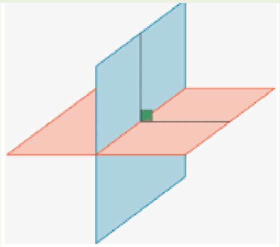
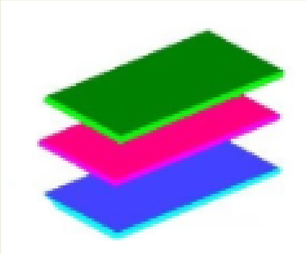
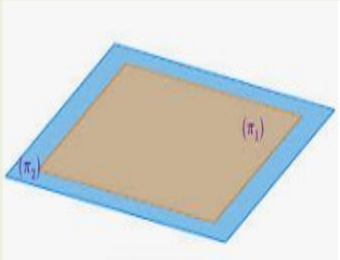
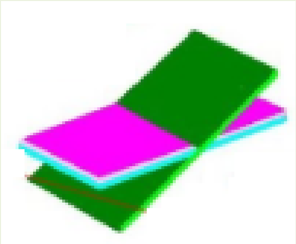
   

Posiciones relativas entre planos

Diapositivas realizadas por Efrén Giraldo T. MSc.

Su único objetivo es facilitar el estudio.

❖**MIS VALORES**

Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

❖**MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖**MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema.
Servir a las personas.

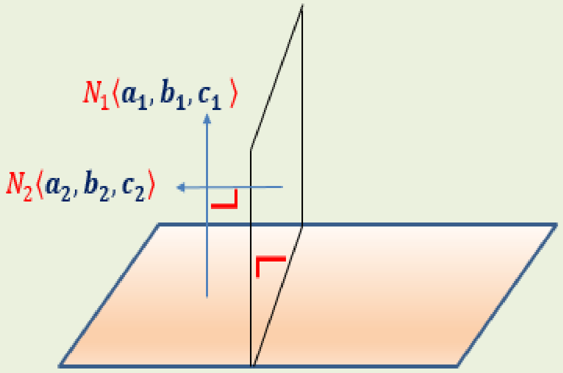
Enail: hegiraldo2@Gmail.com

Conceptos Fundamentales

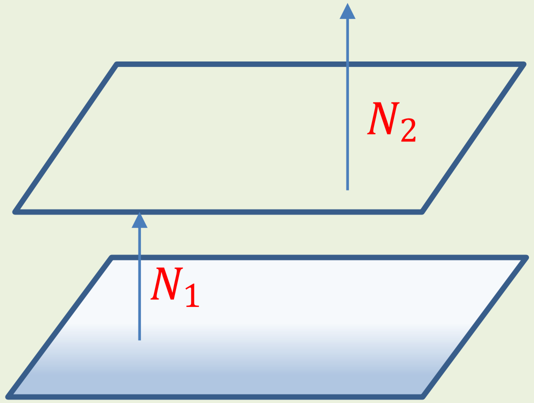
1. Verificar que un punto es externo a una recta.
2. Hallar las coordenadas de un punto que pertenece a una recta, dada la ecuación simétrica o paramétrica de la recta.
3. La ecuación de un plano se puede hallar conociendo un punto del plano y dos vectores no paralelos del plano, o un punto y un vector normal al plano.
4. Cuando 2 planos se interceptan lo hacen formando una línea recta: recta de intercepción.
5. Hallar el vector director de la recta de intercepción de dos planos.
6. Hallar un punto de la línea de intercepción de 2 planos conocidas las ecuaciones implícitas de ellos.

