - 6x - 3 = 0$

14. $4x^2 + 20x + 25 = 0$

15. $2x^2 + 100 = 0$

16. $x^2 + 2x + 4 = 0$

17. $x^3 - 8 = 0$

18. $x^3 + 8 = 0$

19. $x^4 + 4x^2 - 8 = 0$

20. $4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$

21. $x^{1/4} - 2x^{1/2} + 1 = 0$

22. $8x^{2/3} - 9x^{1/3} + 1 = 0$

23. $\sqrt[3]{x^2 - 17} = 4$

24. $3 + \sqrt{3x + 1} = x$

25. $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 3} = \sqrt{x - 6}$

26. $x + 3 - 28x^{-1} = 0$

En los problemas 27 a 40, resuelva la desigualdad. Escriba el conjunto solución en notación de intervalos.

27. $2x - 5 \geq 6x + 7$

28. $\frac{1}{4}x - 3 < \frac{1}{2}x + 1$

29. $-4 < x - 8 < 4$

30. $7 \leq 3 - 2x < 11$

31. $|x| > 10$

32. $|-6x| \leq 42$

33. $|3x - 4| < 5$

34. $|5 - 2x| \geq 7$

35. $3x \geq 2x^2 - 5$

36. $x^2 > 6x - 9$

37. $x^3 > x$

38. $(x^2 - x)(x^2 + x) \leq 0$

39. $\frac{1}{x} + x > 2$

40. $\frac{2x - 6}{x - 1} \geq 1$

En los problemas 41 a 44, describa el intervalo dado en la recta numérica *a*) con una desigualdad, *b*) en notación de intervalos.

41.

FIGURA 3.R.1 Gráfica para el problema 41

42.

FIGURA 3.R.2 Gráfica para el problema 42

43.

FIGURA 3.R.3 Gráfica para el problema 43

44.

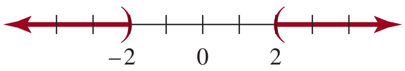


FIGURA 3.R.4 Gráfica para el problema 44

En los problemas 45 a 50, despeje la variable indicada en términos de las variables restantes. Suponga que todas las variables representan números reales positivos.

45. Área de la superficie de un paralelepípedo rectangular:

$$A = 2(ab + bc + ac), \quad \text{despeje } b$$

46. Conversión de temperatura:

$$T_C = \tfrac{5}{9}(T_F - 32), \quad \text{despeje } T_F$$

47. Ecuación de lentes:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \quad \text{despeje } f.$$

48. Volumen de una esfera:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3, \qquad \text{despeje } r.$$

49. Ecuación de una hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{despeje } x.$$

50. Movimiento de un proyectil:

$$y = x - \frac{9.8}{v_0^2}x^2, \qquad \text{despeje } x.$$

En los problemas 51 a 58, realice la operación indicada y escriba la respuesta en la forma estándar $a + bi$.

51. $(6 - 5i) + (4 + 3i)$

52. $(8 + 2i) - (5 - i)$

53. $(3 + 2i)(4 - 5i)$

54. $(3 + 5i)^2$

55. $\dfrac{1}{4 - 2i}$

56. $\dfrac{i}{5 + i}$

57. $\dfrac{2 - 5i}{3 + 4i}$

58. $\dfrac{15 - 7i}{7i}$

En los problemas 59 a 62 despeje x y y.

59. $(3x - yi)i = 4(1 + yi)$

60. $(1 + i)^2 = (x - yi)i$

61. $\dfrac{1}{i} = (2 - 3i) + (x + yi)$

62. $i^2 = -(y + xi)$

63. **Juego de números** La suma de dos números es 33 y su cociente es $\frac{5}{6}$. Halle los dos números.

64. **Velocidad del viento** Dos aviones, en aire quieto, vuelan a una velocidad de 180 mph. Un avión parte de Los Ángeles y viaja en dirección del viento hacia Phoenix. El segundo avión parte de Phoenix al mismo tiempo y viaja contra el viento hacia Los Ángeles. La distancia entre las ciudades es de 400 millas y los aviones se cruzan a 250 millas de Los Ángeles. Halle la velocidad del viento.

65. **De nuevo por un 80** En cuatro exámenes de igual valor, un estudiante tiene un puntaje promedio de 76. Si el examen final vale el doble que cualquiera de los cuatro exámenes, halle el puntaje que el estudiante debe obtener en el examen final para alcanzar un promedio total de 80.

66. **¿A qué velocidad?** Dos automóviles viajan 40 millas. Uno viaja 5 mph más rápido que el otro y hace el viaje en 16 minutos menos. Halle las velocidades de los dos autos.

67. **¿A qué velocidad?** La distancia desde Mineápolis hasta Des Moines es de aproximadamente 250 millas: 100 millas en Minnesota y 150 millas en Iowa. Antes, Iowa había elevado su límite de velocidad interestatal a 65 mph, mientras que el límite de velocidad de Minnesota era aún de 55 mph. En estas circunstancias, suponga que una mujer desea viajar de Mineápolis a Des Moines en 4 horas. Si planea conducir a 65 mph en Iowa, ¿a qué velocidad debe ir en Minnesota?

68. **Mecanógrafo lento** Ethan puede escribir en máquina 100 direcciones en 5 horas. Comienza y trabaja solo por dos horas. Luego, Sean empieza a ayudarle en otra computadora y terminan la tarea en otros 90 minutos. ¿Cuánto tiempo tardaría Sean escribiendo en la computadora las 100 direcciones solo?

69. **Ancho de una acera** Se va a construir una acera alrededor de un centro comercial circular. El diámetro del centro es de 34 m. Si el área de la acera es de 44π m^2, determine el ancho de la acera.

70. **Juego de números** Si se invierten los dígitos de un número de dos dígitos la razón del número original al nuevo número es igual a $\frac{5}{6}$. ¿Cuál es el número original?

71. **Velocidad de la corriente** El bote de Fran avanza a velocidad de crucero de 20 mi/h en aguas quietas. Si recorre la misma distancia en 3 horas a contracorriente que la que recorrería en 2 horas con la corriente a favor, ¿cuál es la velocidad de la corriente?

72. **Dimensiones** El piso de una casa es un rectángulo 5 m más largo que el doble de su ancho. Se planea una ampliación que incrementará el área total de la casa a 135 m^2. Si el ancho de la ampliación aumenta 4 m, halle las dimensiones originales de la casa.

73. **Hacer un corte** Se corta un borde uniforme de un pedazo de tela rectangular. El pedazo de tela resultante es de 20 por 30 cm (**FIGURA 3.R.5**). Si el área original era el doble de la actual, halle el ancho del borde que se cortó.

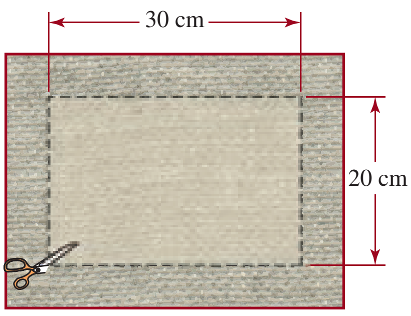


FIGURA 3.R.5 Tela para el problema 73

74. **TV de pantalla plana** El "tamaño" de la pantalla de un televisor rectangular se mide a lo largo de la diagonal. Si la pantalla tiene 24 pulgadas más de largo que de ancho y el tamaño de la pantalla que se da es de 64 pulgadas, ¿cuáles son las dimensiones de la pantalla?

75. **Todo lo que sube…** Disparamos un cohete de juguete en dirección vertical ascendente desde el suelo a una velocidad inicial de 72 pies/s. La altura s en pies sobre el nivel del suelo después de t segundo está dada por $s = -16t^2 + 72t$. ¿Durante qué intervalo de tiempo estará el cohete a más de 80 pies del suelo?

76. **Mezcla** Una enfermera tiene 2 litros de una solución de ácido bórico a 3%. ¿Cuánto de una solución a 10% debe añadir para tener una solución a 4%?

77. **Costo de bonos** El señor Diamond compró dos bonos por un total de 30 000 dólares. Un bono paga 6% de interés y el otro 8%. El interés anual del bono de 8% excede al interés anual del bono de 6% en 1 000 dólares. Halle el costo de cada bono.

78. **Plan de jubilación** Teri trabajó en una firma aeroespacial por 21 años cuando María comenzó a laborar allí. Si Teri se jubila cuando tiene cinco veces la antigüedad de María, ¿cuánto tiempo ha trabajado cada cual en la firma?

79. **Música nocturna** La señora Applebee compró una serie de cajas musicales para su almacén por un total de 400 dólares. Si cada caja de música hubiera costado 4 dólares más, habría adquirido cinco cajas de música menos por la mitad del dinero. ¿Cuántas compró?

80. **Dosis infantil** La regla de Young para convertir la dosis para adultos de un medicamento en dosis para niños supone una relación entre edad y dosis, y se utiliza más frecuentemente para niños entre los 3 y los 12 años de edad.

$$\frac{\text{edad del niño}}{\text{edad del niño} + 12} \times \text{dosis del adulto} = \text{dosis del niño}.$$

¿A qué edad la dosis del adulto es cuatro veces la del niño?

81. **Prevención de aludes** Los ingenieros que se ocupan de los riesgos de un alud miden la solidez de una banquisa de nieve martillando un tubo de metal especialmente diseñado en la nieve y viendo hasta dónde penetra. Asignan a la banquisa de nieve un número de apisonamiento R dado por la fórmula

$$R = H + T + nfH/p,$$

donde H es la masa del martillo, T es la masa del tubo, n es el número de golpes de martillo, f es la distancia que el martillo baja por cada golpe y p es la penetración total después de n golpes (figura 3.R.6). Típicamente, T y H tienen 1 kg cada una y f tiene alrededor de 50 cm. Si el número de apisonamiento de la banquisa de nieve es 150, ¿hasta dónde penetra el tubo después de un golpe?

