62. **Esfera** El radio r de una esfera con volumen V está dado por $r = (3V/4\pi)^{1/3}$. Use una calculadora para hallar el radio de una esfera que tiene de volumen 100 cm^3.

63. **Velocidad del sonido** La velocidad del sonido v medida en pies por segundo a través del aire de temperatura t grados Celsius está dada por

$$v = \frac{1\,087(273 + t)^{1/2}}{16.52}.$$

Use una calculadora para hallar la velocidad del sonido a través del aire cuando la temperatura es de 20 °C.

64. **Agua corriente** Un arroyo de corriente rápida puede transportar partículas más grandes que uno de corriente lenta. Los estudios de laboratorio han demostrado que la velocidad crítica v_t del agua que se necesita para que una partícula arranque en la cuenca de un arroyo está dada por la fórmula

$$v_t = 0.152d^{4/9}(G - 1)^{1/2},$$

donde v_t se mide en metros por segundo, d es el diámetro de la partícula en milímetros y G es la gravedad específica de la partícula. Halle la velocidad crítica que se necesita para empezar a mover un grano de feldespato que tiene una gravedad específica de 2.56 y un diámetro de 3 mm.

Para la discusión

En los problemas 65 a 74, responda falso o verdadero.

65. $(z^2 + 25)^{1/2} = z + 5$ _____
66. $36x^{1/2} = 6\sqrt{x}$ _____
67. $((-4)^2)^{1/2} = 4$ _____
68. $[(-4)^{1/2}]^2 = -4$ _____
69. $((-1)^{-1})^{-1} = -1$ _____
70. $(-1)^{-1}(-1)^{-1} = 1$ _____
71. $x^{-3/2} = \dfrac{1}{x^{2/3}}$ _____
72. $x^{2/3}y^{-2/3} = 1$ _____
73. $(b^{4/3})^{3/4} = b$ _____
74. $\dfrac{a^{3/2}}{a^{-3/2}} = a^2$ _____

2.6 Polinomios y productos notables

Introducción Ya hemos encontrado práctico usar letras como x o y para representar números; cada símbolo se llama **variable**. Una **expresión algebraica** es el resultado de llevar a cabo un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o raíces en un grupo de variables y números reales. Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$x^3 - 2x^2 + \sqrt{x} - \pi, \quad \frac{4xy - x}{x + y} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{\frac{7y - 3}{x^5y^{-2} + z}}.$$

A veces una expresión algebraica representa un número real sólo para ciertos valores de una variable. Al considerar la expresión $\sqrt{x}$, encontramos que debemos tener $x \geq 0$ para que $\sqrt{x}$ represente un número real. Cuando trabajamos con expresiones algebraicas, suponemos que las variables están restringidas para que la expresión represente un número real. El conjunto de valores permisibles para la variable se llama **dominio de la variable**. Por tanto, el dominio de la variable en $\sqrt{x}$ es el conjunto de todos los números reales no negativos $\{x|x \geq 0\}$, y para $3/(x + 1)$ el dominio es el conjunto de todos los números reales excepto $x = -1$; es decir, $\{x|x \neq 1\}$.

Si se sustituyen números específicos por las variables en una expresión algebraica, el número real que resulta se llama **valor** de la expresión. Por ejemplo, el valor de $x^2 + 2y$ cuando $x = 1$ y $y = 2$ es $(1)^2 + 2(2) = 5$.

Polinomios

Ciertas expresiones algebraicas tienen nombres especiales. Un **monomio** en una variable es cualquier expresión algebraica de la forma

$$ax^n,$$

donde a es un número real, x es una variable y n es un entero no negativo. El número a se llama **coeficiente** del monomio y n se denomina el **grado**. Por ejemplo, $17x^5$ es un monomio de grado 5 con coeficiente 17 y la constante -5 es un monomio de grado 0. La suma de dos monomios recibe el nombre de **binomio**. La suma de tres monomios se llama **trinomio**. Por ejemplo,

$$3x - 2 \qquad \text{y} \qquad x^3 + 6x$$

son binomios, en tanto que

$$4x^2 - 2x - 1 \qquad \text{y} \qquad 8x^4 + x^2 - 4x$$

son trinomios.

Un **polinomio** es cualquier suma finita de monomios. Más formalmente tenemos la definición siguiente.

Definición 2.6.1 Polinomio

Un **polinomio de grado n en la variable x** es cualquier expresión algebraica de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad \text{con } a_n \neq 0, \tag{1}$$

donde n es un entero no negativo y a_i, $i = 0, 1\ldots, n$ son números reales.

La expresión (1) se llama **forma estándar** de un polinomio; es decir, el polinomio se escribe en las potencias decrecientes de x. Por supuesto, no es necesario que todas las potencias estén presentes en un polinomio; algunos de los coeficientes a_i, $i = 0, 1,\ldots, n$ podrían ser 0.

Puesto que un polinomio en x representa un número real para cualquier número real x, el dominio de un polinomio es el conjunto de todos los números reales R. Los monomios a_ix^i en el polinomio se llaman **términos** del polinomio, y el coeficiente a_n de la potencia más alta de x se llama **coeficiente principal**. Por ejemplo, $6x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 1$ es un polinomio de grado 5 con coeficiente principal 6. Los términos de este polinomio son $6x^5$, $-7x^3$, $3x^2$ y -1. El número a_0 se llama **término constante** del polinomio. Puede ser 0, como en el polinomio $6x^2 - x$. Si todos los coeficientes de un polinomio son cero, entonces el polinomio se llama **polinomio cero** y se representa con 0.

Los polinomios pueden clasificarse según sus grados, aunque al polinomio cero no se le ha asignado ningún grado. Se usan nombres especiales para describir los polinomios de menor grado, según se presenta en la tabla siguiente.

Polinomio	Grado	Forma estándar	Ejemplo
Constante	0	a_0 (con $a_0 \neq 0$)	5
Lineal	1	$a_1x + a_0$ (con $a_1 \neq 0$)	$3x - 5$
Cuadrático	2	$a_2x^2 + a_1x + a_0$ (con $a_2 \neq 0$)	$-\frac{1}{2}x^2 + x - 2$
Cúbico	3	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (con $a_3 \neq 0$)	$x^3 - 6x + \sqrt{3}$
n-ésimo grado	n	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ (con $a_n \neq 0$)	$x^n - 1$

En cada término en un polinomio, el exponente de la variable debe ser un entero no negativo. Por ejemplo,

$$\underset{\text{entero negativo}}{x^{-1}} + x - 1 \qquad \text{y} \qquad x^2 - 2\underset{\text{no entero}}{x^{1/2}} + 6$$

no son polinomios. Sin embargo,

$$\tfrac{1}{3}x^2 + 4 \qquad \text{y} \qquad 0.5x^3 + \sqrt{6}\,x^2 - \pi x + 9$$

son polinomios, pues los coeficientes pueden ser cualesquiera números reales.

EJEMPLO 1 Reconocimiento de un polinomio

Determine cuáles de las expresiones algebraicas siguientes son polinomios. Si la expresión es un polinomio, indique su grado y su coeficiente principal.

a) $x^2 + \sqrt{x} - 1$

b) $\sqrt{2} - x + 3x^2 - 17x^8$

c) $7x^5 - x^2 + \frac{1}{2}x + x^{-2}$

d) $x^4 - x^2$

Solución Como la variable en cada término debe ser elevada a una potencia entera no negativa, *a*) y *c*) no son polinomios. Los polinomios en *b*) y en *d*) son del grado 8 y del grado 4, respectivamente. Al escribir *b*) en la forma estándar (1), $-17x^8 + 3x^2 - x + \sqrt{2}$, vemos que el coeficiente principal es -17. Ya que *d*) está en la forma estándar, el coeficiente principal es 1. ≡

El álgebra de los polinomios Como cada símbolo en un polinomio representa un número real, podemos usar las propiedades del sistema de los números reales expuestas en la sección 2.1 para sumar, restar y multiplicar polinomios. En otras palabras, la suma, diferencia y producto de dos polinomios es un polinomio.

EJEMPLO 2 Suma de dos polinomios

Halle la suma de los polinomios $x^4 - 3x^2 + 7x - 8$ y $2x^4 + x^2 + 3x$.

Solución Al reorganizar los términos y usar las propiedades distributivas, tenemos

$$\begin{aligned}(x^4 - 3x^2 + 7x - 8) &+ (2x^4 + x^2 + 3x)\\ &= x^4 + 2x^4 - 3x^2 + x^2 + 7x + 3x - 8\\ &= (1 + 2)x^4 + (-3 + 1)x^2 + (7 + 3)x - 8\\ &= 3x^4 - 2x^2 + 10x - 8.\end{aligned}$$

≡

El ejemplo 2 indica que podemos sumar dos polinomios en x mediante la suma de los coeficientes de potencias iguales. Algunos estudiantes encuentran que es más fácil sumar polinomios por la alineación de los términos con potencias iguales de x en un formato vertical, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{rrrr} x^4 - & 3x^2 + & 7x - & 8 \\ 2x^4 + & x^2 + & 3x & \\ \hline 3x^4 - & 2x^2 + & 10x - & 8. \end{array}$$

La elección del formato que se desea usar es simplemente un asunto de preferencia personal. Por lo general, el formato vertical requiere más espacio; por tanto, después de esta sección usaremos el formato horizontal.

Como se muestra en el ejemplo siguiente, la resta de polinomios se lleva a cabo de una manera similar a la suma.

EJEMPLO 3 Diferencia de dos polinomios

Reste $2x^3 - 3x - 4$ de $x^3 + 5x^2 - 10x + 6$.

Solución Al restar términos con potencias iguales de x, tenemos

$$\begin{array}{r} x^3 + 5x^2 - 10x + 6 \\ -(2x^3 \qquad\quad - 3x - 4) \\ \hline -x^3 + 5x^2 - \;\; 7x + 10. \end{array}$$

Para llevar a cabo esta resta usando un formato horizontal, procedemos así:

$$\begin{aligned} (x^3 + 5x^2 - 10x + 6) - (2x^3 - 3x - 4) & \quad \leftarrow \text{use la propiedad distributiva aquí} \\ = x^3 + 5x^2 - 10x + 6 - 2x^3 + 3x + 4 & \\ = (x^3 - 2x^3) + 5x^2 + (-10x + 3x) + (6 + 4) & \quad \leftarrow \text{agrupe términos iguales} \\ = -x^3 + 5x^2 - 7x + 10. & \end{aligned}$$

≡

Para hallar el **producto** de dos polinomios usamos las propiedades distributivas y las leyes de los exponentes, como se muestra en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 4 Producto de dos polinomios

Multiplique $x^3 + 3x - 1$ y $2x^2 - 4x + 5$.

Solución Para empezar, utilizamos la ley distributiva varias veces:

$$\begin{aligned} &(x^3 + 3x - 1)(2x^2 - 4x + 5) \\ &\quad = (x^3 + 3x - 1)(2x^2) + (x^3 + 3x - 1)(-4x) + (x^3 + 3x - 1)(5) \\ &\quad = (2x^5 + 6x^3 - 2x^2) + (-4x^4 - 12x^2 + 4x) + (5x^3 + 15x - 5). \end{aligned}$$

Combinando términos semejantes encontramos el producto

$$\begin{aligned} &(x^3 + 3x - 1)(2x^2 - 4x + 5) \\ &\quad = 2x^5 - 4x^4 + (6x^3 + 5x^3) + (-2x^2 - 12x^2) + (4x + 15x) - 5 \\ &\quad = 2x^5 - 4x^4 + 11x^3 - 14x^2 + 19x - 5. \end{aligned}$$

≡

Como en el ejemplo 4, cuando se multiplican dos polinomios debemos multiplicar cada término del primer polinomio por cada término del segundo. Se puede usar un formato vertical (con tal que conservemos los términos semejantes alineados), de esta manera:

$$\begin{array}{rrrrrrl} & & x^3 & & +\;\;3x & -\;1 & \\ & & & 2x^2 & -\;\;4x & +\;5 & \\ \hline & & 5x^3 & & +\;15x & -\;5 & \leftarrow 5(x^3 + 3x - 1) \\ & -\;4x^4 & & -\;12x^2 & +\;\;4x & & \leftarrow -4x(x^3 + 3x - 1) \\ 2x^5 & & +\;6x^3 & -\;\;2x^2 & & & \leftarrow 2x^2(x^3 + 3x - 1) \\ \hline 2x^5 & -\;4x^4 & +\;11x^3 & -\;14x^2 & +\;19x & -\;5. & \end{array}$$

Productos notables Ciertos productos de binomios se presentan con tanta frecuencia que debe aprender a reconocerlos. Empezamos con el producto de dos binomios $ax + b$ y $cx + d$:

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd. \tag{2}$$

Algunos polinomios pueden expresarse como una potencia entera positiva de un binomio. El **cuadrado** y el **cubo** de un binomio $x + a$ son, respectivamente:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \tag{3}$$

y

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3. \tag{4}$$

Se observa de inmediato que el producto de un binomio $x + a$ y su conjugado $x - a$ produce la **diferencia de dos cuadrados**:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2. \tag{5}$$

Un clásico de memorización para realizar la multiplicación en (2) es el llamado método PEIU. La idea se describe en forma esquemática en la **FIGURA 2.6.1**; las letras P, E, I y U son, respectivamente, las primeras letras de las palabras **p**rimero, **e**xterior, **i**nterior y **ú**ltimo.

últimos términos

términos interiores

$$\begin{aligned}(ax+b)(cx+d) &= \overbrace{ax\cdot cx}^{\substack{\text{P}\\ \text{multiplique}\\ \text{los primeros}\\ \text{términos}}} + \overbrace{ax\cdot d}^{\substack{\text{E}\\ \text{multiplique}\\ \text{los términos}\\ \text{exteriores}}} + \overbrace{b\cdot cx}^{\substack{\text{I}\\ \text{multiplique}\\ \text{los términos}\\ \text{interiores}}} + \overbrace{b\cdot d}^{\substack{\text{U}\\ \text{multiplique}\\ \text{los últimos}\\ \text{términos}}}\\ &= acx^2 + [adx + bcx] + bd\\ &= acx^2 + (ad+bc)x + bd\end{aligned}$$

primeros términos

términos exteriores

FIGURA 2.6.1 El método PEIU para multiplicar dos binomios

EJEMPLO 5 Uso del método PEIU

Obtenga el producto $(\frac{2}{3}x - 2)(x - \frac{1}{3})$.

Solución Identificamos $a = \frac{2}{3}$, $b = -2$, $c = 1$ y $d = -\frac{1}{3}$. Aplicamos el método PEIU para obtener

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{2}{3}x - 2\right)\left(x - \tfrac{1}{3}\right) &= \overbrace{\tfrac{2}{3}(1)x^2}^{\text{primero}} + \Big[\overbrace{\left(\tfrac{2}{3}\right)\left(-\tfrac{1}{3}\right)x}^{\text{exteriores}} + \overbrace{(-2)(1)x}^{\text{interiores}}\Big] + \overbrace{(-2)\left(-\tfrac{1}{3}\right)}^{\text{último}}\\ &= \tfrac{2}{3}x^2 + \left(-\tfrac{2}{9} - 2\right)x + \tfrac{2}{3}\\ &= \tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{20}{9}x + \tfrac{2}{3}.\end{aligned}$$

≡

A primera vista, algunos productos parecen no ser de la forma (2) cuando, de hecho, sí lo son. Sin embargo, con la práctica cualquiera llega a adquirir habilidad para reconocerlos.

EJEMPLO 6 Uso del método PEIU

Obtenga el producto $(5x^2 + 3)(4x^2 - 6)$.

Solución En (2) simplemente sustituimos ax por $5x^2$ y cx por $4x^2$:

$$\begin{aligned}(5x^2+3)(4x^2-6) &= \overbrace{5(4)(x^2)^2}^{\text{primero}} + [\overbrace{5(-6)x^2}^{\text{exteriores}} + \overbrace{3(4)x^2}^{\text{interiores}}] + \overbrace{3(-6)}^{\text{último}}\\ &= 20x^4 + (-30 + 12)x^2 - 18\\ &= 20x^4 - 18x^2 - 18.\end{aligned}$$

≡

También en cada uno de los productos notables (3), (4) y (5), tenga presente que los símbolos x y a pueden sustituirse con otra variable, un número o una expresión más complicada.

EJEMPLO 7 Cuadrados

Obtenga cada uno de los productos siguientes.

a) $(3x + 7)^2$ ***b***) $(5x - 4)^2$

Solución ***a)*** Con base en (3), sustituimos x con $3x$ y a con 7 y tenemos:

$$\begin{aligned}(3x+7)^2 &= (3x)^2 + 2(3x)(7) + (7)^2\\ &= 9x^2 + 42x + 49\end{aligned}$$

b) Con base en (3), sustituimos x con $5x$ y a con -4 y tenemos:

$$\begin{aligned}(5x-4)^2 &= (5x)^2 + 2(5x)(-4) + (-4)^2\\ &= 25x^2 - 40x + 16.\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 8 Cubos

Obtenga cada uno de los productos siguientes.

a) $\left(\frac{1}{2}x + 2\right)^3$ ***b)*** $\left(4x - \dfrac{1}{x^2}\right)^3$

Solución ***a)*** x se sustituye con $\frac{1}{2}x$, a con 2 y se usan las leyes de los exponentes para resolver (4):

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{2}x+2\right)^3 &= \left(\tfrac{1}{2}x\right)^3 + 3\left(\tfrac{1}{2}x\right)^2(2) + 3\left(\tfrac{1}{2}x\right)(2) + (2)^3\\ &= \tfrac{1}{8}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + 3x + 8.\end{aligned}$$

b) Antes de continuar, hacemos notar que la respuesta que obtendremos no será un polinomio, puesto que la expresión de dos términos $4x - 1/x^2$ no es, en términos estrictos, un binomio. No obstante, podemos usar (4) y sustituir el símbolo x por $4x$ y el símbolo a por $-1/x^2$:

$$\begin{aligned}\left(4x-\frac{1}{x^2}\right)^3 &= (4x)^3 + 3(4x)^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 3(4x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^3\\ &= 64x^3 - 48 + \frac{12}{x^3} - \frac{1}{x^6}.\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 9 Diferencia de dos cuadrados

Obtenga el producto $(6y+\sqrt{2})(6y-\sqrt{2})$.

