■ **Diferencia de conjuntos** La **diferencia** entre dos conjuntos A y B o el complemento relativo de B respecto a A es el conjunto que consiste en todos los elementos que pertenecen a A pero no a B. La diferencia entre A y B se denota por $A - B$. En lenguaje de la lógica $A - B$ se representa como:

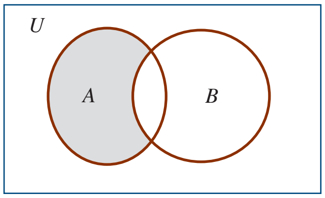
$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge \sim(x \in B)\} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

El complemento de un conjunto A, que se denota por A' o por A^c, es el conjunto $U - A$, que puede describirse como:

$$A' = U - A = \{x \in U \mid \sim(x \in A)\}$$

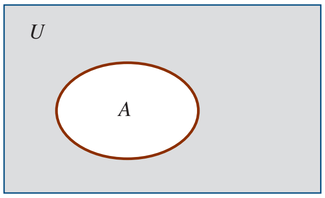
La operación de tomar complementos es similar a la operación de negación en lógica.

En las **FIGURAS 1.8.11** y **1.8.12** se muestra las representaciones gráficas de la diferencia de conjuntos y la de tomar complementos.



$A - B$

FIGURA 1.8.11 Diferencia de conjuntos



$A' = U - A$

FIGURA 1.8.12 Complemento de conjuntos

Los hechos siguientes son verdaderos respecto a conjuntos y sus complementos:

a) $A \cap A' = \varnothing, \forall A$

b) $A \cup A' = U, \forall A$

PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS

Las propiedades siguientes, llamadas *leyes de De Morgan*, se cumplen para conjuntos A y B que son subconjuntos del conjunto universal U:

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

EJEMPLO 7 Diferencia de conjuntos

Dados $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $B = \{c, d, e, f, g, h)$, determine el conjunto $A - B$.

Solución El conjunto $A - B$ está formado por todos los elementos de A que no lo son de B, así que los elementos de $A - B$ son a, b. Por tanto:

$$A - B = \{a, b\}$$ ≡

EJEMPLO 8 Diferencia de conjuntos

Dados el conjunto universal $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y el conjunto $A = \{3, 8, 9\}$, determine A'.

Solución El complemento de A es el conjunto formado por todos los elementos de U que no son elementos de A:

$$A' = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$$

≡

Diferencia simétrica de conjuntos La **diferencia simétrica** de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de la unión de A y B, eliminando los elementos de la intersección de A y B. La diferencia simétrica de A y B se denota por $A \Delta B$. Usando el lenguaje lógico podemos expresar $A \Delta B$ como

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \veebar B\}$$

Note que de acuerdo con la descripción dada para la diferencia simétrica, podemos escribir:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \text{ o } A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

En la **FIGURA 1.8.13** se muestra gráficamente la situación que describe $A \Delta B$.

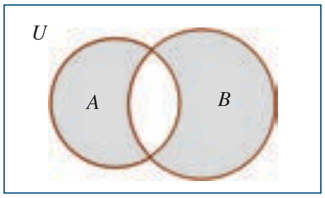


FIGURA 1.8.13 $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

Cabe señalar lo siguiente:

a) Si A y B son disjuntos, entonces a $A \Delta B = A \cup B$.

b) Si $A \subset B$, entonces a $A \Delta B = B - A$.

c) Si $A \supset B$, entonces $A \Delta B = A - B$.

d) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$, ley asociativa para la diferencia simétrica.

e) $A \Delta B = B \Delta A$, ley conmutativa para la diferencia simétrica.

f) Si $A \Delta B = A \Delta C$, entonces $B = C$, ley de cancelación para la diferencia simétrica.

g) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$, ley distributiva de la intersección respecto a la diferenciación simétrica.

EJEMPLO 9 Diferencia simétrica de conjuntos

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, determine $A \Delta B$.

Solución Sabemos que en $A \Delta B$ entran todos los elementos de A y B que no son comunes a A y a B; por tanto,

$$A \Delta B = \{1, 2, 9, 15, 17, 19\}$$

En la **FIGURA 1.8.14** se muestra gráficamente este resultado. ≡

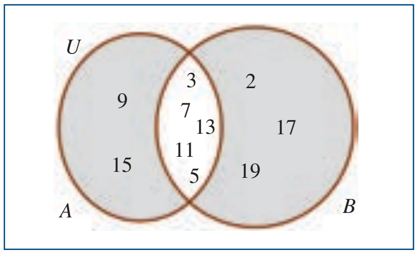


FIGURA 1.8.14 $A \,\Delta\, B$

Las operaciones con conjuntos cumplen las leyes del álgebra de conjuntos, que son las siguientes.

LEYENDAS DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Leyes idemponentes
1a. $A \cup A = A$ **1b.** $A \cap A = A$

Leyes asociativas
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ **2b.** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Leyes conmutativas
3a. $A \cup B = B \cup A$ **3b.** $A \cap B = B \cap A$

Leyes distributivas
4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **4b.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Leyes de identidad y absorción
5a. $A \cup \varnothing = A$ **5b.** $A \cap U = A$
6a. $A \cup U = U$ **6b.** $A \cap \varnothing = \varnothing$

Ley involutiva
7a. $(A^c)^c = A$

Leyes del complementario
8a. $A \cup A^c = U$ **8b.** $A \cap A^c = \varnothing$
9a. $U^c = \varnothing$ **9b.** $\varnothing = U$

Leyes de De Morgan
10a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ **10b.** $A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

En muchas ocasiones se presentan situaciones en las que es necesario realizar varias operaciones simultáneamente. Para trabajar o calcular estas expresiones hay que ser cuidadosos al aplicar las operaciones fundamentales con conjuntos, así como las leyes de estas operaciones.

EJEMPLO 10 Operaciones con conjuntos

Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, e, f, g\}$, $C = \{a, b, h, k\}$, determine los conjuntos siguientes, donde $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, 1, m\}$:

a) $(A - B)' \cap C$

b) $(A \,\Delta\, C) \cup A'$

Solución ***a)*** $A - B = \{b, c, d\}$, $(A - B)' = \{a, e, f, g, h, i, j, k, 1, m\}$

$$(A - B)' \cap C = \{a, h, k\}$$

b) $A - C = \{c, d\}$, $C - A = \{h, k\}$, $A \Delta C = \{c, d, h, k\}$

$A' = \{e, f, g, h, i, j, k, 1, m\}$

$(A \Delta C) \cup A' = \{c, d, e, f, g, h, i, j, k, 1, m\}$ ≡

1.8 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

En los problemas 1 a 20, suponga $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f, g\}$, $C = \{e, f, g, h, i\}$, $D = \{a, c, e, g, i\}$, $E = \{b, d, f, h\}$, $F = \{a, e, i\}$, y determine lo que se indica.

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $C \cap D$
4. $E \cup F$
5. $A \cap C$
6. $A \cap C$
7. $C \cup D$
8. $E \cap F$
9. A'
10. B'
11. $B - A$
12. $E' \cap F'$
13. $A - B$
14. $(E \cup F)'$
15. $A \cap (B \cup C)$
16. $(A \cap B) \cup (A \cup C)$
17. $(A \cap D) - B$
18. $(A - E)'$
19. $(C \cup A) - E'$
20. $(B \cup F)' \cup A$

En los problemas 21 a 30, suponga los conjuntos $K = \{2, 4, 6, 8\}$, $L = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{3, 4, 5, 6, 8\}$, $U = \{1, 2, 3,\ldots, 10\}$, y determine lo que se indica.

21. K'
22. $(K \cup L)'$
23. $(M' \cap K)$
24. $K \Delta M'$
25. $(K - L)' \Delta M$
26. $(M' - K') - L$
27. $U' - \varnothing'$
28. $U \Delta L$
29. $(U')' \Delta \varnothing$
30. $(K \Delta L) - M$

En los problemas 31 a 40, suponga que los conjuntos A, B, C son cualesquiera, U el conjunto universo y $\varnothing$ el conjunto vacío, y simplifique las expresiones dadas.

31. $(A \cap U) \cup \varnothing$
32. $(A - U) \cap (B - \varnothing)$
33. $(\varnothing \cup A) \cap (B \cup A)$
34. $A \cap (A \cup B)$
35. $(B \cup U) \cap (A \cap U)$
36. $(A \cap A')'$
37. $U \cap U$
38. $A \Delta U$
39. $B \Delta \varnothing$
40. $(B \Delta U)'$

En los problemas 41 a 50, suponga dados los conjuntos A, B y C no vacíos; use diagramas de Venn para ilustrar los resultados obtenidos al efectuar las operaciones indicadas en las expresiones dadas.

41. $A \cup B$
42. $A \cap B$
43. $A - B$
44. $A \Delta B$
45. $(A' \cap B') \cap C'$
46. $B' \cup A'$
47. $A' \cap B$
48. $(A \cup B)' \cap (A \cup C)'$
49. $(A' \Delta B') \cap C'$
50. $A \cap B'$

En los problemas 51 a 56, si sabemos que un conjunto G es subconjunto de un conjunto A no vacío, determine la veracidad de los enunciados dados.

51. $A \cap G = G$
52. $G \cup A = A$

53. $(G - A) \supset A$

54. $(G - A) \supseteq G$

55. $G \Delta A = A \cup G$

56. $(A - G) \cap A = (A - G)$

En los problemas 57 a 62, considere los conjuntos $A_1 = \{2, 3, 5\}, A_2 = \{1, 4\}, A_3 = \{1, 2, 3\}, A_4 = \{1, 3, 5, 7\}, A_5 = \{3, 5, 8\}, A_6 = \{1, 7\}, U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, y determine lo que se indica.

57. $\bigcup_{i=1}^{6} A_i$

58. $\bigcup_{i=3}^{5} A_i'$

59. $\bigcap_{i=4}^{6} A_i$

60. $\bigcap_{i=2}^{4} (A_i - A_{i+1})$

61. $\bigcap_{i=2}^{4} A_i' \Delta \bigcap_{i=2}^{4} A_i$

62. $\wp\left(\bigcap_{i=2}^{3}\right) A_i$

En los problemas 63 a 67, considere conjuntos A y B cualesquiera y realice las demostraciones propuestas.

63. Demuestre que $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

64. Demuestre que $(A \cup B) \cap B' = A$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.

65. Demuestre que si A y B son subconjuntos de U, entonces $A \cap B' = A$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.

66. Demuestre que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

67. Demuestre que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

1.9 Conjuntos y técnicas de conteo

Una de las ideas más importantes en la aplicación de la teoría de conjuntos está relacionada con el proceso de contar. Se cuenta el número de elementos de un conjunto, el número de maneras en que un proceso puede ocurrir, etcétera. En esta sección consideramos la solución de estos problemas a partir de la relación que expresa el número de elementos en la unión de conjuntos. En el tratamiento del problema entran dos situaciones: primero, cuando los conjuntos que intervienen son disjuntos, y segundo, cuando no lo son.

Caso de pares de conjuntos disjuntos Parece razonable esperar que la cardinalidad de $A \cup B$, $|A \cup B|$ sea igual a $|A| + |B|$, ya que la unión de A y B se obtiene juntando los elementos de A con los de B. Éste es el caso cuando A y B son conjuntos disjuntos, ya que cuando contamos sus elementos sabemos que cada uno viene de A o de B, pero no de los dos al mismo tiempo. Esto desemboca en el principio de conteo siguiente.

PRINCIPIO DE CONTEO I: CON CONJUNTOS DISJUNTOS

Si A y B son disjuntos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

EJEMPLO 1 Conteo

Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$; determine $|A \cup B|$.

Solución Por ser A y B disjuntos, al contar los elementos de $A \cup B$, cada elemento se cuenta una sola vez; por tanto,

$$|A \cup B| = |A| + |B| = 2 + 3 = 5$$

Es claro que puesto que $A \cup B = \{1, 2, a, b, c\}$, se tiene que $|A \cup B| = 5$. ≡

Caso de pares de conjuntos no disjuntos Si A y B no son disjuntos, entonces el problema de determinar el número de elementos de $A \cup B$ es menos sencillo. Si contamos los elementos de A y los elementos de B, y sumamos los números que resultan de estas cuentas tratando de obtener el número de elementos de $A \cup B$, encontramos que algunos de los elementos han sido contados dos veces. Los elementos de la intersección de A y B se contaron dos veces, una vez cuando contamos los de A y una segunda vez cuando contamos los de B; de ahí que para que cada elemento de $A \cup B$ sea contado una sola vez debemos restar el número de elementos de $A \cap B$ a la suma del número de elementos de A y de B.

PRINCIPIO DE CONTEO II: CON CONJUNTOS NO DISJUNTOS

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Observe que la última relación también se cumple cuando A y B son disjuntos, es decir, $A \cap B = \varnothing$, ya que $|\varnothing| = 0$.

EJEMPLO 2 Conteo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$, entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ y } A \cap B = \{3\}$$

En este caso $|A| = 3, |B| = 3, |A \cap B| = 1$; por tanto $|A \cup B|$, como se puede comprobar contando los elementos de $A \cup B$.

EJEMPLO 3 Conteo

Suponga que A y B son tales que $A = 5, B = 8$ y $|A \cup B| = 11$. Determine $|A \cap B|$.

Solución Si llamamos x al número $|A \cap B|$, entonces por la fórmula sabemos que:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - x$$

es decir, $11 = 5 + 8 - x$ y de aquí se tiene

$$x = 13 - 11 = 2$$

por tanto $|A \cap B| = 2$.

EJEMPLO 4 Conteo

De un total de 35 programadores entrevistados para un trabajo, 25 conocían Visual Basic, 28 conocían Java y dos no conocían ninguno de estos dos lenguajes; ¿cuántos conocían ambos lenguajes?

Solución Puesto que dos de ellos no conocían lenguaje alguno, se tiene que los que conocían por lo menos un lenguaje eran:

$$35 - 2 = 33$$

Ahora, si A = el conjunto de los que conocían Visual Basic, B = el conjunto de los que conocían Java, entonces $A \cup B$ = el conjunto de los que conocían por lo menos uno de estos lenguajes, y $A \cap B$ = el conjunto de los que conocían ambos lenguajes.

Puesto que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

se tiene que

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$

pero $|A| = 25, |B| = 28, |A \cup B| = 33$; por tanto:

$$|A \cap B| = 25 + 28 - 33 = 20$$

20 personas conocían ambos lenguajes.

Si en el problema anterior quisiéramos saber el número de personas que conocen sólo Visual Basic, tendríamos que restarle al número de los que conocen Visual Basic al número de los que conocen Visual Basic y Java, es decir,

$$|A| - |A \cap B| = 25 - 20 = 5$$

Asimismo, para conocer el número de personas que conocían sólo Java, tendríamos que restar al número de los que conocían Java el número de los que conocían Visual Basic y Java, es decir,

$$|B| - |A \cap B| = 28 - 20 = 8$$

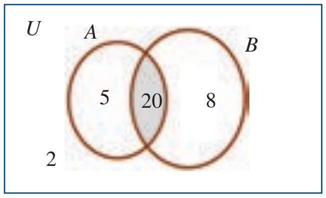


FIGURA 1.9.1 Diagrama de Venn para el ejemplo 4

Si $U =$ el conjunto de todos los entrevistados (35), entonces el diagrama de la **FIGURA 1.9.1** muestra la distribución de los conjuntos implicados en el problema.

Caso de la unión de tres conjuntos El trabajo de conteo para los casos en los que intervienen tres conjuntos es tan sencillo como el trabajo con dos conjuntos. Observe que:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|$$

pero

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$$

y

$$|A \cup (B \cup C| = |(A \cap B)| \cup |(A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

por tanto:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Observe cómo se utilizan las leyes asociativa para la unión de conjuntos y distributiva de la intersección respecto a la unión de conjuntos en la obtención de esta última relación.

Del diagrama de la **FIGURA 1.9.2** podemos deducir varios hechos interesantes:

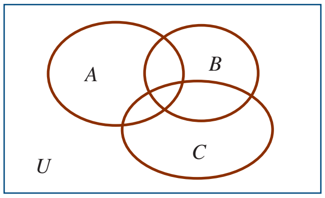


FIGURA 1.9.2

***a*)** El número de elementos que sólo están en A:

$$|A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

***b*)** El número de elementos que están sólo en B:

$$|B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

***c*)** El número de elementos que están sólo en C:

$$|C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

***d*)** El número de elementos que están en $A \cap B$, pero no en C:

$$|A \cap B| - |A \cap B \cap C|$$

***e*)** El número de elementos que están en $A \cap C$, pero no en B:

$$|A \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

***f*)** El número de elementos que están en $B \cap C$, pero no en A:

$$|B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

***g*)** El número de elementos que están en A o en B, pero no en C:

$$|A \cup B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

***h*)** El número de elementos que están en A o en C, pero no en B:

$$|A \cup C| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

***i*)** El número de elementos que están en B o en C pero no en A:

$$|B \cup C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

***j*)** El número de elementos de $A \cup B \cup C$ puede ser distinto al número de elementos del universo U.

EJEMPLO 5 Aplicación de conteo de conjuntos

Una encuesta entre 100 estudiantes arrojó lo siguiente:

- 32 estudian matemática.
- 20 estudian física.
- 45 estudian biología.
- 15 estudian matemática y biología.
- 7 estudian matemática y física.
- 10 estudian física y biología.
- 30 no estudian ninguna de las tres asignaturas.

***a*)** Encuentre el número de estudiantes que estudian las tres asignaturas.
***b*)** Encuentre el número de estudiantes que cursan una y sólo una de las tres asignaturas.