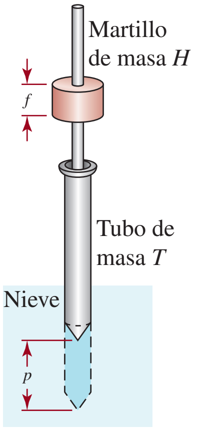


FIGURA 3.R.6 Apisonamiento de la banquisa de nieve del problema 81

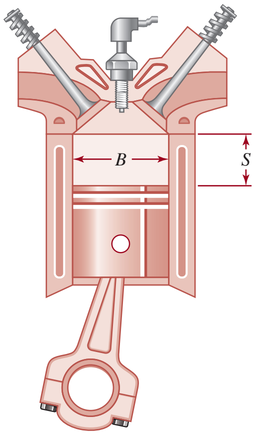


FIGURA 3.R.7 Pistón para el problema 82

82. **Autos clásicos** El tamaño de una máquina automotriz se mide por el volumen de aire presionado hacia arriba o desplazado por el movimiento de los pistones. Este volumen está dado por la fórmula

$$V = N\pi S(B/2)^2,$$

Oldsmobile modelo 1911 del problema 82

donde N es el número de pistones, S es la distancia vertical o carrera que cada pistón mueve, y B es el diámetro o taladro de un pistón (figura 3.R.7).

a) Halle el tamaño en pulgadas cúbicas de un V-8 (máquina de 8 cilindros) con un taladro de 4 pulgadas y una carrera de 3 pulgadas.

b) La máquina de 6 cilindros de 1909 de Thomas Flyer tenía un taladro y una carrera de 5.5 pulgadas. Halle su tamaño. (*Nota*: las máquinas antiguas eran grandes debido a su baja eficacia.)

c) El Oldsmobile Limited de 1911 desplazó 706.9 pulgadas^3 con un taladro de 5 pulgadas y una carrera de 6 pulgadas. ¿Cuántos cilindros tenía?

d) Los automóviles veloces "aumentan" la potencia de un carro aumentando el tamaño del taladro y la longitud de la carrera. Si la carrera se aumenta $\frac{1}{4}$ de pulgada y el taladro $\frac{1}{8}$ de pulgada en la máquina descrita en el inciso *a*), ¿cuánto desplazamiento se gana?

83. Temperatura del aire La fórmula de Vincent para la temperatura de la piel humana P_v en grados Celsius es

$$P_v = 30.1 + 0.2t - (4.12 - 0.13t)v$$

donde t es la temperatura del aire en grados Celsius y v es la velocidad del viento en metros por segundo.

a) ¿A qué temperaturas t en aire quieto ($v = 0$) es menor la temperatura de la piel que la de la sangre (37 °C)?

b) ¿Hay una velocidad de viento a la que tanto la temperatura t como la temperatura de la piel P sea igual a la temperatura de la sangre (37 °C)? Explique su respuesta.

c) Según esta fórmula, ¿a qué temperaturas t la velocidad del viento hace que aumente la temperatura de la piel? [*Pista:* la velocidad del viento aumentará la temperatura del cuerpo cuando el coeficiente v sea positivo].

84. Estacionamiento pequeño Un arquitecto de estadios diseñó un estacionamiento para 20 000 automóviles con cuatro salidas de 4 carriles cada una. En condiciones ideales se supone que los autos saldrán suavemente a 10 mph, utilizando las 16 salidas, con un espacio de 10 pies entre cada auto.

a) Si el automóvil común tiene 15 pies de largo, ¿en cuánto tiempo se desocupará el estacionamiento? [*Pista:* convierta 10 mph a pies por minuto].

b) Deduzca una fórmula general que exprese el tiempo T en minutos en el que C autos saldrán de un estacionamiento, utilizando N salidas a la calle, con un espacio de s pies entre autos, todos moviéndose a v millas por hora, si el auto común tiene L pies de longitud. Incluya el factor que convierte millas por hora en pies por minuto.

c) Resuelva la fórmula deducida en el inciso *b*) para N.

d) Halle el número de carriles de salida requeridos para 10 000 autos, cada uno de 15 pies de largo, de manera que salgan en no más de 30 minutos a 10 mph con 10 pies entre cada auto.

85. Tormentas violentas Hace algunos años, los meteorólogos usaban la ecuación $D^3 = 216T^2$ como modelo matemático para describir el tamaño y la intensidad de cuatro tipos de tormentas violentas (tornados, tormentas eléctricas, huracanes y ciclones), donde D es el diámetro de la tormenta en millas y T es el número de horas que se desplaza la tormenta antes de disiparse. (*Fuente: NCTM Student Math Notes,* enero de 1987).

a) Despeje T.

b) En Estados Unidos se registran alrededor de 150 tornados cada año. Si el diámetro de un tornado es de 2 mi, use el modelo matemático proporcionado para determinar el número de horas que cabría esperar que durara.

Tornado para el problema 85

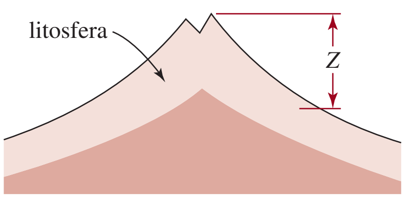


FIGURA 3.R.1 Dorsal oceánica para el problema 86

86. Tectónica de placas Los estudios geológicos de la corteza de la Tierra indican que la litosfera (roca fundida) que la presión empuja hacia arriba en las dorsales oceánicas se hunde a medida que se va enfriando y se aleja de la dorsal. En tectónica de placas, la velocidad a la que se hunde la litosfera se pronostica con el modelo matemático

$$Z = C\sqrt{T}, \qquad \text{con } 0 \le T \le 100$$

donde Z es la profundidad en metros que se hunde la litosfera, T es el antigüedad de ésta en millones de años y C es una constante (figura 3.R.8). (El valor $C = 300$ encaja relativamente bien en los datos.)

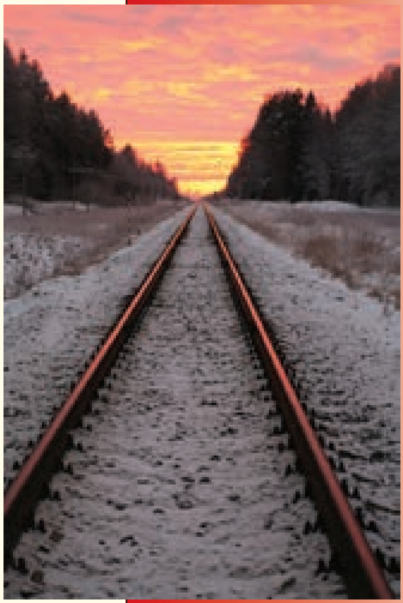
a) ¿Hasta dónde se hunde la litosfera al cabo de 100 millones de años?

b) Despeje T en la ecuación dada. ¿Qué antigüedad tiene la litosfera que se ha hundido 500 m?

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES Y GRÁFICAS

4

En este capítulo



En la sección 4.3 veremos que las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

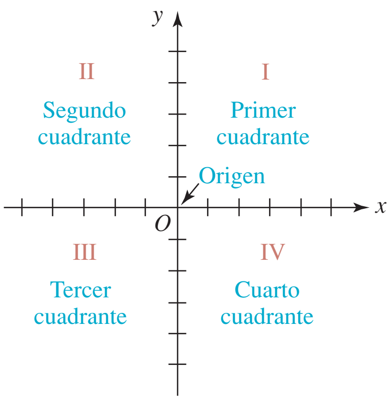
Un poco de historia Todo estudiante de matemáticas rinde homenaje al matemático francés **René Descartes** (1596-1650) siempre que traza una gráfica. Se considera que Descartes es el inventor de la geometría analítica, que es la combinación del álgebra y la geometría, en una época en que se creía eran campos de las matemáticas que no guardaban relación entre sí. En geometría analítica, una ecuación que contiene dos variables puede interpretarse como una gráfica en un sistema de coordenadas bidimensional integrado a un plano. El sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas se llama así en honor de Descartes. Los principios básicos de la geometría analítica se establecieron en *La Géométrie,* oabra publicada en 1637. La invención del plano cartesiano y las coordenadas rectangulares contribuyó de manera muy importante al desarrollo posterior del cálculo que realizaron paralelamente **Isaac Newton** (1643-1727) y **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716).

René Descartes también era científico y escribió sobre óptica, astronomía y meteorología. Sin embargo, además de sus contribuciones a las matemáticas y la ciencia, Descartes es recordado por la enorme influencia que ejerció en la filosofía. De hecho, a menudo se le llama *padre de la filosofía moderna*, y su libro *Meditaciones metafísicas* sigue siendo lectura obligatoria en muchas universidades hasta la fecha. Su famosa frase *cogito ergo sum* (pienso, luego existo) aparece en sus obras *Discurso del método* y *Principios de filosofía.* Aunque se decía católico devoto, la Iglesia recelaba de la filosofía y los escritos de Descartes sobre el alma e incluyó todas sus obras en el *Índice de libros prohibidos* en 1693.

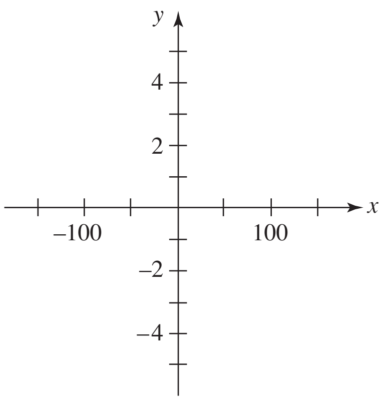
4.1 El sistema de coordenadas rectangulares

Introducción Vimos en la sección 3.1 que cada número real se puede asociar con exactamente un punto de la recta numérica, o recta de coordenadas. Ahora examinaremos una correspondencia entre los puntos de un plano y los pares ordenados de números reales.