Solución Si sustituimos x por $6y$ y a por $\sqrt{2}$, la fórmula del producto (5) da:

$$(6y+\sqrt{2})(6y-\sqrt{2}) = (6y)^2 - (\sqrt{2})^2 = 36y^2 - 2.$$

≡

Polinomios en dos variables Hasta el momento hemos considerado, sobre todo, polinomios en una variable. Podemos tener polinomios en x o en otras variables, como $2y^2 - y = 5$ o $\sqrt{2}z^3 - 17$, o polinomios en dos o más variables. Un **polinomio en dos variables *x* y *y*** es una suma de monomios (o términos) de la forma ax^ny^m, donde a es un número real, x y y son variables, y n y m son enteros no negativos. Por ejemplo,

$$5x - 2y, \qquad x^2 + xy - y^2 \qquad \text{y} \qquad 8x^3y + xy^2 - x + \tfrac{7}{2}.$$

Asimismo, un **polinomio en tres variables *x*, *y* y *z*** es la suma de monomios de la forma $ax^ny^mz^k$, donde n, m y k son enteros no negativos. Por ejemplo, $xy^2z^3 - 2xy + z - 1$ es un polinomio en tres variables. Los polinomios de cuatro o más variables se definen de manera semejante. Por ejemplo, $xy + 5y - 3yz^3 + 6xy^2z^3w^4$ es un polinomio en cuatro variables.

Sumamos, restamos y multiplicamos polinomios de varias variables usando las propiedades de los números reales, como hicimos con los polinomios en una variable.

EJEMPLO 10 Suma de dos polinomios en x y y

Obtenga la suma de $xy^3 + x^3y - 3$ y $x^3 - y^3 + 3xy^3 - x^3y$.

Solución Simplemente sumamos los términos semejantes que se indican con el mismo color:

$$
\begin{aligned}
(xy^3 + x^3y - 3) + (x^3 - y^3 + 3xy^3 - x^3y)& \\
&= x^3 - y^3 + 4xy^3 + 0x^3y - 3 \\
&= x^3 - y^3 + 4xy^3 - 3.
\end{aligned}
$$

≡

EJEMPLO 11 Producto de dos polinomios en x y y

Multiplique $x + y$ y $x^2 - xy + y^2$.

Solución Como en el ejemplo 4, aplicamos la ley distributiva varias veces y luego combinamos los términos semejantes:

$$
\begin{aligned}
(x + y)(x^2 - xy + y^2) &= x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2) \\
&= x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3 \\
&= x^3 + y^3.
\end{aligned}
$$

≡

En el ejemplo 11 hemos comprobado una de las últimas dos fórmulas de los productos notables. La **diferencia de dos cubos** es:

$$(x - a)(x^2 + ax + a^3) = x^3 - a^3, \tag{6}$$

en tanto que la **suma de dos cubos** es:

$$(x + a)(x^2 - ax + a^3) = x^3 + a^3. \tag{7}$$

Las fórmulas (6) y (7) son probablemente más importantes en la factorización de polinomios que como fórmulas que deben recordarse para realizar una multiplicación.

La división entre un monomio usa las propiedades de las fracciones y las leyes de los exponentes, como se muestra en el ejemplo 12. La división de dos polinomios es más complicada y se explica en el capítulo 6.

EJEMPLO 12 División de dos polinomios

Divida $15xy^3 + 25x^2y^2 - 5xy^2$ entre $5xy^2$.

Solución Usamos la propiedad del común denominador:

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a + b + c}{d}$$

leyendo de derecha a izquierda. Con la identificación $d = 5xy^2$ y las leyes de los exponentes obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{15xy^3 + 25x^2y^2 - 5xy^2}{5xy^2} &= \frac{15xy^3}{5xy^2} + \frac{25x^2y^2}{5xy^2} - \frac{5xy^2}{5xy^2} \\
&= 3y + 5x - 1.
\end{aligned}
$$

≡

EJEMPLO 13 Uso de una fórmula de producto dos veces

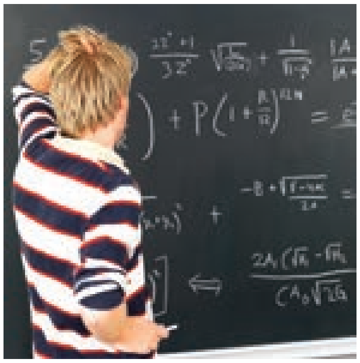
Obtenga el producto $(2x + y)(2x - y)(4x^2 + y^2)$.

Solución Usamos (5) dos veces consecutivas:

$$\begin{aligned}(2x + y)(2x - y)(4x^2 + y^2) &= \overbrace{[(2x + y)(2x - y)]}^{\text{use (5) con } x \text{ sustituida por } 2x \text{ y } a \text{ por } y}(4x^2 + y^2)\\ &= \overbrace{(4x^2 - y^2)(4x^2 + y^2)}^{\text{use (5) otra vez con } x \text{ sustituida por } 4x^2 \text{ y } a \text{ por } y^2}\\ &= 16x^4 - y^4.\end{aligned}$$

≡

Cuanto más se familiarice con los productos notables (2) a (5), más fácil le será entender la factorización, que examinaremos en la próxima sección.



Notas del aula

Un error muy común cuando se restan polinomios en el formato horizontal consiste en no aplicar la propiedad distributiva. Es necesario cambiar el signo de cada término del polinomio que se resta.

$$\begin{aligned}-(2x^3 - 3x - 4) &= (-1)(2x^3 - 3x - 4)\\ &= (-1)(2x^3) + (-1)(-3x) + (-1)(-4)\\ &= -2x^3 + 3x + 4 \neq -2x^3 - 3x - 4.\end{aligned}$$

2.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

En los problemas 1 a 8, halle el valor del polinomio para ***a***) $x = -3$; ***b***) $x = \frac{1}{2}$, y ***c***) $x = 0$.

1. $x^2 - 5x + 6$

2. $\sqrt{2}x^2 + 3x - 4\sqrt{2}$

3. $x - 3x^2 + 6x^3$

4. $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

5. $\frac{1}{2}x - 1$

6. $(x - 1)^2 + (x - 1)$

7. $0.1x^2 - 0.5x + 0.2$

8. $(2x + 1)^3$

En los problemas 9 a 16, determine si la expresión algebraica es un polinomio. Si lo es, indique su grado y su coeficiente principal.

9. $\sqrt{3} + 8x$

10. $0.5x^{10} - 1.7x^3 + 3.4x - 7.2$

11. $y^3 - y^2 + y^{1/3} - 7$

12. $t^4 - t^3 + t^{-1} - 1$

13. $7x^{100} - 4x^{99} + 26x^{101} - 5$

14. $3 + 2x - \sqrt{7}x^3 + \frac{1}{2}x^{-10}$

15. $\sqrt{r} - 4$

16. $z^2(5z^3 - 4z + 18)$

En los problemas 17 a 30, realice la operación indicada y exprese el resultado como un polinomio en forma estándar.

17. $(3x^5 - 5x^2 + 4x - 7) + (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$

18. $(4x^{10} - 7x^5 + 1) + (3x^5 + 2x^2 - 7x + 1)$

19. $(y^3 - 3y^2 + 7y - 8) + (5y^3 + 4y^2 - 9y + 1)$

20. $(\sqrt{2}z^5 - 6z^3 + 17z + \sqrt[3]{6}) + (z^4 + 16z^3 - 5z + \sqrt{6})$

21. $(x^2 + 2x - 1) - (3x^4 - 4x^2 + 2x)$

22. $(3y^4 - 2y^2 + 8y - 16) - (6y^4 + 5y^2 + 10y - 11)$

23. $(3x^7 - 7x^6 + x^5 - 14) - (x^4 - 2x^2 + 8x)$

24. $(4s^{10} - 5s^5 + \frac{9}{2}) - (s^{10} + \frac{1}{2}s^5 - s + \frac{1}{2})$

25. $3(t^3 - 4t^2 + 6t - 3) + 5(-t^3 + 2t^2 - 9t + 11)$

26. $6(2x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 4x - 8) - 4(-5x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 3x - 13)$

27. $(2v + 4)(v^2 - 6v)$

28. $(w^2 - w + 1)(w^4 - w^2)$

29. $(y^2 + 2y - 4)(y^2 - y + 5)$

30. $(z^3 + 4z - 3)(2z^3 - 7z + 1)$

En los problemas 31 a 38, realice las operaciones indicadas y simplifique.

31. $(8a^4 + 7a^2b^2 + 6b^4) + (7a^4 - a^3b + a^2b^2 - 8ab^3 + 5b^4)$

32. $(\sqrt{2}xy^3 - \sqrt{3}y^2) - (x^3 + y^3 - \sqrt{2}xy^3 + 6\sqrt{3}y^2 - \sqrt{5})$

33. $(2a - b)(3a^2 - ab + b^2)$

34. $(x^2 - xy + y)(5x - 3y^2)$

35. $\dfrac{5s^2(2rs - 8rs^2)}{2rs^3}$

36. $\dfrac{7p^3q^3 - 4p^2q^5}{p^2q^3}$

37. $\dfrac{4x^2y^2 - (2x^2y)^2 + 8x^8y^3}{4x^2y^2}$

38. $\dfrac{3a^2b^2c^2 - 2ab^2c + \sqrt{5}abc}{abc}$

En los problemas 39 a 80, halle el producto.

39. $(x - 1)(x + 2)$

40. $(4x - 5)(x + 3)$

41. $(2r^3 + 1)(r^3 - 7)$

42. $(v^2 + 3)(v^2 - 5)$

43. $(5t - 7)(2t + 8)$

44. $(3z - 5)(7z + 1)$

45. $(4\sqrt{x} + 1)(6\sqrt{x} - 2)$

46. $(2\sqrt{x} - 3)(5\sqrt{x} + 8)$

47. $(0.3x + 0.7)(10x + 2.1)$

48. $(1.2x + 0.4)(2x - 1.3)$

49. $(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3})(2x + \frac{1}{4})$

50. $(\frac{2}{5}x + 5)(\frac{1}{5}x + 1)$

51. $(1 + 5b)^2$

52. $(2c - 4)^2$

53. $(5x + 2)(10x + 4)$

54. $(-3x^2 + 9)(x^2 - 3)$

55. $(2 + \sqrt{3x})(2 - \sqrt{3x})$

56. $[4(x + 1) + 3][4(x + 1) - 3]$

57. $(y^{-1} - 2x)(y^{-1} + 2x)$

58. $(2z^2 + z)(2z^2 - z)$

59. $(2x - 3)^3$

60. $(x + 5)^3$

61. $(x^2y^3 + 2)^3$

62. $\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2}\right)^3$

63. $(x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$

64. $(2a^2 - 1)(4a^4 - 4a^2 + 1)$

65. $(a - 3)(a^2 + 3a + 9)$

66. $(2 - y)(4 + 2y + y^2)$

67. $(9 + y)(81 - 9y + y^2)$

68. $(x + z^2)(x^2 - xz^2 + z^4)$

69. $(5x - y)(5x + y)(25x^2 + y^2)$

70. $(2 - x + y)(2 - x - y)$

71. $(x + y + 1)^2$

72. $(x + x^2 + x^3)^2$

73. $(x + y + 1)^3$

74. $(x + x^2 + x^3)^3$

75. $(x^{2/3} - x^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3})$

76. $(\sqrt{x} - y + 1)(\sqrt{x} + y - 1)$

77. $\left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}\right)\left(\dfrac{1}{y^4} + \dfrac{1}{y^2x^2} + \dfrac{1}{x^4}\right)$

78. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)$

79. $(x^5 - x^2)(x - 1)$

80. $(2x^{1/2} - x)(x + 5)$

81. Escriba polinomios de forma estándar para *a*) el volumen y *b*) la superficie del objeto sólido que se muestra en la **FIGURA 2.6.2**.

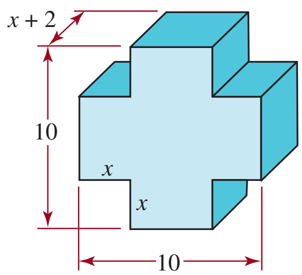


FIGURA 2.6.2 Objeto sólido para el problema 81

82. Escriba un polinomio en las variables *r* y *s* para el área de la región (un rectángulo con extremos semicirculares) que se muestra en la **FIGURA 2.6.3**.

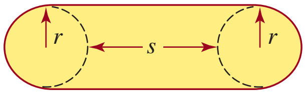


FIGURA 2.6.3 Región del problema 82

Para la discusión

En los problemas 83 a 88, responda falso o verdadero.

83. $(t + 1)^2 = t^2 + 1$ _____

84. El grado del polinomio $x^4 - 3x^2 + x^5$ es 4. _____

85. El coeficiente principal de $2y^3 - y^8 + 4$ es -1. _____

86. La expresión $3r^{14} - \sqrt{2}r + \pi$ es un polinomio en la variable r. _____

87. $4t^3 + 3t - (2t^3 + t + 7) = 2t^3 + 4t + 7$. _____

88. El valor de $z^4 - 3z + 1$ cuando $z = \sqrt{2}$ es $5 - 3\sqrt{2}$. _____

En los problemas 89 y 90, los polinomios son de una sola variable x.

89. Si se suman un polinomio de grado 2 y uno de grado 3, ¿cuál es el grado del polinomio resultante? ¿Cuál es el grado de su producto?

90. ¿Qué se puede decir acerca del grado de la suma de dos polinomios de grado n? ¿De su producto? ¿De su diferencia?

2.7 Factorización de polinomios

Introducción En la sección anterior multiplicamos polinomios. Ahora, invertimos el procedimiento y tratamos de escribir un polinomio como producto de otros polinomios. Este proceso se llama **factorización**, y cada polinomio en el producto se llama **factor** del polinomio original. Por ejemplo, $3x^2$ y $x^2 + 2$ son factores de $3x^4 + 6x^2$ porque

$$3x^4 + 6x^2 = 3x^2(x^2 + 2).$$

Generalmente, buscamos factores polinomiales de grado 1 o mayores.

Al factorizar, a veces podemos sustituir una expresión complicada por un producto de factores lineales. Un ejemplo es:

$$5x^3 + 6x^2 - 29x - 6 = (5x + 1)(x - 2)(x + 3).$$

Por tanto, la factorización resulta muy útil para simplificar expresiones. Como veremos en el capítulo 3, es particularmente útil para resolver ecuaciones. Estudiaremos la factorización de polinomios con mayor detenimiento en la sección 6.3.

En general, el primer paso en la factorización de cualquier expresión algebraica es determinar si los términos tienen un factor común.

EJEMPLO 1 Factorización

Factorice $6x^4y^4 - 4x^2y^2 + 10\sqrt{2}xy^3 - 2xy^2$.

Solución Como $2xy^2$ es un factor común de los términos, tenemos que

$$\begin{aligned} 6x^4y^4 - 4x^2y^2 + 10\sqrt{2}xy^3 - 2xy^2 &= 2xy^2(3x^3y^2) - 2xy^2(2x) + 2xy^2(5\sqrt{2}y) - 2xy^2(1) \\ &= 2xy^2(3x^3y^2 - 2x + 5\sqrt{2}y - 1). \end{aligned}$$

≡

Cuando los términos de una expresión no tienen un factor común, aún podrían factorizarse **agrupando** los términos de manera apropiada.

EJEMPLO 2 Agrupación

Factorice $x^2 + 2xy - x - 2y$.

Solución Al agrupar los dos primeros términos y los dos últimos queda

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy - x - 2y &= (x^2 + 2xy) + (-x - 2y) \\ &= x(x + 2y) + (-1)(x + 2y). \end{aligned}$$

Observamos el factor común $x + 2y$ y completamos como

$$x^2 + 2xy - x - 2y = (x - 1)(x + 2y)$$ ≡

Factorización de polinomios cuadráticos *A veces* es posible factorizar los polinomios cuadráticos $ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son enteros, como

$$(Ax + B)(Cx + D),$$

donde A, B, C y D son también enteros.

Inicialmente, para simplificar nuestra exposición suponemos que el polinomio cuadrático tiene como coeficiente principal $a = 1$. Si $x^2 + bx + c$ tiene una factorización usando coeficientes enteros, entonces será de la forma

$$(x + B)(x + D),$$

donde B y D son enteros. Al hallar el producto y al comparar los coeficientes,

$$(x + B)(x + D) = x^2 + (B + D)x + BD = x^2 + bx + c,$$

$B+D=b$

$BD=c$

vemos que

$$B + D = b \qquad \text{y} \qquad BD = c.$$

Así, para factorizar $x^2 + bx + c$ con coeficientes enteros hacemos una lista de todas las factorizaciones posibles de c como producto de dos enteros B y D. Luego comprobamos cuál de las sumas de $B + D$ es igual a b.

EJEMPLO 3 Factorización de un polinomio

Factorice $x^2 - 9x + 18$.

Solución Con $b = -9$ y $c = 18$, buscamos los enteros B y D tales que

$$B + D = -9 \qquad \text{y} \qquad BD = 18$$

Podemos escribir 18 como un producto BD en las formas siguientes:

$$1(18), \quad 2(9), \quad 3(6), \quad (-1)(-18), \quad (-2)(-9) \quad \text{o} \quad (-3)(-6).$$

Como -9 es la suma $B + D$ cuando $B = -3$ y $D = -6$, la factorización es

$$x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$$ ≡

Observe que siempre es posible comprobar una factorización mediante la multiplicación de los factores.

EJEMPLO 4 Factorización de un polinomio

Factorice $x^2 + 3x - 1$.

Solución Se puede escribir el número -1 como producto de dos enteros BD solamente en una forma: $(-1)(1)$. Con $B = -1$ y $D = 1$, se concluye de

$$B + D = -1 + 1 \neq 3$$

que $x^2 + 3x - 1$ no puede factorizarse usando coeficientes enteros. ≡

Es más complicado factorizar el polinomio cuadrático general $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 1$, pues debemos considerar tanto los factores de a como los de c. Al hallar el producto y comparar los coeficientes

$$AC = a \qquad BD = c$$

$$(Ax + B)(Cx + D) = ACx^2 + (AD + BC)x + BD = ax^2 + bx + c,$$

$$AD + BC = b$$

vemos que $ax^2 + bx + c$ se factoriza como $(Ax + b)(Cx + D)$ si hallamos enteros A, B y C que satisfagan

$$AC = a, \quad AD + BC = b, \quad BD = c$$

EJEMPLO 5 Factorización de un polinomio

Factorice $2x^2 + 11x - 6$.