Solución Supongamos M = el conjunto de los que estudian matemática, F = el conjunto de los que estudian física y B = el conjunto de los que estudian biología. Entonces,

$$|M| = 32, |F| = 20, |B| = 45, |M \cap F| = 7, |M \cap B| = 15, |F \cap B| = 10$$

***a*)** Es claro que los que intervinieron en la encuesta constituyen el universo U, de aquí que $U = 100$. Asimismo, los que estudian alguna de las tres asignaturas están representados por $M \cup F \cup B$ y los que no estudian ninguna de las asignaturas son 30 personas; de ahí que:

$$|M \cup F \cup B| = 100 - 30 = 70$$

El número de estudiantes que toman las tres asignaturas constituyen el conjunto $|M \cap F \cap B|$; de ahí que como

$$|M \cup F \cup B| = |M| + |F| + |B| - |M \cap F| - |M \cap B| - |F \cap B| + |M \cap F \cap B|$$

se tiene que

$$|M \cap F \cap B| = |M \cup F \cup B| - |M| - |F| - |B| + |M \cap F| + |M \cap B| + |F \cap B|$$

es decir

$$70 - 32 - 20 - 45 + 7 + 15 + 10 = 5$$

Así que los que estudian las tres asignaturas son cinco estudiantes.

b) El número de los que estudian sólo matemática está dado por:

$$|M| - |M \cap F| - |M \cap B| + |M \cap F \cap B| = 32 - 7 - 15 + 5 = 15$$

Los que estudian sólo física son:

$$|F| - |M \cap F| - |F \cap B| + |M \cap F \cap B| = 20 - 7 - 10 + 5 = 8$$

Los que estudian sólo biología son:

$$|B| - |M \cap B| - |F \cap B| + |M \cap F \cap B| = 45 - 15 - 10 + 5 = 25$$

Así que los que estudian una y sólo una de las asignaturas son:

$$15 + 8 + 25 = 48$$

≡

EJEMPLO 6 Aplicación de conteo de conjuntos

En una encuesta sobre los medios de transporte urbano más comunes, a cada persona se le pregunta si el taxi, el autobús o el auto privado es el medio más usado para ir al trabajo. Se permite más de una respuesta. El resultado de la encuesta es el siguiente:

- 0 personas opinaron a favor del taxi.
- 35 personas opinaron a favor del autobús.
- 100 personas opinaron a favor del auto privado.
- 15 personas opinaron a favor del taxi y del autobús.
- 15 personas opinaron a favor del taxi y del auto privado.
- 20 personas opinaron a favor del autobús y del carro privado.
- 5 personas opinaron a favor de los tres medios de transporte.

¿Cuántas personas respondieron a la encuesta?

Solución Supongamos A = los que opinaron a favor del taxi, B = los que opinaron a favor del autobús y C = los que opinaron a favor del auto privado. Entonces, si suponemos que todos los encuestados respondieron la entrevista, se tiene que $A \cup B \cup C$ es el conjunto de los que respondieron y es a la vez el conjunto universo U. Asimismo, $|A \cap B| = 15$, $|A \cap C| = 15$, $|B \cap C| = 20$, $|A \cap B \cap C| = 5$. Ahora,

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 30 + 35 + 100 - 15 - 15 - 20 + 5 = 120 \end{aligned}$$

Por tanto, 120 personas respondieron a la encuesta. ≡

1.9 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

En los problemas 1 a 6, suponga que $|B| = 12$, $|C| = 11$, $|D| = 8$, $|B \cup C| = 20$, $|B \cup D| = 20$ y $|D \cap C| = 3$ y determine lo que se indica.

1. $|B \cap C|$

2. $|B - D|$

3. $|D \cup C|$

4. $|B \cap D|$

5. $|B - C|$

6. $|B \,\Delta\, D|$

En los problemas 7 a 10, suponga que $|A| = 35$, $|B| = 23$, $|C| = 28$, $|A \cap B| = 15$, $|A \cap C| = 13$, $|B \cap C| = 11$, $|A \cup B \cup C| = 52$, y determine lo que se indica.

7. $|A \cap B \cap C|$

8. $|(A \cap C) - B|$

9. $|(A \cap B) - C|$

10. $|(A \cap C) - A|$

11. En una encuesta de 60 personas se encontró que 25 leen revistas políticas, 26 leen revistas científicas y 26 leen revistas de entretenimiento. Se determinó, además, que nueve personas leen revistas políticas y de entretenimiento, once leen revistas políticas y científicas, ocho leen revistas científicas y de entretenimiento y ocho no leen revista alguna.
   a) Determine el número de personas que leen los tres tipos de revistas.
   b) Determine el número de personas que leen exactamente un tipo de revistas.

12. Una encuesta hecha a 100 músicos populares mostró que 40 de ellos usaban guantes en la mano izquierda y 39 usaban guantes en la mano derecha. Si 60 de ellos no usaban guantes, ¿cuántos usaban guantes en la mano derecha solamente?, ¿cuántos usaban guantes en la mano izquierda solamente?, ¿cuántos usaban guantes en ambas manos?

13. En la clase de educación física se inscribieron 200 estudiantes; se les preguntó si querían trotar o nadar como únicas dos alternativas. Decidieron trotar 85 de ellos, 60 también aceptaron nadar. En total, ¿cuántos tomaron natación?, ¿cuántos tomaron natación pero no aceptaron trotar?

14. De 30 estudiantes en una clase de matemática, 26 aprobaron el primer examen parcial y 21 aprobaron el segundo examen parcial. Si dos estudiantes reprobaron ambos exámenes, ¿cuántos aprobaron ambos exámenes?

15. Un total de 60 clientes potenciales visitaron una tienda de artículos para computadoras. De ellos, 52 compraron algún artículo; 20 compraron papel, 36 compraron discos compactos y doce compraron tóner para impresoras. Si seis compraron papel y discos, nueve compraron discos y cintas y cinco compraron papel y tóner, ¿cuántos compraron los tres artículos?

16. Un total de 35 sastres fueron entrevistados para un trabajo; 25 sabían hacer trajes, 28 sabían hacer camisas, y dos no sabían hacer ninguna de las dos cosas. ¿Cuántos sabían hacer trajes y camisas?

17. A principios de la década de 1960 se hizo una encuesta a 120 residentes de una ciudad latinoamericana sobre su interés en los tres equipos del área más cercana a la ciudad. De éstos, 40 seguían al equipo A, 28 seguían al equipo B y 31 al equipo C; 23 seguían al A y al B; 19 seguían al equipo B y al equipo C, 25 seguían al equipo A y al equipo C y 18 personas seguían a los tres equipos. ¿Cuántas de estas personas no seguían a equipo alguno?, ¿cuántos seguían al equipo A y al equipo C, pero no al equipo B?

18. De 1 200 estudiantes de primer año en una universidad, 582 tomaron educación física, 627 tomaron español, 543 tomaron matemática, 217 tomaron educación física y español, 307 tomaron educación física y matemática, 250 tomaron matemática y español, 122 tomaron los tres cursos. ¿Cuántos no tomaron ninguno de los tres cursos?

19. En una encuesta aplicada a 260 estudiantes se obtuvieron los datos siguientes: 64 toman un curso de matemática, 94 toman un curso de computación, 58 toman un curso de administración, 28 toman cursos de matemática y administración, 26 toman cursos de matemática y computación, 22 toman cursos de administración y computación, y 14 toman los tres cursos.
   a) ¿Cuántos de los estudiantes de la encuesta no toman ninguno de los tres cursos?
   b) ¿Cuántos de los estudiantes de la encuesta toman sólo el curso de computación?

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Postulados o axiomas
Teoremas
Proposiciones
- Simples
- Compuestas

Conectivos lógicos
- Negación
- Conjunción
- Disyunción inclusiva
- Disyunción exclusiva
- Condicional
- Bicondicional

Tabla de verdad
Cuantificadores
- Universal
- Existencial

Enunciado abierto
Conjuntos y elementos
Cardinalidad
Familias de conjuntos
Conjunto potencia
Operaciones con conjuntos
- Unión
- Intersección
- Complemento
- Diferencia
- Diferencia simétrica

Diagramas de Venn
Técnicas de conteo

CAPÍTULO 1 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-4.

En los problemas 1 y 2, establezca la proposición recíproca inversa y la contrapositiva de cada una de las proposiciones dadas.

1. "Si $2 + 2 = 4$, entonces no soy el rey de Inglaterra."

2. "Si tengo tiempo y no estoy cansado, iré a la tienda."

En los problemas 3 y 4, considere que la proposición "estudiaré matemática" se representa por la letra p, la proposición "iré al cine" por la letra q y la proposición "estoy de buen humor" por la letra r, y escriba en lenguaje simbólico los enunciados siguientes:

3. "Si no estoy de buen humor, entonces iré al cine."

4. "No iré al cine y estudiaré matemática."

En los problemas 5 al 8, clasifique las proposiciones siguientes como contingencias, contradicciones o tautologías.

5. $p \wedge p$

6. $q \vee (q \wedge p)$

7. $(p \wedge q) \veebar r \rightarrow q$

8. $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \vee {\sim}q)$

En los problemas 9 y 10, determine en cada caso si el par de proposiciones son lógicamente equivalentes.

9. $p \vee (q \wedge r), (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

10. $p \vee (p \wedge q), p$

En los problemas 11 y 12, suponga que el universo de discurso está formado por todos los números enteros; diga cuál es el valor de verdad de cada una de las proposiciones dadas, escriba su negación en cada caso, así como su valor de verdad.

11. $\forall x$, x dividido por 2 es un entero.

12. $\exists x, \exists y, xy = 1$

En los problemas 13 y 14, construya la tabla de verdad para cada una de las proposiciones dadas.

13. $[(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \wedge ({\sim}p \vee {\sim}r)$

14. $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \wedge {\sim}q) \rightarrow r]$

En los problemas 15 y 16, diga si los pares de proposiciones dadas están formados por proposiciones lógicamente equivalentes.

15. $(p \vee r) \wedge (q \rightarrow r), (p \rightarrow q) \rightarrow r$

16. ${\sim}q, (p \vee q) \rightarrow p$

En los problemas 17 y 18, diga si el argumento dado en cada caso es válido o es una falacia.

17. Si llegué en auto al trabajo, entonces llegué cansado a él. Llegué cansado al trabajo. Por tanto, manejé camino al trabajo.

18. Si trabajo duro y tengo talento, entonces seré un músico. Si soy músico, entonces seré feliz. Por tanto, si no seré feliz, entonces no trabajé duro o no tuve talento.

En los problemas 19 a 21, considere la proposición $\forall x, \forall y, x < y \rightarrow \exists z, x < z < y$

19. Escriba su negación.

20. Determine su valor de verdad cuando el universo del discurso está formado por los números reales o los racionales.

21. Determine su valor de verdad cuando el universo del discurso está formado por los números enteros positivos o los números enteros.

22. Describa los métodos que ha usado para hacer demostraciones y dé algunos ejemplos.

En los problemas 23 y 24, construya la tabla de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

23. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)]$

24. $[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \rightarrow (q \wedge p)$

En los problemas 25 y 26, discuta (analice y opine) cada uno de los argumentos dados.

25. Si obtengo el puesto y trabajo duro, entonces me ascenderán. Si me ascienden seré feliz. No seré feliz. Por tanto, no obtendré el puesto o no trabajaré duro.

26. Un lógico dice a su hijo: "Si no terminas la cena, te irás directo a dormir y no verás televisión". Terminó la cena y fue enviado directamente a la cama.

En los problemas 27 y 28, demuestre los teoremas dados por el método que considere apropiado.

27. Si $p \rightarrow (q \vee r)$, $q \rightarrow s$ y $r \rightarrow t$, entonces $p \rightarrow (s \vee t)$

28. Si $p \rightarrow (q \wedge r)$, $(q \vee s) \rightarrow t$ y $p \vee s$, entonces t.

En los problemas 29 a 31, escriba el significado de los enunciados dados si se considera un universo de discurso A_1 que consta de los miembros de un club y un universo A_2 de líneas aéreas. Sea $P(x, y)$ el predicado "x ha sido pasajero de y"; escriba el significado de cada uno de los enunciados siguientes.

29. $\forall x, \forall y, P(x, y) \leftrightarrow \forall y, \forall x\, P(x, y)$

30. $\exists x, \exists y, P(x, y) \leftrightarrow \exists y, \exists x, P(x, y)$

31. $\exists x, \forall y, P(x, y) \rightarrow \forall y, \exists x, P(x, y)$

En los problemas 32 y 33, pruebe los enunciados dados por el modo de demostración que considere apropiado en cada caso.

32. "Si x es un número primo, entonces $x + 7$ es un número compuesto".

33. "Para todo número irracional t, $t - 8$ es irracional."

En los problemas 34 a 36, complete.

34. Si $A \subset B$, entonces

$$A \cup B = \qquad A \cap B = \qquad A - B =$$

35. Si A y B son disjuntos, entonces

$$A - B = \qquad A \cap B = \qquad B - A =$$

36. Si $A = \varnothing$, entonces

$$A \cup B = \qquad A \cap B = \qquad A \,\Delta\, B =$$

En los problemas 37 a 40, determine la cardinalidad de cada uno de los conjuntos dados.

37. $A = \{x \mid x = 5n + 2, n \in N\}$

38. $B = \{x + 3 \mid 2 < x < 12, x \in N\}$

39. $C = \{2n - 3 \mid n \in N\}$

40. $D = \{x - 1 \mid 6 < x < 10, x \in N\}$

En los problemas 41 a 46, dé el valor de verdad de las proposiciones dadas.

41. $3 \in \{3\}$

42. $5 = \{5\}$

43. $\{6\} \subset \{\{6\}\}$

44. $\{2, 3\} = \{3, 2\}$

45. $\varnothing \in \{2\}$

46. $\{2\} \subseteq \{2\}$

En los problemas 47 a 52, considere $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y efectúe las operaciones de conjuntos indicadas.

47. $(A' - B) \cap C$

48. $(B \,\Delta\, C)' \cup B$

49. $(B' \cup A') \,\Delta\, C$

50. $(C' \cap A) \cup B$

51. $\wp(A) \cap \wp(C)$

52. $(A \cup B) \cap C'$

En los problemas 53 y 54 demuestre que:

53. $A \,\Delta\, A = \varnothing, \forall A$

54. $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C), \forall A, B, C$

En los problemas 55 a 58, considere $U = \{0, 1, 2, 3\}$, $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{0, 1\}$, $A_3 = \{0, 3\}$, $A_4 = \{1, 2, 3\}$, $A_5 = \{0, 2, 3\}$ y determine lo que se indica.

55. $\bigcup_{i=1}^{3} A_i \,\Delta \bigcap_{i=1}^{4} A_i$

56. $\bigcap_{i=1}^{5} A_i' \cup \left(\bigcup_{i=1}^{2} A_i\right)$

57. $\wp\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) - \wp\left(\bigcap_{i=1}^{3} A_i'\right)$

58. $\bigcap_{i=1}^{4} \left(A_i - A_{i+1}\right)$

En los problemas 59 a 62, trace una representación en diagrama de Venn del resultado de las operaciones en cada caso.

59. $(A \cup B) - (A \cap B)$

60. $A - (B - C)$

61. $A' \cup (B' - C)'$

62. $(A' \cup B') \cap (C \cap B)$

En los problemas 63 a 66, considere conjuntos A, B, C de un cierto conjunto universal U y diga cuáles de las afirmaciones dadas son verdaderas y cuáles son falsas. En caso de que una afirmación sea falsa, dé un ejemplo en el cual la afirmación no se cumpla.

63. $(A \cup B) \subset A \cap B$ implica que $A = B$

64. $(A \cup \varnothing) \cup B = B \;\; \forall A, B$

65. $A \cap (\varnothing \cup B) = A$ siempre que $A \subset B$

66. $A \cup B = A' \cup B' \;\; \forall A, B$

67. Un pueblo pequeño posee 300 automóviles para el transporte público de sus habitantes. Se sabe que 110 de estos autos tienen más de 20 años de edad, que 120 son de la Nissan y que 50 son de la Nissan con más de 20 años de edad. Determine el número de carros que:
a) No son de la Nissan.
b) No son de la Nissan y tienen más de 20 años.
c) Son de la Nissan con 20 o menos años.
d) No son de la Nissan y tienen 20 o menos años.
e) Tienen 20 o menos años.

68. En un grupo de 150 personas, 45 nadan, 40 montan bicicleta y 50 corren. Se sabe que 20 personas nadan y montan bicicleta, que 32 corren pero no montan bicicleta y 10 personas realizan las tres actividades.
a) ¿Cuántas personas montan bicicleta pero no nadan ni corren?
b) Si 21 personas corren y nadan, ¿cuántas no realizan ninguna de las tres actividades?

69. Al interrogar a una delegación deportiva formada por 250 atletas sobre su afición respecto al teatro, la danza o la poesía, se encontró que 125 prefieren el teatro, 180 prefieren la danza, 65 la poesía, 100 teatro y danza, 25 teatro y poesía, 40 danza y poesía y 20 tenían las tres preferencias. Determine cuántos de estos 250 atletas tienen:
a) Al menos una de estas tres preferencias.
b) Ninguna de estas tres preferencias.
c) Sólo una de estas tres preferencias.
d) Cuando mucho una de estas tres preferencias.
e) Exactamente dos de estas preferencias.

70. Una agencia de automóviles vendió durante un año 180 unidades con las características siguientes:

- 57 tenían transmisión mecánica.
- 77 tenían aire acondicionado.
- 45 tenían transmisión mecánica y aire acondicionado.
- 10 tenían transmisión mecánica, pero no tenían aire acondicionado ni equipo de música.
- 28 tenían transmisión mecánica y aire acondicionado, pero no tenían equipo de música.
- 90 no tenían ninguna de las tres características mencionadas.
- 19 tenían aire acondicionado y equipo de música.

¿Cuántas de estas unidades tenían equipo de música?

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ÁLGEBRA

2

En este capítulo

Si lo desea, en el capítulo 14 puede hallar el valor de esta fracción.

Un poco de historia La mayoría de los estudiantes no se dan cuenta de que gran parte de la notación algebraica que se usa en los textos de álgebra tiene menos de 400 años.

El más grande matemático francés del siglo XVI fue **François Viète** (1540-1603), abogado y miembro del Parlamento, quien dedicó la mayor parte de su tiempo libre a las matemáticas. Escribió muchas obras sobre álgebra, geometría y trigonometría, la mayoría de las cuales imprimió y distribuyó por su propia cuenta. La obra más famosa de Viète, *In Artem*, hizo avanzar en forma significativa la notación algebraica. Antes del trabajo de Viète era una práctica común utilizar diferentes símbolos para representar varias potencias como x, x^2, x^3, etcétera. Viète, que sabía escribir en latín, utilizó la misma letra calificada en forma apropiada para estas potencias: x, *x quadratum* (cuadrado), *x cubum* (cubo), etcétera. Además, extendió el uso de las letras del alfabeto para representar no sólo las variables sino también los coeficientes constantes. La nueva notación de Viète aclaró las operaciones que emplearon para construir una serie completa de términos.