El plano coordenado Un **sistema coordenado rectangular** se forma con dos rectas numéricas perpendiculares que se intersecan en el punto correspondiente al número 0 en cada recta. El punto de intersección se llama **origen** y se representa con el símbolo *O*. Las rectas numéricas horizontal y vertical se llaman eje ***x*** y eje ***y***, respectivamente. Esos dos ejes dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, que se numeran como se indica en la **FIGURA 4.1.1*a*)**. Como se ve en la **FIGURA 4.1.1*b*)**, las escalas en los ejes *x* y *y* no necesitan ser iguales. En este texto si *no* se especifican las marcas de intervalo en los ejes coordenados, como en la figura 4.1.1*a*), se puede suponer que una marca corresponde a una unidad. Un plano que contiene un sistema coordenado rectangular se llama **plano *xy***, **plano coordenado** o simplemente **espacio bidimensional**.



a) Cuatro cuadrantes



b) Escalas diferentes en los ejes *x* y *y*

FIGURA 4.1.1 Plano coordenado

Al sistema de coordenadas rectangulares y al plano coordenado *xy* se les llama también **sistema de coordenadas cartesianas** y **plano cartesiano**, en honor de **René Descartes** (1596-1650), famoso matemático y filósofo francés.

Coordenadas de un punto Sea *P* un punto en el plano coordenado. Se asocia un par ordenado de números reales con *P* trazando una recta vertical desde *P* al eje *x*, y una recta horizontal desde *P* al eje *y*. Si la recta vertical corta el eje *x* en el número *a*, y la recta horizontal interseca el eje *y* en el número *b*, asociamos el par ordenado de números reales (*a*, *b*) con el punto. Al revés, a cada par ordenado (*a*, *b*) de números reales corresponde un punto *P* en el plano. Este punto está en la intersección de la línea vertical que pasa por *a* en el eje *x*, y la línea horizontal que pasa por *b* en el eje *y*. En adelante, a un par ordenado se le llamará un **punto** y se representará por *P*(*a*, *b*) o bien por (*a*, *b*).[1] El número *a* es la **abscisa** o **coordenada *x*** del punto, y el número *b* es la **ordenada**, o **coordenada *y*** del punto, y se dice que *P* tiene las **coordenadas** (*a*, *b*). Por ejemplo, las coordenadas del origen son (0, 0) (**FIGURA 4.1.2**).

[1] Es la misma notación que se usa para representar un intervalo abierto. Debe quedar claro, por el contexto de la descripción, si se está considerando un punto (*a*, *b*) o un intervalo abierto (*a*, *b*).

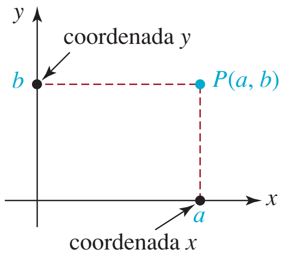


FIGURA 4.1.2 Punto con coordenadas (a, b)

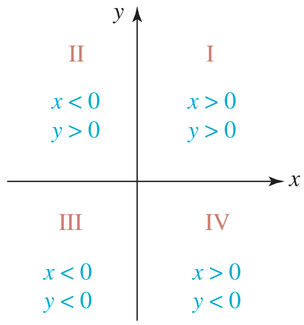


FIGURA 4.1.3 Signos algebraicos de las coordenadas en los cuatro cuadrantes

En la **FIGURA 4.1.3** se indican los signos algebraicos de la coordenada x o abscisa y la coordenada y u ordenada de cualquier punto (x, y) en cada uno de los cuatro cuadrantes. Se considera que los puntos en cualquiera de los dos ejes no están en cuadrante alguno. Como un punto en el eje x tiene la forma $(x, 0)$, la ecuación que describe al eje x es $y = 0$. De igual modo, un punto en el eje y tiene la forma $(0, y)$, por lo que la ecuación del eje y es $x = 0$. Cuando se ubica un punto en el plano coordenado, que corresponde a un par ordenado de números, y se representa usando un punto lleno, se dice que **se grafica** el punto.

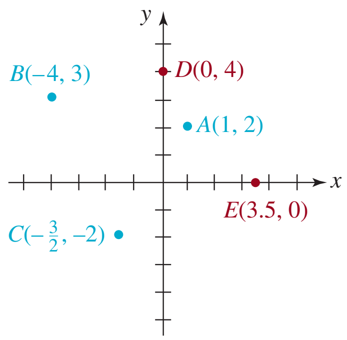


FIGURA 4.1.4 Gráfica de los cinco puntos del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Graficación de puntos

Grafique los puntos $A(1, 2)$, $B(-4, 3)$, $C(-\frac{3}{2}, -2)$, $D(0, 4)$ y $E(3.5, 0)$. Especifique el cuadrante en el que está cada uno.

Solución Los cinco puntos se graficaron en el plano coordenado de la **FIGURA 4.1.4**. El punto A está en el primer cuadrante (cuadrante I), B en el segundo (cuadrante II) y C en el tercero (cuadrante III). Los puntos D y E están en los ejes x y y, respectivamente, y no están en cuadrante alguno. ≡

EJEMPLO 2 Graficación de puntos

Trace el conjunto de puntos (x, y) en el plano xy cuyas coordenadas satisfacen $0 \leq x \leq 2$ y también que $|y| = 1$.

Solución Primero, recuerde que la ecuación de valor absoluto $|y| = 1$ implica que $y = -1$ o $y = 1$. En consecuencia, los puntos que satisfacen las condiciones dadas son aquellos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen *al mismo tiempo* las siguientes condiciones: cada abscisa es un número en el intervalo cerrado $[0, 2]$ y cada ordenada es ya sea $y = -1$ o $y = 1$. Por ejemplo, algunos de los puntos que satisfacen las dos condiciones son $(1, 1)$, $(\frac{1}{2}, -1)$, $(2, -1)$. En la **FIGURA 4.1.5** se muestra en forma gráfica que el conjunto de todos los puntos que satisfacen las dos condiciones son los que están en los dos segmentos de recta paralelos. ≡

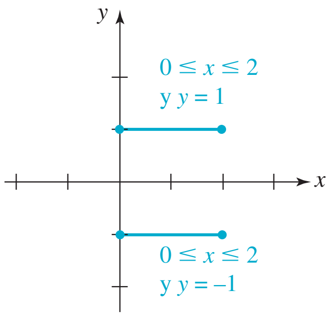


FIGURA 4.1.5 Conjunto de puntos para el ejemplo 2

EJEMPLO 3 Regiones definidas por desigualdades

Trace el conjunto de puntos (x, y) en el plano xy cuyas coordenadas satisfagan cada una de las condiciones siguientes:

***a*)** $xy < 0$ ***b*)** $|y| \geq 2$.

Solución ***a*)** De acuerdo con (3) de las propiedades de los signos de los productos, en la sección 3.7, se ve que un producto de dos números reales x y y es negativo cuando uno de ellos es positivo y el otro es negativo. Así, $xy < 0$ cuando $x > 0$ y $y < 0$, *o también* cuando $x < 0$ y $y > 0$. En la figura 4.1.3 se ve que $xy < 0$ para todos los puntos (x, y) del segundo y el cuarto cuadrantes. Por consiguiente, se puede representar el conjunto de los puntos para los que $xy < 0$ mediante las regiones sombreadas de la **FIGURA 4.1.6**. Los ejes coordenados se muestran como líneas interrumpidas, para indicar que los puntos en esos ejes no se incluyen en el conjunto solución.

b) En la sección 3.6 vimos que $|y| \geq 2$ quiere decir que $y \geq 2$, o bien que $y \leq -2$. Como x no tiene restricción alguna, puede ser cualquier número real, por lo que los puntos (x, y) para los cuales

$$y \geq 2 \text{ y } -\infty < x < \infty \qquad \text{o bien} \qquad y \leq -2 \text{ y } -\infty < x < \infty$$

se pueden representar por medio de las dos regiones sombreadas de la **FIGURA 4.1.7**. Se usan líneas sólidas para representar las cotas $y = -2$ y $y = 2$ de la región, que indican que los puntos en esos límites están incluidos en el conjunto solución.

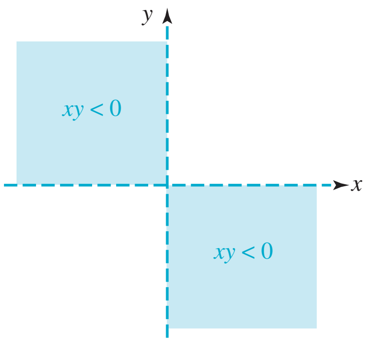


FIGURA 4.1.6 Región del plano xy que satisface la condición ***a***) del ejemplo 3

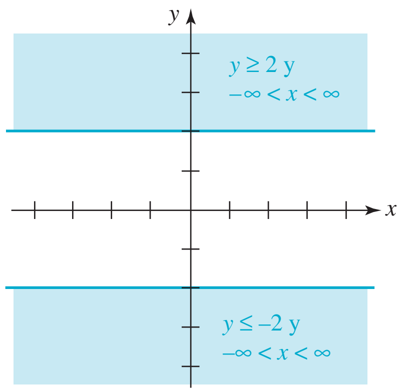


FIGURA 4.1.7 Región del plano xy que satisface la condición ***b***) del ejemplo 3

■ **Fórmula de la distancia** Supongamos que $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos distintos en el plano xy, que no están en una recta vertical ni en una recta horizontal. En consecuencia, P_1, P_2 y $P_3(x_1, y_2)$ son vértices de un triángulo rectángulo, como se ve en la **FIGURA 4.1.8**. La longitud del lado P_3P_2 es $|x_2 - x_1|$, mientras que la longitud del lado P_1P_3 es $|y_2 - y_1|$. Si representamos con d la longitud P_1P_2, entonces

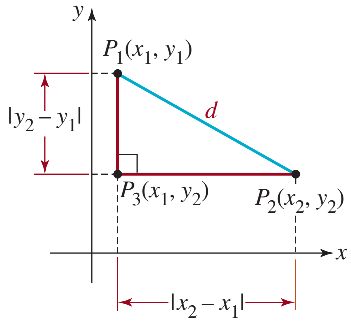


FIGURA 4.1.8 Distancia entre los puntos P_1 y P_2

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \tag{1}$$

de acuerdo con el teorema de Pitágoras. Como el cuadrado de todo número real es igual al cuadrado de su valor absoluto, se pueden reemplazar los signos de valor absoluto en la ecuación (1) por paréntesis. Entonces, la fórmula de la distancia se deriva directamente de (1).