Solución Los factores serán

$$(2x + \_\_\_\_)(1x + \_\_\_\_),$$

donde los espacios en blanco deben llenarse con un par de enteros B y D cuyo producto BD sea igual a -6. Los pares posibles son:

$$1 \text{ y } -6, \quad -1 \text{ y } 6, \quad 3 \text{ y } -2, \quad -3 \text{ y } 2.$$

Ahora debemos comprobar para ver si uno de los pares da 11 como valor de $AD + BC$ (el coeficiente del término medio), donde $A = 2$ y $C = 1$. Encontramos que:

$$2(6) + 1(-1) = 11;$$

por tanto,

$$2x^2 + 11x - 6 = (2x - 1)(x + 6).$$ ≡

Este método general se puede aplicar a polinomios de dos variables x y y de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

donde a, b y c son enteros.

EJEMPLO 6 Factorización

Factorice $15x^2 + 17xy + 4y^2$.

Solución Los factores podrían tener la forma

$$(5x + \_\_\_y)(3x + \_\_\_y) \qquad \text{o} \qquad (15x + \_\_\_y)(1x + \_\_\_y) \tag{1}$$

No se necesita considerar los casos

$$(-5x + \_\_\_y)(-3x + \_\_\_y) \qquad \text{y} \qquad (-15x + \_\_\_y)(-x + \_\_\_y).$$

(¿Por qué?) Los espacios en blanco en (1) se deben llenar con un par de enteros cuyo producto sea 4. Los pares posibles son:

$$1 \text{ y } 4, \quad -1 \text{ y } -4, \quad 2 \text{ y } 2, \quad -2 \text{ y } -2$$

Comprobamos cada par con las formas posibles en (1) para ver cuál combinación, si es que hay alguna, resulta en un coeficiente de 17 para el término medio. Encontramos que

$$15x^2 + 17xy + 4y^2 = (5x + 4y)(3x + y)$$ ≡

EJEMPLO 7 Factorización de un polinomio

Factorice $2t^4 + 11t^2 + 12$.

Solución Si $x = t^2$, podemos considerar esta expresión como un polinomio cuadrático en la variable x,

$$2x^2 + 11x + 12.$$

Entonces, factorizamos este polinomio cuadrático. Los factores tendrán la forma

$$(x + \_\_\_)(2x + \_\_\_), \tag{2}$$

donde los espacios en blanco deben llenarse con un par de enteros cuyo producto sea 12. Los posibles pares son

$$1 \text{ y } 12, \qquad -1 \text{ y } -12, \qquad 2 \text{ y } 6, \qquad -2 \text{ y } -6, \qquad 3 \text{ y } 4, \qquad -3 \text{ y } -4$$

Comprobamos cada par con (2) para ver qué combinación, si la hay, resulta en un coeficiente de 11 para el término medio. Encontramos que

$$2x^2 + 11x + 12 = (x + 4)(2x + 3).$$

La sustitución de t^2 por x nos da la factorización deseada

$$2t^4 + 11t^2 + 12 = (t^2 + 4)(2t^2 + 3)$$

≡

En el ejemplo anterior se debe comprobar que $t^2 + 4$ ni $2t^2 + 3$ se pueden factorizar usando coeficientes enteros; ni con números reales, en todo caso.

Factorización de fórmulas Si invertimos las fórmulas de los productos notables de la sección 2.6 obtenemos las siguientes **fórmulas de factorización** importantes. Estas fórmulas son simplemente (3), (5), (6) y (7) de la sección 2.6 escritas a la inversa.

Cuadrado perfecto: $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ (3)

Diferencia de dos cuadrados: $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$ (4)

Diferencia de dos cubos: $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ (5)

Suma de dos cubos: $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2).$ (6)

Como se señaló en la sección 2.6, los símbolos x y a pueden sustituirse por otra variable, un número o una expresión más complicada.

EJEMPLO 8 Cuadrado perfecto

Factorice $y^2 - 6y + 9$.

Solución En este caso, el símbolo y desempeña el papel de x y $a = -3$ y, por la fórmula (3), vemos que

$$y^2 - 6y + 9 = y^2 + 2(-3)y + (-3)^2 = (y - 3)^2.$$

≡

EJEMPLO 9 Diferencia de dos cuadrados

Factorice $16x^4y^2 - 25$.

Solución Si reescribimos la expresión así:

$$16x^4y^2 - 25 = (4xy^2)^2 - 5^2$$

reconocemos la diferencia de dos cuadrados. Por tanto, por la fórmula (4), el símbolo x se sustituye con la expresión $4x^2y$ y $a = 5$, tenemos que

$$\begin{aligned} 16x^4y^2 - 25 &= (4x^2y)^2 - (5)^2 \\ &= (4x^2y - 5)(4x^2y + 5) \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 10 Suma de dos cubos

Factorice $8a^3 + 27b^6$.

Solución Como podemos escribir la expresión dada como la suma de dos cubos,

$$8a^3 + 27b^6 = (2a)^3 + (3b^2)^3$$

factorizamos usando la fórmula (6). Si sustituimos x por $2a$ y a por $3b^2$, se desprende de la fórmula (6) que

$$\begin{aligned} 8a^3 + 27b^6 &= (2a)^3 + (3b^2)^3 \\ &= (2a + 3b^2)[(2a)^2 - (2a)(3b^2) + (3b^2)^2] \\ &= (2a + 3b^2)(4a^2 - 6ab^2 + 9b^4) \end{aligned}$$

≡

Observe que las fórmulas (4) a (6) indican que la diferencia de dos cuadrados y la suma y diferencia de dos cubos *siempre* se pueden factorizar, en tanto no limitemos los coeficientes a enteros. Por ejemplo, usando la fórmula (4) para factorizar $x^2 - 5$, identificamos que $a = \sqrt{5}$, por lo que

$$\begin{aligned} x^2 - 5 &= x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 \\ &= \left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right). \end{aligned}$$

Ahora consideramos un ejemplo en el que una primera factorización produce expresiones que pueden factorizarse otra vez. En general, necesitamos que una expresión sea **factorizada totalmente**, es decir, hasta que ninguno de los factores se puedan factorizar en polinomios de grado 1 o mayor con coeficientes enteros.

EJEMPLO 11 Dos métodos

Factorice completamente $x^6 - y^6$.

Solución Podemos considerar la expresión $x^6 - y^6$ de dos maneras: como diferencia de dos cuadrados o como diferencia de dos cubos. Al usar la diferencia de dos cubos, fórmula (5), escribimos

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^2)^3 - (y^2)^3 \\ &= (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) \qquad (7) \\ &= (x - y)(x + y)(x^4 + x^2y^2 + y^4). \end{aligned}$$

A partir de lo anterior podríamos concluir que la factorización está completa. Sin embargo, tratar la expresión $x^6 - y^6$ como una diferencia de dos cuadrados es más revelador, pues

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^3)^2 - (y^3)^2 \\ &= (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) \quad \leftarrow \text{diferencia de dos cubos y suma de dos cubos} \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2) \qquad (8) \\ &= (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2). \end{aligned}$$

≡

En el ejemplo 11, si comparamos los resultados en las últimas líneas de las factorizaciones en (7) y (8), descubrimos la factorización adicional:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2).$$

Compruebe que ninguna de las expresiones del lado derecho de la igualdad pueda factorizarse más.

2.7 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

En los problemas 1 a 10, factorice el polinomio hallando un factor común o agrupando.

1. $12x^3 + 2x^2 + 6x$
2. $6x^3y^4 - 3\sqrt{3}x^2y^2 - 3x^2y + 3xy$
3. $2y^2 - yz + 6y - 3z$
4. $6x^5y^5 + \sqrt{2}x^2y^3 + 14xy^3$
5. $15at + 3bt + 5as + bs$
6. $3a^2b^3 - 3\sqrt{2}a^4b^2 + 9a^2b$
7. $xyz^3 - xy^3z + x^3yz$
8. $x^3 + 2x + x^2 + 2$
9. $2p^3 - p^2 + 2p - 1$
10. $2uv - 5wz + 2uz - 5wv$

En los problemas 11 a 22, use las fórmulas de factorización (3) a (6) para factorizar el polinomio.

11. $36x^2 - 25$
12. $a^2 - 4b^2$
13. $4x^2y^2 - 1$
14. $49x^2 - 64y^2$
15. $x^4 - y^4$
16. $x^6 + y^6$
17. $x^8 - y^8$
18. $a^3 - 64b^3$
19. $8x^3y^3 + 27$
20. $y^3 + 125$
21. $y^6 - 1$
22. $1 - x^3$

En los problemas 23 a 42, use técnicas para factorizar polinomios cuadráticos para factorizar el polinomio dado, si es posible.

23. $x^2 - 5x + 6$
24. $x^2 - 10x + 24$
25. $y^2 + 7y + 10$
26. $y^4 + 10y^2 + 21$
27. $x^4 - 3x^2 - 4$
28. $x^2 + 4x - 12$
29. $r^2 + 2r + 1$
30. $s^2 + 5s - 14$
31. $x^2 - xy - 2y^2$
32. $x^2 - 4xy + 3y^2$
33. $x^2 + 10x + 25$
34. $4x^2 + 12x + 9$
35. $s^2 - 8st + 16t^2$
36. $9m^2 - 6mv + v^2$
37. $2p^2 + 7p + 5$
38. $8q^2 + 2q - 3$
39. $6a^4 + 13a^2 - 15$
40. $10b^4 - 23b^2 + 12$
41. $2x^2 - 7xy + 3y^2$
42. $-3x^2 - 5xy + 12y^2$

En los problemas 43 a 60, use cualquier método para factorizar el polinomio.

43. $(x^2 + 1)^3 + (y^2 - 1)^3$
44. $(4 - x^2)^3 - (4 - y^2)^3$
45. $x(x - y) + y(y - x)$
46. $x(x - y) - y(y - x)$
47. $(1 - x^2)^3 - (1 - y^2)^3$
48. $(x^2 - 4)^3 + (4 - y^2)^3$
49. $1 - 256v^8$
50. $s^8 - 6\,561$
51. $x^6 + 7x^3 - 8$
52. $z^{10} - 5z^5 - 6$
53. $r^3s^3 - 8t^3$
54. $25c^2d^2 - x^2y^2$
55. $a^3 + a^2b - b^3 - ab^2$
56. $p^3 - pq^2 + p^2q - q^3$
57. $4z^2 + 7zy - 2y^2$
58. $36x^2 + 12xy + y^2$
59. $16a^2 - 24ab + 9b^2$
60. $4m^2 + 2mn - 12n^2$

En los problemas 61 a 70, use las fórmulas de factorización (3) y (4) para factorizar la expresión en factores lineales. [*Pista:* algunos coeficientes no serán enteros].

61. $x^2 - 3$
62. $2r^2 - 1$
63. $5y^2 - 1$
64. $\frac{1}{4}a^2 - b^2$
65. $a^2 + a + \frac{1}{4}$
66. $t^2 - \frac{2}{5}t + \frac{1}{25}$
67. $a^2 - 2b^2$
68. $3u^2 - 4v^2$
69. $24 - x^2$
70. $x^2 - 2\sqrt{2}xy + 2y^2$

Para la discusión

En los problemas 71 a 74, responda falso o verdadero.

71. $x^2 + y^2 = (x + y)(x + y)$ ______

72. $a^3 + b^3 = (a + b)^3$ ______

73. $(r - 1)(r - 1) = r^2 + 1$ ______

74. $r^3 - s^3 = (r - s)(r^2 + rs + s^2)$ ______

En los problemas 75 a 77 se tratan en términos geométricos varias de las fórmulas de factorización.

En el libro II de *Elementos*, de Euclides (*c*. 300 a.C.), los problemas algebraicos se tratan y se resuelven en términos geométricos, pues los griegos carecían de notación algebraica. Por ejemplo, el producto de dos números positivos a y b se representa como el área de un rectángulo cuyos lados tienen longitudes a y b, respectivamente.

75. Explique cómo justifica la **FIGURA 2.7.1** la fórmula de factorización $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ para los números positivos a y b.

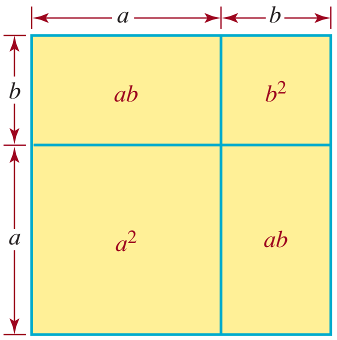


FIGURA 2.7.1 Rectángulos para el problema 75

76. Explique cómo justifica la **FIGURA 2.7.2** la fórmula de factorización $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, donde $a > b > 0$.

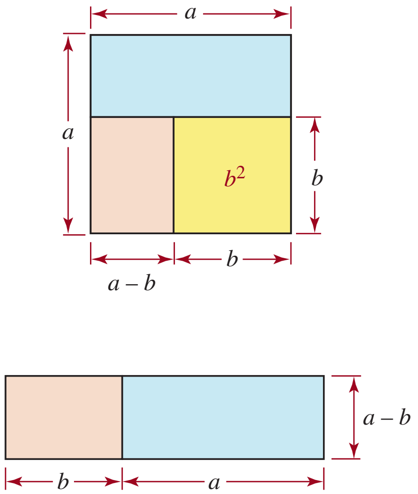


FIGURA 2.7.2 Rectángulos para el problema 76

77. La **FIGURA 2.7.3** indica que la fórmula de factorización para la diferencia de dos cubos, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ para $a > b > 0$, se puede justificar geométricamente. Complete la demostración. [*Pista:* marque las cuatro cajas que hay dentro del cubo y calcule el volumen de cada una].

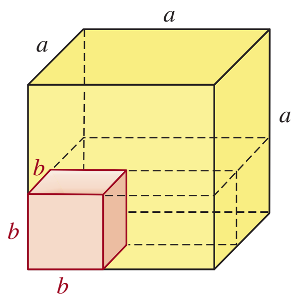


FIGURA 2.7.3 Cubo para el problema 77

2.8 Expresiones racionales

Introducción Cuando un polinomio se divide entre otro, el resultado no es necesariamente un polinomio. El cociente de dos polinomios se llama **expresión racional**. Por ejemplo,

$$\frac{2x^2 + 5}{x + 1} \quad \text{y} \quad \frac{3}{2x^3 - x + 8}$$

son expresiones racionales. El **dominio** de la variable en una expresión racional consta de todos los números reales para los que el valor del denominador es diferente de cero. Por ejemplo, en $(2x^2 + 5)/(x + 1)$ el dominio de la variable es $\{x \mid x \neq -1\}$.

Para resolver problemas, con frecuencia debemos combinar expresiones racionales y luego simplificar el resultado. Como una expresión racional representa un número real, podemos aplicar las propiedades del sistema de los números reales para combinar y simplificar las expresiones racionales. Las propiedades de las fracciones de la sección 2.1 son particularmente útiles. A continuación, y por conveniencia, repetimos las que se usan más a menudo.

PROPIEDADES FRECUENTES DE LOS NÚMEROS REALES

Para cualquiera de los números reales a, b, c y d:

i) Cancelación

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, \quad c \neq 0$$

ii) Suma o resta

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

iii) Multiplicación

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

iv) División

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

siempre que cada denominador sea diferente de cero.

EJEMPLO 1 Simplificación

Simplifique la expresión racional $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$.

Solución Factorizamos el numerador y el denominador y cancelamos los factores comunes usando la propiedad de cancelación *i*):

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(2x + 1)\cancel{(x - 1)}}{(x + 1)\cancel{(x - 1)}} = \frac{2x + 1}{x + 1}.$$

≡

Observe que en el ejemplo 1 la cancelación del factor común $x - 1$ es válida solamente para los valores de x tales que $x - 1$ sea diferente de cero; es decir, para $x \neq 1$. Sin embargo, como la expresión $(2x^2 - x - 1)/(x^2 - 1)$ no se define para $x = 1$, nuestra simplificación es válida para todos los números reales en el dominio de la variable x en la expresión *original.* Hagamos énfasis en que la ecuación

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2x + 1}{x + 1}$$

no es válida para $x = 1$, aunque el miembro derecho, $(2x + 1)/(x + 1)$, se define para $x = 1$. Las consideraciones de esta naturaleza serán importantes en el capítulo próximo, cuando resolvamos ecuaciones que contengan expresiones racionales.

En el resto de este capítulo supondremos sin comentarios posteriores que las variables están restringidas a los valores para los que todos los denominadores en una ecuación sean diferentes de cero. Advertencia

EJEMPLO 2 Simplificación

Simplifique la expresión racional $\dfrac{4x^2 + 11x - 3}{2 - 5x - 12x^2}$.

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{4x^2 + 11x - 3}{2 - 5x - 12x^2} &= \frac{(4x - 1)(x + 3)}{(1 - 4x)(2 + 3x)} \\
&= \frac{\cancel{(4x - 1)}(x + 3)}{-\cancel{(4x - 1)}(2 + 3x)} \quad \leftarrow \text{por la propiedad de cancelación } i) \\
&= -\frac{x + 3}{2 + 3x}.
\end{aligned}$$

≡

Mínimo común denominador Para sumar o restar expresiones racionales procedemos exactamente como cuando sumamos o restamos fracciones. Primero hallamos un común denominador y luego aplicamos la propiedad *ii*). Aunque cualquier común denominador servirá, el trabajo será menor si usamos el **mínimo común denominador (MCD)**, el cual se encuentra mediante la factorización completa de cada denominador y la formación de un producto de los diferentes factores, usando cada factor con el exponente más alto con el cual ocurra en cualquier denominador individual.

EJEMPLO 3 Mínimo común denominador

Encuentre el MCD de

$$\frac{1}{x^4 - x^2}, \quad \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{x}.$$

Solución Al factorizar los denominadores en las expresiones racionales, obtenemos

$$\frac{1}{x^2(x - 1)(x + 1)}, \quad \frac{x + 2}{(x + 1)^2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{x}. \quad \leftarrow \text{Véanse las fórmulas (3) y (5) de la sección 2.6}$$

Los diferentes factores de los denominadores son x, $x - 1$ y $x + 1$. Usamos cada factor con el exponente más alto con el cual ocurre en cualquier denominador individual. De esta manera, el MCD de los denominadores es $x^2(x - 1)(x + 1)^2$. ≡

EJEMPLO 4 Combinación de términos

Combine

$$\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 + 4x + 4}$$

y simplifique la expresión racional resultante.