Este capítulo ofrece un repaso de conceptos fundamentales, como teoría de conjuntos, sistema de números reales y notación algebraica. Este material constituye los fundamentos del resto del libro y de cualquier estudio más profundo de matemáticas.

2.1 El sistema de los números reales

Introducción La teoría de conjuntos permite describir de manera muy precisa grupos de números que tienen una propiedad común, lo que resulta muy útil para plantear las soluciones de ciertos tipos de problemas. Sin duda, el lector estará familiarizado con la mayoría de los conceptos de la teoría básica de conjuntos (se estudiaron en el capítulo anterior). En esta sección de repaso nos centraremos en el conjunto de los números reales.

Terminología de conjuntos Un **conjunto** es una colección de objetos distintos. Cada objeto de un conjunto se llama **elemento**. En general, un conjunto se designa con una letra mayúscula, como A o B, y un elemento con una letra minúscula, como x. Para indicar que x es elemento del conjunto A escribimos $x \in A$.

Un conjunto puede especificarse de dos formas: se **enumeran** los elementos del conjunto o se **expresa una propiedad** que los determina. En cada caso se usan llaves { }. Por ejemplo, el conjunto compuesto por los números 5, 10 y 15 puede representarse de las formas siguientes:

$$\{5, 10, 15\} \quad \text{o} \quad \{x \mid x = 5n,\ n = 1, 2, 3\} \tag{1}$$

La primera notación de (1), donde los elementos del conjunto se enumeran, se conoce como **notación por extensión**. La segunda notación de (1) se llama **notación por comprensión** y, en este caso, se lee: "el conjunto de todos los números x tal que $x = 5n$, donde $n = 1, 2, 3$".

Si cada elemento del conjunto B también es elemento del conjunto A, decimos que B es un **subconjunto** de A y escribimos:

$$B \subset A.$$

Se desprende que cada conjunto es un subconjunto de sí mismo.

Se dice que un conjunto que no contiene elementos es un conjunto **vacío** y se denota con el símbolo $\varnothing$.

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto de elementos que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos, A o B. En notación de conjuntos, escribimos

En este texto debe interpretarse que la palabra *o* significa que por lo menos una de las propiedades es verdadera. Esto abre la posibilidad de que ambas sean verdaderas. Así, en el caso de la unión, si $x \in A \cup B$, entonces x puede estar tanto en A como en B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\}.$$

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto de elementos comunes a ambos conjuntos A y B y se escribe:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}.$$

Si A y B no tienen elementos comunes, es decir, si $A \cap B = \varnothing$, se dice que los conjuntos son **disjuntos** o **ajenos**.

EJEMPLO 1 Unión e intersección

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, tenemos que $B \subset A$, porque los números 1, 3 y 5 son elementos de A. Además,

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A \cap C = \{2, 4\},$$

y

$$B \cap C = \varnothing. \quad \leftarrow \text{Los conjuntos } B \text{ y } C \text{ no tienen elementos comunes.}$$

≡

Números Recordemos que el conjunto de los **números naturales** o **enteros positivos** consta de

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

El conjunto N es un subconjunto del conjunto de los **enteros**:

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Los tres puntos (…) que aparecen en los conjuntos N y Z se llaman **elipsis** e indican que los elementos siguen indefinidamente el mismo patrón que el que siguen los elementos dados. El conjunto Z incluye tanto los enteros positivos como los negativos y el número cero, el cual no es negativo ni positivo. A su vez, el conjunto de enteros Z es un subconjunto del conjunto de los **números racionales**:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \text{ y } q \text{ son números enteros, } q \neq 0 \right\}.$$

El conjunto Q está compuesto por todos los números que son cocientes de dos enteros, siempre que el denominador sea diferente de cero; por ejemplo,

$$\frac{-1}{2}, \quad \frac{17}{5}, \quad \frac{10}{-2} = -5, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{36}{4} = 9, \quad \frac{0}{8} = 0.$$

Se dice que el cociente p/q es indefinido si $q = 0$. Por ejemplo, 8/0 y 0/0 son indefinidos.

Advertencia

El conjunto de números racionales no es suficiente para resolver ciertos problemas elementales algebraicos y geométricos. Por ejemplo, no hay un número racional p/q para el que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

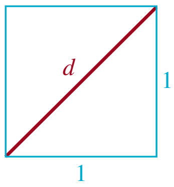


FIGURA 2.1.1 Cuadrado unitario

Véase el problema 69 de los ejercicios de este capítulo. Así, no podemos utilizar números racionales para describir la longitud de la diagonal de un cuadrado unitario (**FIGURA 2.1.1**). Por el teorema de Pitágoras sabemos que la longitud de la diagonal d debe cumplir

$$d^2 = (1)^2 + (1)^2 = 2.$$

Escribimos $d = \sqrt{2}$ y llamamos a d "la raíz cuadrada de 2". Como acabamos de indicar, $\sqrt{2}$ no es un número racional. Pertenece al conjunto de los **números irracionales**, es decir, el conjunto de números que no pueden expresarse como cociente de dos enteros. Otros ejemplos de números irracionales son π, $-\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{7}}$ y $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Si simbolizamos con H el conjunto de los números irracionales, entonces el conjunto de los **números reales** R puede describirse como la unión de dos conjuntos disjuntos:

$$R = Q \cup H.$$

También debemos observar que el conjunto de números reales R puede describirse como la unión de tres conjuntos disjuntos: $R = R^- \cup \{0\} \cup R^+$, donde R^- es el conjunto de los números reales **negativos** y R^+ el de los números reales **positivos**. Los elementos del conjunto $\{0\} \cup R^+$ se llaman números reales **no negativos**.

El diagrama de la **FIGURA 2.1.2** resume la relación entre algunos conjuntos principales de los números reales.

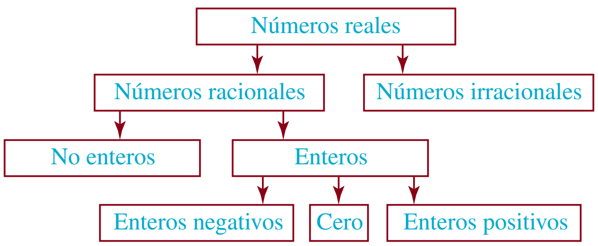
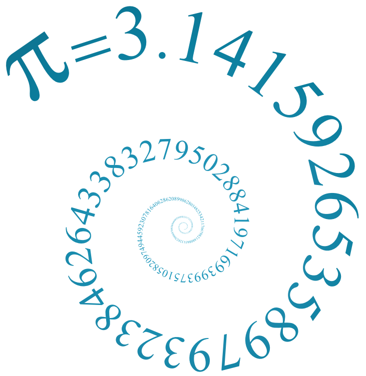


FIGURA 2.1.2 Los números reales son racionales o irracionales

Decimales Todo número real puede expresarse en **forma decimal**. Por ejemplo,

$$\frac{1}{4} = 0.25, \qquad \frac{25}{7} = 3.571428571428\ldots,$$
$$\frac{7}{3} = 2.3333\ldots, \qquad \pi = 3.14159265\ldots.$$



El número π es un decimal no finito y no periódico

Se dice que números como 0.25 y 1.6 son **decimales finitos**, en tanto que números como

$$1.\overbrace{32}^{\text{se repite}}3232\ldots \quad \text{y} \quad 3.\overbrace{571428}^{\text{se repite}}571428\ldots \tag{2}$$

se llaman **decimales periódicos** o **recurrentes**. Un decimal periódico como 1.323232… con frecuencia se escribe $1.\overline{32}$, donde la barra indica el número o números que se repiten. Puede demostrarse que cada número racional posee una representación decimal periódica o finita. Y viceversa, todo decimal periódico o finito es un número racional. Así, los dos números en (2) son racionales. También es un hecho básico que todo número decimal es un número real. Tenemos entonces que el conjunto de los números irracionales se compone de todos los decimales que no son finitos ni periódicos. Así, π y $\sqrt{2}$ tienen representaciones decimales no periódicas y no finitas.

Porcentaje Los fraccionarios o decimales algunas veces se expresan como **porcentajes**; por ejemplo, 8% quiere decir $\frac{8}{100}$ o 0.08. En general, b% significa "b partes de 100", y es simplemente otra forma de escribir $\frac{b}{100}$. Por ejemplo, 42% significa $\frac{42}{100}$; entonces, 42% = 0.42. De igual manera, $0.005\% = \frac{0.005}{100} = 0.00005$.

Un modo sencillo de convertir un número decimal en porcentaje es multiplicar el decimal por 1 escrito en forma de 100%. Por ejemplo,

$$0.35 = 0.35 \times 1 = 0.35 \times 100\% = 35\%$$

De igual manera, $0.001 = 0.001 \times 100\% = 0.1\%$.

Los porcentajes se utilizan con frecuencia para describir los incrementos o reducciones en cantidades como población, salarios y precios. Cuando una cantidad aumenta, el **porcentaje de incremento** se da por

$$\frac{\text{cantidad de aumento}}{\text{cantidad original}} \times 100\% \tag{3}$$

De igual forma, cuando una cantidad disminuye, el **porcentaje de decrecimiento** está dado por

$$\frac{\text{cantidad de decrecimiento}}{\text{cantidad original}} \times 100\% \tag{4}$$

EJEMPLO 2 Porcentaje

La población de un pequeño pueblo disminuyó de 1 750 a 1 700 habitantes. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento?

Solución

La cantidad de decrecimiento es $1\,750 - 1\,700 = 50$, y la cantidad original es 1 750. Si usamos la fórmula (4) encontramos que

$$\frac{50}{1\,750} \approx 0.0285714 = 0.0285714 \times 100\% \approx 2.86\%$$

Luego, el porcentaje de decrecimiento es de aproximadamente 2.86%. ≡

Notemos que en el ejemplo 2 utilizamos el símbolo ≈ en lugar de = para indicar que el número es sólo una aproximación.

EJEMPLO 3 Porcentaje

El salario por hora de trabajo de un estudiante se elevó de 5.25 dólares a 5.75. ¿Cuál es el porcentaje de incremento?

Solución

El monto del incremento es $5.75 − $5.25 = $0.50, y la cantidad original es de $5.25. Si usamos la ecuación (3) tenemos que el porcentaje de incremento es

$$\frac{\text{US\$0.50}}{\text{US\$5.25}} \approx 0.952381 = 0.952381 \times 100\% \approx 9.52\%$$

≡

EJEMPLO 4 Porcentaje

¿Cuál es el precio de oferta de un balón de volibol si el precio normal es de $28.60 y hay 25% de descuento?

Solución

Como se ofrece 25% de descuento, el precio de oferta será de 75% del precio normal, o

$$(0.75)(\$28.60) = \$21.45$$

De otra forma, podemos calcular 25% de descuento y restarlo al precio normal, así:

$$\$28.60 - (0.25)(\$28.60) = \$28.60 - \$7.15 = \$21.45$$

≡

Sistema de los números reales El conjunto de números reales R junto con las operaciones de adición y multiplicación se llama **sistema de los números reales**. Las reglas básicas del álgebra para este sistema permiten expresar hechos matemáticos en formas simples y concisas, y resolver ecuaciones para dar respuestas a preguntas matemáticas. Las **propiedades básicas** del sistema de los números reales respecto de las operaciones de *adición* (simbolizada con $+$) y *multiplicación* (simbolizada con los signos $\cdot$ o $\times$) se presentan en el cuadro siguiente, donde a, b y c representan números reales.

PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS NÚMEROS REALES

Adición	Multiplicación
1. Propiedades de cerradura	
i) $a + b$ es un número real	*ii*) $a \cdot b$ es un número real
2. Propiedades conmutativas	
i) $a + b = b + a$	*ii*) $a \cdot b = b \cdot a$
3. Propiedades asociativas	
i) $a + (b + c) = (a + b) + c$	*ii*) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
4. Propiedades de identidad	
i) $a + 0 = 0 + a = a$	*ii*) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
5. Propiedades del inverso	
i) $a + (-a) = (-a) + a = 0$	*ii*) $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

En la propiedad 4*i*), el número 0 se denomina **identidad aditiva** del sistema de los números reales; en la propiedad 4*ii*), el número 1 se conoce como **identidad multiplicativa** del mismo sistema. En la propiedad 5*i*), el número $-a$ es el **inverso aditivo** o el **negativo** del número a. Todo número real tiene un inverso aditivo, pero en la propiedad 5*ii*), todo número a que *no es cero* tiene un **inverso multiplicativo** $1/a$, con $a \neq 0$. El inverso multiplicativo del número a diferente de cero también se conoce como el **recíproco** de a.

EJEMPLO 5 Inversos

a) El inverso aditivo de 10 es -10.
b) El inverso aditivo de $-\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{2}$.
c) El inverso multiplicativo, o recíproco, de 7 es $\frac{1}{7}$.
d) El inverso multiplicativo, o recíproco de $\frac{2}{3}$ es $\dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$. ≡

La **propiedad distributiva** de los números reales combina las dos operaciones de adición y multiplicación. El producto $a \cdot b$ de dos números reales a y b se escribe por lo general sin el punto de multiplicación, es decir, se escribe ab.

PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS NÚMEROS REALES (CONTINÚA)

6. Propiedades distributivas:
i) $a(b + c) = ab + ac$ *ii*) $(a + b)c = ac + bc$

La propiedad distributiva se puede extender para incluir más de dos números en la suma. Por ejemplo,

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

y

$$(a + b + c + d)e = ae + be + ce + de$$

EJEMPLO 6 Reconocimiento de las propiedades

Exprese una propiedad algebraica básica del sistema de los números reales para justificar cada uno de los enunciados siguientes, donde x, y y z son números reales.

a) $(6 + 8)y = y(6 + 8)$
b) $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2)$
c) $(x + 3)y + 2 = (xy + 3y) + 2$
d) $(x + y) \cdot 1 = x + y$
e) $(x + 2) + [-(x + 2)] = 0$
f) $(y + z)\dfrac{1}{y + z} = 1$, si $y + z \neq 0$

Solución

a) Propiedad conmutativa de la multiplicación ← propiedad 2*ii*)
b) Propiedad asociativa de la adición ← propiedad 3*i*)
c) Propiedad distributiva ← propiedad 6*ii*)
d) Propiedad de identidad de la multiplicación ← propiedad 4*ii*)
e) Propiedad del inverso de la adición ← propiedad 5*i*)
f) Propiedad del inverso de la multiplicación ← propiedad 5*ii*) ≡

Es posible definir las operaciones de **sustracción** y **división** en términos de la adición y multiplicación, respectivamente.

Definición 2.1.1 Diferencia y cociente

Para los números reales a y b, la **diferencia**, $a - b$, se define como

$$a - b = a + (-b).$$

Si $b \neq 0$, entonces el **cociente**, $a \div b$, se define como

$$a \div b = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}.$$

En el cociente a/b, a se llama **numerador** y b **denominador**. Con frecuencia, el cociente de dos números reales a/b se denomina **fracción**. Tenga en cuenta que $a \div b$ o a/b no está definido cuando $b = 0$. Por tanto, $a/0$ no está definido para ningún número real a. Como se muestra en el ejemplo 7, no todas las propiedades de la adición y la multiplicación son válidas para la sustracción y la división.

EJEMPLO 7 La sustracción no es asociativa

Puesto que $1 - (2 - 3) = 2$ y $(1 - 2) - 3 = -4$, observamos que

$$1 - (2 - 3) \neq (1 - 2) - 3.$$

Por consiguiente, la sustracción no es asociativa. ≡

Muchas propiedades adicionales de los números reales pueden derivarse de las propiedades básicas. Las propiedades siguientes también se usarán en este texto.

PROPIEDADES ADICIONALES

7. Propiedades de igualdad:

i) Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$ para todo número real c.

ii) Si $a = b$, entonces $ac = bc$ para todo número real c.

8. Propiedades de la multiplicación por cero:

i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

ii) Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$, $b = 0$, o ambas.

9. Propiedades de cancelación:

i) Si $ac = bc$, y $c \neq 0$, entonces $a = b$.

ii) $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$, siempre que $c \neq 0$ y $b \neq 0$.

Como veremos en el capítulo 3, la propiedad 8*ii*) es sumamente importante para resolver ciertos tipos de ecuaciones. Por ejemplo, si $x(x + 1) = 0$, podemos concluir que $x = 0$ o bien, $x + 1 = 0$.

EJEMPLO 8 Cancelación

a) Si $2x = 2y$, entonces $x = y$ ← por la propiedad 9*i*)

b) $\dfrac{36}{27} = \dfrac{4 \cdot \cancel{9}}{3 \cdot \cancel{9}} = \dfrac{4}{3}$ ← por la propiedad 9*ii*) ≡

Las barras inclinadas rojas que atraviesan un símbolo indican que éste se cancela.