Teorema 4.1.1 Fórmula de la distancia

La **distancia** entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ cualesquiera en el plano xy se determina por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2}$$

Aunque esta fórmula fue deducida para dos puntos que no estén en una recta horizontal o vertical, es válida también en esos casos. También, como $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$, no importa qué punto se use primero en la fórmula de la distancia; esto es, $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$.

EJEMPLO 4 Distancia entre dos puntos

Calcule la distancia entre los puntos $A(8, -5)$ y $B(3, 7)$.

Solución De acuerdo con (2), si A y B son P_1 y P_2, respectivamente:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(3-8)^2 + (7-(-5))^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{169} = 13. \end{aligned}$$

La distancia d se ilustra en la **FIGURA 4.1.9**. ≡

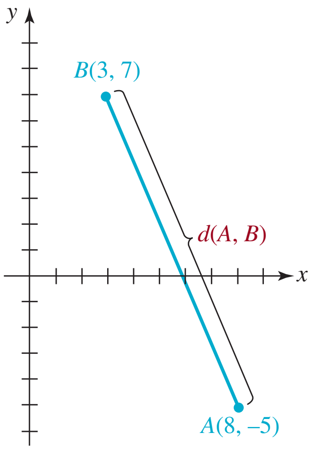


FIGURA 4.1.9 Distancia entre dos puntos del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Tres puntos forman un triángulo

Determine si los puntos $P_1(7, 1)$, $P_2(-4, -1)$ y $P_3(4, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución Según la geometría plana, un triángulo es rectángulo si y sólo si la suma de los cuadrados de las longitudes de dos de sus lados es igual al cuadrado de la longitud del lado restante. Ahora bien, de acuerdo con la fórmula de la distancia (2):

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(-4-7)^2 + (-1-1)^2} \\ &= \sqrt{121 + 4} = \sqrt{125}, \\ d(P_2, P_3) &= \sqrt{(4-(-4))^2 + (5-(-1))^2} \\ &= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10, \\ d(P_3, P_1) &= \sqrt{(7-4)^2 + (1-5)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

Ya que

$$[d(P_3, P_1)]^2 + [d(P_2, P_3)]^2 = 25 + 100 = 125 = [d(P_1, P_2)]^2,$$

se llega a la conclusión de que P_1, P_2 y P_3 son los vértices de un triángulo rectángulo, y el ángulo recto está en P_3 (**FIGURA 4.1.10**). ≡

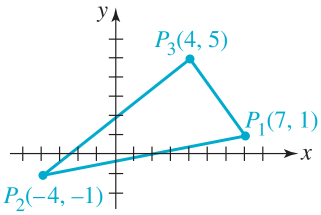


FIGURA 4.1.10 Triángulo del ejemplo 5

Fórmula del punto medio En la sección 3.2 se explicó que el punto medio en la recta numérica de un segmento de recta entre dos números a y b es su promedio $(a + b)/2$. En el plano xy, cada coordenada del punto medio M de un segmento de recta que une dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, como se muestra en la **FIGURA 4.1.11** es el promedio de las coordenadas correspondientes a los extremos de los intervalos $[x_1, x_2]$ y $[y_1, y_2]$.

Para demostrarlo, se ve en la figura 4.1.11 que los triángulos P_1CM y MDP_2 son congruentes, porque los ángulos correspondientes son iguales y $d(P_1, M) = d(M, P_2)$. Por consiguiente, $d(P_1, C) = d(M, D)$, o $y - y_1 = y_2 - y$. Al despejar y de la última ecuación se obtiene $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$. De igual modo, $d(C, M) = d(D, P_2)$, y entonces $x - x_1 = x_2 - x$; por consiguiente, $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Este resultado se resume como sigue.

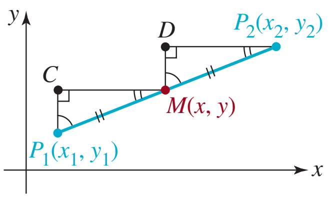


FIGURA 4.1.11 M es el punto medio del segmento de recta que une P_1 con P_2

Teorema 4.1.2 Fórmula del punto medio

Las coordenadas del **punto medio** del segmento de recta que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ se determinan por medio de

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right). \tag{3}$$

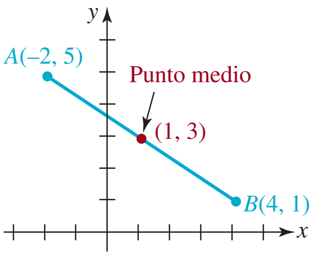


FIGURA 4.1.12 Punto medio del segmento de recta del ejemplo 6

EJEMPLO 6 Punto medio de un segmento de recta

Calcule las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une $A(-2, 5)$ con $B(4, 1)$.

Solución De acuerdo con la fórmula (3), las coordenadas del punto medio son

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5+1}{2}\right) \quad \text{o} \quad (1, 3).$$

Este punto se indica en color en la **FIGURA 4.1.12**. ≡

4.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-9.

En los problemas 1 a 4 grafique los puntos.

1. $(2, 3), (4, 5), (0, 2), (-1, -3)$

2. $(1, 4), (-3, 0), (-4, 2), (-1, -1)$

3. $(-\frac{1}{2}, -2), (0, 0), (-1, \frac{4}{3}), (3, 3)$

4. $(0, 0.8), (-2, 0), (1.2, -1.2), (-2, 2)$

En los problemas 5 a 16 determine el cuadrante en el que está el punto si (a, b) está en el cuadrante I.

5. $(-a, b)$

6. $(a, -b)$

7. $(-a, -b)$

8. (b, a)

9. $(-b, a)$

10. $(-b, -a)$

11. (a, a)

12. $(b, -b)$

13. $(-a, -a)$

14. $(-a, a)$

15. $(b, -a)$

16. $(-b, b)$

17. Grafique los puntos de los problemas 5 a 16, si (a, b) es el punto que se ve en la **FIGURA 4.1.13**.

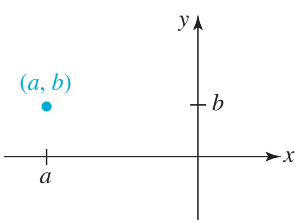


FIGURA 4.1.13 Punto (a, b) para el problema 17

18. Indique las coordenadas de los puntos que se ven en la **FIGURA 4.1.14**.

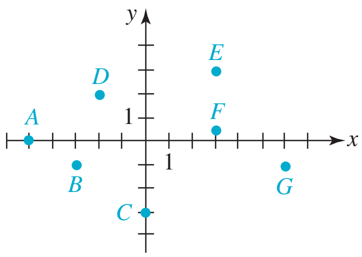


FIGURA 4.1.14 Puntos A a G para el problema 18

19. Los puntos $(-2, 0)$, $(-2, 6)$ y $(3, 0)$ son los vértices de un rectángulo. Determine el cuarto vértice.

20. Describa el conjunto de los puntos (x, x) en el plano coordenado. También el conjunto de los puntos $(x, -x)$.

En los problemas 21 a 26, grafique el conjunto de puntos (x, y) en el plano xy, cuyas coordenadas satisfagan las condiciones indicadas.

21. $xy = 0$

22. $xy > 0$

23. $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 2$

24. $x \leq 2$ y $y \geq -1$

25. $|x| > 4$

26. $|y| \leq 1$

En los problemas 27 a 32, calcule la distancia entre los puntos.

27. $A(1, 2), B(-3, 4)$

28. $A(-1, 3), B(5, 0)$

29. $A(2, 4), B(-4, -4)$

30. $A(-12, -3)$, $B(-5, -7)$

31. $A(-\frac{3}{2}, 1)$, $B(\frac{5}{2}, -2)$

32. $A(-\frac{5}{3}, 4)$, $B(-\frac{2}{3}, -1)$

En los problemas 33 a 36, determine si los puntos A, B y C son vértices de un triángulo rectángulo.

33. $A(8, 1)$, $B(-3, -1)$, $C(10, 5)$

34. $A(-2, -1)$, $B(8, 2)$, $C(1, -11)$

35. $A(2, 8)$, $B(0, -3)$, $C(6, 5)$

36. $A(4, 0)$, $B(1, 1)$, $C(2, 3)$

37. Determine si los puntos $A(0, 0)$, $B(3, 4)$ y $C(7, 7)$ son vértices de un triángulo isósceles.

38. Determine todos los puntos del eje y que estén a 5 unidades del punto (4, 4).

39. Se tiene el segmento de recta que une $A(-1, 2)$ con $B(3, 4)$.

a) Encuentre una ecuación que exprese el hecho que un punto $P(x, y)$ sea equidistante de A y de B.

b) Defina geométricamente el conjunto de puntos que describe la ecuación del inciso *a*).

40. Use la fórmula de la distancia para determinar si los puntos $A(-1, -5)$, $B(2, 4)$ y $C(4, 10)$ están en una recta.

41. Determine todos los puntos cuya abscisa sea 6, tales que la distancia de cada punto a $(-1, 2)$ es $\sqrt{85}$.

42. ¿Cuál de los puntos $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ o $(0.25, 0.97)$ está más cerca del origen?