Solución En la forma factorizada, los denominadores son $(x - 2)(x + 2)$ y $(x + 2)^2$. Por ende, el MCD de los denominadores es $(x - 2)(x + 2)^2$. Usamos la propiedad *i*) a la inversa para volver a escribir cada expresión racional con el MCD como denominador:

$$\text{primer término} \rightarrow \quad \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{x}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)(x + 2)} = \frac{x(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)^2}$$

$$\text{segundo término} \rightarrow \quad \frac{1}{x^2 + 4x + 4} = \frac{1}{(x + 2)^2} = \frac{1 \cdot (x - 2)}{(x + 2)^2(x - 2)} = \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)^2}.$$

Entonces, usando *ii*), sumamos y simplificamos:

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-4}=\frac{1}{x^2+4x+4}&=\frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)^2}+\frac{x-2}{(x-2)(x+2)^2}\\&=\frac{x(x+2)+x-2}{(x-2)(x+2)^2}\\&=\frac{x^2+2x+x-2}{(x-2)(x+2)^2}\\&=\frac{x^2+3x-2}{(x-2)(x+2)^2}.\end{aligned}$$

≡

Para multiplicar o dividir expresiones racionales, aplicamos la propiedad *iii*) o la *iv*) y luego simplificamos.

EJEMPLO 5 Combinación de términos

Combine

$$\frac{x}{5x^2+21x+4}\cdot\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x}$$

y simplifique la expresión racional resultante.

Solución Comenzamos por emplear la propiedad *iii*):

$$\begin{aligned}\frac{x}{5x^2+21x+4}\cdot\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x}&=\frac{x(25x^2+10x+1)}{(5x^2+21x+4)(3x^2+x)}\\&=\frac{\cancel{x}(5x+1)\cancel{(5x+1)}}{\cancel{(5x+1)}(x+4)\cancel{x}(3x+1)}\quad\leftarrow\text{factorice el numerador y el denominador y cancele}\\&=\frac{5x+1}{(x+4)(3x+1)}.\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 6 Combinación de términos

Combine

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}\div\frac{2x+5}{x+3}$$

y simplifique la expresión racional resultante.

Solución Comenzamos por escribir la expresión dada como producto:

$$\begin{aligned}\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}\div\frac{2x+5}{x+3}&=\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}\cdot\frac{x+3}{2x+5}\quad\leftarrow\text{por la propiedad } iv)\\&=\frac{(2x^2+9x+10)(x+3)}{(x^2+4x+3)(2x+5)}\quad\leftarrow\text{por la propiedad } iii)\\&=\frac{\cancel{(2x+5)}(x+2)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(x+1)\cancel{(2x+5)}}\quad\leftarrow\text{factorice el numerador y el denominador y cancele}\\&=\frac{x+2}{x+1}.\end{aligned}$$

≡

Expresiones fraccionales Un cociente de dos expresiones algebraicas que no son polinomios, como $(\sqrt{x} - 1)/(\sqrt[3]{x} + 1)$, se llama **expresión fraccionaria**. Las técnicas que se emplean para simplificar expresiones fraccionarias son semejantes a las empleadas para las expresiones racionales.

EJEMPLO 7 Simplificación

Simplifique

$$\frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x+1}}{1 + \dfrac{1}{x}}.$$

Solución Primero obtenemos expresiones racionales individuales para el numerador,

$$\frac{1}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{1(x+1)}{x(x+1)} - \frac{x \cdot x}{(x+1)x} = \frac{x + 1 - x^2}{x(x+1)} = \frac{-x^2 + x + 1}{x(x+1)}$$

y el denominador,

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}.$$

De esta manera, la expresión es la misma que

$$\frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x+1}}{1 + \dfrac{1}{x}} = \frac{\dfrac{-x^2 + x + 1}{x(x+1)}}{\dfrac{x+1}{x}}.$$

Ahora aplicamos la propiedad *iv*) a este cociente para obtener

$$\frac{\dfrac{-x^2 + x + 1}{x(x+1)}}{\dfrac{x+1}{x}} = \frac{-x^2 + x + 1}{\cancel{x}(x+1)} \cdot \frac{\cancel{x}}{x+1} = \frac{-x^2 + x + 1}{(x+1)^2}.$$ ≡

Otro método para simplificar una expresión fraccionaria compleja es multiplicar tanto el numerador como el denominador por el MCD de los denominadores de todas las fracciones que ocurran en la fracción compleja. Al usar aquí este método, multiplicamos el numerador y el denominador por $x(x + 1)$ y simplificamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x+1}}{1 + \dfrac{1}{x}} &= \frac{\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x+1}\right) \cdot x(x+1)}{\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \cdot x(x+1)} \\
&= \frac{(x+1) - x^2}{x(x+1) + (x+1)} \\
&= \frac{-x^2 + x + 1}{(x+1)(x+1)} = \frac{-x^2 + x + 1}{(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

Las técnicas que se tratan en esta sección se pueden aplicar con frecuencia a expresiones que contienen exponentes negativos, como veremos en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 8 Simplificación

Simplifique $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$.

Solución Primero sustituimos todos los exponentes negativos por los cocientes equivalentes y luego usamos las propiedades de las fracciones para simplificar las expresiones algebraicas que resulten:

$$\begin{aligned}(a^{-1} + b^{-1})^{-1} &= \frac{1}{a^{-1} + b^{-1}} && \leftarrow \text{recíproco de } a^{-1} + b^{-1} \\ &= \frac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \frac{1}{\dfrac{b+a}{ab}} && \leftarrow \text{recíproco de } a \text{ y } b \text{ y MCD} \\ &= \frac{ab}{b+a}. && \leftarrow \text{propiedad } iv)\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 9 Combinación de términos

Combine

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}$$

y simplifique la expresión fraccionaria resultante.

Solución Primero encontramos el MCD y luego sumamos:

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y}\sqrt{x}} + \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}.$$

Si deseamos racionalizar el denominador, el resultado final sería

$$\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} = \frac{x^2\sqrt{y} + y^2\sqrt{x}}{xy}.$$

≡

Los ejemplos 10 y 11 ilustran cómo simplificar ciertos tipos de expresiones fraccionarias que se presentan en cálculo.

EJEMPLO 10 Simplificación

Simplifique $\dfrac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h}$.

Solución Comenzamos por combinar los términos en el numerador:

$$\frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \frac{\dfrac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{x(x+h)}}{h}.$$

Entonces, por las propiedades i) y iv),

$$\frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \frac{-\cancel{h}}{x(x+h)\cancel{h}} = \frac{-1}{x(x+h)}.$$

≡

EJEMPLO 11 Simplificación

Combine

$$(2x)(x-1)^{1/2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)(x-1)^{-1/2}(x^2)$$

y simplifique la expresión fraccionaria resultante.

Solución En el segundo término usamos $(x-1)^{-1/2} = 1/(x-1)^{-1/2}$ y luego empleamos $2(x-1)^{1/2}$ como el MCD:

$$\begin{aligned}(2x)(x-1)^{1/2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)(x-1)^{-1/2}(x^2) &= (2x)(x-1)^{1/2} + \frac{x^2}{2(x-1)^{1/2}}\\ &= \frac{(2)(2x)(x-1) + x^2}{2(x-1)^{1/2}}\\ &= \frac{4x^2 - 4x + x^2}{2(x-1)^{1/2}}\\ &= \frac{5x^2 - 4x}{2(x-1)^{1/2}}\end{aligned}$$

≡

2.8 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

En los problemas 1 a 8, simplifique la expresión racional.

1. $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 6x + 8}$

2. $\dfrac{v^4 + 4v^2 + 4}{4 - v^4}$

3. $\dfrac{z^2 - 9}{z^3 + 27}$

4. $\dfrac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 - 4xy + 3y^2}$

5. $\dfrac{3x^2 - 7x - 20}{2x^2 - 5x - 12}$

6. $\dfrac{4y^2 + 20y + 25}{2y^3 + 3y^2 - 5y}$

7. $\dfrac{w^3 - 9w}{w^3 - 6w^2 + 9w}$

8. $\dfrac{a^2b + ab^2}{a^2 - b^2}$

En los problemas 9 a 16, halle el mínimo común denominador (MCD) de las expresiones racionales.

9. $\dfrac{1}{x^2 + x - 2}, \dfrac{4}{x + 2}$

10. $\dfrac{5}{v^2 + 2v + 1}, \dfrac{v}{v^2 - 3v - 4}$

11. $\dfrac{10}{b^3 + b^2 - 6b}, \dfrac{1}{b^3 - 6b^2}, \dfrac{b}{b - 2}$

12. $\dfrac{1}{x^2 - 10x + 25}, \dfrac{x}{x^2 - 25}, \dfrac{1}{x^2 + 10x + 25}$

13. $\dfrac{1}{c^2 + c}, \dfrac{c}{c^2 + 2c + 1}, \dfrac{1}{c^2 - 1}$

14. $\dfrac{p}{p + r}, \dfrac{r}{p^2 + 2pr + r^2}, \dfrac{1}{p^3 + r^3}$

15. $\dfrac{1}{x^3 - x^2}, \dfrac{x}{x^2 - 1}, \dfrac{1}{x^3 + 2x^2 + x}$

16. $\dfrac{y + 5}{3y^3 - 14y^2 - 5y}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{y + 5}{y^2 - 5y}$

En los problemas 17 a 42, combine términos y simplifique la expresión racional.

17. $\dfrac{4x}{4x + 5} + \dfrac{5}{4x + 5}$

18. $\dfrac{3}{s - 2} + \dfrac{4}{2 - s}$

19. $\dfrac{7z}{7z - 1} - \dfrac{1}{1 - 7z}$

20. $\dfrac{3}{a - 2} - \dfrac{6}{a^2 + 4}$

21. $\dfrac{2x}{x + 1} + \dfrac{5}{x^2 - 1}$

22. $\dfrac{b}{2b + 1} - \dfrac{2b}{b - 2}$

23. $\dfrac{y}{y - x} - \dfrac{x}{y + x}$

24. $\dfrac{x}{x - y} + \dfrac{x}{y - x}$

25. $\dfrac{2}{r^2 - r - 12} + \dfrac{r}{r + 3}$

26. $\dfrac{1}{w + 3} + \dfrac{w}{w + 1} + \dfrac{w^2 + 1}{w^2 + 4w + 3}$

27. $\dfrac{x}{2x^2+3x-2}-\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{4}{x+2}$

28. $\dfrac{z}{2z+3}-\dfrac{3}{4z^2-3z-1}+\dfrac{4z+1}{2z^2+z-3}$

29. $\dfrac{t-4}{t+3}\cdot\dfrac{t+5}{t-2}$

30. $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}\cdot\dfrac{x+1}{x^2}$

31. $(x^2-2x+1)\cdot\dfrac{x+1}{x^3-1}$

32. $\dfrac{2p+8}{p-1}\cdot\dfrac{p+4}{2p}$

33. $\dfrac{6x+5}{3x+3}\cdot\dfrac{x+1}{6x^2-7x-10}$

34. $\dfrac{1+x}{2+x}\cdot\dfrac{x^2+x-12}{3+2x-x^2}$

35. $\dfrac{u+1}{u+2}\div\dfrac{u+1}{u+7}$

36. $\dfrac{3w+1}{w-4}\div\dfrac{2w+1}{w}$

37. $\dfrac{x}{x+4}\div\dfrac{x+5}{x}$

38. $\dfrac{x-3}{x+1}\div\dfrac{x+1}{2x+1}$

39. $\dfrac{q^2-1}{q^2+2q-3}\div\dfrac{q-4}{q+3}$

40. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}\div\dfrac{x-2}{x-3}$

41. $\dfrac{s^2-5s+6}{s^2+7s+10}\div\dfrac{2-s}{s+2}$

42. $\dfrac{x}{x+y}\div\dfrac{y}{x+y}$

En los problemas 43 a 64, simplifique la expresión fraccionaria.

43. $\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-x}{\dfrac{1}{x^2}+x}$

44. $\dfrac{\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{t}}{\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{t}}$

45. $\dfrac{z+\dfrac{1}{2}}{2+\dfrac{1}{z}}$

46. $\dfrac{\dfrac{1+r}{r}+\dfrac{r}{1-r}}{\dfrac{1-r}{r}+\dfrac{r}{1+r}}$

47. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}}$

48. $\dfrac{\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{a+1}{a}}{1-\dfrac{a}{a-1}}$

49. $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}$

50. $\dfrac{\dfrac{1}{2x+2h+1}-\dfrac{1}{2x+1}}{h}$

51. $(a^{-2}-b^{-2})^{-1}$

52. $\dfrac{a+b}{a^{-1}+b^{-1}}$

53. $\dfrac{u^{-2}-v^{-2}}{u^2v^2}$

54. $\dfrac{u^{-2}+v^{-2}}{u^2+v^2}$

55. $\dfrac{1}{\sqrt{u}}+\dfrac{1}{\sqrt{w}}$

56. $\dfrac{v}{\sqrt{z}}-\dfrac{z}{\sqrt{v}}$

57. $\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{y}}}$

58. $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{\sqrt{b}}}$

59. $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^3} - \dfrac{1}{x^3}}{h}$

60. $\dfrac{\dfrac{2}{3x+3h} - \dfrac{2}{3x}}{h}$

61. $\dfrac{\dfrac{5}{2x+2h-1} - \dfrac{5}{2x-1}}{h}$

62. $(x^2-1)\left(\frac{1}{3}\right)(x+1)^{-2/3} + (x+1)^{1/3}(2x)$

63. $\dfrac{(x^2+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x^{-1/2}) - (x^{1/2})(2x)}{(x^2+1)^2}$

64. $\dfrac{(x^2+8)^{1/5}(5) - (5x)\left(\frac{1}{5}\right)(x^2+8)^{-4/5}(2x)}{[(x^2+8)^{1/5}]^2}$

Aplicaciones diversas

65. **Resistencia en un circuito** Si tres resistencias en un circuito eléctrico con resistencias de R_1, R_2 y R_3 ohmios, respectivamente, se hallan conectadas en paralelo, entonces la resistencia (en ohmios) de la combinación está dada por

$$\frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}.$$

Simplifique esta expresión fraccionaria.

66. **Óptica** En el campo de la óptica, si p es la distancia del objeto a la lente y q es la distancia de la imagen a la lente, entonces la longitud focal de la lente está dada por

$$\frac{1}{\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}}.$$

Simplifique esta expresión fraccionaria.

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Conjunto:
- subconjunto
- unión
- intersección
- disjunto

Números reales:
- número natural
- entero
- número racional
- número irracional
- número negativo
- número no negativo
- número positivo

Identidad multiplicativa

Recíproco

Propiedad distributiva

Recta de los números reales:
- origen
- coordenada

Expresión algebraica

Relaciones de orden:
- menor que
- menor o igual que
- mayor que
- mayor o igual que

Valor absoluto

Desigualdad triangular

Distancia en la recta numérica

Punto medio de un segmento de recta

Leyes de los exponentes

Exponente:
- base
- notación científica

Radical:
- raíz cuadrada
- raíz cúbica
- raíz *n*-ésima

Racionalización del denominador

Polinomio en una variable:
- monomio
- binomio
- trinomio
- coeficiente
- grado
- término
- coeficiente principal
- término constante

Factorización completa

Expresión racional:
- dominio
- numerador
- denominador

Polinomio en dos variables

Mínimo común denominador

CAPÍTULO 2 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

A. Verdadero/Falso

En los problemas 1 a 26, conteste verdadero o falso.

1. -3.3 es mayor que -3. ______
2. Todo número real tiene recíproco. ______
3. 0/0 es un número real. ______
4. π es un número racional. ______
5. Todo número real se puede escribir como cociente de dos enteros. ______
6. Ningún número irracional puede escribirse como una fracción. ______
7. $\sqrt{(-10)^2} = -10$ ______
8. $\sqrt{100} = \pm 10$ ______
9. Para $p > 0$, $\dfrac{p^{1/2}}{p^{-1/2}} = p$. ______
10. Si $x^{1/n} = r$, entonces $r^n = x$. ______
11. El MCD de $\dfrac{1}{(r+2)^2}$ y $\dfrac{1}{(r+3)^3(r+2)}$ es $(r+3)^3(r+2)^3$. ______
12. Para $a > 0$, $m \geq 2$ y $n \geq 2$ enteros positivos, $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$. ______
13. Para todo t, $\dfrac{t-1}{1-t} = -1$. ______
14. $(u^{-2} + v^{-2})^{-1} = u^2 + v^2$ ______
15. $\dfrac{x+y}{x} = y$ ______
16. $|-6x| = 6|x|$ ______
17. Si a y b son números reales, de modo que $a < b$, entonces $a^2 < b^2$. ______
18. Todo número real x posee un inverso multiplicativo. ______
19. La expresión algebraica $6x^{-2} + \sqrt{2}x$ no es un polinomio. ______
20. La raíz cúbica de un número negativo es indefinida. ______
21. $((x^{-1})^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ ______
22. $(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2$ ______
23. $\dfrac{2+3}{4+5} = \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{5}$ ______
24. $(-1)(-a+b-c) = a+b-c$ ______
25. La suma de dos números racionales es racional. ______
26. La suma de dos números irracionales es irracional. ______

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 22, llene los espacios en blanco.