PROPIEDADES ADICIONALES (CONTINÚA)

10. Propiedades de la sustracción y negativos:

i) $-(-a) = a$

ii) $-(ab) = (-a)(b) = a(-b)$

iii) $-a = (-1)a$

iv) $(-a)(-b) = ab$

EJEMPLO 9 Simplificación

Simplifique $-(4 + x - y)$

Solución En vista de la propiedad 10*iii*), escribimos

$$-(4 + x - y) = (-1)(4 + x - y)$$

Entonces, por la ley distributiva, propiedad 6*i*),

$$\begin{aligned} -(4 + x - y) &= (-1)(4 + x - y) \\ &= (-1)4 + (-1)x + (-1)(-y) \quad \leftarrow \text{por las propiedades } 10iii) \text{ y } 10iv) \\ &= -4 - x + y \end{aligned}$$

≡

Ya debe estar familiarizado con la siguiente lista de propiedades de las fracciones a/b y c/b, donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

PROPIEDADES ADICIONALES (CONTINÚA)

11. Fracciones equivalentes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } ad = bc$$

12. Regla de los signos:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

13. Adición o sustracción con denominadores comunes:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

14. Multiplicación:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

15. División:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \ c \neq 0$$

EJEMPLO 10 Reconsideración del ejemplo 2*a*)

El inverso multiplicativo, o recíproco, de $\frac{2}{3}$ es $\overbrace{\frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 \cdot \frac{3}{2}}^{\text{por la propiedad 15}} = \frac{3}{2}$, puesto que

$$\overbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6}}^{\text{por la propiedad 14}} = 1.$$

≡

PROPIEDADES ADICIONALES (CONTINÚA)

16. División de cero y división por cero

i) $0 \div b = \dfrac{0}{b} = 0, \quad b \neq 0$

ii) $a \div 0 = \dfrac{a}{0}$ es indefinida, $a \neq 0$

iii) $0 \div 0 = \dfrac{0}{0}$ es indefinida

EJEMPLO 11 Productos y cocientes

Evalúe cada una de las expresiones siguientes:

a) $(-x)(-y)$ ***b***) $\dfrac{-(-a)}{-b}$ ***c***) $\dfrac{2(u+v)}{2v}$

d) $\dfrac{y}{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}$ ***e***) $z \cdot \dfrac{0}{5}$ ***f***) $\dfrac{w}{2-(5-3)}$

Solución

a) $(-x)(-y) = xy$ ← por la propiedad 10*iv*)

b) $\dfrac{-(-a)}{-b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$ ← por las propiedades 10*i*) y 12

c) $\dfrac{2(u+v)}{2v} = \dfrac{u+v}{v}$ ← por la propiedad 9*ii*)

d) Para evaluar $y/(1/4 + 3/5)$, primero evaluamos el denominador:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{(1)(5) + (4)(3)}{(4)(5)} = \frac{17}{20}. \quad \leftarrow \text{común denominador}$$

Entonces tenemos que

$$\frac{y}{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}} = \frac{y}{\frac{17}{20}} = \frac{y}{1} \cdot \frac{20}{17} = \frac{20y}{17}. \quad \leftarrow \text{por la propiedad 15}$$

e) $z \cdot \dfrac{0}{5} = z \cdot 0 = 0$ ← por la propiedad 8*i*)

f) La expresión $w/[2-(5-3)]$ es indefinida, ya que su denominador es cero; es decir, $2-(5-3) = 2-2 = 0$ [véase la propiedad 16*ii*)]. ≡

Notas del aula

En la solución del inciso *c*) del ejemplo 11, un error común (sobre todo en tareas y exámenes de los alumnos) es cancelar las letras *v* en el numerador y el denominador:

$$\frac{u + \cancel{v}}{\cancel{v}} = u. \quad \leftarrow \text{INCORRECTO}$$

No se puede realizar ninguna cancelación en la simplificación de $\dfrac{2(u+v)}{2v} = \dfrac{u+v}{v}$, pues *v no es factor multiplicativo* tanto del numerador como del denominador, como lo requiere la ley de cancelación 9*ii*).

2.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas 1 a 8, halle el conjunto indicado si $A = \{1, 4, 6, 8, 10, 15\}$, $B = \{3, 9, 11, 12, 14\}$ y $C = \{1, 2, 5, 7, 8, 13, 14\}$.

1. $A \cup B$
2. $A \cup C$
3. $B \cup C$
4. $A \cap B$
5. $A \cap C$
6. $B \cap C$
7. $(A \cap B) \cup B$
8. $A \cup (B \cup C)$

En los problemas 9 a 12, enumere los elementos del conjunto dado.

9. $\{r \mid r = p/q,\ p = 1, 2,\ q = -1, 1\}$
10. $\{t \mid t = 4 + z,\ z = -1, -3, -5\}$
11. $\{x \mid x = 2y,\ y = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$
12. $\{y \mid y - 5 = 2\}$

En los problemas 13 a 16, use la notación de conjuntos para expresar el conjunto dado.

13. El conjunto de los enteros negativos mayores que -3.
14. El conjunto de los números reales cuyo cuadrado es 9.
15. El conjunto de los enteros pares.
16. El conjunto de los enteros impares.

En los problemas 17 a 32, exprese una de las propiedades básicas del sistema de los números reales (propiedades 1 a 6) para justificar cada una de las expresiones dadas.

17. $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$
18. $[(1)(2)](3) = [(2)(1)](3)$
19. $(x + y) + 3 = (y + x) + 3$
20. $(a + 2) + \pi = \pi + (a + 2)$
21. $[(-2)(\frac{1}{2})]z = -2[(\frac{1}{2})(z)]$
22. $(1 + 2)(-3) = 1(-3) + 2(-3)$
23. $1 \cdot (\sqrt{2}) = \sqrt{2}$
24. $(3 + 4)(5 + 2) = (3 + 4)5 + (3 + 4)2$
25. $(\frac{1}{5}) \cdot 5 = 1$
26. $\frac{1}{4} + (-\frac{1}{4}) = 0$
27. $x(y + 0) + z = xy + z$
28. $\{3 + [(-5)(1)]\} + 4 = \{3 + (-5)\} + 4$
29. $[(w + 3)2]z = [2(w + 3)]z$
30. $(-13 + z)(2) + 7 = [z + (-13)](2) + 7$
31. $(a - b) + [-(a - b)] = 0$
32. $(x - y)\left(\dfrac{1}{x - y}\right) = 1,\ x \neq y$

En los problemas 33 a 44, exprese una de las propiedades del sistema de los números reales (propiedades 7 a 16) para justificar cada una de las expresiones dadas.

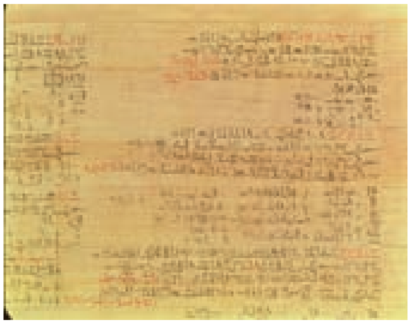
33. $(-5)(-x) = 5x$
34. $-(-17) = 17$
35. Si $x + 3 = y + 3$, entonces $x = y$.
36. Si $y + z = 5 + z$, entonces $y = 5$.
37. Si $(x + 2)(3) = 4(3)$, entonces $x + 2 = 4$.
38. Si $z^2 = 0$, entonces $z = 0$.
39. Si $(x + 1)(x - 2) = 0$, entonces $x + 1 = 0$ o $x - 2 = 0$.
40. $(a + b + c) \cdot 0 = 0$
41. $\dfrac{0}{a^2 + 1} = 0$
42. $\dfrac{2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = 2$
43. $\dfrac{x + y}{2} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2}$
44. $\dfrac{-x}{y^2 + 9} = -\dfrac{x}{y^2 + 9}$

En los problemas 45 a 50, simplifique la expresión dada.

45. $-(-a)[2 - 3]$
46. $\dfrac{-(-b)}{-bc}$
47. $\dfrac{4(3 + c)}{4c}$
48. $[(4)(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})](-z) + z$
49. $\dfrac{(14)(0)(x)}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$
50. $(\pi - \pi)(x + y - 3)$

Aplicaciones diversas

51. **Matemáticas antiguas** El papiro Rhind (c. 1650 a.C.), adquirido por el egiptólogo escocés Alexander Henry Rhind en 1858, se considera uno de los mejores ejemplos de las matemáticas egipcias. En él, los egipcios utilizaron $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ como valor de π.



El papiro Rhind

a) ¿Es la aproximación mayor o menor que π?
b) Demuestre que el error al utilizar esta aproximación es menor que 1% de π.

52. Estudio de la Biblia Partiendo del hecho de que la circunferencia de un círculo es igual a π por el diámetro, determine qué valor de π implica esta cita bíblica: "Hizo una gran pileta de metal fundido, llamado el mar, de diez codos de borde a borde, enteramente redondo y de cinco codos de alto. Un cordón de treinta codos medía su contorno". (Esta cita está tomada de 2 Crónicas 4:2 y 1 Reyes 7:23, que datan del siglo x a.C.)

Para la discusión

En los problemas 53 a 68, responda verdadero o falso.

53. $\frac{1}{3}$ es elemento de Z. _____
54. $-\frac{1}{2}$ es elemento de Q. _____
55. $\sqrt{3}$ es elemento de R. _____
56. $\sqrt{2}$ es un número racional. _____
57. 0.1333… es un número irracional. _____
58. 1.5 es un número racional. _____
59. 0.121212… es un número racional. _____
60. $\frac{8}{0}$ es elemento de Q. _____
61. -4 es elemento de Z, pero -4 no es elemento de N. _____
62. π es elemento de R, pero π no es elemento de Q. _____
63. Todo número irracional es un número real. _____
64. Todo entero es un número racional. _____
65. Todo número decimal es un número real. _____
66. La intersección del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales es el conjunto vacío. _____
67. Si $c \neq 0$, entonces $(a + b) \div c = (a \div c) + (b \div c)$. _____
68. Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $a + b \neq 0$, entonces $c \div (a + b) = (c \div a) + (c \div b)$. _____
69. Demuestre que $\sqrt{2}$ no puede escribirse como un cociente de enteros. [*Pista:* suponga que hay una fracción p/q reducida a sus términos mínimos, de modo que $(p/q)^2 = 2$. Esto se simplifica a $p^2 = 2q^2$, lo que implica que p^2; por tanto, p es un entero par, por ejemplo, $p = 2r$. Realice esta sustitución y considere que $(2r/q)^2 = 2$. Debe llegar a una contradicción del hecho de que p/q se redujo a sus términos mínimos].
70. Explique: la suma de un número irracional y un número racional debe ser irracional. [*Pista:* si la suma de los dos números fuera racional, podría escribirse como cociente de los enteros p/q. ¿Por qué conduce esto a una contradicción?].
71. Explique: ¿la suma de dos números irracionales es necesariamente irracional?
72. Explique: ¿el producto de dos números irracionales es necesariamente irracional?
73. Explique: ¿el cociente de dos números irracionales es necesariamente irracional?
74. En general, $a + (-b) \neq b + (-a)$. ¿Qué indica esto sobre la operación de sustracción?
75. Algunos códigos secretos funcionan cambiando letras del alfabeto. La **FIGURA 2.1.3** muestra un cambio de 2. Cada letra de un mensaje puede representarse por los guarismos de un número decimal. Por ejemplo, el número decimal 0.12121212… cifra el mensaje "STUDY MATH" en TVVFZ OBVI. Si el uso de 9/37 produce el mensaje codificado RCWJEJQVDU PLXIV, ¿cuál fue el mensaje original?

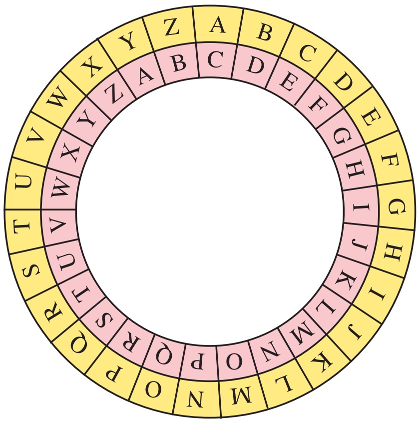


FIGURA 2.1.3 Rueda del código del problema 75

76. Suponga que los conjuntos A y B tienen un número finito de elementos. $n(A)$ y $n(B)$ representan el número de elementos de los conjuntos A y B, respectivamente. Explique por qué la fórmula

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

da el número de elementos de la unión $A \cup B$.

2.2 La recta de los números reales

■ Introducción Para dos números reales distintos a y b, siempre hay un tercer número real entre ellos; por ejemplo, su promedio $(a + b)/2$ es el punto medio entre ellos. Asimismo, para dos puntos distintos de A y B en una recta, hay siempre un tercer punto entre ellos; por ejemplo, el punto medio M del segmento de recta AB. Hay muchas similitudes como ésta entre el conjunto R de números reales y el conjunto de puntos en una recta que indican el uso de una recta para "describir" el conjunto de los números reales $R = R^- \cup \{0\} \cup R^+$. A continuación se explica cómo hacer esto.

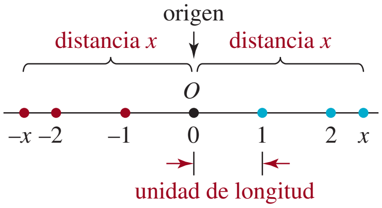


FIGURA 2.2.1 Recta numérica real

■ La recta de los números reales Dada cualquier recta, escogemos un punto O sobre ella para representar el número 0. Este punto en particular se llama **origen**. Si ahora seleccionamos un segmento de recta de longitud unitaria como se muestra en la **FIGURA 2.2.1**, cada número real positivo x puede representarse con un punto a una distancia x a la *derecha* del origen. De igual forma, cada número real negativo $-x$ puede representarse con un punto a una distancia x hacia la *izquierda* del origen. Esta asociación produce una correspondencia uno a uno entre el conjunto de números reales R y el conjunto de puntos de una recta, llamada **recta de los números reales** o **recta numérica real**. Para cualquier punto P dado en la recta numérica, el número p, que corresponde a ese punto, se llama **coordenada** de P. Así, el conjunto R^- de los números reales negativos consiste en las coordenadas de puntos a la izquierda del origen; por su parte, el conjunto R^+ de números reales negativos está formado por las coordenadas de puntos a la derecha del origen, y el número 0 es la coordenada del origen O (**FIGURA 2.2.2**).

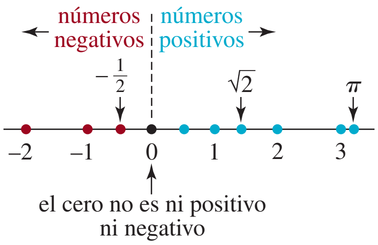


FIGURA 2.2.2 Direcciones positiva y negativa en la recta numérica real

En general, no diferenciamos entre un punto en la recta numérica real y su coordenada. Por ejemplo, a veces nos referimos al punto en la recta con coordenada 5 como "el punto 5".

■ Menor que y mayor que Dos números reales a y b, con $a \neq b$, pueden compararse mediante la relación de orden **menor que**. Tenemos la definición siguiente.

Definición 2.2.1 Menor que

Se dice que el número real a es **menor que** b, lo que se escribe $a < b$, si y sólo si la diferencia $b - a$ es positiva.

Si a es menor que b, entonces de forma equivalente podemos decir que b es **mayor que** a, lo que se escribe $b > a$. Por ejemplo, $-7 < 5$, ya que $5 - (-7) = 12$ es positivo. Podemos escribir también $5 > -7$.

EJEMPLO 1 Una desigualdad

Usando la relación de orden mayor que, compare los números reales π y $\frac{22}{7}$.

Solución A partir de $\pi = 3.1415\ldots$ y $\frac{22}{7} = 3.1428\ldots$, tenemos que

$$\frac{22}{7} - \pi = (3.1428\ldots) - (3.1415\ldots) = 0.001\ldots$$

Puesto que esta diferencia es positiva, concluimos que $\frac{22}{7} > \pi$. ≡

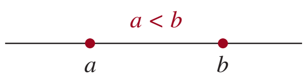


FIGURA 2.2.3 El número a está a la izquierda del número b

■ Desigualdades La recta de los números reales es útil para demostrar relaciones de orden entre dos números reales a y b. Como se muestra en la **FIGURA 2.2.3**, decimos que el número

a es **menor que** el número b, y escribimos $a < b$, siempre que el número a se sitúe a la izquierda del número b en la recta numérica. De forma equivalente, como el número b se sitúa a la derecha de a en la recta numérica, decimos que b es **mayor que** a y escribimos $b > a$. Por ejemplo, $4 < 9$ es lo mismo que $9 > 4$. También empleamos la notación $a \leq b$ si el número a es **menor o igual al** número b. Asimismo, $b \geq a$ significa que b es **mayor o igual a** a. Por ejemplo, $2 \leq 5$ puesto que $2 < 5$. Además, $4 \geq 4$ porque $4 = 4$.

Para dos números reales cualesquiera a y b, sólo *una* de las tres expresiones siguientes es verdadera:

$$a < b, \quad a = b \quad \text{o} \quad a > b \tag{1}$$

La propiedad dada en (1) se llama **ley de tricotomía**.

■ Terminología Los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ se llaman **símbolos de desigualdad** y las expresiones como $a < b$ o $b \geq a$ se denominan **desigualdades**. Una desigualdad $a < b$ a menudo se conoce como **desigualdad estricta**, en tanto que una desigualdad como $b \geq a$ se designa **desigualdad no estricta**. La desigualdad $a > 0$ significa que el número a está a la derecha del número 0 en la recta numérica y, en consecuencia, a es **positivo**. Indicamos que un número a es **negativo** por medio de la desigualdad $a < 0$. Como la desigualdad $a \geq 0$ significa que a es mayor que 0 (positivo) o igual a 0 (que no es positivo ni negativo), decimos que a es **no negativo**. De manera semejante, si $a \leq 0$, decimos que a es **no positivo**.

Las desigualdades también tienen la propiedad transitiva siguiente.

Teorema 2.2.1 Propiedad transitiva

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Por ejemplo, si $x < 12$ y $12 < y$, concluimos de la propiedad transitiva que $x < y$. El teorema 2.2.1 puede visualizarse fácilmente en la recta numérica si a se coloca en cualquier punto en la recta, b a la derecha de a y el número c a la derecha de b.

■ Valor absoluto También podemos utilizar la recta de los números reales para presentar la distancia. Como se muestra en la **FIGURA 2.2.4**, la distancia del punto 3 al origen es de 3 unidades, y la distancia del punto -3 al origen es de 3, o $-(-3)$, unidades. De nuestra explicación sobre la recta de los números reales resulta que, en general, la distancia de cualquier número al origen es el "valor sin signo" de ese número.

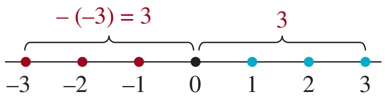


FIGURA 2.2.4 Distancia en la recta de los números reales

De forma más precisa, como se muestra en la **FIGURA 2.2.5**, para cualquier número real positivo x, la distancia del punto x al origen es x, pero para cualquier número *negativo* y, la distancia del punto y al origen es $-y$. Por supuesto, para $x = 0$ la distancia al origen es 0. El concepto de distancia de un punto en la recta numérica al origen se describe mediante la noción del **valor absoluto** de un número real.