En los problemas 43 a 48, determine el punto medio del segmento de recta que une los puntos A y B.

43. $A(4, 1)$, $B(-2, 4)$

44. $A(\frac{2}{3}, 1)$, $B(\frac{7}{3}, -3)$

45. $A(-1, 0)$, $B(-8, 5)$

46. $A(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$, $B(-\frac{5}{2}, 1)$

47. $A(2a, 3b)$, $B(4a, -6b)$

48. $A(x, x)$, $B(-x, x + 2)$

En los problemas 49 a 52, determine el punto B si M es el punto medio del segmento de recta que une los puntos A y B.

49. $A(-2, 1)$, $M(\frac{3}{2}, 0)$

50. $A(4, \frac{1}{2})$, $M(7, -\frac{5}{2})$

51. $A(5, 8)$, $M(-1, -1)$

52. $A(-10, 2)$, $M(5, 1)$

53. Calcule la distancia del punto medio del segmento de recta que une $A(-1, 3)$ con $B(3, 5)$, al punto medio del segmento de recta que une $C(4, 6)$ con $D(-2, -10)$.

54. Determine todos los puntos del eje x que estén a 3 unidades del punto medio del segmento de recta que une a (5, 2) con (−5, −6).

55. El eje x es la perpendicular que pasa por el punto medio (mediatriz) del segmento de recta que pasa por $A(2, 5)$ y $B(x, y)$. Calcule x y y.

56. En el segmento de recta que une los puntos $A(0, 0)$ y $B(6, 0)$, determine un punto $C(x, y)$ en el primer cuadrante, tal que A, B y C sean vértices de un triángulo equilátero.

57. Determine los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ en el segmento de recta que une $A(3, 6)$ con $B(5, 8)$, y que dividan al segmento de recta en cuatro partes iguales.

Aplicaciones diversas

58. Camino a Chicago Las ciudades de Kansas City y Chicago no están unidas directamente por una carretera interestatal, pero cada una de ellas está conectada con las ciudades de St. Louis y Des Moines (**FIGURA 4.1.15**). Des Moines está a unas 40 millas al este, y a 180 millas al norte de Kansas City. St. Louis está más o menos a 230 millas al este y a 40 millas al sur de Kansas City, y Chicago está aproximadamente a 360 millas al este, y a 200 millas al norte de Kansas City. Suponga que esta parte del Medio Oeste es un plano, y que las carreteras son rectas. ¿Qué ruta de Kansas City a Chicago es más corta; ¿la que pasa por St. Louis o la que pasa por Des Moines?

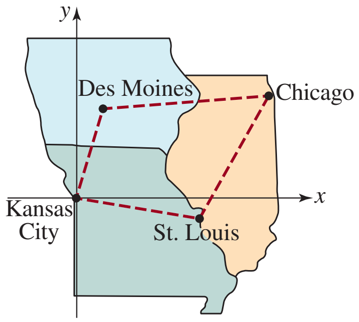


FIGURA 4.1.15 Mapa para el problema 58

Para la discusión

59. Los puntos $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(4, 6)$ y $D(8, 6)$ son los vértices de un paralelogramo. Indique cómo se puede demostrar que las diagonales del paralelogramo se bisecan entre sí. Ponga sus ideas a trabajar.

60. Los puntos $A(0, 0)$, $B(a, 0)$ y $C(a, b)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Describa cómo se puede demostrar que el punto medio de la hipotenusa equidista de los vértices. Ponga sus ideas a trabajar.

4.2 Círculos y gráficas

Introducción En el capítulo 1 estudiamos las ecuaciones como dos cantidades algebraicas que implican una variable. Nuestro objetivo era hallar el conjunto solución de la ecuación. Tanto en ésta como en las secciones próximas estudiaremos **ecuaciones con dos variables**, digamos x y y. Una ecuación de este tipo es sencillamente una proposición matemática que afirma que las cantidades que implican estas variable son iguales. En los campos de las ciencias físicas, ingeniería y comercio, las ecuaciones en dos (o más) son un medio de comunicación. Por ejemplo, si un físico desea comunicar a otro la distancia que recorre una piedra que se deja caer desde una gran altura durante cierto tiempo t, escribirá $s = 16t^2$. Un matemático verá $s = 16t^2$ y de inmediato lo considerará como cierto *tipo* de ecuación. La clasificación de una ecuación conlleva información acerca de propiedades que comparten todas las ecuaciones de ese tipo. El resto de este libro se dedica a examinar diversas clases de ecuaciones que contienen dos o más variables, y a estudiar sus propiedades. A continuación presentamos una muestra de las ecuaciones que verá el lector:

$$\begin{gathered} x = 1, \qquad x^2 + y^2 = 1, \qquad y = x^2, \qquad y = \sqrt{x}, \\ y = 5x - 1, \qquad y = x^3 - 3x, \qquad y = 2^x, \qquad y = \ln x, \\ y^2 = x - 1, \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \qquad \tfrac{1}{2}x^2 - y^2 = 1 \end{gathered} \tag{1}$$

Terminología Una **solución** de una ecuación con dos variables x y y es un par ordenado de números (a, b) que produce una proposición cierta cuando $x = a$ y $y = b$ se sustituyen en la ecuación. Por ejemplo $(-2, 4)$ es una solución de la ecuación $y = x^2$, porque

$$\overset{\overset{y\,=\,4}{\downarrow}}{4} = (\overset{\overset{x\,=\,-2}{\downarrow}}{-2})^2$$

es una proposición cierta. También se dice que las coordenadas $(-2, 4)$ **satisfacen** la ecuación. El conjunto de todas las soluciones de una ecuación se llama **conjunto solución**. Se dice que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución. Por ejemplo, veremos (ejemplo 4 de esta sección) que la ecuación $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 17 = 0$ es equivalente a $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$.

En la lista de las ecuaciones (1) el lector podrá objetar que la primera ecuación, $x = 1$, no contiene dos variables. ¡Es asunto de interpretación! Como no hay una dependencia explícita de y en la ecuación, se puede interpretar que $x = 1$ es el conjunto

$$\{(x, y) \mid x = 1, \text{ donde } y \text{ es cualquier número real}\}$$

Las soluciones de $x = 1$ son los pares ordenados $(1, y)$ donde se tiene la libertad de escoger y en forma arbitraria, mientras sea un número real. Por ejemplo, $(1, 0)$ y $(1, 3)$ son soluciones de la ecuación $x = 1$. La **gráfica** de una ecuación es la representación visual, en el plano coordenado, del conjunto de puntos cuyas coordenadas (a, b) satisfacen la ecuación. La gráfica de $x = 1$ es la recta vertical que se muestra en la **FIGURA 4.2.1**.

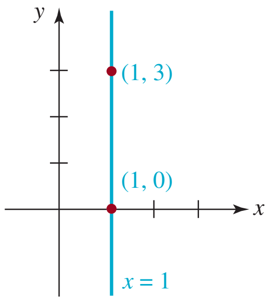


FIGURA 4.2.1 Gráfica de la ecuación $x = 1$

Círculos Se puede usar la fórmula de la distancia que presentamos en la sección anterior para definir un conjunto de puntos en el plano coordenado. Uno de esos muy importantes conjuntos se define como sigue.

> **Definición 4.2.1 Círculo**
>
> Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano coordenado que están a determinada distancia fija r, llamada **radio**, de un punto fijo dado C, llamado **centro**.

Si las coordenadas del centro son $C(h, k)$, entonces, de acuerdo con la definición anterior, un punto $P(x, y)$ está en un círculo de radio r si y sólo si

$$d(P, C) = r \qquad \text{o} \qquad \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Ya que $(x - h)^2 + (y - k)^2$ siempre es no negativo, se obtiene una ecuación equivalente si los dos lados se elevan al cuadrado. Llegamos a la conclusión de que un círculo de radio r y centro $C(h, k)$ tiene la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{2}$$

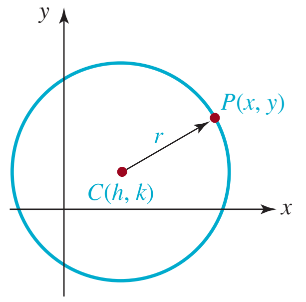


FIGURA 4.2.2 Círculo con radio r y centro en (h, k)

En la **FIGURA 4.2.2** hemos trazado una gráfica típica de una ecuación con la forma de la ecuación (2). La ecuación (2) se llama **forma normal**, **estándar** o **canónica** de la ecuación de un círculo. Se ve que los símbolos h y k en (2) representan números reales, y como tales pueden ser positivos, cero o negativos. Cuando $h = 0$ y $k = 0$, se ve que la forma normal de la ecuación de un círculo con centro en el origen es (**FIGURA 4.2.3**)

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{3}$$

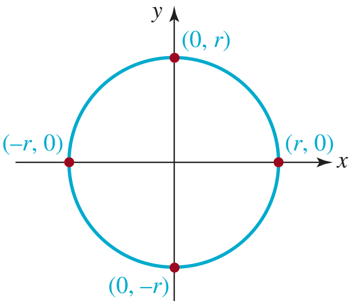


FIGURA 4.4.3 Círculo con radio r y centro en $(0, 0)$

Cuando $r = 1$ se dice que (2) o (3) es una ecuación de un **círculo unitario**. Por ejemplo, $x^2 + y^2 = 1$ es una ecuación de un círculo unitario con centro en el origen.

EJEMPLO 1 Centro y radio

Determine el centro y el radio del círculo cuya ecuación es

$$(x-8)^2 + (y+2)^2 = 49 \tag{4}$$

Solución Para obtener la forma normal de la ecuación (4) se escribe como sigue:

$$(x-8)^2 + (y-(-2))^2 = 7^2.$$

Al comparar esta última forma (2) se identifican $h = 8$, $k = -2$ y $r = 7$. Así, el círculo tiene su centro en $(8, -2)$ y su radio es 7. ≡

EJEMPLO 2 Ecuación de un círculo

Halle la ecuación del círculo cuyo centro es $C(-5, 4)$ y cuyo radio es $\sqrt{2}$.