1. Los primeros tres enteros no negativos son ____________________.
2. $-10(x-y) = -10x + 10y$ es un ejemplo de la ley de ______________.
3. El cociente C/d de la circunferencia de un círculo C y su diámetro d es un número ______________ (racional o irracional).
4. En la recta numérica, el ______________ del segmento que une -1 y 5 es 2.
5. En términos geométricos, $a < b$ significa que el punto correspondiente a a en la recta numérica se encuentra a la ______________ del punto que corresponde a b.
6. Si x es negativo, entonces $|x| =$ ______________.
7. El ______________ de $x \neq 0$ puede escribirse como $1/x$ o como x^{-1}.
8. Para $x \neq 0$, $x^0 =$ ______________.
9. Usando exponentes racionales, $\sqrt{x\sqrt{x}} = x$ __________.
10. El dominio de la variable x en $(3x+1)/(x^2-1)$ es ____ ______________.
11. La expresión $3x^4 - x^2 + 5x$ es un ______________ de grado ______________ con coeficiente principal ____ ______________ y término constante ____________ __________.
12. Cuando simplificamos $x(x+2)/((x-2)(x+2))$ a $x/(x-2)$, utilizamos la propiedad ______________.
13. La distancia de a a b está dada por ______________.
14. En la recta numérica, el valor absoluto de un número mide su distancia a ______________.
15. El número 4.2×10^{-5} está escrito en ______________.
16. Los números reales a y b para los cuales $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$ son ______________.
17. Se dice que los conjuntos $\{1, 3, 5\}$ y $\{2, 4\}$, que no tienen elementos comunes, son ______________.
18. En la recta de los números reales, si la distancia entre x y 7 es 3, entonces x es ______________.
19. En la expresión x^3, x se llama ______________ y 3 es el ______________.
20. La expresión $\sqrt[4]{x^2+y^2}$ es un ______________ de índice ______________.

21. Para los números reales x y y, $xy = yx$ es un ejemplo de la ley __________________ de la multiplicación.

22. Si $a < b$, entonces __________________ es positivo.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 a 6, halle el conjunto indicado si $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6, 8\}$.

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $(A \cup B) \cap C$
4. $(A \cap C) \cup B$
5. $(A \cup B) \cup C$
6. $(A \cap B) \cap C$

En los problemas 7 y 8 escriba la proposición dada como una desigualdad.

7. $x - y$ es mayor o igual a 10.
8. z es no negativo.

En los problemas 9 a 12, inserte el signo apropiado: $<$, $>$ o $=$.

9. $-1.4, -\sqrt{2}$
10. $0.50, \frac{1}{2}$
11. $\frac{2}{3}, 0.67$
12. $-0.9, -0.8$

En los problemas 13 a 18, halle el valor absoluto indicado.

13. $|\sqrt{8} - 3|$
14. $|-(\sqrt{15} - 4)|$
15. $|x^2 + 5|$
16. $\dfrac{|x|}{|-x|}, x \neq 0$
17. $|t + 5|$, si $t < -5$
18. $|r - s|$, si $r > s$

En los problemas 19 y 20 encuentre: *a*) la distancia entre los puntos dados y *b*) la coordenada del punto medio del segmento de recta que une los puntos dados.

19. $-3.5, 5.8$
20. $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

En los problemas 21 a 38, elimine los exponentes negativos y cero, y simplifique. Suponga que todas las variables son positivas.

21. $(3uv^2)(6u^2v^3)^2$
22. $\dfrac{4a^3b^2}{16ab^3}$
23. $\dfrac{(2x^{-4}y^2)^{-1}}{x^0y^{-1}}$
24. $\dfrac{2x^5y^{-3}z^2}{6x^3y^{-3}z^{-5}}$
25. $\left(\dfrac{-8c^3d^6}{c^{-9}d^{12}}\right)^{2/3}$
26. $\dfrac{s^{-1}t^{-1}}{s^{-1} + t^{-1}}$
27. $\dfrac{x^{1/3}y^{-2/3}}{x^{4/3}y^{-7/9}}$
28. $((81w^2z^{-1/2})^{-1})^{1/4}$
29. $\dfrac{\sqrt[3]{125}}{25^{-1/2}}$
30. $\sqrt{\dfrac{ab^2c^4}{a^2}}$
31. $\sqrt{\sqrt[3]{(x^3y^9)^2}}$
32. $\sqrt{125xy}\sqrt{5yz}\sqrt{xz}$
33. $\sqrt[3]{-(p^{-2}q^3)^3}$
34. $\sqrt{(x^2 + y^2)^2}$
35. $4\sqrt{xy} - \sqrt{\sqrt{x^2y^2}} + \sqrt{2xy}$
36. $\dfrac{\sqrt[3]{ab^3} - \sqrt[3]{b^4}}{b}$
37. $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$
38. $\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x\sqrt[4]{x}}}$

En los problemas 39 y 40, escriba el número en notación científica.

39. 0.0000007023
40. 158 000 000 000

En los problemas 41 y 42, use notación científica para determinar la expresión dada.

41. $\dfrac{(16\,000)(5\,000\,000)^2}{0.00008}$
42. $\sqrt{\dfrac{(0.0001)(480\,000)}{0.03}}$
43. Se estima que en 2009 los contribuyentes estadounidenses gastaron 52.67 miles de millones de dólares en la guerra contra las drogas. Escriba esta cifra *a*) en forma decimal y *b*) en notación científica.
44. Un nanosegundo es 0.000000001 segundo.
    a) Escriba 0.000000001 segundo en notación científica.
    b) ¿A cuántos nanosegundos es igual un segundo?

En los problemas 45 a 52, realice las operaciones indicadas y simplifique.

45. $(4x^3 - 3x^2 + 6x - 2) - (x^2 - 3x + 4)$
46. $(3x^4 - \sqrt{2}x^2) + x(\sqrt{2}x + 5)$

47. $(a + 1)(a - 2)(a + 3)$

48. $\dfrac{c^2d^2 - 3cd^3 + 5c^3d^2}{cd^2}$

49. $(3z^4 - 2z)^2$

50. $(x^2 + 2y)^3$

51. $(3x^2 + 5y)(3x^2 - 5y)$

52. $(u - v)(u^2 + uv + v^2)$

En los problemas 53 a 60, factorice los polinomios dados usando coeficientes enteros.

53. $12x^2 - 19x - 18$

54. $16a^4 - 81b^4$

55. $2xy + 3y - 6x - 9$

56. $4w^2 + 40wz + 100z^2$

57. $8x^3 - 125y^6$

58. $2x^3 + 3x^2 - 18x - 27$

59. $4t^4 - 4t^2s + s^2$

60. $125 + 75uv + 15u^2v^2 + u^3v^3$

En los problemas 61 a 72, realice las operaciones indicadas y simplifique.

61. $\dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{2}{x + 2} - \dfrac{1}{x^2 - 4}$

62. $\dfrac{x^2 - 1}{x} \div \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

63. $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x + y}\right)$

64. $(u^{-2} - v^{-2})(v - u)^{-1}$

65. $\dfrac{x + \dfrac{1}{x^2}}{x^2 + \dfrac{1}{x}}$

66. $\dfrac{\sqrt{c} + \dfrac{1}{d}}{d + \dfrac{1}{\sqrt{c}}}$

67. $\dfrac{\dfrac{r}{s} + 2}{\dfrac{s}{r} + 2}$

68. $\dfrac{1 + t^{-3}}{1 - t^{-3}}$

69. $\dfrac{\dfrac{4}{(x + h)^3} - \dfrac{4}{x^3}}{h}$

70. $\dfrac{\dfrac{1}{2(3 + h)^2} - \dfrac{1}{2(3)^2}}{h}$

71. $(8x)\left(\frac{1}{4}\right)(2x + 1)^{-3/4}(2) + (2x + 1)^{1/4}(8)$

72. $\dfrac{(x + 1)^{5/2}(3x^2) - (x^3)\left(\frac{5}{2}\right)(x + 1)^{3/2}}{[(x + 1)^{5/2}]^2}$

En los problemas 73 y 74, racionalice el denominador y simplifique.

73. $\dfrac{2}{\sqrt{s} + \sqrt{t}}$

74. $\dfrac{4}{\sqrt[5]{8}}$

En los problemas 75 y 76, racionalice el numerador y simplifique.

75. $\dfrac{\sqrt{2x + 2h + 3} - \sqrt{2x + 3}}{h}$

76. $\dfrac{\sqrt{(x + h)^2 - (x + h)} - \sqrt{x^2 - x}}{h}$

ECUACIONES Y DESIGUALDADES

3

En este capítulo

El automóvil Oldsmobile Limited Touring modelo 1911 se menciona en el problema 82 de los ejercicios de repaso del capítulo 1

Un poco de historia Poco se sabe de la vida personal del matemático griego **Diofanto**, que vivió en Alejandría, Egipto, en el siglo III de la era cristiana. Su trabajo, sin embargo, fue de enorme importancia para el desarrollo del álgebra e influyó profundamente en los matemáticos europeos del siglo XVII. Escribió varios tratados, de los cuales el más famoso es *Aritmética,* obra en 13 volúmenes. Esta serie de textos trata principalmente de tipos especiales de ecuaciones que en la actualidad se conocen como *ecuaciones diofánticas*. Cuenta la leyenda que sobre la tumba de Diofanto se inscribió este epitafio:

Diofanto vivió una sexta parte de su existencia en la niñez, una doceava parte en la juventud y una séptima parte estuvo soltero. Cinco años después de su matrimonio nació un hijo que murió cuatro años antes que su padre, cuando tenía la mitad de años que vivió su padre (la edad a la que Diofanto murió).

Si x representa la edad de Diofanto al morir, la información anterior se representa con la ecuación

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

En este capítulo estudiaremos técnicas para resolver varios tipos de ecuaciones (incluida la anterior) y desigualdades. Veremos también cómo aplicar los métodos estudiados para dar solución a problemas prácticos.

3.1 Ecuaciones

Introducción Una **ecuación** es una afirmación de que dos expresiones son iguales, en tanto que una **desigualdad** o **inecuación** plantea que una expresión es menor que otra. Una amplia gama de problemas de la vida real puede expresarse como ecuación o como desigualdad. Para empezar, en esta sección aprenderás cierta terminología que describe las ecuaciones y sus soluciones.

Terminología Cuando se igualan entre sí dos expresiones, y al menos una de ellas contiene una variable, entonces la proposición matemática es una **ecuación en una variable**. Por ejemplo,

$$\sqrt{x-1}=2, \qquad x^2-1=(x+1)(x-1) \qquad \text{y} \qquad |x+1|=5$$

son ecuaciones en la variable x. Una **solución** o **raíz** de una ecuación es cualquier número que, sustituido en ella, la convierte en una proposición verdadera. Se dice que un número **satisface una ecuación** si es una solución de la ecuación. **Resolver una ecuación** significa hallar todas sus soluciones.

EJEMPLO 1 Comprobación de una solución

El número 2 es una solución de $3x - 2 = x + 2$ porque cuando se sustituye en la ecuación obtenemos la proposición verdadera:

$$\overbrace{3(2)-2}^{\substack{\text{el lado izquierdo} \\ \text{es } 6-2=4}} = \overbrace{2+2}^{\substack{\text{el lado derecho} \\ \text{es } 2-2=4}}$$

Como veremos más adelante, no hay otros valores de x que satisfagan esta ecuación. ≡

Consulte la sección 2.6 para repasar el concepto *dominio de una variable.*

Una ecuación se llama **identidad** si todos los números del dominio de la variable la satisfacen. Si hay al menos un número en el dominio de la variable que *no* la satisfaga, entonces se dice que es una **ecuación condicional**.

EJEMPLO 2 Una identidad y una ecuación condicional

***a*)** La ecuación

$$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

se satisface con el conjunto de todos los números reales excepto $x = 1$. Como 1 no está en el dominio de la variable, la ecuación es una identidad.

***b*)** El número 3 está en el dominio de la variable en la ecuación $4x - 1 = 2$, pero no la satisface porque $4(3) - 1 \neq 2$. Así, $4x - 1 = 2$ es una ecuación condicional. ≡

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación se llama **conjunto solución**. En el ejemplo 1, el conjunto solución de $3x - 2 = x + 2$ se escribe $\{2\}$. Lo invitamos a comprobar que el conjunto solución de la ecuación $|x + 1| = 5$ es $\{-6, 4\}$.

Ecuaciones equivalentes Decimos que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones, es decir, si sus conjuntos solución son exactamente iguales. Por ejemplo,

$$2x - 1 = 0, \qquad 2x = 1 \qquad \text{y} \qquad x = \tfrac{1}{2}$$

son ecuaciones equivalentes. Generalmente, resolvemos una ecuación encontrando una ecuación equivalente que tenga soluciones que se determinen fácilmente. Las operaciones descritas a continuación producen ecuaciones equivalentes.

Teorema 3.1.1 Operaciones que producen ecuaciones equivalentes

i) Sume o reste en cada miembro o lado de una ecuación la misma expresión que represente un número real.
ii) Multiplique o divida cada miembro o lado de una ecuación por la misma expresión que represente un número real diferente de cero.

EJEMPLO 3 Una ecuación simple

Resuelva $3x - 18 = 0$.

Solución Obtenemos esta lista de ecuaciones equivalentes:

$$\begin{aligned} 3x - 18 &= 0 \\ 3x - 18 + 18 &= 0 + 18 && \leftarrow \text{por } i) \text{ del teorema 3.1.1} \\ 3x &= 18 \\ \tfrac{1}{3}(3x) &= \tfrac{1}{3}(18) && \leftarrow \text{por } ii) \text{ del teorema 3.1.1} \\ x &= 6. \end{aligned}$$

El conjunto solución de la ecuación es $\{6\}$. ≡

Como no es raro cometer errores aritméticos o algebraicos cuando se resuelve una ecuación, siempre conviene comprobar cada solución sustituyéndola en la ecuación original. Para comprobar la solución del ejemplo 3, se sustituye x con 6 en $3x - 18 = 0$:

Advertencia

$$\begin{aligned} 3(6) - 18 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 18 - 18 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Ecuaciones lineales Una ecuación de la forma

$$ax + b = 0, \quad \text{con } a \neq 0, \tag{1}$$

donde b es un número real, se llama **ecuación lineal**. La ecuación del ejemplo 3 es una ecuación lineal. Para resolver (1) procedemos de forma similar al ejemplo 3:

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax + b - b &= 0 - b && \leftarrow \text{por } i) \text{ del teorema 3.1.1} \\ ax &= -b \\ \frac{1}{a}(ax) &= \frac{1}{a}(-b) && \leftarrow \text{por } ii) \text{ del teorema 3.1.1} \\ x &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Así, la ecuación lineal $ax + b = 0$, con $a \neq 0$ tiene exactamente una solución: $\{-b/a\}$.

EJEMPLO 4 Una ecuación lineal

Resuelva $2x - 7 = 5x + 6$.

Solución Debe dar razones por las que las ecuaciones que siguen son equivalentes

$$\begin{aligned} 2x - 7 &= 5x + 6 \\ 2x - 7 - 5x &= 5x + 6 - 5x \\ -3x - 7 &= 6 \\ -3x - 7 + 7 &= 6 + 7 \\ -3x &= 13 \\ -\tfrac{1}{3}(-3x) &= -\tfrac{1}{3}(13) \\ x &= -\tfrac{13}{3}. \end{aligned}$$

Así, la solución de la ecuación original es $\{-13/3\}$. ≡

Soluciones extrañas Cuando los dos miembros de una ecuación se multiplican por una expresión que contiene una variable, la ecuación resultante puede *no* equivaler a la original, pues excluimos la multiplicación por 0 en la operación *ii*) del teorema 3.1.1. Por ejemplo, la multiplicación de la ecuación $2x = 4$ por x produce $2x^2 = 4x$. Las dos ecuaciones no son equivalentes, pues obviamente 0 es una solución de la última pero no lo es de la primera. Decimos entonces que 0 es una **solución extraña** de la ecuación original**.**

EJEMPLO 5 Multiplicación de una ecuación por una variable

Resuelva

$$2 - \frac{1}{z+1} = \frac{z}{z+1}. \tag{2}$$

Solución Al multiplicar los dos miembros de la ecuación por $z + 1$ se produce una ecuación lineal:

$$\begin{aligned} (z+1)\left(2 - \frac{1}{z+1}\right) &= \cancel{(z+1)} \cdot \frac{z}{\cancel{z+1}} &&\leftarrow \text{cancelar a la derecha} \\ (z+1)\cdot 2 - \cancel{(z+1)}\frac{1}{\cancel{z+1}} &= z &&\leftarrow \text{a la izquierda: leyes distributiva y de la cancelación} \\ 2z + 2 - 1 &= z &&\leftarrow \text{a la izquierda: ley distributiva de nuevo} \\ z &= -1. \end{aligned}$$

Como multiplicamos por una expresión que contiene una variable, debemos comprobar $z = -1$ sustituyéndola en la ecuación original (2). Obtenemos

$$2 + \frac{1}{-1+1} = \frac{-1}{-1+1} \qquad \text{o} \qquad 2 + \frac{1}{0} = \frac{-1}{0}.$$

Como la división entre 0 no está definida, $z = -1$ no es una solución de la ecuación original. Así, -1 es una solución extraña, y concluimos que la ecuación (2) no tiene soluciones, es decir, el conjunto solución es el conjunto vacío $\varnothing$. ≡

Advertencia ▶

Como se muestra en el ejemplo 5, es esencial comprobar una "solución" obtenida como resultado de multiplicar ambos miembros de una ecuación por una expresión que puede ser 0 para algunos valores de la variable.

EJEMPLO 6 Multiplicación de una ecuación por una variable

Resuelva

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} = \frac{2}{x^2 - 4x}. \tag{3}$$

Solución Para eliminar los denominadores en (3), multiplicamos ambos miembros por el MCD $x(x-4)$ de las fracciones en la ecuación:

$$x(x-4)\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}\right] = x(x-4)\left[\frac{2}{x^2-4x}\right]$$

$$\cancel{x}(x-4)\cdot\frac{1}{\cancel{x}} + x\cancel{(x-4)}\cdot\frac{1}{\cancel{x-4}} = \cancel{x(x-4)}\cdot\frac{2}{\cancel{x(x-4)}} \leftarrow \begin{cases}\text{leyes distributiva}\\ \text{y de la cancelación}\end{cases}$$

$$(x-4)+x = 2$$
$$2x = 6$$
$$x = 3.$$

Al sustituir $x = 3$ en (3), encontramos que este valor satisface la ecuación original:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3-4} \stackrel{?}{=} \frac{2}{3^2-4\cdot 3}$$
$$-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

de modo que el conjunto solución es $\{3\}$. ≡

■ **Resolución de una variable** Empecemos por indicar que a menudo a **resolver una variable** se le denomina también **despejar una variable**. En otros cursos, en especial en física, encontrará ecuaciones que contienen varias variables. Con frecuencia hay que resolver o despejar una variable determinada en términos de las restantes. En el ejemplo siguiente se ilustra esta idea.