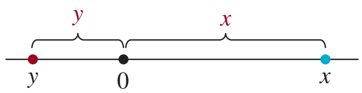


FIGURA 2.2.5 La distancia de 0 a x es x; la distancia de 0 a y es $-y$

Definición 2.2.2 Valor absoluto

Para cualquier número real a, el valor absoluto de a, denotado por $|a|$, es

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0, \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases} \tag{2}$$

EJEMPLO 2 Valores absolutos

Como 3 y $\sqrt{2}$ son números positivos,

$$|3| = 3 \qquad \text{y} \qquad |\sqrt{2}| = \sqrt{2}.$$

Pero como -3 y $-\sqrt{2}$ son números negativos, es decir, $-3 < 0$ y $-\sqrt{2} < 0$, deducimos de (2) que

$$|-3| = -(-3) = 3 \qquad \text{y} \qquad |-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 3 Valores absolutos

a) $|2 - 2| = |0| = 0$ $\leftarrow$ de (2), $0 \geq 0$

b) $|2 - 6| = |-4| = -(-4) = 4$ $\leftarrow$ de (2), $-4 < 0$

c) $|2| - |-5| = 2 - [-(-5)] = 2 - 5 = -3$ $\leftarrow$ de (2), $-5 < 0$ $\equiv$

EJEMPLO 4 Valor absoluto

Halle $|\sqrt{2} - 3|$.

Solución Para hallar $|\sqrt{2} - 3|$ primero debemos determinar si $\sqrt{2} - 3$ es positivo o negativo. Como $\sqrt{2} \approx 1.4$, vemos que $\sqrt{2} - 3$ es un número negativo. Por tanto,

$$\begin{aligned} |\sqrt{2} - 3| &= -(\sqrt{2} - 3) = -\sqrt{2} + 3 \quad \leftarrow \text{Aquí se usa la ley distributiva} \\ &= 3 - \sqrt{2}. \end{aligned} \qquad \equiv$$

Advertencia ▶ Es un error común pensar que $-y$ representa un número negativo porque la literal y va precedida de un signo menos. Hemos de destacar que si y representa un número negativo, entonces el negativo de y, es decir, $-y$ es un número positivo. Por tanto, si y es *negativo*, entonces $|y| = -y$.

EJEMPLO 5 Valor de una expresión de valor absoluto

Halle $|x - 6|$ si ***a***) $x > 6$, ***b***) $x = 6$ y ***c***) $x < 6$.

Solución

a) Si $x > 6$, entonces $x - 6$ es positivo. Luego, de la definición de valor absoluto en (2) concluimos que $|x - 6| = x - 6$.

b) Si $x = 6$, entonces $x - 6 = 0$; luego, $|x - 6| = |0| = 0$.

c) Si $x < 6$, entonces $x - 6$ es negativo y tenemos que $|x - 6| = -(x - 6) = 6 - x$. $\equiv$

Para cualquier número real x y su negativo, $-x$, la distancia al origen es la misma. Es decir, $|x| = |-x|$. Ésta es una de las propiedades especiales del valor absoluto, las cuales describimos en el teorema siguiente.

Teorema 2.2.2 Propiedades del valor absoluto

Sean x y y números reales. Entonces

i) $|x| \geq 0$

ii) $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$

iii) $|x| = |-x|$

iv) $|xy| = |x||y|$

v) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, con $y \neq 0$

vi) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Definir estas propiedades con palabras es una forma de comprenderlas cabalmente. Por ejemplo, la propiedad *i*) dice que el valor absoluto de una cantidad es siempre no negativa. La propiedad *iv*) dice que el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos de los dos factores. El inciso *vi*) del teorema 2.2.2 es una propiedad importante del valor absoluto llamada **desigualdad triangular**.

Distancia entre puntos El concepto de valor absoluto no sólo describe la distancia de un punto al origen; también es útil para hallar la distancia que hay entre dos puntos en la recta numérica. Puesto que deseamos describir la distancia como una cantidad positiva, restamos una coordenada de la otra y luego obtenemos el valor absoluto de la diferencia (**FIGURA 2.2.6**).

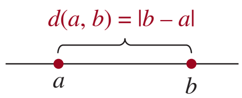


FIGURA 2.2.6 Distancia en la recta de los números reales

Definición 2.2.3 Distancia en la recta de los números reales

Si a y b son dos puntos en la recta de los números reales, la **distancia** de a a b está dada por

$$d(a, b) = |b - a|. \tag{3}$$

EJEMPLO 6 Distancias

a) La distancia de -5 a 2 es

$$d(-5, 2) = |2 - (-5)| = |7| = 7.$$

b) La distancia de 3 a $\sqrt{2}$ es

$$d(3, \sqrt{2}) = |\sqrt{2} - 3| = 3 - \sqrt{2}.$$ ←véase el ejemplo 4 ≡

Vemos que la distancia de a a b es la misma que la distancia de b a a, pues por la propiedad *iii*) del teorema 2.2.2,

$$d(a, b) = |b - a| = |-(b - a)| = |a - b| = d(b, a).$$ ← $b - a$ representa la parte de x en *iii*) del teorema 2.2.2

Así, $d(a, b) = d(b, a)$

Coordenada del punto medio La definición 2.2.3 sirve para hallar una expresión para el **punto medio** de un segmento de recta. El punto medio m de un segmento de recta que une a a y b es el promedio de los dos extremos:

$$m = \frac{a + b}{2}. \tag{4}$$

Véase la **FIGURA 2.2.7**.

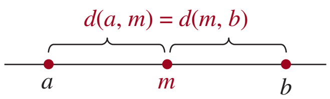


FIGURA 2.2.7 La distancia de a a m es igual a la distancia de m a b

EJEMPLO 7 Punto medio

Con base en la fórmula (4), el punto medio del segmento de recta que une los puntos 5 y -2 es

$$\frac{5 + (-2)}{2} = \frac{3}{2}.$$

Véase la **FIGURA 2.2.8**. ≡

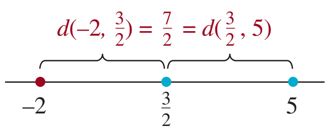


FIGURA 2.2.8 Punto medio del ejemplo 7

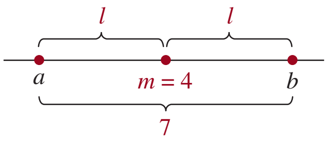


FIGURA 2.2.9 Las distancias son iguales en el ejemplo 8

EJEMPLO 8 Dado el punto medio

El segmento de recta que une a a y b tiene punto medio $m = 4$. Si la distancia de a a b es de 7, halle a y b.

Solución Como observamos en la **FIGURA 2.2.9**, como m es el punto medio,

$$l = d(a, m) = d(m, b).$$

Por tanto, $2l = 7$ o $l = \frac{7}{2}$. Ahora tenemos que $a = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$ y $b = 4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}$. ≡

2.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas 1 y 2, trace una recta numérica y sitúe los puntos dados en ella.

1. $0, -\frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2, \frac{4}{3}, 2.5$

2. $0, 1, -1, \sqrt{2}, -3, -\sqrt{2} + 1$

En los problemas 3 a 10, escriba la expresión como una desigualdad

3. x es positivo

4. y es negativo

5. $x + y$ es no negativo

6. a es menor que -3

7. b es mayor o igual a 100

8. $c - 1$ es menor o igual que 5

9. $|t - 1|$ es menor que 50

10. $|s + 4|$ es mayor o igual que 7

En los problemas 11 a 16, compare las parejas de números mediante la relación de orden "menor que".

11. $15, -3$

12. $-9, 0$

13. $\frac{4}{3}, 1.33$

14. $-\frac{7}{15}, -\frac{5}{11}$

15. $\pi, 3.14$

16. $1.732, \sqrt{3}$

En los problemas 17 a 22, compare las parejas de números mediante la relación de orden "mayor o igual que".

17. $-2, -7$

18. $-\frac{1}{7}, -0.143$

19. $2.5, \frac{5}{2}$

20. $0.333, \frac{1}{3}$

21. $\frac{423}{157}, 2.6$

22. $\sqrt{2}, 1.414$

En los problemas 23 a 44, halle el valor absoluto.

23. $|7|$

24. $|-7|$

25. $|22|$

26. $\left|\frac{22}{7}\right|$

27. $\left|\frac{-22}{7}\right|$

28. $|\sqrt{5}|$

29. $|-\sqrt{5}|$

30. $|0.13|$

31. $|\pi - 4|$

32. $|2 - 6|$

33. $|6 - 2|$

34. $||2| - |-6||$

35. $|-6| - |-2|$

36. $|\sqrt{5} - 3|$

37. $|3 - \sqrt{5}|$

38. $|8 - \sqrt{7}|$

39. $|\sqrt{7} - 8|$

40. $|-(\sqrt{7} - 8)|$

41. $|\sqrt{5} - 2.3|$

42. $\left|\frac{\pi}{2} - 1.57\right|$

43. $|6.28 - 2\pi|$

44. $|\sqrt{7} - 4.123|$

En los problemas 45 a 56, escriba la expresión sin utilizar los símbolos del valor absoluto.

45. $|h|$, si h es negativo

46. $|-h|$, si h es negativo

47. $|x - 2|$, si $x < 2$

48. $|x - 2|$, si $x = 2$

49. $|x - 2|$, si $x > 2$

50. $|5 - x|$, si $x < 5$

51. $|5 - x|$, si $x = 5$

52. $|5 - x|$, si $x > 5$

53. $|x - y| - |y - x|$

54. $\dfrac{|x - y|}{|y - x|}$ con $x \neq y$

55. $\dfrac{|h|}{h}$, con $h < 0$

56. $\dfrac{z}{|-z|}$, con $z > 0$

En los problemas 57 a 64, halle *a*) la distancia entre los puntos dados y *b*) la coordenada del punto medio del segmento de recta que une los puntos dados.

57. 7, 3

58. 2, 5

59. 0.6, 0.8

60. -100, 255

61. -5, -8

62. 6, -4.5

63. $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$

64. $-\frac{1}{4}$, $\frac{7}{4}$

En los problemas 65 a 72, m es el punto medio del segmento de recta que une a a (el punto final a la izquierda) y b (el punto final de la derecha). Utilice las condiciones dadas para hallar los valores indicados.

65. $m = 5$, $d(a, m) = 3$; a, b

66. $m = -1$, $d(m, b) = 2$; a, b

67. $m = 2$, $d(a, b) = 7$; a, b

68. $m = \sqrt{2}$, $d(a, b) = 1$; a, b

69. $a = 4$, $d(a, m) = \pi$; b, m

70. $a = 10$, $d(b, m) = 5$; b, m

71. $b = -3$, $d(a, b) = \sqrt{2}$; a, m

72. $b = -\frac{3}{2}$, $d(a, b) = \frac{1}{2}$; a, m

En los problemas 73 a 80, determine cuál proposición de la ley de la tricotomía ($a < b$, $a = b$ o $a > b$) se cumple para las siguientes parejas de números a, b.

73. (10)(10), 100

74. $\sqrt{3} - 3$, 0

75. π, 3.14

76. $|-15|$, 15

77. $\frac{7}{11}$, $0.\overline{63}$

78. $\frac{2}{9}$, 0.2

79. $\sqrt{2}$, 1.4

80. $-\sqrt{2}$, -1.4

Aplicaciones diversas

81. ¿A qué distancia? Greg, Tricia, Ethan y Natalie viven en la calle Real. Tricia vive a una milla de donde vive Greg, y Ethan vive a una milla y media de donde vive Tricia. Natalie vive a medio camino entre Ethan y Tricia. ¿A qué distancia vive Natalie de Greg? [*Pista:* hay dos soluciones].

82. Distancia de envío Una compañía que poseía una planta manufacturera cerca de un río compró dos plantas manufactureras adicionales, una a x millas río arriba y la otra a y millas río abajo. Ahora la compañía desea construir una planta procesadora ubicada de manera que la distancia total para el embarque desde la planta procesadora hasta las tres plantas manufactureras sea mínima. Use la desigualdad triangular para demostrar que la planta procesadora debe construirse en el mismo sitio de la primera planta manufacturera. [*Pista:* piense que las plantas están situadas en 0, x y $-y$ en la recta numérica; **FIGURA 2.2.10**]. Mediante valores absolutos, halle una expresión para la distancia total de envío si la planta procesadora se coloca en el punto d.

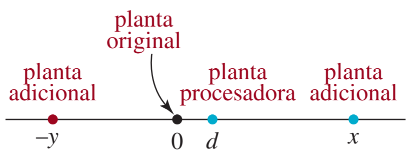


FIGURA 2.2.10 Plantas del problema 82

Para la discusión

En los problemas 83 a 90, responda si la proposición es verdadera o falsa para cualquier número real a.

83. $\dfrac{|a \cdot a|}{|a|} = |a|$, $a \neq 0$ _____

84. $|a| > -1$ _____

85. $-|a| \leq |a|$ _____

86. $-a \leq a$ _____

87. $a \leq |a|$ _____

88. $-|a| \leq a$ _____

89. Si $x < a$ y $a < z$, entonces $x < z$ _____

90. $|a + 1| \leq |a| + 1$ _____

91. ¿Para qué valores de x se cumple que $x \leq |x|$?

92. ¿Para qué valores de x se cumple que $x = |x|$?

93. Use la definición 2.2.2 para probar que $|xy| = |x||y|$ para cualesquiera números reales x y y.

94. Use la definición 2.2.2 para demostrar que $|x/y| = |x|/|y|$ para cualquier número real x y cualquier número real y que no sea cero.

95. ¿En qué condiciones se mantiene la igualdad en la desigualdad triangular? En otras palabras, ¿cuándo se cumple que $|a + b| = |a| + |b|$?

96. Use la desigualdad triangular para demostrar que $|a - b| \leq |a| + |b|$.

97. Use la desigualdad triangular para demostrar que $|a - b| \geq |a| - |b|$. [*Pista:* $a = (a - b) + b$].

98. Demuestre la fórmula del punto medio (4).

2.3 Exponentes enteros

Introducción Creemos que es mejor escribir una suma repetida $x + x + x + x$ de forma $4x$. Asimismo, podemos escribir el producto repetido $x \cdot x \cdot x$ de manera más eficiente con **exponentes**. En esta sección repasaremos las leyes de los exponentes enteros.

Comenzamos con la definición de "x a la n potencia".

Definición 2.3.1 Potencia entera positiva de x

Para cualquier número real x y cualquier entero positivo n, el símbolo x^n representa el producto de n factores de x. Es decir,

$$x^n = \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ factores de } x}. \tag{1}$$

Por ejemplo, $x \cdot x \cdot x = x^3$. En el caso en que $n = 1$, tenemos que $x^1 = x$.

En la expresión x^n, n se llama **exponente** o **potencia** de x, y x se denomina **base**.

EJEMPLO 1 Uso de la fórmula (1)

a) $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ $\leftarrow$ por (1) de la definición 2.3.1 con $x = 5$

b) $y^3 = y \cdot y \cdot y$ $\leftarrow$ por (1) de la definición 2.3.1 con x reemplazada por y

c) $(2x)^3 = 2x \cdot 2x \cdot 2x = 8x^3$ $\leftarrow$ por (1) de la definición 2.3.1 con x sustituida por $2x$

d) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$ $\leftarrow$ por (1) de la definición 2.3.1 con $x = -3$.

≡

La proposición exponencial del inciso *a*) del ejemplo 1 se lee "5 al cuadrado", en tanto que en el inciso *b*) decimos "y al cubo".

Las potencias negativas de x se definen a continuación.

Definición 2.3.2 Potencias enteras negativas de x

Para cualquier número real x que no sea cero y cualquier entero positivo n, el símbolo x^{-n} representa el recíproco del producto de n factores de x. Es decir,

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad \text{con } x \neq 0. \tag{2}$$

EJEMPLO 2 Uso de la fórmula (2)

a) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{2\cdot 2\cdot 2} = \dfrac{1}{8}$ $\leftarrow$ por (2) con $x = 2$

b) $\left(-\dfrac{1}{10}\right)^{-4} = \dfrac{1}{\left(-\frac{1}{10}\right)^4}$ $\leftarrow$ por (2), con $x = -\frac{1}{10}$

$$= \frac{1}{\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)} = \frac{1}{\dfrac{1}{10\,000}} = 10\,000.$$

≡

Finalmente, para cualquier base x diferente de cero, definimos

$$x^0 = 1. \tag{3}$$

Entonces,

$$2^0 = 1 \quad \text{y} \quad (\sqrt{2} + \sqrt{3})^0 = 1.$$

Véase en el problema 93 de los ejercicios 2.3 la lógica de la definición especial (3). Note que 0^0 es indefinido.

Advertencia

■ **Leyes de los exponentes** Se han establecido varias reglas para combinar potencias, llamadas **leyes de los exponentes**. Como ejemplo, consideremos el producto $3^2 \cdot 3^4$. Al contar los factores observamos que

$$3^2\cdot 3^4 = \overbrace{(3\cdot 3)}^{\text{2 factores}}\overbrace{(3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)}^{\text{4 factores}} = \overbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}^{\text{6 factores}} = 3^6,$$

es decir

$$3^2\cdot 3^4 = 3^{2+4}.$$

En general, si x es cualquier número y m y n son enteros positivos, entonces

$$x^m x^n = \overbrace{x\cdot x\cdots x}^{m \text{ factores}}\cdot\overbrace{x\cdot x\cdots x}^{n \text{ factores}} = \overbrace{x\cdot x\cdots x}^{m+n \text{ factores}} = x^{m+n}.$$

Cuando tanto m como n son negativos, los factores se cuentan de la misma forma, aunque estén en el denominador de la fracción resultante. Si $m \geq 0$ y n es negativo, tenemos que $n = -q$, donde $q > 0$. Entonces,

$$x^m x^n = x^m x^{-q} = \frac{x^m}{x^q} = \frac{\overbrace{x\cdot x\cdots x}^{m \text{ factores}}}{\underbrace{x\cdot x\cdots x}_{q \text{ factores}}}.$$

Después de que todos los factores posibles han sido cancelados, bien quedan en el numerador $m - q$ factores o $q - m$ factores en el denominador. En el primer caso,

$$x^m x^n = x^m x^{-q} = x^{m-q} = x^{m+n}$$

y en el segundo caso,

$$x^m x^n = x^m x^{-q} = \frac{1}{x^{q-m}} = x^{-(q-m)} = x^{m-q} = x^{m+n}.$$

Por un argumento similar puede comprobarse que $x^m x^n = x^{m+n}$ si m es negativo y $n \geq 0$.