Solución Al sustituir $h = -5$, $k = 4$ y $r = \sqrt{2}$ en la ecuación (2) se obtiene

$$(x-(-5))^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{2})^2 \qquad \text{o} \qquad (x+5)^2 + (y-4)^2 = 2$$ ≡

EJEMPLO 3 Ecuación de un círculo

Halle la ecuación del círculo cuyo centro es $C(4, 3)$ y que pasa por $P(1, 4)$.

Solución Con $h = 4$ y $k = 3$, y de acuerdo con la ecuación (2),

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = r^2 \tag{5}$$

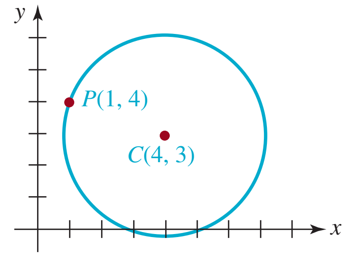


FIGURA 4.2.4 Círculo del ejemplo 3

Como el punto $P(1, 4)$ está en el círculo, como se ve en la **FIGURA 4.2.4**, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (5), esto es,

$$(1-4)^2 + (4-3)^2 = r^2 \qquad \text{o} \qquad 10 = r^2$$

Entonces, la ecuación que se pide en forma normal es

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 10$$

≡

Completar el cuadrado Si los términos $(x-h)^2$ y $(y-k)^2$ se desarrollan y se agrupan sus términos semejantes, una ecuación de un círculo en forma normal se puede reescribir como

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{6}$$

Naturalmente, en esta forma no se observan el centro y el radio. Para invertir el proceso, en otras palabras, para pasar de (6) a la forma normal (2), se debe **completar el cuadrado** en x y en y. Recuérdese de la sección 3.3 que en álgebra, al sumar $(a/2)^2$ a una expresión como $x^2 + ax$ se obtiene $x^2 + ax + (a/2)^2$, que es el cuadrado perfecto $(x + a/2)^2$. Al reordenar los términos en (6),

$$(x^2 + ax \qquad) + (y^2 + by \qquad) = -c$$

y después sumar $(a/2)^2$ y $(b/2)^2$ a *los dos* miembros de la última ecuación,

Los términos en color, agregados dentro de los paréntesis en el miembro izquierdo, también se agregan al mienbro derecho de la igualdad. Esta nueva ecuación es equivalente a (6).

$$\left(x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 + by + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

y se obtiene la forma normal de la ecuación de un círculo:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 4c).$$

El lector *no debe* memorizar esta última ecuación. Le recomendamos que siga el proceso de completar el cuadrado cada vez que se le presente.

EJEMPLO 4 Completar el cuadrado

Determine el centro y el radio del círculo cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 17 = 0 \tag{7}$$

Solución Para determinar el centro y el radio, se debe reescribir la ecuación (7) en la forma normal (2). Primero, se reordenan los términos,

$$(x^2 + 10x \qquad) + (y^2 - 2y \qquad) = -17.$$

A continuación se completa el cuadrado en x y y sumando, respectivamente, $(10/2)^2$ dentro del primer paréntesis, y $(-2/2)^2$ en el segundo. Se debe hacer con cuidado, porque esos números se deben sumar en ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned}
\left[x^2 + 10x + \left(\tfrac{10}{2}\right)^2\right] + \left[y^2 - 2y + \left(\tfrac{-2}{2}\right)^2\right] &= -17 + \left(\tfrac{10}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{-2}{2}\right)^2 \\
(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 2y + 1) &= 9 \\
(x+5)^2 + (y-1)^2 &= 3^2
\end{aligned}$$

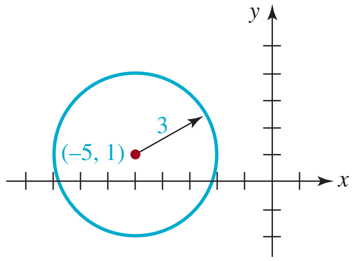


FIGURA 4.2.5 Círculo del ejemplo 4

De acuerdo con la última ecuación, se ve que el círculo está centrado en $(-5, 1)$ y tiene radio 3 (**FIGURA 4.2.5**).

≡

Es posible que una expresión para la que se debe completar el cuadrado tenga un primer coeficiente distinto de 1. Por ejemplo,

Nota:

$$3x^2 + 3y^2 - 18x + 6y + 2 = 0$$

es una ecuación de un círculo. Como en el ejemplo 4, se comienza reordenando la ecuación:

$$(3x^2 - 18x \qquad) + (3y^2 + 6y \qquad) = -2.$$

Sin embargo, ahora se debe dar un paso adicional antes de tratar de completar el cuadrado; esto es, se deben dividir ambos miembros de la ecuación entre 3 para que los coeficientes de x^2 y y^2 sean 1:

$$(x^2 - 6x \qquad) + (y^2 + 2y \qquad) = -\tfrac{2}{3}.$$

En este momento ya se pueden sumar los números adecuados en cada conjunto de paréntesis *y también* al miembro derecho de la igualdad. El lector debe comprobar que la forma normal que resulta es $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = \frac{28}{3}$.

Semicírculos Si se despeja y de (3), el resultado es $y^2 = r^2 - x^2$ o $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Esta última expresión equivale a dos ecuaciones, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$. De igual manera, si se despeja x de (3), se obtiene $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ y $x = -\sqrt{r^2 - y^2}$.

Por convención, el símbolo $\sqrt{\ }$ representa una cantidad no negativa; entonces, los valores de y definidos por una ecuación como $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ son no negativos. Las gráficas de las cuatro ecuaciones indicadas en color son, a su vez, la mitad superior, mitad inferior, mitad derecha y mitad izquierda del círculo de la figura 4.2.3. Cada gráfica de la **FIGURA 4.2.6** se llama **semicírculo**.

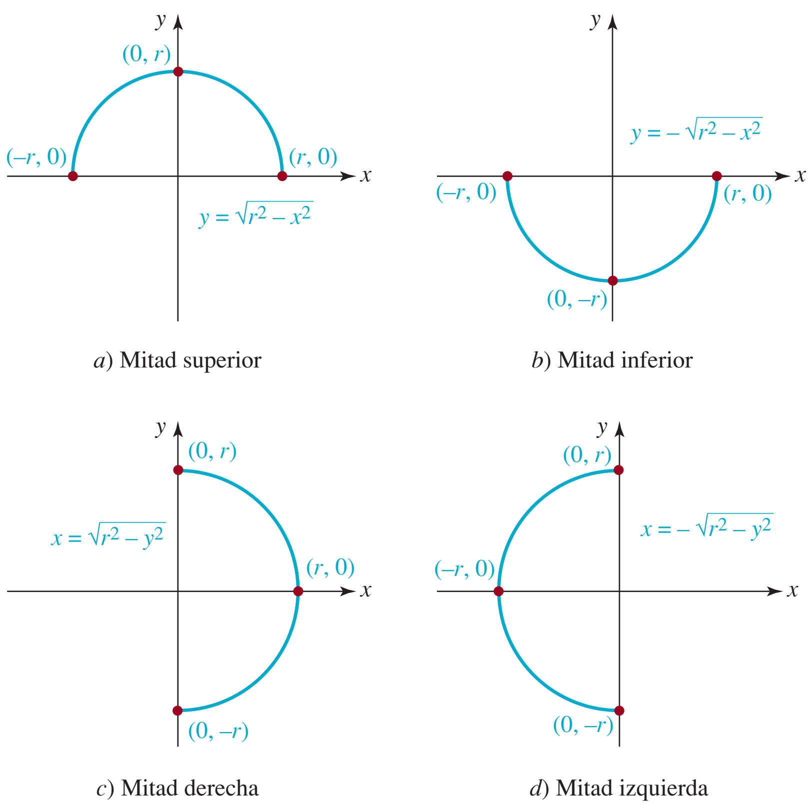
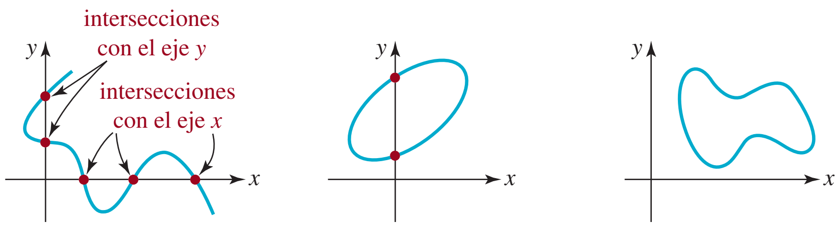


FIGURA 4.2.6 Semicírculos

■ **Desigualdades** Un último punto acerca de los círculos: a veces se encuentran problemas en los que se debe trazar el conjunto de puntos, en el plano xy, cuyas coordenadas satisfagan desigualdades como $x^2 + y^2 < r^2$ o $x^2 + y^2 \geq r^2$. La ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ describe el conjunto de puntos (x, y) cuya distancia al origen $(0, 0)$ es exactamente r. Por consiguiente, la desigualdad $x^2 + y^2 < r^2$ describe el conjunto de puntos (x, y) cuya distancia al origen es menor que r. Dicho con otras palabras, los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 < r^2$ están en el *interior* del círculo. En forma parecida, los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen $x^2 + y^2 \geq r^2$ están ya sea *en* el círculo, o en el *exterior* de él.