EJEMPLO 7 Resolución de otra variable

La resistencia total R de un circuito eléctrico que contiene dos resistores, de resistencia R_1 y R_2, conectados en paralelo (véase la figura 3.1.1) se obtiene con

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}.$$

Resuelva R_2 en términos de R y R_1.

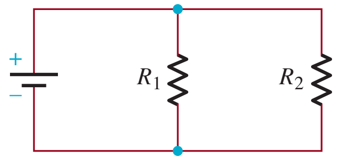


FIGURA 3.1.1 Circuito eléctrico del ejemplo 7

Solución Primero, para eliminar las fracciones de la ecuación, multiplicamos sus dos miembros por la cantidad RR_1R_2, que es el mínimo común denominador de las fracciones de la ecuación:

$$RR_1R_2\cdot\left(\frac{1}{R}\right) = RR_1R_2\cdot\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\cancel{R}R_1R_2\cdot\frac{1}{\cancel{R}} = R\cancel{R_1}R_2\cdot\frac{1}{\cancel{R_1}} + RR_1\cancel{R_2}\cdot\frac{1}{\cancel{R_2}} \leftarrow \begin{matrix}\text{leyes distributiva}\\ \text{y de la cancelación}\end{matrix}$$

$$R_1R_2 = RR_2 + RR_1.$$

Para obtener una ecuación equivalente con todos los términos que contengan R_2 del lado izquierdo, restamos RR_2 de ambos miembros de la ecuación:

$$R_1R_2 - RR_2 = RR_1.$$

Puesto que R_2 es factor común de cada término del miembro izquierdo, escribimos:

$$R_2(R_1 - R) = RR_1.$$

Dividimos ambos lados entre $R_1 - R$ para obtener el resultado deseado:

$$R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}.$$ ≡

3.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas 1 a 6, determine si los pares dados de ecuaciones son equivalentes.

1. $x = 8; \quad x - 8 = 0$

2. $x^2 = x; \quad x = 1$

3. $4y - (y - 1) = 2; \quad 3y = 1$

4. $-2z - 4 = 6z + 10; \quad -4z = 7$

5. $t + 1 = 1; \quad \dfrac{t+1}{t} = \dfrac{1}{t}$

6. $x^2 = (x + 1)^2; \quad 2x + 1 = 0$

En los problemas 7 a 48, resuelva la ecuación dada.

7. $2x + 14 = 0$

8. $3x - 5 = 0$

9. $-5w + 1 = 2$

10. $7z + 8 = -6$

11. $7(y + 1) - 2 = 5(y + 1) + 2$

12. $3y - 2 = y + 6$

13. $x - (2 - x) = 3(x + 1) + x$

14. $[2x - 2(x - 1)]5 = 4 - x$

15. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$

16. $\frac{2}{5}x + \frac{1}{5} = -1$

17. $-5t + 3 = 4(t - 6)$

18. $\frac{1}{3}(t - 2) + \frac{2}{3}t = 2t + \frac{4}{3}$

19. $\frac{1}{2}(u - 3) = 2u - \frac{3}{2}$

20. $\frac{1}{4}s + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}s$

21. $0.2x + 1.2 = 0.5$

22. $2.1x - 3 = 0.5x + 0.2$

23. $-3.6z + 1.3 = 0.2(z - 3)$

24. $4.5x - 1.5x = 0.3(2 - x)$

25. $\sqrt{2}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}x$

26. $\dfrac{-2x}{\sqrt{3}} + 1 = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}x$

27. $p^2 + 6p - 1 = p^2 - p + 6$

28. $r^2 + 5 = -(10r - r^2)$

29. $(2t - 1)^2 = 4t^2 + 1$

30. $(w - 1)(w + 1) = w(w - 4)$

31. $(x - 1)^3 = x^2(x - 3) + x$

32. $(x + 3)^2 + (x + 2)^3 = x^3 + 7x^2 + 9$

33. $2 + \dfrac{1}{x} = 3 + \dfrac{2}{x}$

34. $\dfrac{2}{t} - 1 = 5 - \dfrac{1}{t}$

35. $\dfrac{1}{s - 1} = \dfrac{2}{s + 1}$

36. $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{3}{4 - x} = 0$

37. $\dfrac{1}{y - 2} = \dfrac{2y + 1}{y^2 - 4}$

38. $\dfrac{x}{x - 5} = 2 + \dfrac{5}{x - 5}$

39. $\dfrac{2x}{x - 2} - 2 = \dfrac{-4}{2 - x}$

40. $\dfrac{3 - z}{z - 2} = \dfrac{z}{z + 2} - 2$

41. $\dfrac{3}{x + 5} - \dfrac{1}{x - 2} = \dfrac{7}{x^2 + 3x - 10}$

42. $\dfrac{3}{x + 1} + \dfrac{4}{x^2 - 1} = \dfrac{2}{x - 1}$

43. $\dfrac{q}{q - 3} - \dfrac{6}{q^2 - 2q - 3} = 1$

44. $\dfrac{6}{3w + 9} - \dfrac{4}{2w + 6} = 0$

45. $\dfrac{3x}{x - 2} = \dfrac{6}{x - 2} + 1$

46. $\dfrac{x^2 + 3}{x - 3} - \dfrac{x + 6}{3 - x} = 1$

47. $\dfrac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \dfrac{12}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$

48. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

49. Halle a de manera que la solución de $3x + 3a = 6x - a$ sea 4.

50. Halle d de modo que la ecuación

$$\frac{2x - 1}{x + 2} - \frac{x + d}{x + 2} = 0$$

no tenga soluciones.

51. Halle c de modo que $3(y - c) = 3y + 7$ sea una identidad.

52. Halle a de manera que $(x - 1)(x + a) = x^2 - 2x - a$ sea una identidad.

53. Halle a de modo que $5 - z = 1$ y $3z + 2a = 10$ sean ecuaciones equivalentes.

54. Halle la relación entre a y b si $ax + b = 0$ tiene la solución $x = 5$.

En los problemas 55 a 66, resuelva para la variable indicada en términos de las variables restantes.

55. Circunferencia de un círculo:

$$C = 2\pi r, \quad \text{para } r$$

56. Perímetro de un rectángulo:

$$P = 2w + 2l, \quad \text{para } l$$

57. Interés simple:

$$I = Prt, \quad \text{para } t$$

58. Área superficial lateral de un cilindro:

$$S = 2\pi rh, \quad \text{para } h$$

59. Cantidad acumulada por interés simple:

$$A = P + Prt, \quad \text{para } P$$

60. Volumen de paralelepípedo rectangular:

$$V = lwh, \quad \text{para } h$$

61. Término n-ésimo de una sucesión aritmética:

$$a_n = a + (n - 1)d, \quad \text{para } n$$

62. Suma de una serie geométrica:

$$S = \frac{a}{1 - r}, \quad \text{para } r$$

63. Ley de la gravitación universal de Newton:

$$F = g\frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad \text{para } m_1$$

64. Cuerpo en caída libre:

$$s = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t, \quad \text{para } v_0$$

65. Resistencia en un circuito paralelo:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad \text{para } R_2$$

66. Superficie de un cilindro:

$$A = 2\pi r(r + h), \quad \text{para } h$$

Aplicaciones diversas

67. Temperatura La relación entre la temperatura medida en grados Celsius (T_C) y en grados Fahrenheit (T_F) está dada por $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$.

a) Resuelva la última ecuación para T_F.

b) Con el resultado del inciso *a*), convierta las temperaturas -5 °C, 0 °C, 16 °C, 35 °C y 100 °C en grados Fahrenheit.

68. ¿Alguien quiere jugar tenis? La velocidad v en pies/segundo de una pelota de tenis t segundos después de que se lanzó hacia arriba con una velocidad inicial de 8 pie/s está dada por $v = -32t + 8$. ¿Cuántos segundos han transcurrido cuando *a*) $v = 4$ pies/s y *b*) $v = 0$ pies/s?

69. Edad de Diofanto Al empezar el capítulo vimos que la ecuación

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

indicaba la edad x de Diofanto cuando murió. Determine cuántos años vivió Diofanto.

70. Ritmo cardiaco Como informó Thomas Vaughan en *Science and Sport* (Boston: Little & Brown, 1970), una serie de 4 200 medidas tomadas a 136 atletas mundiales se convirtieron en la fórmula para la velocidad máxima del corazón $l_{\text{máx}}$ en latidos por minuto durante el ejercicio.

$$l_{\text{máx}} = 0.981 l_5 + 5.948$$

donde l_5 es el ritmo cardiaco tomado a los cinco segundos posteriores a la conclusión del ejercicio.

a) El ritmo cardiaco máximo de un campeón de atletismo es de 215. Halle el ritmo cardiaco inmediatamente después del ejercicio.

b) El ritmo máximo del corazón de un ciclista internacional es de 180. Halle el ritmo cardiaco inmediatamente después del ejercicio.

71. Gas ideal Para un gas ideal a baja presión, el volumen V a T grados Celsius está dado por

$$V = V_0\left(1 + \frac{T}{273.15}\right),$$

donde V_0 es el volumen a 0° C. ¿A qué temperatura es $V = \frac{3}{4}V_0$ para un gas ideal a baja presión?

72. **Nieve** Estudios empíricos sobre la caída de nieve en Gran Bretaña determinaron que el número de días D en un año en que el suelo está cubierto de nieve aumenta linealmente con la altitud

$$D = 0.155H + 11$$

donde H es la altura medida en metros.

a) Según esta fórmula, ¿cuántos días hay una capa de nieve en el nivel del mar?

b) ¿A qué altura esta fórmula predice una capa de nieve durante un año completo (365 días)?

Para la discusión

73. Señale el error en el razonamiento siguiente:

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ x^2 + x &= x^2 - 1 \\ x(x + 1) &= (x - 1)(x + 1) \\ x &= x - 1 \\ 0 &= -1. \end{aligned}$$

74. Considere esta serie de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= x^2 + 4x - 5 \\ (x + 1)(x - 1) &= (x + 5)(x - 1) \\ x + 1 &= x + 5 \\ 1 &= 5. \end{aligned}$$

a) ¿Cuál es la solución de la primera ecuación de la serie?

b) Halle una ecuación en la serie que no sea equivalente a la ecuación que la antecede.

3.2 Traducción de palabras en una ecuación

Introducción El álgebra es útil para resolver muchos problemas prácticos, por ejemplo, de razón de cambio, mezclas, dinero, etcétera. Como estos problemas se expresan con palabras, la idea básica consiste en traducir éstas para construir una ecuación algebraica apropiada. Como no hay un procedimiento único para hacer esta traducción, se requiere trabajo, práctica y paciencia para adquirir pericia en la resolución de problemas de esta clase. Las sugerencias siguientes resultan útiles.

SUGERENCIAS PARA CONSTRUIR UNA ECUACIÓN

i) Lea el problema cuidadosamente.

ii) Lea de nuevo el problema e identifique una cantidad desconocida que se necesite hallar.

iii) Si es posible, trace un diagrama.

iv) Asigne una variable, digamos x, que represente la cantidad desconocida. Escriba la definición de esta variable en una hoja.

v) Si es posible, represente cualquier otra cantidad que haya en el problema en términos de x.

vi) Escriba una ecuación que exprese con precisión la relación descrita en el problema.

vii) Resuelva la ecuación.

viii) Compruebe que su respuesta concuerde con todas las condiciones planteadas en el problema.

Problemas de edad El primer ejemplo se relaciona con la edad.

EJEMPLO 1 Problema de edad

Hace dos años John tenía cinco veces la edad de Bill. Ahora es 8 años mayor que él. Encuentre la edad actual de John.

Solución La cantidad desconocida por determinar es la edad actual de John, entonces asignamos

$$x = \text{edad actual de John}$$

Luego representamos las otras cantidades del problema en términos de x:

$$x - 8 = \text{edad actual de Bill}$$

$$x - 2 = \text{edad de John hace dos años}$$

$$(x - 8) - 2 = x - 10 = \text{edad de Bill hace dos años}$$

Quizá resulte útil presentar la información en una tabla como ésta:

	Edad actual	Edad hace dos años
John	x	$x - 2$
Bill	$x - 8$	$x - 10$

Una ecuación que expresa la relación de sus edades hace dos años es

$$x - 2 = 5(x - 10)$$

Resolvemos esta ecuación:

$$\begin{aligned} x - 2 &= 5x - 50 \\ 48 &= 4x \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Entonces, la edad actual de John es 12.

Comprobación si John tiene ahora 12 años, Bill debe tener 4. Hace dos años John tenía 10 y Bill 2. Como $10 = 5(2)$, la respuesta es correcta. ≡

■ Problemas de inversión Muchos **problemas de inversión** utilizan la fórmula del interés simple

$$I = Crt, \tag{1}$$

donde I es la cantidad de interés ganada por una suma de dinero C (llamada *capital*) invertida a una tasa de interés simple de porcentaje r durante t años. Como se muestra el ejemplo 2, resulta útil organizar los datos en una tabla.

EJEMPLO 2 Interés simple

Una empresaria planea invertir un total de 30 000 dólares. Parte de esta suma se invertirá en un certificado de depósito que paga 3% de interés simple y el resto en un fondo de inversión que produce 5.5% de interés simple. ¿Cuánto debe invertir en cada uno para obtener un rendimiento de 4% sobre su dinero después de un año?

Solución En (1) identificamos $r = 0.03$ y $t = 1$. Si x representa la cantidad (en dólares) invertida en el depósito, entonces

$$30\,000 - x = \text{cantidad en dólares invertida en el fondo de inversión}$$

En la tabla siguiente se resume la información.

	Capital C	Tasa de interés r	Tiempo t	Interés ganado $I = Crt$
Certificado de depósito	x	0.03	1 año	$x(0.03)(1) = 0.03x$
Fondo de inversión	$30\,000 - x$	0.055	1 año	$(30\,000 - x)(0.055)(1) = 0.055(30\,000 - x)$
Inversión equivalente	30 000	0.04	1 año	$(30\,000)(0.04)(1) = 1\,200$

Como el interés combinado procedente del certificado de depósito y el fondo de inversión va a igualar el de una inversión total equivalente hecha a 4% de interés simple, tenemos

$$0.03x + (0.055)(30\,000 - x) = 1\,200$$

Empezamos a resolver esta ecuación multiplicándola por 100:

$$\begin{aligned} 3x + (5.5)(30\,000 - x) &= 100(1\,200) \\ 3x + 165\,000 - 5.5x &= 120\,000 \\ -2.5x &= -45\,000 \\ x &= 18\,000 \end{aligned}$$

Se deben invertir 18 000 dólares en el certificado de depósito y 30 000 − 18 000 = 12 000 en el fondo de inversión.

Comprobación la suma de \$18 000 y \$12 000 es \$30 000. El interés ganado sobre el certificado de depósito es de (\$18 000)(0.03)(1) = \$540. El interés ganado sobre el fondo de inversión es de (\$12 000)(0.055)(1) = \$660. Si los \$30 000 se invirtieron a 4%, el interés ganado sería (\$30 000)(0.04)(1) = \$1 200. Como \$540 + \$660 = \$1 200, la respuesta es correcta. ≡

Problemas de velocidad Si un objeto se mueve a una velocidad constante r, entonces la distancia d que recorre en t unidades de tiempo se obtiene con la fórmula distancia = velocidad × tiempo, que expresada en símbolos es

$$d = rt \tag{2}$$

Otras formas de (2) que pueden ser útiles al resolver ciertos problemas de velocidad son

$$r = \frac{d}{t} \quad \text{y} \quad t = \frac{d}{r}. \tag{3}$$

Comúnmente, la parte más difícil de resolver en un problema de distancia es determinar qué relación expresar como ecuación. Puede ser útil considerar las preguntas siguientes:

- ¿Hay dos distancias (o tiempos o velocidades) que sean iguales?
- ¿Es la suma de dos distancias (o tiempos o velocidades) una constante?
- ¿Es la diferencia de dos distancias (o tiempos o velocidades) una constante?

En el ejemplo siguiente se emplea la segunda ecuación en (3).

EJEMPLO 3 Problema de velocidad

Una motociclista tarda 1 hora y 30 minutos más en la noche que en el día viajar entre dos ciudades. En la noche recorre un promedio de 40 millas por hora en tanto que en el día puede recorrer un promedio de 55 millas por hora. Encuentre la distancia entre las dos ciudades.

Solución Asignemos d a la distancia entre las dos ciudades. En la tabla siguiente se muestra la distancia, la velocidad y el tiempo de cada viaje.

	Distancia	Velocidad	Tiempo
Noche	d	40	$\frac{d}{40}$
Día	d	55	$\frac{d}{55}$

Como se tarda 1.5 horas más recorrer la distancia entre las dos ciudades en la noche, tenemos

$$\frac{d}{40} - \frac{d}{55} = 1.5.$$

Multiplicamos ambos miembros de esta ecuación por $(40)(55) = 2\,200$ y resolvemos:

$$\begin{aligned} 55d - 40d &= 3\,300 \\ 15d &= 3\,300 \\ d &= 220 \end{aligned}$$

La distancia entre las dos ciudades es de 220 millas.

Comprobación el tiempo en la noche es de $220/40 = 5.5$ horas; por su parte, durante el día es $220/55 = 4$ horas. Como $5.5 - 4 = 1.5$, la respuesta es correcta. ≡

■ **Problemas de mezclas** Este tipo de problemas se presentan sobre todo en química, farmacología, manufactura y situaciones de la vida diaria. Al resolver problemas de mezclas, nos centramos en la cantidad de un elemento que hay en cada una de las diferentes combinaciones. De nuevo, resulta útil organizar la información en una tabla, como en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Problema de mezclas

Halle cuántos litros de alcohol puro deben añadirse a 15 l de solución que contiene 20% de alcohol para que la mezcla resultante sea de 30% de alcohol.

Solución Si x representa la cantidad de alcohol puro añadida, entonces

$$15 + x = \text{cantidad en litros en la nueva solución}$$

En la tabla siguiente se resume la información dada:

	Litros de solución	Concentración de alcohol	Litros de alcohol
Solución original	15	0.20	0.20(15)
Alcohol puro	x	1.00	$1.00x$
Mezcla resultante	$15 + x$	0.30	$0.30(15 + x)$

Como la cantidad de alcohol en la solución original más la cantidad de alcohol puro añadida es igual a la cantidad de alcohol en la mezcla resultante, tenemos:

$$\begin{aligned} 0.20(15) + 1.00x &= 0.30(15 + x) \\ 3 + x &= 4.5 + 0.3x \\ 0.7x &= 1.5 \\ x &= \tfrac{15}{7}. \end{aligned}$$

La cantidad de alcohol puro añadida es $\frac{15}{7}$ l.