Ésta y varias otras fórmulas relacionadas con los exponentes se presentan a continuación.

Teorema 2.3.1 Leyes de los exponentes enteros

Sean x y y números reales enteros y m y n enteros. Entonces,

i) $x^m x^n = x^{m+n}$ *ii*) $(x^m)^n = x^{mn}$ *iii*) $(xy)^n = x^n y^n$

iv) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$ *v*) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

siempre que cada expresión representa un número real.

Al formular estas leyes, cada vez que x o y se dan en el denominador o con un exponente negativo, x o y deben ser diferentes de cero. Además, *iii*) del teorema 2.3.1 se extiende a más de dos variables; por ejemplo,

$$(xyzw)^n = x^n y^n z^n w^n$$

En los ejemplos siguientes ilustramos cada una de las leyes de los exponentes.

EJEMPLO 3 Uso de las leyes de los exponentes

a) $a^5 a^4 = a^{5+4} = a^9$ ← por *i*) del teorema 2.3.1

b) $(b^3)^{-2} = b^{3(-2)} = b^{-6} = \dfrac{1}{b^6}$ ← por *ii*) del teorema 2.3.1 con x sustituida por b

c) $(3x)^4 = 3^4 x^4 = 81x^4$ ← por *iii*) del teorema 2.3.1 con x sustituida por 3 y y por x

d) $\left(\dfrac{y}{4}\right)^{-5} = \dfrac{y^{-5}}{4^{-5}} = \dfrac{\dfrac{1}{y^5}}{\dfrac{1}{4^5}} = \dfrac{4^5}{y^5} = \dfrac{1\,024}{y^5}$ ← por *iv*) del teorema 2.3.1 con x sustituida por y y y por 4

e) $\dfrac{a^{-5}}{a^{-3}} = a^{-5-(-3)} = a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$ ← por *v*) del teorema 2.3.1 con x sustituida por a ≡

Las leyes de los exponentes son útiles para simplificar expresiones algebraicas, como veremos en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Uso de las leyes de los exponentes

Simplifique $\dfrac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5}$.

Solución Por las leyes de los exponentes tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5} &= \frac{(-6)^3x^3(y^2)^3}{x^2y^5} && \leftarrow \text{por } iii) \text{ del teorema 2.3.1}\\ &= -\frac{216x^3y^6}{x^2y^5} && \leftarrow \text{por } i) \text{ y } ii) \text{ del teorema 2.3.1}\\ &= -216x^{3-2}y^{6-5} && \leftarrow \text{por } v) \text{ del teorema 2.3.1}\\ &= -216xy.\end{aligned}$$

≡

Notación científica Los exponentes enteros con frecuencia se utilizan para escribir números muy grandes o muy pequeños de una forma práctica. Cualquier número real positivo puede escribirse en la forma

$$a \times 10^n,$$

donde $1 \le a < 10$ y n es un entero. Decimos que un número escrito así está en **notación científica**. Por ejemplo,

$$1\,000\,000 = 1 \times 10^6 = 10^6 \quad \text{y} \quad 0.0000000537 = 5.37 \times 10^{-8}$$

La notación científica es más útil en química y física, donde suelen presentarse números como

$$92\,900\,000 = 9.29 \times 10^7 \quad \text{y} \quad 0.000000000251 = 2.51 \times 10^{-10}$$

Estos números son la distancia media de la Tierra al Sol expresada en millas y la vida media de una partícula lambda en segundos, respectivamente. Sin duda es más fácil escribir y recordar números como éstos cuando se dan en notación científica. Además, las expresiones con números escritos en notación científica se simplifican más fácilmente. Esto se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Uso de la notación científica

Halle el valor de

$$\frac{(4\,000)^3(1\,000\,000)}{(20\,000\,000)^5}.$$

Solución Escribimos los números en notación científica y luego utilizamos las leyes de los exponentes para simplificar la expresión:

$$\begin{aligned}
\frac{(4\,000)^3(1\,000\,000)}{(20\,000\,000)^5} &= \frac{(4 \times 10^3)^3(1 \times 10^6)}{(2 \times 10^7)^5} \\
&= \frac{(4)^3(10^3)^3 10^6}{2^5(10^7)^5} \\
&= \frac{64(10^9)(10^6)}{32(10^{35})} \\
&= 2 \times 10^{-20} = 0.00000000000000000002.
\end{aligned}$$

≡

Casi todas las calculadoras convierten automáticamente un número en notación científica cuando es muy grande o muy pequeño para expresarlo en forma decimal. Por ejemplo, el número 1.234×10^{15} requiere 16 dígitos para su forma decimal, pero como pocas calculadoras expresan más de 10 dígitos, no se muestran el signo de multiplicación y la base 10. Entonces, el número 1.234×10^{15} aparece como $\boxed{1.234\quad 15}$. En muchas calculadoras es posible utilizar la notación científica cuando se ingresa un número. Consulte el manual de su dispositivo para mayores detalles.

Dígitos significativos La mayoría de las aplicaciones de las matemáticas en la vida real incluyen medidas sujetas a error y, en consecuencia, se consideran aproximaciones. Podemos describir la exactitud de una aproximación estableciendo cuántos **dígitos significativos** tiene.

Supongamos que el resultado de una medida se expresa en notación científica

$$x = a \times 10^n, \quad \text{donde } 1 \le a < 10,$$

y se sabe que los dígitos en a son exactos (excepto quizás el último dígito, el cual puede ser aproximado si el número se redondeó). Si a contiene k lugares decimales (es decir, k dígitos a la derecha del punto decimal), entonces se dice que x tiene $k + 1$ dígitos significativos. Según esta convención, 2.0285×10^{23} tiene cinco dígitos significativos y 9.30×10^{-20} tiene tres dígitos significativos.

EJEMPLO 6 Distancia de un año luz

Un año luz es la distancia recorrida por la luz en un año de la Tierra (365.25 días). La velocidad de la luz es 3.00×10^5 kilómetros por segundo (exacto para tres dígitos significativos). Halle la distancia de un año luz en kilómetros y en millas.

Solución Para determinar la distancia de un año luz en kilómetros multiplicamos la velocidad de la luz en kilómetros por segundo por el número de segundos en un año de la Tierra. Primero hacemos la conversión de un año de la Tierra en segundos:

$$1 \text{ año de la Tierra} \approx 365.25 \text{ días} \times 24\frac{\text{horas}}{\text{día}} \times 60\frac{\text{minutos}}{\text{hora}} \times 60\frac{\text{segundos}}{\text{minuto}}.$$

Entonces, la distancia de un año luz en kilómetros está dada por

$$3.00 \times 10^5 \times 365.25 \times 24 \times 60 \times 60 \approx 9.47 \times 10^{12} \text{ km}$$

Ahora bien, $1 \text{ km} = 6.21 \times 10^{-1}$ mi y, por tanto, la distancia de un año luz en millas es

$$3.00 \times 10^5 \times 6.21 \times 10^{-1} \times 365.25 \times 24 \times 60 \times 60 \approx 5.88 \times 10^{12} \text{ mi.}$$ ≡

Notas del aula

Debe habituarse a dedicar un poco más de tiempo a leer expresiones matemáticas que contengan potencias de x. Por ejemplo, la distinción entre las cantidades $5x^3$ y $(5x)^3$ a menudo se pasa por alto en las prisas por terminar una tarea o examen. Los paréntesis indican que el exponente 3 se aplica a $5x$, no sólo a x. En otras palabras,

$$5x^3 = 5 \cdot x \cdot x \cdot x$$

mientras que $\quad (5x^3) = 5x \cdot 5x \cdot 5x = 125x^3.$

Asimismo, $\quad -3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$

mientras que $\quad (-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81.$

2.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

Supongamos que en los problemas 1 a 86 *todas las variables son diferentes de cero.*

En los problemas 1 a 4, escriba la expresión con exponentes positivos.

1. $\dfrac{1}{8 \cdot 8 \cdot 8}$

2. $3 \cdot 3 \cdot 3$

3. $2y \cdot 2y \cdot 2y \cdot 2y$

4. $\dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{z}$

En los problemas 5 a 8, escriba la expresión con exponentes negativos.

5. $\dfrac{1}{4^5}$

6. $\dfrac{x^2}{y^2}$

7. $\dfrac{1}{x^3}$

8. $\left(\dfrac{1}{z}\right)^2$

En los problemas 9 a 14, resuelva los números indicados.

9. ***a)*** 3^4
b) 3^{-4}
c) -3^4

10. ***a)*** $\left(\frac{1}{3}\right)^3$
b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$
c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

11. ***a)*** $(-7)^2$
b) $(-7)^{-2}$
c) $-(7)^{-2}$

12. ***a)*** $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$
b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-5}$
c) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^5$

13. ***a)*** $(5)^0$
b) $(-5)^0$
c) -5^0

14. ***a)*** $(-1)^{-1}$
b) $(1)^{-1}$
c) $-(-1)^{-1}$

En los problemas 15 a 20, evalúe la expresión.

15. $2^{-1} - 2^1$

16. $\dfrac{2^{-2}}{3^{-3}}$

17. $\dfrac{2^{-1} - 3^{-1}}{2^{-1} + 3^{-1}}$

18. $\dfrac{(-1)^5 - 2^6}{(-1)^{-1}}$

19. $\dfrac{0^1}{1^0}$

20. $\dfrac{(1 - 1)^0}{1^0}$

En los problemas 21 a 26, encuentre el valor de la expresión si $a = 2$, $b = -3$ y $c = -1$.

21. $-2ab + c^2$

22. $ab^2 - c^3$

23. $ab^2 + bc^2 + ca^2$

24. $a^{-1}b^{-1}c^{-1}$

25. $ab^{-1} + ca^{-1}$

26. $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}$

En los problemas 27 a 50, simplifique y elimine cualquier exponente negativo.

27. x^6x^{-2}

28. $2^{10}2^{12}$

29. $(7x^4)(-3x^2)$

30. $(-5x^2y^3)(3xy^{-2})$

31. $\dfrac{2^8}{2^3}$

32. $\dfrac{3^4}{3^{-2}}$

33. $\dfrac{10^{-7}}{10^4}$

34. $\dfrac{35y^8x^5}{-21y^{-1}x^9}$

35. $(5x)^2$

36. $(-4x)^3$

37. $(5^2)^3$

38. $(x^4)^{-5}$

39. $(4x^2y^{-1})^3$

40. $(3x^2y^4)^{-2}$

41. $x^2x^3x^{-4}$

42. $\dfrac{-x^5(y^2)^3}{(xy)^2}$

43. $\dfrac{(7a^2b^3)^2}{a^3b^5}$

44. $\dfrac{(-4x^5y^{-2})^3}{x^7y^{-3}}$

45. $(-3xy^5)^2(x^3y)^{-1}$

46. $\left(\dfrac{a^4b^{-5}}{b^2}\right)^{-1}$

47. $\left(\dfrac{a^3b^3}{b^{-2}}\right)^2$

48. $(-x^2y^4)^3(x^3y^{-1})^2$

49. $\dfrac{-xy^2z^3}{(xy^2z^3)^{-1}}$

50. $\dfrac{(3abc)^3}{(2a^{-1}b^{-2}c)^2}$

En los problemas 51 a 56, determine si el número dado es positivo o negativo.

51. $(-4)^{-3}(2^{-4})$

52. $(-1)^{-1}(-1)^0(-1)$

53. $[10^{-5}(-10)^5(-10)^{-5}]^2$

54. $[(-1)^{-2}]^{-3}$

55. $[-10 - 10]^{-10+10}$

56. $[\pi^2\pi^3\pi^{-4}]^{-1}$

En los problemas 57 a 62, escriba una fórmula para la cantidad dada usando exponentes.

57. El área A de un cuadrado es el cuadrado de la longitud s de un lado.

58. El volumen V de un cubo es el cubo de la longitud s de un lado.

59. El área A de un círculo es π veces el cuadrado del radio r.

60. El volumen V de una esfera es $\frac{4}{3}\pi$ veces el cubo del radio r.

61. El volumen V de un cilindro circular recto es π por el cuadrado del radio r por la altura h.

62. El área A de un triángulo equilátero es $\sqrt{3}/4$ veces el cuadrado de la longitud s de un lado.

En los problemas 63 a 66, escriba los números dados en notación científica.

63. ***a***) 1 050 000
b) 0.0000105

64. ***a***) 341 000 000
b) 0.00341

65. ***a***) 1 200 000 000
b) 0.000000000120

66. ***a***) 825 600
b) 0.0008256

En los problemas 67 a 70, escriba los números dados en forma decimal.

67. ***a***) 3.25×10^{7}
b) 3.25×10^{-5}

68. ***a***) 4.02×10^{10}
b) 4.02×10^{-4}

69. ***a***) 9.87×10^{-17}
b) 9.87×10^{12}

70. ***a***) 1.423×10^{5}
b) 1.423×10^{-4}

En los problemas 71 a 76, use calculadora para realizar la operación. Escriba la respuesta en notación científica usando cinco dígitos significativos.

71. $(0.90324)(0.0005432)$

72. $\dfrac{0.2315}{(5\,480)^2}$

73. $\dfrac{0.143}{15\,000}$

74. $\dfrac{4\,033}{0.00000021}$

75. $(2.75 \times 10^{3})(3.0 \times 10^{10})$

76. $\dfrac{8.25 \times 10^{-12}}{3.01 \times 10^{12}}$

En los problemas 77 a 80, halle el valor de la expresión dada sin ayuda de calculadora. Escriba la respuesta *a*) en forma decimal y *b*) en notación científica.

77. $(3\,000)^2(200\,000)^3(0.0000000001)$

78. $[(1\,000\,000)^{-1}(0.00001)]^{-1}$

79. $\dfrac{(80\,000)^2}{(2\,000\,000)(0.0001)^4}$

80. $\dfrac{(21\,000)(0.00005)^3}{3\,000\,000}$

Aplicaciones diversas

81. Población La estimación de la población de China en 2009 era de 1 335 000 000. Escriba esta cifra en notación científica.

82. Población Si la tasa de crecimiento anual promedio de la población de China es de 1.4%, use la información proporcionada en el problema 81 para calcular la población de China *a*) en 2010 y *b*) en 2020. Escriba sus respuestas en notación científica.

83. PIB El producto interno bruto (PIB) es una medida básica de la producción económica total de un país. En octubre de 2009 se pronosticó que el PIB de Estados Unidos ascendería a 14.261 billones de dólares. Escriba este número *a*) en forma decimal y *b*) en notación científica.

84. Lo que vendrá Las computadoras futuras podrían ser fotónicas (es decir, que operan mediante señales de luz) más que electrónicas. La velocidad de la luz (3×10^{10} cm/s) será un factor limitante para el tamaño y la velocidad de tales computadoras. Suponga que una señal debe ir de un elemento de una computadora fotónica a otro en un nanosegundo (1×10^{-9} s); ¿cuál es la distancia máxima posible entre estas dos computadoras? [*Pista:* ¿cuánto viaja la luz en un nanosegundo?]. Dé su repuesta *a*) en centímetros y *b*) en pulgadas (1 pulgada ≈ 2.5 cm).

85. Distancia galáctica La distancia de la galaxia Andrómeda (Messier 31), localizada en la dirección de la constelación Andrómeda, está a 2 500 000 años luz de la Vía Láctea, nuestra galaxia. Como vimos en el ejemplo 6, un año luz es una medida de distancia. Si un año luz equivale (aproximadamente) a 6 millones de millones de millas, escriba la distancia aproximada (en millas) a la galaxia Andrómeda en notación científica.

Galaxia Andrómeda

86. Velocidad promedio El *Pioneer 10*, una sonda del espacio profundo, tardó 21 meses en viajar de Marte a Júpiter. Si la distancia de Marte a Júpiter es de 998 millones de kilómetros, calcule la velocidad promedio del *Pioneer 10* en kilómetros por hora (suponga que hay 30.4 días en un mes).

Para el análisis

En los problemas 87 a 92, responda verdadero o falso

87. $0^0 = 0$ _____

88. $\left(-\dfrac{1}{x}\right)^{-1} = x$, con $x \neq 0$ _____

89. Si n es par, $x^n \geq 0$ para todos los números reales x. _____

90. $x^{-n} \leq 0$, para todos los números reales x _____

91. $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ _____

92. $(x^n)^{-1} = x^{-n}$, para $x \neq 0$ _____

93. Por *v*) de la ley de los exponentes, si $x \neq 0$, entonces, ¿a qué es igual x^n/x^n? Sin embargo, ¿a qué es igual cualquier número diferente de cero dividido por sí mismo? Use la respuesta a estas dos preguntas para explicar el fundamento en que se basa la definición $x^0 = 1$, para cualquier base x diferente de cero.

2.4 Radicales

Introducción Muchos problemas en las ciencias, los negocios o la ingeniería conducen a planteamientos como $s^2 = 25$ o $x^3 = 64$. Los números que satisfacen estas ecuaciones exponenciales se denominan **raíces**. En particular, un número s que satisface la ecuación $s^2 = 25$ se llama la **raíz cuadrada** de 25, y un número x que satisface $x^3 = 64$ es una **raíz cúbica** de 64.

Hay dos números reales que son raíces cuadradas del número 25 porque

$$(-5)^2 = 25 \qquad \text{y} \qquad 5^2 = 25$$

Por convención, el símbolo $\sqrt{}$ representa la raíz cuadrada principal, que es un número real *no negativo*. Así, $\sqrt{25} = 5$.

En esta sección repasaremos la definición y las propiedades de las **raíces *n*-ésimas principales** de un número real x, donde n es un entero positivo.

Definición 2.4.1 Raíz *n*-ésima principal

Supóngase que x es un número real y $n \geq 2$ es un entero positivo.

i) Si $x > 0$, entonces la **raíz *n*-ésima principal** $\sqrt[n]{x}$ es el número r *positivo* tal que $x = r^n$.

ii) Si $x < 0$ y n es un entero positivo impar, entonces la **raíz *n*-ésima principal** $\sqrt[n]{x}$ es un número r *negativo* tal que $x = r^n$.

iii) Si $x < 0$ y n es un entero positivo par, entonces $\sqrt[n]{x}$ no es un número real.

iv) Si $x = 0$, entonces $\sqrt[n]{x} = 0$.