■ **Gráficas** Es difícil leer un periódico, o un texto científico o comercial, navegar por internet o hasta ver las noticias en TV sin observar representaciones gráficas de datos. Hasta parece imposible ir más allá de la primera página de un texto de matemáticas sin ver algún tipo de gráfica. Hay tantas y diversas cantidades relacionadas por medio de ecuaciones, y tantas preguntas acerca del comportamiento de las cantidades relacionadas por la ecuación que se pueden contestar mediante una gráfica que la destreza de graficar ecuaciones con rapidez y exactitud, como la destreza para manejar el álgebra con rapidez y exactitud, es muy importante en la lista de conocimientos esenciales para el éxito en un curso de matemáticas. El resto de esta sección hablaremos acerca de gráficas en general, y en forma más específica acerca de dos aspectos importantes de las gráficas de ecuaciones.

■ **Intersecciones** Puede ser útil ubicar los puntos en los que la gráfica de una ecuación interseca los ejes coordenados cuando se traza a mano una gráfica. Las **intersecciones con el eje *x*** de la gráfica de una ecuación son los puntos en los que la gráfica corta el eje x. Ya que todo punto del eje x tiene la ordenada (coordenada y) 0, las abscisas (coordenadas x) de esos puntos, si las hay, se pueden determinar a partir de la ecuación dada, haciendo $y = 0$ y despejando x. A su vez, las **intersecciones con el eje *y*** de la gráfica de una ecuación son los puntos en los que su gráfica corta el eje y. Las ordenadas de esos puntos pueden determinarse igualando $x = 0$ en la ecuación y despejando a y (véase la **FIGURA 4.2.7**).



a) Cinco intersecciones con los ejes

b) Dos intersecciones con el eje y

c) La gráfica no tiene intersecciones con los ejes

FIGURA 4.2.7 Intersecciones de una gráfica con los ejes coordenados

EJEMPLO 5 Intersecciones

Determine las intersecciones con los ejes coordenados de las gráficas de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 - y^2 = 9$ ***b***) $y = 2x^2 + 5x - 12$.

Solución ***a***) Para determinar las intersecciones con el eje x se hace $y = 0$ y se despeja x de la ecuación resultante, $x^2 = 9$:

$$x^2 - 9 = 0 \qquad \text{o} \qquad (x + 3)(x - 3) = 0$$

y se obtiene $x = -3$ y $x = 3$. Las intersecciones con el eje x de la gráfica son los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$. Para calcular las intersecciones con el eje y se hace $x = 0$ y se resuelve $-y^2 = 9$, o $y^2 = -9$. Como no hay números reales cuyo cuadrado sea negativo, la conclusión es que la gráfica de la ecuación no corta el eje y.

b) Si $y = 0$, se obtiene $2x^2 + 5x - 12 = 0$. Es una ecuación cuadrática, y se puede resolver factorizando o mediante la fórmula cuadrática. Con factorización se obtiene

$$(x + 4)(2x - 3) = 0$$

por lo que $x = -4$ y $x = \frac{3}{2}$. Las intersecciones con el eje x de la gráfica son los puntos $(-4, 0)$ y $(\frac{3}{2}, 0)$. Ahora, si se hace que $x = 0$ en la ecuación $y = 2x^2 + 5x - 12$, de inmediato se obtiene $y = -12$. La intersección con el eje y de la gráfica es el punto $(0, -12)$. ≡

EJEMPLO 6 Regreso al ejemplo 4

Regresemos al círculo del ejemplo 4 y determinemos las coordenadas al origen a partir de la ecuación (7). Al hacer que $y = 0$ en $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 17 = 0$ y usar la fórmula cuadrática para resolver $x^2 + 10x + 17 = 0$, se ve que las intersecciones con el eje x de este círculo son $(-5 - 2\sqrt{2}, 0)$ y $(-5 + 2\sqrt{2}, 0)$. Si se hace que $x = 0$, con la fórmula cuadrática se ve que las raíces de la ecuación $y^2 - 2y + 17 = 0$ son números complejos. Como se ve en la figura 4.2.5, el círculo no corta el eje y. ≡

Simetría Una gráfica también puede tener simetría. El lector ya sabrá que la gráfica de la ecuación $y = x^2$ se llama *parábola*. En la **FIGURA 4.2.8** se muestra que la gráfica de $y = x^2$ es simétrica respecto al eje y, porque la parte de la gráfica que está en el segundo cuadrante es la *imagen especular* (de espejo) o la *reflexión respecto al eje y* de esa parte de la gráfica en el primer cuadrante. En general, una gráfica es **simétrica respecto al eje *y*** si siempre que (x, y) es un punto de la gráfica, $(-x, y)$ también es un punto de ella. Note, en la figura 4.2.8, que los puntos $(1, 1)$ y $(2, 4)$ están en la gráfica. Como ésta tiene simetría respecto del eje y, los puntos $(-1, 1)$ y $(-2, 4)$ deben estar también en la gráfica. Se dice que una gráfica es **simétrica respecto al eje *x*** si siempre que (x, y) es un punto de la gráfica, $(x, -y)$ también es un punto de la gráfica. Por último, una gráfica es **simétrica con respecto al origen** si cuando (x, y) está en la gráfica, $(-x, -y)$ también es un punto de la gráfica. En la **FIGURA 4.2.9** se ilustran estos tres tipos de simetría.

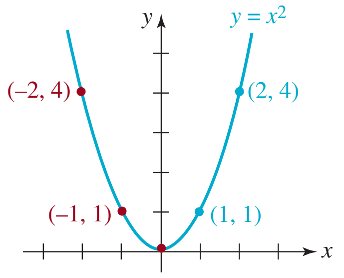
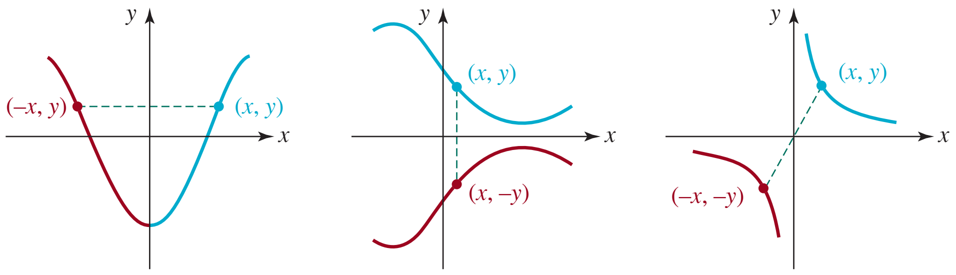


FIGURA 4.2.8 Gráfica con simetría con respecto al eje y



a) Simetría con respecto al eje y

b) Simetría con respecto al eje x

c) Simetría con respecto al origen

FIGURA 4.2.9 Simetrías en una gráfica

Observe que la gráfica del círculo en la figura 4.2.3 tiene las tres simetrías anteriores.

En la práctica deseamos saber si una gráfica tiene alguna simetría antes de trazarla. Eso se puede saber aplicando las pruebas siguientes a la ecuación que define la gráfica.

Teorema 4.2.1 Pruebas de simetría

La gráfica de una ecuación es simétrica respecto a:

i) el **eje *y*** si al sustituir x por $-x$ se obtiene una ecuación equivalente;

ii) el **eje *x*** si al sustituir y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente;

iii) el **origen** si al sustituir x y y por $-x$ y $-y$ se obtiene una ecuación equivalente.

La ventaja de usar simetrías al graficar debería ser manifiesta. Por ejemplo, si la gráfica de una ecuación es simétrica respecto al eje x, sólo se necesita trazar la gráfica para $y \geq 0$, porque los puntos de la gráfica para $y < 0$ se obtienen con imágenes especulares con respecto al eje x de los puntos en el primero y segundo cuadrantes.

EJEMPLO 7 Prueba de simetría

Reemplazando x por $-x$ en la ecuación $y = x^2$ y usando $(-x)^2 = x^2$ se ve que

$$y = (-x)^2 \qquad \text{es equivalente a} \qquad y = x^2$$

Esto demuestra lo que se observa en la figura 4.2.8: que la gráfica de $y = x^2$ es simétrica respecto al eje y. ≡

EJEMPLO 8 Intersecciones y simetría

Determine las intersecciones con los ejes y la simetría de la gráfica de

$$x + y^2 = 10. \tag{8}$$

Solución

Intersecciones con el eje x: se hace $y = 0$ en la ecuación (8) y de inmediato se obtiene $x = 10$. La gráfica de la ecuación tiene una sola intersección con el eje x, $(10, 0)$. Cuando $x = 0$, se obtiene $y^2 = 10$, lo que implica que $y = -\sqrt{10}$ o $y = \sqrt{10}$. Entonces, hay dos intersecciones con el eje y, $(0, -\sqrt{10})$ y $(0, \sqrt{10})$.

Simetría: si se sustituye x por $-x$ en la ecuación (8) se obtiene $-x + y^2 = 10$. Este resultado no equivale a la ecuación (8). El lector también debe verificar que al sustituir x y y por $-x$ y $-y$ en (8) no se obtiene una ecuación equivalente. Sin embargo, si se sustituye y por $-y$, se encuentra que

$$x + (-y)^2 = 10 \qquad \text{es equivalente a} \qquad x + y^2 = 10$$

Entonces, la gráfica de la ecuación es simétrica respecto al eje x.

Gráfica: en la gráfica de la ecuación que se muestra en la **FIGURA 4.2.10**, las intersecciones se indican y se debe notar la simetría respecto al eje x. ≡

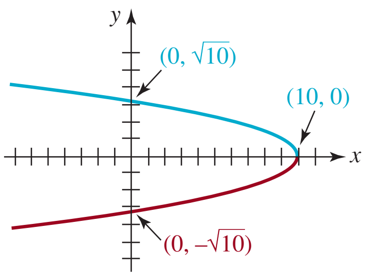


FIGURA 4.2.10 Gráfica de la ecuación para el ejemplo 8

4.2 Ejercicios

Las respuestas de los problemas impares seleccionados empiezan en la página RESP-9.

En los problemas 1 a 6, determine el centro y el radio de cada círculo. Trace su gráfica.