Comprobación si se agregan $\frac{15}{7}$ l de alcohol, la nueva solución, que suma $15 + \frac{15}{7} = \frac{120}{7}$ l, contiene $(0.20)(15) + \frac{15}{7} = \frac{36}{7}$ l de alcohol. Como $\frac{36}{7}\big/\frac{120}{7} = 0$, la nueva solución es de 30% de alcohol y la respuesta es correcta. ≡

Problemas de trabajo Varias personas (o máquinas) que hacen el mismo trabajo, cada una a velocidad constante, completan la labor más rápido que si trabajaran solas. Entonces, para resolver **problemas de trabajo** utilizamos el principio básico siguiente:

Si un individuo puede hacer todo el trabajo en T unidades de tiempo, entonces en x unidades de tiempo se termina una parte x/T del trabajo. (4)

Por ejemplo, si una persona puede hacer un trabajo completo en 5 horas, entonces en 3 horas termina $\frac{3}{5}$ del trabajo.

EJEMPLO 5 Problema de trabajo

Trabajando sola, la bomba A llena un tanque en 2 horas y la bomba B llena el mismo tanque en 3. Determine la rapidez con que las bombas llenarían el tanque trabajando juntas.

Solución Si asignamos a x el número de horas que ambas bombas requieren para llenar el tanque juntas, entonces

$$\frac{x}{2} = \text{fracción del trabajo completo culminado en } x \text{ horas por una bomba } A$$

y

$$\frac{x}{3} = \text{fracción de todo el trabajo culminado en } x \text{ horas por una bomba } B$$

Esta información se sintetiza en la tabla siguiente.

	Tiempo (en horas) para completar todo el trabajo	Fracción de trabajo completado en x horas
Bomba A	2	$\frac{x}{2}$
Bomba B	3	$\frac{x}{3}$
Ambas	x	1

La suma de las fracciones hechas por cada bomba en x horas es 1, pues las dos bombas, al trabajar juntas, terminan todo el trabajo en x horas. Entonces tenemos

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1.$$

Comenzamos por multiplicar la ecuación por el mínimo común denominador de las fracciones. Luego, al resolver para x hallamos que

$$\begin{aligned} 3x + 2x &= 6 \\ 5x &= 6 \\ x &= \tfrac{6}{5}. \end{aligned}$$

Juntas, ambas bombas tardan $\frac{6}{5}$ horas $= 1.2$ h (o 1 hora y 12 minutos) en llenar el tanque.

Comprobación En $\frac{6}{5}$ horas la bomba A llena $\frac{6}{5}/2 = \frac{3}{5}$ de tanque, en tanto que la bomba B llena $\frac{6}{5}/3 = \frac{2}{5}$ de tanque. Como $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$, la solución es correcta. ≡

Problemas diversos Además de los problemas de edad, inversión, velocidad, mezclas y trabajo que acabamos de considerar, hay una gran variedad de problemas que se expresan en palabras. Terminamos esta sección con dos ejemplos adicionales.

EJEMPLO 6 Problema de lindes

Un campo rectangular 20 m más largo que ancho está circundado por exactamente 100 m de cerca. ¿Cuáles son las dimensiones del campo?

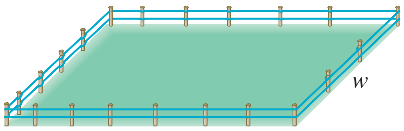


FIGURA 3.2.1 Campo del ejemplo 6

Solución La descripción geométrica de este problema nos obliga a trazar un diagrama (figura 3.2.1). Si asignamos w al ancho del campo en metros, entonces

$$w + 20 = \text{largo del campo en metros}$$

Como el perímetro del campo es de 100 m, tenemos

$$100 = \overbrace{w + w}^{\text{dos anchos}} + \overbrace{(w + 20) + (w + 20)}^{\text{dos largos}}$$

o bien,

$$100 = 2w + 2(w + 20)$$

Despejamos w y encontramos que

$$\begin{aligned} 100 &= 4w + 40 \\ 60 &= 4w \\ 15 &= w \end{aligned}$$

Así, el ancho es $w = 15$ m y el largo es $w + 20 = 35$ m.

Comprobación El largo es de 20 m más que el ancho, pues $35 - 15 = 20$, y la cantidad de cercado requerida es $2(35) + 2(15) = 70 + 30 = 100$. Entonces, la respuesta es correcta. ≡

EJEMPLO 7 Mejora del promedio de calificaciones

Un estudiante obtiene 75 y 82 puntos en sus dos primeros exámenes. ¿Qué puntaje en el próximo examen elevará a 85 su promedio?

Solución Empezamos por hacer que x represente el puntaje en el futuro tercer examen. Luego, el promedio de los tres exámenes es

$$\frac{75 + 82 + x}{3}.$$

Como este promedio debe igualarse a 85, tenemos que

$$\frac{75 + 82 + x}{3} = 85.$$

Multiplicamos cada miembro de esta última ecuación por 3 y despejamos x:

$$\begin{aligned} 75 + 82 + x &= 3(85) \\ 157 + x &= 255 \\ x &= 98 \end{aligned}$$

Por tanto, un puntaje de 98 en el tercer examen elevará a 85 el promedio del estudiante.

Comprobación Si la puntuación obtenida en los tres exámenes es de 75, 82 y 98, respectivamente, el promedio del estudiante será

$$\frac{75 + 82 + 98}{3} = 85.$$

Por tanto, la respuesta es correcta. ≡

Notas del aula

Cuando empiece a hacer los ejercicios 3.2, recuerde las sugerencias dadas en la página 118. Leer y profundizar en los ejemplos de esta sección puede ayudarle y ofrecer pasos faltantes en las soluciones. Examine cómo seguimos nosotros las sugerencias. Y, sobre todo, no se desanime.

3.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas 1 a 46, construya y resuelva una ecuación a partir de las palabras dadas.

Problemas de números

1. Encuentre dos números enteros cuya suma sea 50 y cuya diferencia sea 26.

2. El cociente de dos números es 4. Un número es 39 menos que el otro. Halle los dos números.

3. Encuentre tres números enteros consecutivos cuya suma sea 48.

4. La diferencia de los cuadrados de dos números pares consecutivos es 92. Halle los dos números.

Problemas de edad

5. En 5 años Bryan tendrá tres veces la edad que tenía hace 7 años. ¿Cuántos años tiene?

6. La firma sanitaria Papik e Hijo anuncia "30 años de experiencia" en higiene sanitaria. Si el padre tiene 16 años más de experiencia en higiene sanitaria que su hijo, ¿cuánto tiempo de experiencia en higiene sanitaria tiene cada cual?

Problemas de inversión

7. Una pareja tiene 40 000 dólares para invertir. Si invierte \$16 000 a 12% y \$14 000 a 8%, ¿a qué porcentaje debe invertir el resto para tener un ingreso de 4 000 proveniente de sus inversiones?

8. Janette tiene tres inversiones, de las que recibe un ingreso anual de 2 780 dólares. Una inversión de \$7 000 está a una tasa de interés anual de 8%. Otra inversión de \$10 000 está a una tasa de interés anual de 9%. ¿Cuál es la tasa de interés anual que recibe sobre la tercera inversión de 12 000 dólares?

9. La señora Beecham invirtió parte de 10 000 dólares en un certificado de ahorros a 7% de interés simple. El resto lo invirtió en un título que producía 12%. Si recibió un total de 900 de interés por el primer año, ¿cuánto dinero invirtió en el título?

10. Los Wilson tienen 30 000 dólares invertidos a 12% y otra suma invertida a 8.5%. Si el ingreso anual sobre la cantidad total invertida equivale a un porcentaje de 10% sobre el total, ¿cuánto invirtieron a 8.5%?

Problemas de velocidad

11. Un auto viaja de A a B a una velocidad promedio de 55 mph, y regresa a una velocidad de 50 mph. En todo el viaje se lleva 7 horas. Halle la distancia entre A y B.

12. Un jet vuela con el viento a favor entre Los Ángeles y Chicago en 3.5 h, y contra el viento de Chicago a Los Ángeles en 4 h. La velocidad del avión sin viento es de 600 mi/h. Calcule la velocidad del viento. ¿Qué distancia hay entre Los Ángeles y Chicago?

13. Una mujer puede caminar al trabajo a una velocidad de 3 mph, o ir en bicicleta a 12 mph. Demora una hora más caminando que yendo en bicicleta. Encuentre el tiempo que se tarda en llegar al trabajo caminando.

14. Un niño sale del punto P en bicicleta y avanza a una velocidad de 15 km/h. Al cabo de treinta minutos otro niño sale del punto P en una bicicleta y avanza a diferente velocidad. Alcanza al primer ciclista $2\frac{1}{2}$ horas después. Calcule la velocidad del segundo ciclista.

15. Un hombre recorre 280 km en automóvil y luego recorre otros 50 km en bicicleta. El tiempo total del viaje fue de 12 h y la velocidad en la bicicleta fue de $\frac{1}{4}$ de la velocidad en automóvil. Calcule cada velocidad.

16. Un cohete llevó una cápsula a la atmósfera. La cápsula aterrizó 72 minutos más tarde, después de hacer un controlado descenso con una velocidad vertical promedio de 420 km/h. Si el cohete tenía una velocidad vertical promedio de 1 010 km/h desde el despegue hasta que se lanzó la cápsula, ¿a qué altura se lanzó la cápsula?

Problemas de mezclas

17. El radiador de un automóvil contiene 10 cuartos [de galón] de una mezcla de agua y 20% de anticongelante. ¿Qué cantidad de esta mezcla debe vaciarse y reemplazarse por anticongelante puro para obtener una mezcla de 50% en el radiador?

18. Una podadora de césped funciona con una mezcla de combustible compuesta por 23 partes de gasolina y 1 parte de petróleo. ¿Cuánta gasolina debe añadirse a un litro de una mezcla compuesta por 5 partes de gasolina y 1 parte de petróleo para obtener la mezcla correcta?

19. Cierta marca de tierra para macetas contiene 10% de humus y otra marca contiene 30%. ¿Cuánto de cada tierra debe mezclarse para producir 2 pies cúbicos de tierra para macetas compuesta por 25% de humus?

20. El jefe de una estación de servicio compró 15 000 galones de gasolina corriente y de primera calidad por 37 000 dólares. El precio mayorista fue de \$2.40 por galón para la gasolina corriente y \$2.60 por galón para la gasolina de primera calidad. Determine cuántos galones de cada clase de gasolina se compraron.

21. Un carnicero vende carne molida de res de cierta calidad a \$3.95 la libra y de otra calidad a \$4.20 la libra. Quiere mezclar las dos calidades para obtener una mezcla que se venda a \$4.15 la libra. ¿Qué porcentaje de carne de cada calidad debe usar?

Problemas de trabajo

22. Si Meagan puede completar una tarea en 50 minutos trabajando sola y Colleen puede hacerlo en 25 min, ¿cuánto tiempo tardarán trabajando juntas?

23. Si Karen puede recoger un sembradío de frambuesas en 6 horas y Stan puede hacerlo en 8 horas, ¿cuán rápido pueden recoger el sembradío juntos?

24. Con dos mangueras de distinto diámetro se llena una tina en 40 minutos. Una manguera llena la tina en 90 minutos. Determine en cuánto tiempo la llenaría la otra manguera.

25. Margot limpia su habitación en 50 minutos ella sola. Si Jeremy la ayuda, tarda 30 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará Jeremy en limpiar la habitación él solo?

26. Un tubo de escape puede vaciar un tanque en 4 horas. El tubo estuvo abierto durante 1.5 horas y luego fue cerrado. En ese momento se abrió un segundo tubo y tardó 2 horas en terminar de vaciar el tanque. ¿Cuánto tiempo le habría tomado al segundo tubo solo vaciar el tanque?

Problemas de dimensiones

27. El perímetro de un rectángulo es de 50 cm y el ancho es $\frac{2}{3}$ de la longitud. Encuentre las dimensiones del rectángulo.

28. El área de un trapecio es de 250 pies cuadrados y la altura es de 10 pies. ¿Cuál es la longitud de la base mayor si la base menor mide 20 pies?

29. El lado mayor de un triángulo es 2 cm más largo que el lado menor. El tercer lado tiene 5 cm menos que el doble de la longitud del lado menor. Si el perímetro es 21 cm, ¿cuál es la longitud de cada lado?

30. Un granjero desea encerrar un campo rectangular y dividirlo en tres partes iguales con cercado (véase la figura 3.2.2). Si la longitud del campo es tres veces el ancho y se requieren 1 000 metros de cercado, ¿cuáles son las dimensiones del campo?

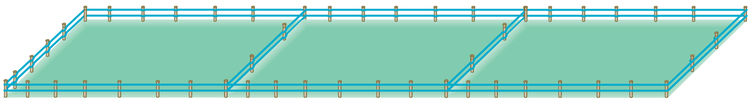


FIGURA 3.2.2 Campo cercado del problema 30

31. El área de un círculo es 80π cm^2 menor que el área de uno cuyo radio es 4 cm mayor. Encuentre el radio del círculo más pequeño.

Problemas diversos

32. **Dosis de un medicamento** La regla de Friend para convertir la dosis para adulto de un medicamento en una dosis infantil supone una relación entre la edad y la dosis y se emplea para niños menores de 2 años:

$$\frac{\text{edad en meses}}{150} \times \text{dosis para adultos} = \text{dosis infantil}.$$

¿A qué edad la dosis para adultos es 10 veces la dosis infantil?

33. Joshua se esfuerza por pasar de año Joshua presentó un examen. Si debe obtener 99 puntos en un segundo examen para tener un promedio de 73 en ambos exámenes, ¿cuánto obtuvo en el primero?

34. Intento para obtener 80 Antes del examen final un estudiante tiene calificaciones en las pruebas parciales de 72 y 86. Si el examen final representa la mitad de la calificación final, ¿qué calificación debe obtener en el examen este estudiante para terminar el curso con un promedio de 80?

35. Política de clase Judy venció a John en una rigurosa elección de presidente del salón de los de último año, donde se registraron 211 votos. Si cinco estudiantes hubieran votado por John en vez de Judy, John habría ganado por un voto; ¿cuántos estudiantes votaron por Judy?

36. ¿Cuántos…? En la escuela de la avenida Cayley, 40 alumnos más de la mitad son niños. Si la cantidad de niñas que van a la escuela es dos menos la mitad del número de niños, ¿cuántos alumnos asisten en total a la escuela?

37. Problema monetario Kurt tiene cuatro monedas más de 10 centavos que de 5 centavos. Si el valor total de estas monedas es de $2.35, halle cuántas monedas de 10 y de 5 centavos tiene Kurt.

38. Otro problema monetario Heidi tiene $4.65 en monedas de cinco, diez y veinticinco centavos. Tiene cuatro monedas más de veinticinco centavos que de diez centavos y cinco monedas más de cinco centavos que de veinticinco centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene Heidi?

39. Juego de números El dígito correspondiente a las unidades de un número de dos dígitos es cinco más que el dígito que corresponde a las decenas. Si el número original se divide por el número que se forma al invertir los dígitos del primero, el resultado es $\frac{3}{8}$. Halle el número original.

40. Más juegos de números El denominador de una fracción es dos más que el numerador. Si tanto el numerador como el denominador se aumentan en una unidad, la fracción resultante es igual a $\frac{2}{3}$. Encuentre el número original.

41. ¿Soborno? El señor Chaney y su hijo Ryan acordaron que el señor Chaney daría a Ryan 5 dólares por cada problema de palabras que Ryan resolviera correctamente, pero que éste pagaría a su padre 5 dólares por cada solución incorrecta. Después de que Ryan hubo completado 70 problemas, ninguno le debía nada al otro. ¿Cuántos problemas resolvió correctamente Ryan?

42. Obtener un aumento Un trabajador obtuvo 6% de aumento, lo que representa 480 dólares. ¿Cuál era el antiguo salario? ¿Cuál es el nuevo salario?

43. ¿Se paga solo? Una empresa de gas vende una manta aislante para un calentador de agua en $20. Asegura que la manta reduce los costos de combustible en 10%. Si el costo promedio mensual de combustible que consume el calentador de agua es de $20, ¿cuándo se "pagará sola" la manta?

44. Pago de impuestos En un banquete, el administrador de un restaurante alquila un bar con bebidas valuadas en cifras redondas para simplificar las transacciones. Se incluye 5% del impuesto de ventas en los precios redondeados. Al final del banquete, el administrador encuentra exactamente 200 dólares en la registradora. Sabe que 10 dólares son mucho dinero para el impuesto, pero es incapaz de deducir la cantidad correcta que se debe pagar.

a) Explique por qué 10 dólares son demasiado impuesto.

b) Halle la cantidad correcta de impuesto de venta (hasta el último centavo).

45. Empleado necesita más capacitación Para un descuento de 25% en las ventas, un tendero siempre calcula primero el descuento y luego añade 6% del impuesto de ventas. Otro empleado en el mismo almacén siempre añade primero el impuesto de ventas y luego aplica el descuento.

a) ¿Hay alguna diferencia?

b) ¿Puede demostrar que éste siempre es el caso para cualquier descuento *d*% y cualquier impuesto de venta *t*%?

46. Plantas competidoras Dos plantas industriales que producen componentes idénticos de maquinaria están localizadas a 100 millas sobre el río Watchacallit (figura 3.2.3). Ambas plantas venden componentes al mismo precio, $150 dólares. Sin embargo, como una planta está río arriba, sus costos de embarque son más bajos para los clientes ubicados en medio de las dos plantas: 30 centavos por milla por componente en vez de 75 centavos por milla.