Para resumir *i*), *ii*) y *iv*) de la definición 2.4.1, la expresión

$$\sqrt[n]{x} = r \qquad \text{significa} \qquad x = r^n$$

■ **Terminología** La expresión $\sqrt[n]{x}$ que representa la raíz n-ésima principal de x se llama **radical**, el entero n es el **índice** del radical y el número real x se llama **radicando**. Si el índice n es 2, normalmente se omite del radical; es decir, $\sqrt[2]{25}$ se escribe $\sqrt{25}$. Cuando $n = 2$, decimos que $\sqrt{x}$ es la **raíz cuadrada** de x y cuando $n = 3$, decimos que $\sqrt[3]{x}$ es la **raíz cúbica** de x. Si el índice n es un *entero positivo impar*, se puede demostrar que para cualquier valor de x hay exactamente *una* raíz n-ésima real de x. Por ejemplo,

$$\sqrt[3]{125} = 5 \qquad \text{y} \qquad \sqrt[5]{-32} = -2.$$

Vuelva a leer las primeras oraciones

Si el índice n es un *entero positivo par* y x es positivo, entonces hay dos raíces reales n-ésimas de x. Sin embargo, el símbolo $\sqrt[n]{x}$ se reserva para la raíz n-ésima positiva (principal); denotamos la raíz n-ésima negativa mediante $-\sqrt[n]{x}$. Así, por ejemplo:

$$\sqrt{4} = 2 \qquad \text{y} \qquad -\sqrt{4} = -2,$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3} \qquad \text{y} \qquad -\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = -\frac{1}{3}.$$

Si n es par y x es negativo, no hay raíz n-ésima real de x.*

EJEMPLO 1 Raíces

Halle ***a)*** $\sqrt{100}$ ***b)*** $\sqrt[3]{-64}$ ***c)*** $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$.

Solución Habrá una sola respuesta en cada caso, puesto que estamos calculando la raíz cuadrada principal, la raíz cúbica principal y la raíz cuarta principal.

a) $\sqrt{100} = 10$, pues $10^2 = 100$ ← por *i*) de la definición 2.4.1

b) $\sqrt[3]{-64} = -4$, pues $(-4)^3 = -64$ ← por *ii*) de la definición 2.4.1

c) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$, pues $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$ ← por *i*) de la definición 2.4.1 ≡

■ **Leyes de los radicales** Las propiedades siguientes se emplean frecuentemente para simplificar expresiones que contengan radicales.

Teorema 2.4.1 Leyes de los radicales

Sean m y n enteros positivos, y x y y números reales. Entonces,

i) $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

ii) $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & \text{si } n \text{ es impar} \\ |x| & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

iii) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$

iv) $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

v) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

siempre que los radicales representen números reales.

DEMOSTRACIÓN PARCIAL

Las leyes de los radicales *iii*) a *v*) pueden comprobarse con las leyes de los exponentes estudiadas en la sección 2.3. Por ejemplo, para comprobar *iii*) sea

$$\sqrt[n]{x} = a \qquad \text{y} \qquad \sqrt[n]{y} = b \tag{1}$$

* Una raíz par de un número negativo, por ejemplo $\sqrt{-5}$, recibe el nombre de *número complejo*. Los números complejos se explican en la sección 3.4.

Entonces, por definición

$$x = a^n \qquad \text{y} \qquad y = b^n$$

Por consiguiente, $$xy = a^n b^n = (ab)^n,$$

que puede escribirse en forma de radical como

$$\sqrt[n]{xy} = ab. \tag{2}$$

Combinando (1) y (2), obtenemos $\sqrt[n]{xy} = ab = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$. ≡

Cada una de las leyes anteriores se ilustra en el ejemplo siguiente. Quizá la propiedad más conocida de los radicales, la raíz cuadrada de un producto es el producto de las raíces cuadradas:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\,\sqrt{y} \tag{3}$$

para $x \geq 0$, $y \geq 0$, es sólo un caso especial de *iii*) del teorema 2.4.1 cuando $n = 2$. Por ejemplo, $\sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4}\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$.

EJEMPLO 2 Simplificación mediante las leyes de los radicales

Simplifique cada una de las expresiones siguientes:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{x^{21}}}$ ***b***) $\sqrt{\dfrac{x^2}{25}}$ ***c***) $\sqrt[3]{27y^6}$ ***d***) $\sqrt[3]{81a^3b^5c^6}$ ***e***) $(\sqrt[5]{r}\,\sqrt[5]{s})^5$

Solución En cada caso, usamos una o más leyes de los radicales.

a) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{x^{21}}} = \sqrt[21]{x^{21}} = x$ ← por *i*) del teorema 2.4.1

b) $\sqrt{\dfrac{x^2}{25}} = \dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{25}} = \dfrac{|x|}{5}$ ← por *ii*) y *iv*) del teorema 2.4.1

c) $\sqrt[3]{27y^6} = \sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{y^6} = \sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{(y^2)^3} = 3y^2$ ← por *ii*) y *iii*) del teorema 2.4.1

d) $\sqrt[3]{81a^3b^5c^6} = \sqrt[3]{(27a^3b^3c^6)3b^2} = \sqrt[3]{(3abc^2)^3 3b^2}$ ← factorizando el radicando

$= \sqrt[3]{(3abc^2)^3}\,\sqrt[3]{3b^2} = 3abc^2\,\sqrt[3]{3b^2}$ ← por *ii*) y *iii*) del teorema 2.4.1

e) $(\sqrt[5]{r}\,\sqrt[5]{s})^5 = (\sqrt[5]{rs})^5 = rs$ ← por *i*) y *iii*) del teorema 2.4.1 ≡

EJEMPLO 3 Uso de las leyes de los radicales

Simplifique cada una de las expresiones siguientes:

a) $\sqrt[3]{2x^2y^3}\sqrt[3]{4xz^3}$ ***b***) $\dfrac{\sqrt[4]{32a^{10}b^{16}}}{\sqrt[4]{2a^2}}$

Solución En ambos incisos, dé una razón en la línea de color sobre el signo de igualdad coloreado correspondiente.

a) $\sqrt[3]{2x^2y^3}\sqrt[3]{4xz^3} = \sqrt[3]{8x^3y^3z^3} = \sqrt[3]{(2xyz)^3} = 2xyz$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{32a^{10}b^{16}}}{\sqrt[4]{2a^2}} = \sqrt[4]{16a^8b^{16}} = \sqrt[4]{(2a^2b^4)^4} = 2a^2b^4$ ≡

Como acabamos de ver en el ejemplo 2, las leyes de los radicales del teorema 2.4.1 nos permiten simplificar los productos y cocientes de los radicales que tienen el mismo índice. Con frecuencia podemos simplificar sumas y diferencias de radicales que tienen el mismo índice mediante el uso de las leyes distributivas, como se muestra en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 4 Simplificación

Simplifique cada una de las expresiones siguientes:

a) $\sqrt{10} - \sqrt{40x^4} + \sqrt{90x^4y^8}$ *b)* $\sqrt[3]{8x^4} + \sqrt[3]{x^4y^3}$

Solución Nuevamente usamos las leyes de los radicales proporcionadas en el teorema 2.4.1.

a)
$$\begin{aligned}\sqrt{10} - \sqrt{40x^4} + \sqrt{90x^4y^8} &= \sqrt{10} - 2x^2\sqrt{10} + 3x^2y^4\sqrt{10} \quad \leftarrow \sqrt{10} \text{ es un factor común}\\ &= \sqrt{10}(1 - 2x^2 + 3x^2y^4)\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8x^4} + \sqrt[3]{x^4y^3} &= 2x\sqrt[3]{x} + xy\sqrt[3]{x} \quad \leftarrow x\sqrt[3]{x} \text{ es un factor común}\\ &= x\sqrt[3]{x}(2 + y)\end{aligned}$$

≡

Racionalización Cuando quitamos los radicales del numerador o del denominador de una fracción, decimos que estamos **racionalizando**. En álgebra normalmente racionalizamos el denominador, pero en cálculo a veces es importante racionalizar el numerador. El procedimiento de racionalización implica la multiplicación de la fracción por 1 escrito en forma especial. Por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \overbrace{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}^{\text{esta fracción es igual a 1}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

≡

EJEMPLO 5 Racionalización del denominador

Racionalice el denominador de cada una de las expresiones siguientes:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ *b)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Solución

a) $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \overbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}^{1} = \frac{\sqrt{3 \cdot 2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \leftarrow \text{usamos (3) en el numerador}$$

b) Como $\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2$, multiplicamos el numerador y el denominador por $(\sqrt[3]{2})^2$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{2}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{2})^3} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2}\\ &= \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.\end{aligned}$$

≡

Uso de un factor conjugado Si una fracción contiene una expresión como $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, usamos el hecho de que el producto de $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ y su *conjugado* $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ no contiene radicales:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) &= \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{y}\,(\sqrt{x} - \sqrt{y})\\ &= \sqrt{x}\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}\sqrt{x} - \sqrt{y}\sqrt{y}\\ &= (\sqrt{x})^2 - \sqrt{xy} + \sqrt{xy} - (\sqrt{y})^2\\ &= x - y.\end{aligned}$$

Los conjugados de las expresiones $x + \sqrt{y}$, $\sqrt{x} + y$, $x - \sqrt{y}$, $\sqrt{x} - y$, son, respectivamente, $x - \sqrt{y}$, $\sqrt{x} - y$, $x + \sqrt{y}$ y $\sqrt{x} + y$. Debe comprobar que el producto de cada una de estas expresiones y su conjugado no contenga radicales.

EJEMPLO 6 Racionalización de un denominador

Racionalice el denominador de la expresión.

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 3}$$

Solución El conjugado del denominador es $\sqrt{x} - 3$. Para eliminar el radical del denominador, multiplicamos la expresión por

$$\frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 3}.$$

Así,

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \cdot \overbrace{\frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 3}}^{1} = \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 3}.$$

≡

EJEMPLO 7 Racionalización de un numerador

Elimine los radicales en el numerador de

$$\frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Solución Como el conjugado del numerador es $\sqrt{x + h} + \sqrt{x}$, procedemos así:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \overbrace{\frac{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}}^{1} &= \frac{(x + h) - x}{h\left(\sqrt{x + h} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x + h} + \sqrt{x}\right)} \quad \leftarrow \text{anular las } h \\ &= \frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

≡

La racionalización del numerador que se ilustra en el ejemplo 7, ocurre con frecuencia en cálculo.

EJEMPLO 8 Gravedad artificial

En las estaciones espaciales (o naves interplanetarias) se puede crear la gravedad artificial mediante la rotación de la estación como una centrífuga gigantesca, rotación que producirá una fuerza contra los astronautas a bordo, que no se podrá distinguir de la gravedad. La tasa de rotación N, medida en rotaciones por segundo, necesaria para producir una aceleración de a m/s^2 en un punto a r metros (m) del centro de rotación está dado por

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{r}}.$$

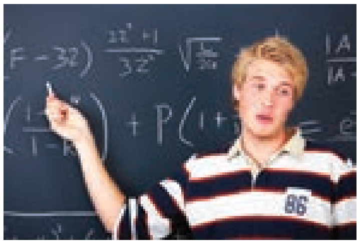
Si el radio de la estación es de 150 metros, calcule la tasa de rotación necesaria para producir el equivalente de la gravedad de la Tierra.

Uno de los primeros diseños de una estación espacial con gravedad artificial

Solución La aceleración debida a la gravedad de la Tierra es de 9.8 m/s^2. Por tanto, identificamos $a = 9.8$ y $r = 150$, y obtenemos

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.8}{150}}.$$

Al usar las teclas $\boxed{\sqrt{\ }}$ y $\boxed{\pi}$ en una calculadora, encontramos que $N \approx 0.04$. Por tanto, se requieren aproximadamente 0.04 rotaciones por segundo (o su equivalente, 2.4 rotaciones por minuto) para producir el equivalente de la gravedad de la Tierra. ≡



Notas del aula

En esta nota hablaremos de algunos errores comunes en el uso de los radicales y las leyes de los radicales.

i) Es un error común simplificar $\sqrt{x^2}$ como x. Esto es válido sólo para x *no negativo*. Por ejemplo, si $x = -3$, vemos que

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3.$$

El resultado correcto está dado por *ii*) de las leyes de los radicales:

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3.$$

ii) En el inciso *b*) del ejemplo 5, sería incorrecto tratar de racionalizar $1/\sqrt[3]{2}$ multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{2})^2} \neq \frac{\sqrt[3]{2}}{2}.$$

2.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas 1 a 62, suponga que todas las variables son positivas.

En los problemas 1 a 32, evalúe los radicales.

1. $\sqrt[3]{-125}$

2. $\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}}\,\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}}$

3. $\sqrt[5]{100\,000}$

4. $\sqrt[3]{16}$

5. $\sqrt[4]{0.0001}$

6. $\sqrt[5]{32}$

7. $\sqrt[3]{-64/27}$

8. $\sqrt[3]{-1\,000/8}$

9. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2y^4}}$

10. $\sqrt{\dfrac{10a^2}{bc^4}}$

11. $\sqrt[3]{\dfrac{x^3y^6}{z^9}}$

12. $\sqrt[4]{\dfrac{x^4y^{16}}{16z^{18}}}$

13. $\sqrt{0.25x^4}\sqrt{z^4}$

14. $\sqrt{8x^2yz^2}\sqrt{yzw}\sqrt{2zw^3}$

15. $\sqrt[3]{4ab^3}\,\sqrt[3]{16a^2}$

16. $\sqrt[4]{16x^5}\,\sqrt[4]{2x^3y^4}$

17. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$

18. $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$

19. $\dfrac{\sqrt{7ab^2}}{\sqrt{49a}\sqrt{7b^4}}$

20. $\dfrac{\sqrt[4]{4xy}\,\sqrt[3]{2xy^2}}{\sqrt[3]{x^2z^3}}$

21. $\sqrt{\sqrt{0.0016}}$

22. $\sqrt{2\sqrt{4}}$

23. $\sqrt[3]{\sqrt{a^6b^{12}}}$

24. $\sqrt{x^3\sqrt{(x^2y)^2}}$

25. $(-\sqrt{xyz^5})^2$

26. $\sqrt{(-2x^3y)^2}$

27. $\sqrt{(-abc)^2}$

28. $\left(-\sqrt[3]{\dfrac{-27x}{xy^3}}\right)^3$

29. $\sqrt[4]{(-4r^2s^6)^2}$

30. $\sqrt[3]{-(p^{-1}q^2)^3}$

31. $\sqrt{\dfrac{-16x^2}{-8x^{-2}}}$

32. $\sqrt[3]{\dfrac{(-2x)^3}{-z^6}}$

En los problemas 33 a 44, racionalice el denominador de la expresión.

33. $\dfrac{1}{\sqrt{27}}$

34. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

35. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

36. $\dfrac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$

37. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

38. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$

39. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

40. $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

41. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$

42. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{xy}}$

43. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x-1}}$

44. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2x}}$

En los problemas 45 a 48, racionalice el numerador de la expresión.

45. $\dfrac{\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{2x}}{h}$

46. $\dfrac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}$

47. $\dfrac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}$

48. $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h}$ [*Pista:* primero combine los términos en el numerador].

En los problemas 49 a 56, combine los radicales y simplifique.

49. $4\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}$

50. $\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{8}$

51. $4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}$

52. $\sqrt[3]{xy}+3\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{xz^3}$

53. $3\sqrt{8x^3}-\sqrt{18xy^2}+\sqrt{32x^5}$

54. $\sqrt[3]{x^4yz}-\sqrt[3]{xy^4z}+\sqrt[3]{xyz^4}$

55. $\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{a^3}{b}}$

56. $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y^2}}-\sqrt[3]{\dfrac{xy}{y^2}}$

En los problemas 57 a 60, escriba una fórmula para la cantidad que se da. Use notación de radicales.

57. La longitud s del lado de un cuadrado es la raíz cuadrada del área A.

58. La longitud s del lado de un cubo es la raíz cúbica del volumen V.

59. La longitud c de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las longitudes a y b de los otros dos lados.

60. La velocidad v de un satélite en una órbita circular alrededor de la Tierra es igual a la raíz cuadrada del producto del radio r de la órbita y la aceleración debida a la gravedad g_r en la órbita.

Aplicaciones diversas

61. **Satélite terrestre** Si un satélite da vueltas alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio $r = 6.70 \times 10^6$ m, halle su velocidad v si $v = R\sqrt{g/r}$, donde R es el radio de la Tierra y g es la aceleración debida a la gravedad en la superficie de nuestro planeta. Use los valores $R = 6.40 \times 10^6$ m y $g = 9.8$ m/s^2.

62. Relatividad De acuerdo con la teoría de la relatividad de Einstein, la masa m de un objeto que se mueve a velocidad v es dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

donde m_0 es la masa del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz. Halle la masa de un electrón que viaja a la velocidad de $0.6c$ si su masa en reposo es 9.1×10^{-31} kg.

Para el análisis

En los problemas 63 a 70, responda falso o verdadero.

63. $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, para $a, b \geq 0$. _____

64. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, para $a, b \geq 0$. _____

65. $\sqrt{a^2} = a$, para cualquier número real a. _____

66. $(\sqrt{a})^2 = a$, para cualquier número real a. _____

67. Si n es impar, $\sqrt[n]{x}$ es definido para cualquier número real x. _____

68. Si n es par, $\sqrt[n]{x}$ es definida para cualquier número real x. _____

69. $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{x}$, para cualquier número real x. _____

70. $\sqrt{a^2/b^2} = |a/b|$, para cualesquiera números reales a y $b \neq 0$. _____

2.5 Exponentes racionales

Introducción El concepto de la raíz n-ésima de un número nos permite ampliar la definición de x^n de exponentes enteros a **exponentes racionales**; y, como veremos, con frecuencia es más fácil trabajar con exponentes racionales que con radicales.