1. $x^2 + y^2 = 5$
2. $x^2 + y^2 = 9$
3. $x^2 + (y - 3)^2 = 49$
4. $(x + 2)^2 + y^2 = 36$
5. $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 1$
6. $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$

En los problemas 7 a 14, complete el cuadrado en x y y para determinar el centro y el radio de cada círculo.

7. $x^2 + y^2 + 8y = 0$
8. $x^2 + y^2 - 6x = 0$
9. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$
10. $x^2 + y^2 - 18x - 6y - 10 = 0$
11. $x^2 + y^2 - 20x + 16y + 128 = 0$
12. $x^2 + y^2 + 3x - 16y + 63 = 0$
13. $2x^2 + 2y^2 + 4x + 16y + 1 = 0$
14. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{5}{2}x + 10y + 5 = 0$

En los problemas 15 a 24, deduzca una ecuación del círculo que satisfaga las condiciones indicadas.

15. centro $(0, 0)$, radio 1
16. centro $(1, -3)$, radio 5
17. centro $(0, 2)$, radio $\sqrt{2}$
18. centro $(-9, -4)$, radio $\frac{3}{2}$
19. extremos de un diámetro en $(-1, 4)$ y $(3, 8)$
20. extremos de un diámetro en $(4, 2)$ y $(-3, 5)$
21. centro $(0, 0)$; la gráfica pasa por $(-1, -2)$
22. centro $(4, -5)$; la gráfica pasa por $(7, -3)$
23. centro $(5, 6)$; la gráfica es tangente al eje x
24. centro $(-4, 3)$; la gráfica es tangente al eje y

En los problemas 25 a 28, trace el semicírculo definido por la ecuación indicada.

25. $y = \sqrt{4 - x^2}$
26. $x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$
27. $x = \sqrt{1 - (y - 1)^2}$
28. $y = -\sqrt{9 - (x - 3)^2}$

29. Halle la ecuación de la mitad superior del círculo $x^2 + (y - 3)^2 = 4$. Repita lo anterior con respecto a la mitad derecha del círculo.
30. Halle la ecuación de la mitad inferior del círculo $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 9$. Repita lo anterior con respecto a la mitad izquierda del círculo.

En los problemas 31 a 34, trace el conjunto de puntos en el plano xy, cuyas coordenadas satisfagan la desigualdad dada.

31. $x^2 + y^2 \geq 9$
32. $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 \leq 25$
33. $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$
34. $x^2 + y^2 > 2y$

En los problemas 35 y 36, determine las intersecciones con los ejes del círculo dado.

35. el círculo con centro $(3, -6)$ y radio 7
36. el círculo $x^2 + y^2 + 5x - 6y = 0$

En los problemas 37 a 62, determine las intersecciones con los ejes de la gráfica de la ecuación indicada. Establezca si la gráfica de la ecuación tiene simetría respecto al eje x, al eje y o al origen. No trace la gráfica.

37. $y = -3x$
38. $y - 2x = 0$
39. $-x + 2y = 1$
40. $2x + 3y = 6$
41. $x = y^2$
42. $y = x^3$
43. $y = x^2 - 4$
44. $x = 2y^2 - 4$
45. $y = x^2 - 2x - 2$
46. $y^2 = 16(x + 4)$
47. $y = x(x^2 - 3)$
48. $y = (x - 2)^2(x + 2)^2$
49. $x = -\sqrt{y^2 - 16}$
50. $y^3 - 4x^2 + 8 = 0$
51. $4y^2 - x^2 = 36$
52. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
53. $y = \dfrac{x^2 - 7}{x^3}$
54. $y = \dfrac{x^2 - 10}{x^2 + 10}$
55. $y = \dfrac{x^2 - x - 20}{x + 6}$
56. $y = \dfrac{(x + 2)(x - 8)}{x + 1}$
57. $y = \sqrt{x} - 3$
58. $y = 2 - \sqrt{x + 5}$
59. $y = |x - 9|$
60. $x = |y| - 4$
61. $|x| + |y| = 4$
62. $x + 3 = |y - 5|$

En los problemas 63 a 66 establezca todas las simetrías que tenga la gráfica indicada.

63.

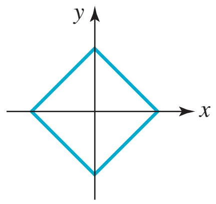


FIGURA 4.2.11 Gráfica para el problema 63

64.

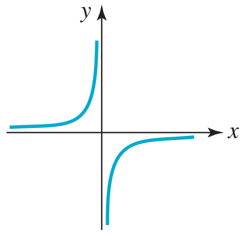


FIGURA 4.2.12 Gráfica para el problema 64

65.

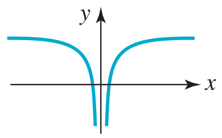


FIGURA 4.2.13 Gráfica para el problema 65

66.

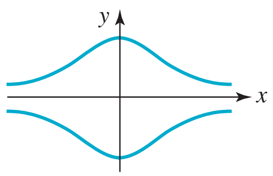


FIGURA 4.2.14 Gráfica para el problema 66

En los problemas 67 a 72, use la simetría para completar la gráfica dada.

67. La gráfica es simétrica respecto al eje y.

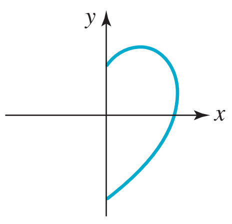


FIGURA 4.2.15 Gráfica para el problema 67

68. La gráfica es simétrica respecto al eje x.

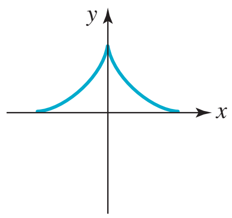


FIGURA 4.2.16 Gráfica para el problema 68

69. La gráfica es simétrica respecto al origen.

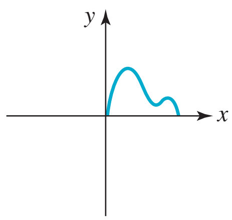


FIGURA 4.2.17 Gráfica para el problema 69

70. La gráfica es simétrica respecto al eje y.

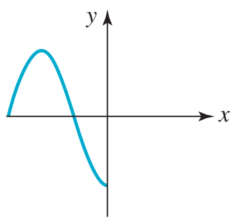


FIGURA 4.2.18 Gráfica para el problema 70

71. La gráfica es simétrica respecto a los ejes x y y.

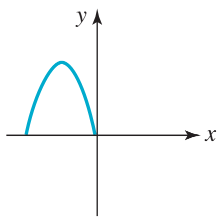


FIGURA 4.2.19 Gráfica para el problema 71

72. La gráfica es simétrica respecto al origen.

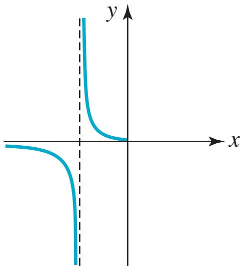


FIGURA 4.2.20 Gráfica para el problema 72

74. ***a***) El radio del círculo en la **FIGURA 4.2.21*a*)** es r. ¿Cuál es su ecuación en la forma normal?

b) El centro del círculo de la **FIGURA 4.2.21*b*)** es (h, k). ¿Cuál es su ecuación en la forma normal?

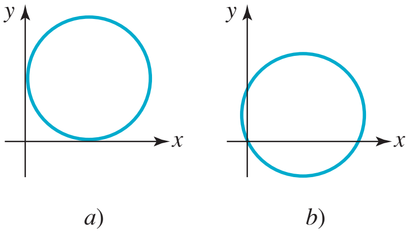


FIGURA 4.2.21 Gráficas del problema 74

Para la discusión

73. Diga si la afirmación siguiente es verdadera o falsa. Respalde su respuesta.

Si una gráfica tiene dos de las tres simetrías definidas en la página 178, por necesidad poseerá la tercera simetría.

75. Diga si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

Toda ecuación de la forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ *es un círculo.*

4.3 Ecuaciones de rectas

Introducción Dos puntos distintos cualesquiera en el plano xy determinan una línea recta única. Nuestro objetivo en esta sección es hallar ecuaciones de rectas. El concepto fundamental para plantear estas ecuaciones es la pendiente de una recta.

Pendiente Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos tales que $x_1 \neq x_2$, entonces el número

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

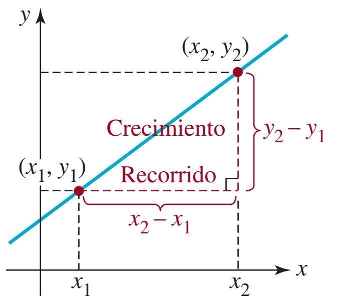
se denomina **pendiente** de la recta determinada por estos dos puntos. Se acostumbra decir que $y_2 - y_1$ es el **cambio en *y*** o **crecimiento** de la recta; $x_2 - x_1$ es el **cambio en *x*** o el **recorrido** de la recta. Por tanto, la pendiente (1) de una recta es [figura 4.3.1*a*)]

$$m = \frac{\text{crecimiento}}{\text{recorrido}}. \tag{2}$$

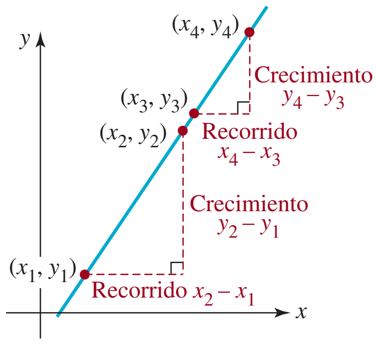
Dos puntos cualesquiera de una recta determinan la misma pendiente. Para entender por qué sucede así, considere los dos triángulos rectángulos semejantes de la figura 4.3.1*b*). Puesto que sabemos que las razones de los lados correspondientes en triángulos semejantes son iguales, tenemos

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}.$$

De ahí que la pendiente de una recta sea independiente de la selección de puntos en la recta.



a) Crecimiento y recorrido



b) Triángulos semejantes

FIGURA 4.3.1 Pendiente de una recta