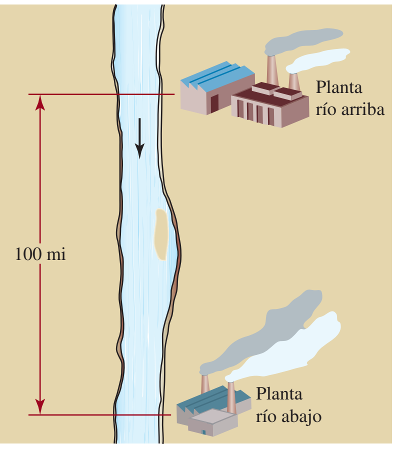


FIGURA 3.2.3 Plantas industriales del problema 46

a) Supón que un cliente comprará a la planta que ofrezca el costo total más bajo. ¿A qué distancia río arriba tendrá clientes la planta de río abajo?

b) ¿Cómo cambia su respuesta del inciso *a*) si las dos plantas elevan el precio de sus componentes de 150 a 160 dólares?

c) ¿Cómo cambia su respuesta del inciso *a*) si los costos de embarque se duplican?

d) ¿Qué precio de venta tendría que ofrecer la planta de río abajo para recuperar la mitad del territorio entre las dos plantas?

3.3 Ecuaciones cuadráticas

Introducción En la sección 3.1 vimos que una **ecuación lineal** es la que puede escribirse en la forma estándar $ax + b = 0$, con $a \neq 0$. La ecuación $ax + b = 0$, con $a \neq 0$, es un tipo especial de ecuación polinomial. Una **ecuación polinomial de grado *n*** es una ecuación de la forma

Repase la definición de polinomio en la sección 2.6.

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \text{ con } a_n \neq 0, \tag{1}$$

donde n es un número entero no negativo y a_i, $i = 0, 1\ldots n$, son números reales. Una ecuación lineal corresponde al grado $n = 1$ en la ecuación (1). Salvo por los símbolos, que son diferentes, $ax + b$ es lo mismo que $a_1x + a_0$.

La solución de una ecuación polinomial se llama **raíz** de la ecuación. Por ejemplo, sabemos que $-b/a$ es la única raíz de la ecuación polinomial lineal de primer grado $ax + b = 0$.

En esta sección examinamos las ecuaciones polinomiales de segundo grado o **ecuaciones cuadráticas.** Una ecuación cuadrática es una ecuación polinomial que puede escribirse en la **forma estándar**:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{con } a \neq 0 \tag{2}$$

Las ecuaciones polinomiales de más alto grado se estudiarán en el capítulo 6.

Muchos problemas sobre objetos en movimiento implican ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, si se lanza un globo de agua con una velocidad inicial de 48 pies/s directamente hacia abajo desde una ventana de un dormitorio 64 pies arriba del suelo, la altura s (en pies) arriba del suelo después de t segundos está dada por

$$s = -16t^2 - 48t + 64$$

Cuando el globo golpea el suelo, su altura s es igual a 0, por lo que hallamos el tiempo transcurrido al solucionar

$$-16t^2 - 48t + 64 = 0$$

Al dividir entre -16, esta ecuación equivale a

$$t^2 + 3t - 4 = 0 \tag{3}$$

Método de factorización Como veremos, la ecuación (3) se resuelve fácilmente por medio del **método de factorización**. Este método se basa en la **propiedad de la multiplicación por cero** que se expuso en la sección 2.1. Recuerde: si a y b representan números reales y $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. La técnica se ilustra en el ejemplo que sigue.

Véase la sección 2.7.

Véase la propiedad 8*ii*) en la sección 2.1.

EJEMPLO 1 Solución por factorización

Resuelva $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Solución La ecuación ya está en la forma estándar. Al factorizar su miembro izquierdo obtenemos la ecuación equivalente

$$(x + 3)(2x - 1) = 0$$

Si aplicamos la propiedad de la multiplicación por cero concluimos que

$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 1 = 0$$

Las soluciones de estas ecuaciones lineales son $x = -3$ y $x = \frac{1}{2}$, respectivamente. El hecho de que éstas sean raíces de la ecuación dada puede comprobarse por sustitución. El conjunto solución es $\{-3, \frac{1}{2}\}$. ≡

Ahora podemos resolver fácilmente la ecuación (3) para hallar el tiempo que tarda el globo en llegar al suelo. Primero escribimos $t^2 + 3t - 4 = 0$ en su forma factorizada:

$$(t + 4)(t - 1) = 0$$

Según la propiedad de la multiplicación por cero, debemos resolver $t + 4 = 0$ y $t - 1 = 0$. Las soluciones de estas ecuaciones son $t = -4$ y $t = 1$. Por sustitución, podemos comprobar que tanto $t = -4$ como $t = 1$ satisfacen la ecuación cuadrática $-16t^2 - 48t + 64 = 0$. Como $t = 1$ segundo es la única respuesta positiva, es la única solución significativa al problema físico.

Como se ve en el ejemplo del globo de agua, no todas las soluciones de una ecuación necesariamente satisfarán las condiciones que requiere el problema.

EJEMPLO 2 Solución por factorización

Resuelva $12x^2 + 15x = 18$.

Solución Como planeamos usar el método de factorización, debemos empezar por escribir la ecuación en la forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$:

$$12x^2 + 15x - 18 = 0$$

Al eliminar el factor común 3 por división se simplifica la ecuación

$$3(4x^2 + 5x - 6) = 0$$

a

$$4x^2 + 5x - 6 = 0$$

Así, la factorización da

$$(4x - 3)(x + 2) = 0$$

Mediante la propiedad de la multiplicación por cero, igualamos cada factor a cero para obtener $4x - 3 = 0$ y $x + 2 = 0$. Al resolver cada una de estas dos ecuaciones resulta $x = \frac{3}{4}$ y $x = -2$. Las raíces de la ecuación cuadrática son $\frac{3}{4}$ y -2; el conjunto solución es $\{-2, \frac{3}{4}\}$. ≡

EJEMPLO 3 Solución por factorización

Resuelva $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

Solución El miembro izquierdo de la ecuación se factoriza fácilmente así:

$$(2x + 1)(2x + 1) = 0$$

Por tanto, $x = -\frac{1}{2}$ o $x = -\frac{1}{2}$. El conjunto solución es $\{-\frac{1}{2}\}$. ≡

En el ejemplo 3 decimos que $x = -\frac{1}{2}$ es una **raíz repetida** o una **raíz de multiplicidad 2.** Al contar las raíces, dichas raíces deben contarse dos veces.

Método de la raíz cuadrada Si una ecuación cuadrática tiene la forma especial

$$x^2 = d, \quad \text{con } d \geq 0, \tag{4}$$

la resolvemos factorizando:

$$\begin{aligned} x^2 - d &= 0 \quad \leftarrow \text{diferencia de dos cuadrados; véase la sección 2.7.} \\ (x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) &= 0, \end{aligned}$$

lo que da por resultado $x = \sqrt{d}$ o $x = -\sqrt{d}$. Otro método para resolver la ecuación (4) es obtener la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación. Esto se resume como el **método de raíz cuadrada**:

- Si $x^2 = d$, con $d \geq 0$, entonces $x = \pm\sqrt{d}$.

EJEMPLO 4 Solución por el método de raíz cuadrada

Utilice el método de raíz cuadrada para resolver *a*) $2x^2 = 6$ y *b*) $(y - 3)^2 = 5$.

Solución *a*) Multiplicamos ambos miembros de $2x^2 = 6$ por $\frac{1}{2}$ para obtener la forma especial (4):

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(2x^2) &= \tfrac{1}{2}(6) \\ x^2 &= 3 \\ x &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

En la última línea vemos que el conjunto solución es $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

b) Observamos que para $x = y - 3$ y $d = 5$, la ecuación $(y - 3)^2 = 5$ tiene la forma especial (4). Entonces, obtenemos la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned} (y - 3)^2 &= 5 \\ y - 3 &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

Esto produce dos ecuaciones lineales, $y - 3 = -\sqrt{5}$ y $y - 3 = \sqrt{5}$. Al resolver cada una de ellas encontramos $y = 3 + \sqrt{5}$ y $y = 3 - \sqrt{5}$, respectivamente. Entonces, el conjunto solución es $\{3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}\}$. ≡

Método de completar el cuadrado Cuando una expresión cuadrática no puede factorizarse fácilmente y la ecuación no tiene la forma especial (4), podemos hallar las raíces **completando el cuadrado**. Esta técnica se aplica a la expresión cuadrática de la forma $x^2 + Bx + C$; es decir, la expresión cuadrática debe tener 1 como su coeficiente principal. Reescribimos la ecuación

$$x^2 + Bx + C = 0 \tag{5}$$

de modo que los términos que tengan la variable x queden en el miembro izquierdo de la ecuación:

$$x^2 + Bx = -C$$

Luego agregamos $(B/2)^2$ a ambos miembros de esta última ecuación:

$$x^2 + Bx + \left(\frac{B}{2}\right)^2 = -C + \left(\frac{B}{2}\right)^2,$$

Ahora, el miembro izquierdo de la ecuación resultante es un cuadrado perfecto:

$$\left(x + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C.$$

Ahora es fácil despejar x con el método de la raíz cuadrada. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Solución con el método de completar el cuadrado

Resuelva $2x^2 + 2x - 1 = 0$ completando el cuadrado.

Solución Comenzamos por dividir ambos lados de la ecuación entre 2, el coeficiente de x^2, para obtener la forma (5):

$$x^2 + x - \frac{1}{2} = 0.$$

Ahora escribimos esta ecuación como

$$x^2 + x = \frac{1}{2}$$

y sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x (en este caso es 1) a ambos miembros de la ecuación:

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Entonces, tenemos

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Al obtener la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación queda:

$$x + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{o} \quad x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Las dos soluciones o raíces son entonces $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$, respectivamente. El conjunto solución de la ecuación es $\{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\}$. ≡

La fórmula cuadrática La técnica de completar el cuadrado en una expresión cuadrática es muy útil en otras situaciones. La veremos de nuevo en los capítulos 4, 5 y 11. Por ahora, nos ayudará a deducir una fórmula que exprese las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, en términos de los coeficientes a, b y c. Primero escribimos la ecuación de modo que su coeficiente principal sea 1:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Luego completamos el cuadrado y despejamos x:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} && \leftarrow \text{ahora usamos el método de raíz cuadrada} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
x + \frac{b}{2a} &= \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}. && \leftarrow \text{la raíz cuadrada de un cociente es el cociente de las raíces cuadradas}
\end{aligned}$$

Si $a > 0$, entonces $\sqrt{4a^2} = |2a| = 2a$ y tenemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{6}$$

El resultado se llama **fórmula cuadrática**. Si $a < 0$, entonces $\sqrt{4a^2} = |2a| = -2a$ y, después de simplificar, vemos que el resultado en (6) aún es válido.

Teorema 3.3.1 Raíces de una ecuación cuadrática

Si $a \neq 0$, entonces las raíces x_1 y x_2 de $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{7}$$

El discriminante Las raíces x_1 y x_2 de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ están determinadas por el radicando $b^2 - 4ac$ en la fórmula cuadrática (6). La cantidad $b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática. El discriminante debe ser positivo, cero o negativo. Estos tres posibles casos se sintetizan en la tabla siguiente.

Discriminante	Raíces
i) $b^2 - 4ac > 0$	Dos raíces reales diferentes
ii) $b^2 - 4ac = 0$	Raíces reales pero iguales
iii) $b^2 - 4ac < 0$	No hay raíces reales

EJEMPLO 6 Solución por la fórmula cuadrática

Resuelva $3x^2 - 2x - 4 = 0$.

Solución En este caso, identificamos $a = 3$, $b = -2$ y $c = -4$. El discriminante positivo $b^2 - 4ac = 13$ implica que la ecuación dada tiene dos raíces reales. De la fórmula cuadrática (6) tenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{6} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}. \end{aligned}$$

Entonces, las raíces son $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{13}$ y $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{13}$. ≡

EJEMPLO 7 Raíces repetidas

Resuelva $9x^2 + 16 = 24x$.

Solución Para utilizar la fórmula cuadrática primero debemos escribir la ecuación en la forma $9x^2 - 24x + 16 = 0$. La fórmula cuadrática

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(9)(16)}}{2(9)} \\ &= \frac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{18} \leftarrow \text{el radicando es 0} \\ &= \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

muestra que $\frac{4}{3}$ es una raíz repetida o una raíz de multiplicidad 2. ≡

EJEMPLO 8 Sin raíces reales

Resuelva $3x^2 - x + 2 = 0$.

Solución Como el discriminante

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(2) = -23$$

es negativo, concluimos que la ecuación dada no tiene raíces reales. ≡

De vez en cuando incluso nos topamos con ecuaciones no polinomiales que pueden resolverse con la fórmula cuadrática.

Formas cuadráticas Ciertas ecuaciones polinomiales de grado mayor que 2 pueden resolverse con la formula cuadrática. Esto nos exige reconocer que la ecuación puede escribirse en la forma cuadrática estándar $at^2 + bt + c = 0$, donde el símbolo t representa una potencia entera positiva de x. En el ejemplo que sigue se ilustra esta idea.

EJEMPLO 9 Ecuación polinomial de cuarto grado

Resuelva $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$.

Solución Esta ecuación polinomial puede considerarse una ecuación cuadrática en la variable x^2, es decir,

Si $t = x^2$, entonces la ecuación tiene la forma cuadrática $t^2 - 2t - 2 = 0$.

$$(x^2)^2 - 2(x^2) - 2 = 0$$

Usamos la fórmula cuadrática para despejar el símbolo x^2:

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Entonces,

$$x^2 = 1 + \sqrt{3} \qquad \text{o} \qquad x^2 = 1 - \sqrt{3}.$$

La raíz cuadrada de cualquier número real es no negativa.

Ahora, la ecuación cuadrática $x^2 = 1 - \sqrt{3}$ no tiene raíces reales, ya que $1 - \sqrt{3} < 0$. Pero de $x^2 = 1 + \sqrt{3}$ obtenemos dos raíces reales, $-\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ y $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ de la ecuación original. ≡

Concluimos esta sección con varias aplicaciones que implican ecuaciones cuadráticas.

EJEMPLO 10 Problema de rectángulos

El área de un rectángulo es de 138 cm^2. El largo es 5 cm más que 3 veces el ancho. Halle las dimensiones del rectángulo.

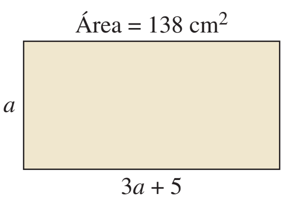


FIGURA 3.3.1 Rectángulo del ejemplo 10

Solución Empezamos por dibujar y marcar un rectángulo como se muestra en la **FIGURA 3.3.1**. Sea

$$a = \text{ancho del rectángulo en centímetros.}$$

Entonces $\quad 3a + 5 = \text{largo del rectángulo en centímetros}$

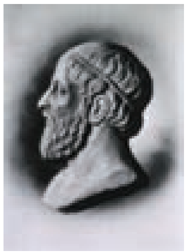
y $\quad a(3a + 5) = 138$

Para utilizar la fórmula cuadrática reescribimos esta ecuación en la forma estándar:

$$3a^2 + 5a - 138 = 0$$

De la fórmula cuadrática, encontramos que $a = -\frac{23}{3}$ o $a = 6$. Como el ancho de un rectángulo debe ser positivo, descartamos la solución $a = -\frac{23}{3}$. En consecuencia, aceptamos que $a = 6$. Así, la longitud es $3(6) + 5 = 23$, y las dimensiones del rectángulo son 6 cm por 23 cm.

Comprobación Como $23 = 3(6) + 5$ y $6(23) = 138$, la respuesta es correcta. ≡



Pitágoras

Teorema de Pitágoras El **teorema de Pitágoras** es uno de los más usados de la geometría. Muchas de sus aplicaciones implican ecuaciones cuadráticas. A pesar de que se llama así en honor del matemático griego **Pitágoras**, que vivió alrededor de 540 antes de la era cristiana, el resultado se conocía antes de esa época. El teorema postula que en un triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados (catetos). Para un triángulo rectángulo como el que se muestra en la **FIGURA 3.3.2** tenemos la fórmula:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

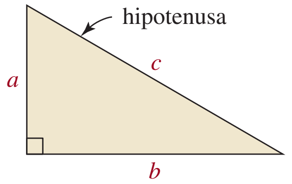


FIGURA 3.3.2 Triángulo rectángulo

Hay un amplio repertorio de demostraciones algebraicas y geométricas de este teorema (véanse los problemas 91 y 92 en los ejercicios 3.3).

EJEMPLO 11 Problema de aceras

En un parque, dos aceras forman un ángulo recto con el patio P, el puesto de refrigerios R y el estacionamiento E, como se muestra en la **FIGURA 3.3.3**. La longitud total de las aceras es 700 m. Al caminar diagonalmente a través del pasto (línea punteada roja) directamente del estacionamiento al patio, los niños acortan la distancia 200 m. ¿Cuál es la longitud de cada acera?

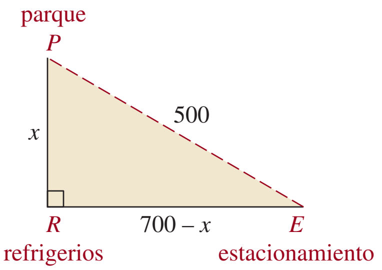


FIGURA 3.3.3 Aceras y atajo diagonal del ejemplo 11

Solución Si designamos

$$x = \text{longitud de la acera del punto } P \text{ a } R$$

entonces $$700 - x = \text{longitud de la acera de } R \text{ a } E$$

Como la distancia de P a E es 200 metros menor que la longitud total de las dos aceras, tenemos

$$700 - 200 = 500 = \text{distancia de } P \text{ a } E$$

Por el teorema de Pitágoras obtenemos esta relación:

$$x^2 + (700 - x)^2 = (500)^2$$

Reescribimos esta ecuación y resolvemos por factorización:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 1\,400x + 240\,000 &= 0 \\ x^2 - 700x + 120\,000 &= 0 \\ (x - 400)(x - 300) &= 0. \end{aligned}$$

De la última forma de la ecuación vemos de inmediato que $x = 400$ o $x = 300$. Si nos remitimos a la **FIGURA 3.3.3**, si utilizamos $x = 400$ encontramos que la longitud de la acera desde el patio hasta el puesto de refrigerio es 400 m y la longitud de la acera desde el punto de refrigerio hasta el estacionamiento es $700 - 400 = 300$ m. De $x = 300$, encontramos que estas distancias están invertidas. Entonces, hay dos soluciones posibles a este problema.

Comprobación La solución es correcta porque

$$700 = 300 + 400 \qquad \text{y} \qquad (500)^2 = (300)^2 + (400)^2$$ ≡