Definición 2.5.1 Potencia racional de x

Supóngase que x es un número real y que $n \geq 2$ es un número entero positivo.

i) Si $\sqrt[n]{x}$ existe, entonces

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}.$$

ii) Si $\sqrt[n]{x}$ existe y m es cualquier entero tal que m/n está en sus términos mínimos, entonces

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m.$$

En el inciso *i*) de la definición 2.5.1, $x^{1/n}$ es simplemente otra forma de designar la raíz n-ésima principal de x. En el inciso *ii*) de la definición 2.5.1, tenga en cuenta que n es un entero positivo mayor o igual que 2 y m puede ser cualquier entero (positivo, cero o negativo), y que el número racional m/n está reducido a sus términos mínimos. Por último, para calcular $x^{m/n}$ se usa ya sea $\sqrt[n]{x^m}$ o $(\sqrt[n]{x})^m$, pero por cuestiones prácticas, *por lo general* es más fácil obtener la raíz n-ésima del número x en primer lugar y luego elevarla a la potencia m; en otras palabras, usamos $(\sqrt[n]{x})^m$.

Términos mínimos significa que m y n no tienen factores enteros comunes.

EJEMPLO 1 Uso de la definición 2.5.1*i*)

Para evaluar cada una de las potencias racionales siguientes, usamos el inciso *i*) de la definición 2.5.1.

a) $(25)^{1/2} = \sqrt{25} = 5$ ← raíz cuadrada principal
b) $(64)^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4$ ← raíz cúbica principal

EJEMPLO 2 Uso de la definición 2.5.1*ii*)

Para evaluar cada una de las potencias racionales siguientes, usamos el inciso *ii*) de la definición 2.5.1.

a) $(0.09)^{5/2} = [(0.09)^{1/2}]^5 = (\sqrt{0.09})^5$ ← $m = 5, n = 2$

$= (0.3)^5 = 0.00243$ ← la raíz cuadrada principal de 0.09 es 0.3

b) $(-27)^{-4/3} = [(-27)^{1/3}]^{-4} = [\sqrt[3]{-27}]^{-4}$ ← $m = -4, n = 3$

$= (-3)^{-4} = \dfrac{1}{(-3)^4} = \dfrac{1}{81}$ ← la raíz cúbica principal de -27 es -3 y (2) de la definición 2.3.2

≡

EJEMPLO 3 Una comparación

Aunque el inciso *ii*) de la definición 2.5.1 estipula la igualdad

$$(125)^{2/3} = [(125)^{1/3}]^2 = [(125)^2]^{1/3}$$

el cálculo

$$[(125)^{1/3}]^2 = [\sqrt[3]{125}]^2 = 5^2 = 25 \quad \leftarrow \text{usando } (\sqrt[n]{x})^m$$

se puede hacer mentalmente, en tanto que

$$[(125)^2]^{1/3} = [15\,625]^{1/3} = \sqrt[3]{15\,625} = 25 \quad \leftarrow \text{usando } \sqrt[n]{x^m}$$

podría necesitar el uso de la calculadora. ≡

El ejemplo 4 ilustra un caso en el que $x^{m/n}$, $(x^m)^{1/n}$ y $(x^{1/n})^m$ no son equivalentes. Este ejemplo ilustra por qué m/n deben estar en sus términos mínimos según indica el inciso *ii*) de la definición 2.5.1.

EJEMPLO 4 Comparación de tres resultados

Compare ***a***) $x^{m/n}$, ***b***) $(x^m)^{1/n}$ y ***c***) $(x^{1/n})^m$ para $x = -9$, $m = 2$ y $n = 2$.

Solución Al sustituir $x = -9$, $m = 2$ y $n = 2$ encontramos que:

a) $x^{m/n} = (-9)^{2/2} = (-9)^1 = -9$

b) $(x^m)^{1/n} = [(-9)^2]^{1/2} = 81^{1/2} = 9$

c) $(x^{1/n})^m = [(-9)^{1/2}]^2 = (\sqrt{-9})^2$, que no es un número real, pues contiene la raíz cuadrada de un número negativo. ≡

$\sqrt{-9}$ es un ejemplo de un número complejo. Los números complejos se estudiarán en la sección 3.4.

Leyes de los exponentes Las leyes de los exponentes presentadas para los exponentes enteros en el teorema 2.3.1 de la sección 2.3 también son verdaderas para los exponentes racionales.

Teorema 2.5.1 Leyes de los exponentes racionales

Sean x y y números reales y s y r números racionales. Entonces,

i) $x^r x^s = x^{r+s}$ *ii*) $(x^r)^s = x^{rs} = (x^s)^r$ *iii*) $(xy)^r = x^r y^r$

iv) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$ *v*) $\dfrac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$

siempre que todas las expresiones representen números reales.

Como se muestra en los ejemplos próximos, estas leyes permiten simplificar expresiones algebraicas. Para el resto de esta sección consideramos que todas las bases variables x, y, a, b, etcétera, representan números positivos, de modo que todas las potencias racionales están definidas.

EJEMPLO 5 Uso de las leyes de los exponentes

a) $(3x^{1/2})(2x^{1/5}) = 3(2)x^{1/2}x^{1/5} = 6x^{1/2+1/5}$ ← por *i*) del teorema 2.5.1
$= 6x^{(5+2)/10} = 6x^{7/10}$

b) $(a^2b^{-8})^{1/4} = (a^2)^{1/4}(b^{-8})^{1/4} = a^{2/4}b^{-8/4}$ ← por *ii*) y *iii*) del teorema 2.5.1
$= a^{1/2}b^{-2} = \dfrac{a^{1/2}}{b^2}$

c) $\dfrac{x^{2/3}y^{1/2}}{x^{1/4}y^{3/2}} = x^{2/3-1/4}y^{1/2-3/2} = x^{(8-3)/12}y^{-1} = \dfrac{x^{5/12}}{y}$ ← por *v*) del teorema 2.5.1

d) $\left(\dfrac{3x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3 = \dfrac{(3x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3} = \dfrac{3^3(x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3} = \dfrac{27x^{9/4}}{y}$ ← por *ii*), *iii*) y *iv*) del teorema 2.5.1 ≡

EJEMPLO 6 Simplificación

Simplifique $\left(\dfrac{5r^{3/4}}{s^{1/3}}\right)^2\left(\dfrac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right)$.

Solución Debe proporcionar los incisos de las leyes de los exponentes racionales (teorema 2.5.1) que se emplean en esta simplificación:

$$\left(\frac{5r^{3/4}}{s^{1/3}}\right)^2\left(\frac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right) = \left(\frac{25r^{3/2}}{s^{2/3}}\right)\left(\frac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right) = \frac{50r^0}{s^{7/6}} = \frac{50}{s^{7/6}}.$$ ≡

Como veremos en los dos ejemplos que siguen, se pueden simplificar ciertas expresiones radicales más fácilmente si se vuelven a escribir con exponentes racionales.

EJEMPLO 7 Escribir como un radical

Escriba $\sqrt{x\sqrt[4]{x}}$ como un solo radical.

Solución Volvemos a escribir $\sqrt{x\sqrt[4]{x}}$ usando exponentes racionales y luego simplificamos según las leyes de los exponentes racionales:

$$\sqrt{x\sqrt[4]{x}} = (x\sqrt[4]{x})^{1/2} = \overbrace{(x \cdot x^{1/4})^{1/2}}^{\text{use } i) \text{ del teorema 2.5.1}} = (x^{5/4})^{1/2} = x^{5/8}.$$

Por el inciso *ii*) de la definición 2.5.1, escribimos $x^{5/8}$ como $\sqrt[8]{x^5}$. ≡

EJEMPLO 8 Escribir como un radical

Escriba $\sqrt[3]{16}/\sqrt{2}$ como un solo radical.

Solución Volvemos a escribir la expresión usando exponentes racionales:

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{2}} = \frac{16^{1/3}}{2^{1/2}}.$$

Luego, debemos hallar una base común para que podamos usar las propiedades de los exponentes racionales para simplificar la expresión. Como $16 = 2^4$, tenemos

$$\frac{16^{1/3}}{2^{1/2}} = \frac{(2^4)^{1/3}}{2^{1/2}} = \frac{2^{4/3}}{2^{1/2}} = 2^{4/3-1/2} = 2^{5/6}.$$

Por el inciso *ii*) de la definición 2.5.1, el último término $2^{5/6}$ es lo mismo que $\sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$. ≡

EJEMPLO 9 Simplificación

Simplifique $(8\,000\,000)^{2/3}\sqrt[4]{0.0001r^8t^{12}}$.

Solución Escribimos los números en notación científica y usamos las leyes de los exponentes:

$$\begin{aligned}(8\,000\,000)^{2/3}\sqrt[4]{0.0001r^8t^{12}} &= (8\times 10^6)^{2/3}(1\times 10^{-4}\cdot r^8t^{12})^{1/4}\\ &= 8^{2/3}(10^6)^{2/3}(10^{-4})^{1/4}(r^8)^{1/4}(t^{12})^{1/4}\\ &= \left(\sqrt[3]{8}\right)^2(10^4)(10^{-1})\,r^2t^3\\ &= (4\times 10^3)r^2t^3\\ &= 4\,000r^2t^3.\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 10 Inflación

Supongamos que un inmueble costaba p dólares hace n años. Si ahora cuesta q dólares, entonces el promedio de la tasa de inflación anual r está dado por

$$r = \left(\frac{q}{p}\right)^{1/n} - 1.$$

Halle el promedio de la tasa de inflación anual para una casa que ahora vale 500 000 dólares si hace 12 años se compró en $80 000.

Solución Primero identificamos $p = 80\,000$, $q = 500\,000$ y $n = 12$. Al sustituir obtenemos:

$$r = \left(\frac{500\,000}{80\,000}\right)^{1/12} - 1 = (6.25)^{1/12} - 1.$$

Al usar la tecla $\boxed{y^x}$ en una calculadora con $y = 6.25$ y $x = \frac{1}{12}$, obtenemos $r \approx 0.165$. Por tanto, el promedio de la tasa de inflación anual para esta propiedad ha sido 16.5%. ≡

En la sección 7.1 indicaremos cómo pueden definirse las expresiones con exponentes irracionales como $x^{\sqrt{2}}$ o x^{π}. *Las leyes de los exponentes también son verdaderas para los exponentes irracionales.*

2.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

En los ejercicios siguientes suponga que todas las variables son positivas.

En los problemas 1 a 8, vuelva a escribir la expresión usando exponentes racionales.

1. $\sqrt[3]{ab}$
2. $\sqrt[5]{7x}$
3. $\dfrac{1}{(\sqrt[3]{x})^4}$
4. $\dfrac{1}{(\sqrt[4]{a})^3}$
5. $\sqrt[7]{x+y}$
6. $\sqrt[3]{a^2+b^2}$
7. $\sqrt{x+\sqrt{x}}$
8. $\sqrt{x^2-y^2}$

En los problemas 9 a 16, vuelva a escribir la expresión usando notación radical.

9. $a^{2/3}$
10. $2a^{1/3}$
11. $(3a)^{2/3}$
12. $3a^{2/3}$
13. $3+a^{2/3}$
14. $(3+a)^{2/3}$
15. $\dfrac{3}{a^{2/3}}$
16. $(3a)^{-3/2}$

En los problemas 17 a 22, encuentre los números indicados.

17. ***a***) $(49)^{1/2}$

b) $(49)^{-1/2}$

18. ***a***) $(-8)^{1/3}$

b) $(8)^{-1/3}$

19. ***a***) $(0.04)^{7/2}$

b) $(0.04)^{-7/2}$

20. ***a***) $\left(\frac{1}{64}\right)^{2/3}$

b) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-2/3}$

21. ***a***) $(27)^{7/3}$

b) $(-27)^{-7/3}$

22. ***a***) $\left(\frac{81}{16}\right)^{3/4}$

b) $\left(\frac{81}{16}\right)^{-3/4}$

En los problemas 23 a 48, simplifique y elimine cualquier exponente negativo.

23. $(4x^{1/2})(3x^{1/3})$

24. $(3w^{3/2})(7w^{5/2})$

25. $a^{3/2}(4a^{2/3})$

26. $(-5x^3)x^{5/3}$

27. $x^{1/2}x^{1/4}x^{1/8}$

28. $(2a^{1/2})(2a^{1/3})(2a^{1/6})$

29. $(a^2b^4)^{1/4}$

30. $(100x^4)^{-3/2}$

31. $(25x^{1/3}y)^{3/2}$

32. $(4x^4y^{-6})^{1/2}$

33. $\dfrac{cd^{1/3}}{c^{1/3}d}$

34. $\dfrac{4x^{1/2}}{(8x)^{1/3}}$

35. $\left(\dfrac{2x^{1/2}}{z^{-1/6}y^{2/3}}\right)^6$

36. $\left(\dfrac{-y^{1/2}}{y^{-1/2}}\right)^{-1}$

37. $((-27a^3b^{-6})^{1/3})^2$

38. $a^{1/3}(a^{2/3}(ab)^{5/3}b^{-1/3})^{-1/2}$

39. $(x^{1/2})(x^{-1/2})^2x^{1/2}$

40. $y^{1/4}(y^{1/4}(y^{1/2})^{-4})^{-1/2}$

41. $(5x^{2/3}(x^{4/3})^{1/4})^3$

42. $(2z^{1/2}(2z^{1/2})^{-1/2})^{1/2}$

43. $\dfrac{(a^{-1/3}b^{2/9}c^{1/6})^9}{(a^{1/6}b^{-2/3})^6}$

44. $\left(\dfrac{x^{1/5}y^{3/10}}{x^{-2/5}y^{1/2}}\right)^{-10}$

45. $\dfrac{(p^{1/3}q^{1/2})^{-1}}{(p^{-1}q^{-2})^{1/2}}$

46. $\left(\dfrac{2x^{1/2}}{x^{-3/2}}\right)\left(\dfrac{1}{4x}\right)^{-1/2}$

47. $\left(\dfrac{r^2s^{-4}t^6}{r^{-4}s^2t^6}\right)^{1/6}$

48. $\left(\dfrac{-x^{1/2}y^{1/4}}{8x^2y^4}\right)^{1/3}$

En los problemas 49 a 56, vuelva a escribir la expresión como un solo radical.

49. $\sqrt{5}\,\sqrt[3]{2}$

50. $\sqrt[3]{4}\sqrt{2}$

51. $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{4}}$

52. $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

53. $\sqrt{x\sqrt{x}}$

54. $\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$

55. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[8]{a}}$

56. $\dfrac{\sqrt[3]{y^2\sqrt{y}}}{\sqrt[4]{y}}$

En los problemas 57 a 60, use notación científica para simplificar la expresión.

57. $\sqrt{0.000004}(8\,000)^{2/3}(100\,000)^{4/5}$

58. $\dfrac{\sqrt{40\,000}\,\sqrt[3]{8\,000}}{(0.000004)^{3/2}}$

59. $\left(\sqrt[3]{\sqrt{0.000001x^6y^{12}}}\right)^5$

60. $\sqrt[4]{(160\,000a^{8/3})^3}$

Aplicaciones diversas

61. **Movimiento del péndulo** En un péndulo sencillo el periodo requerido para una oscilación completa es de aproximadamente $T \approx 2\pi(L/g)^{1/2}$, donde L es la longitud de la cuerda del péndulo y g es la constante gravitacional. Use una calculadora para aproximar el periodo de un péndulo con una cuerda de 10 pulgadas si el valor de g es de 32 ft/s^2. [*Pista:* use unidades coherentes].

62. **Esfera** El radio r de una esfera con volumen V está dado por $r = (3V/4\pi)^{1/3}$. Use una calculadora para hallar el radio de una esfera que tiene de volumen 100 cm^3.

63. **Velocidad del sonido** La velocidad del sonido v medida en pies por segundo a través del aire de temperatura t grados Celsius está dada por

$$v = \frac{1\,087(273 + t)^{1/2}}{16.52}.$$

Use una calculadora para hallar la velocidad del sonido a través del aire cuando la temperatura es de 20 °C.

64. **Agua corriente** Un arroyo de corriente rápida puede transportar partículas más grandes que uno de corriente lenta. Los estudios de laboratorio han demostrado que la velocidad crítica v_t del agua que se necesita para que una partícula arranque en la cuenca de un arroyo está dada por la fórmula

$$v_t = 0.152d^{4/9}(G - 1)^{1/2},$$

donde v_t se mide en metros por segundo, d es el diámetro de la partícula en milímetros y G es la gravedad específica de la partícula. Halle la velocidad crítica que se necesita para empezar a mover un grano de feldespato que tiene una gravedad específica de 2.56 y un diámetro de 3 mm.

Para la discusión

En los problemas 65 a 74, responda falso o verdadero.

65. $(z^2 + 25)^{1/2} = z + 5$ _____

66. $36x^{1/2} = 6\sqrt{x}$ _____

67. $((-4)^2)^{1/2} = 4$ _____

68. $[(-4)^{1/2}]^2 = -4$ _____

69. $((-1)^{-1})^{-1} = -1$ _____

70. $(-1)^{-1}(-1)^{-1} = 1$ _____

71. $x^{-3/2} = \dfrac{1}{x^{2/3}}$ _____

72. $x^{2/3}y^{-2/3} = 1$ _____

73. $(b^{4/3})^{3/4} = b$ _____

74. $\dfrac{a^{3/2}}{a^{-3/2}} = a^2$ _____

2.6 Polinomios y productos notables

Introducción Ya hemos encontrado práctico usar letras como x o y para representar números; cada símbolo se llama **variable**. Una **expresión algebraica** es el resultado de llevar a cabo un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o raíces en un grupo de variables y números reales. Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$x^3 - 2x^2 + \sqrt{x} - \pi, \quad \frac{4xy - x}{x + y} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{\frac{7y - 3}{x^5y^{-2} + z}}.$$

A veces una expresión algebraica representa un número real sólo para ciertos valores de una variable. Al considerar la expresión $\sqrt{x}$, encontramos que debemos tener $x \geq 0$ para que $\sqrt{x}$ represente un número real. Cuando trabajamos con expresiones algebraicas, suponemos que las variables están restringidas para que la expresión represente un número real. El conjunto de valores permisibles para la variable se llama **dominio de la variable**. Por tanto, el dominio de la variable en $\sqrt{x}$ es el conjunto de todos los números reales no negativos $\{x|x \geq 0\}$, y para $3/(x + 1)$ el dominio es el conjunto de todos los números reales excepto $x = -1$; es decir, $\{x|x \neq 1\}$.

Si se sustituyen números específicos por las variables en una expresión algebraica, el número real que resulta se llama **valor** de la expresión. Por ejemplo, el valor de $x^2 + 2y$ cuando $x = 1$ y $y = 2$ es $(1)^2 + 2(2) = 5$.