POSICIONES RELATIVAS DE PLANOS

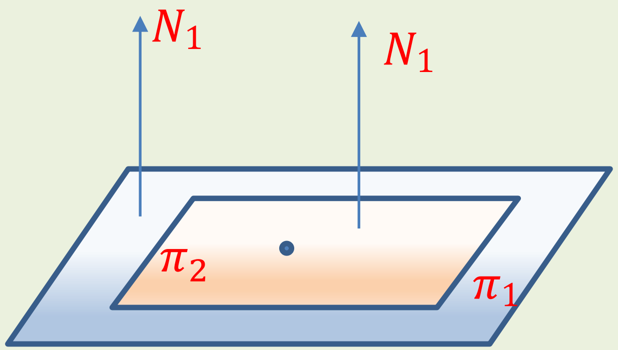
Perpendiculares



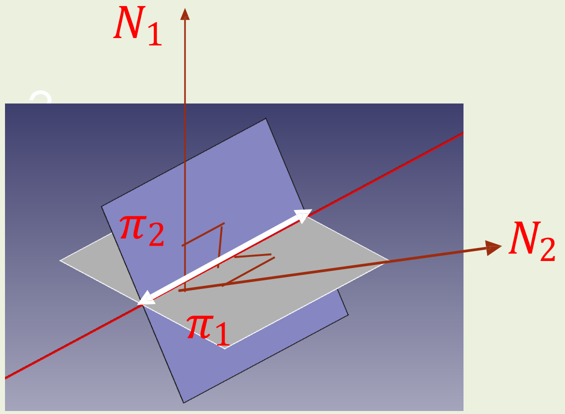
Paralelos



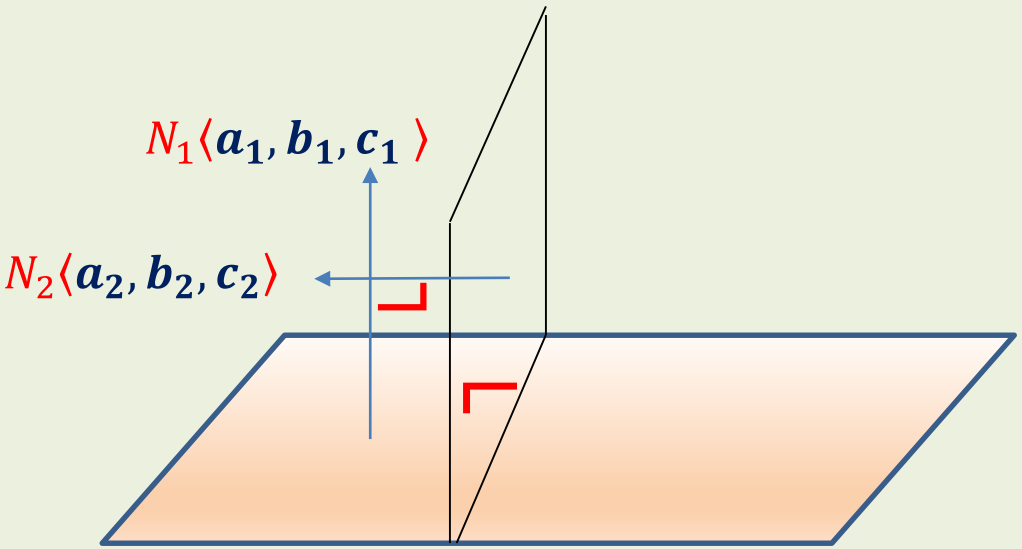
Coincidentes



Se interceptan



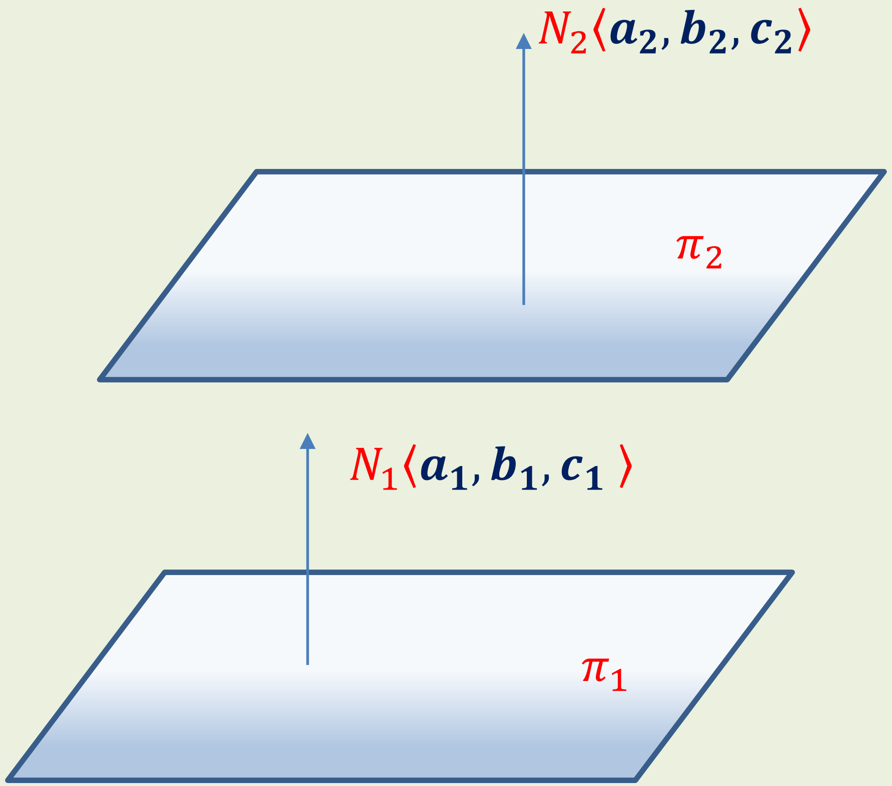
1. Planos perpendiculares



1.Dos planos son perpendiculares si sus **vectores normales también son perpendiculares**

$$N_1 . N_2 = 0 = a_1\, a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

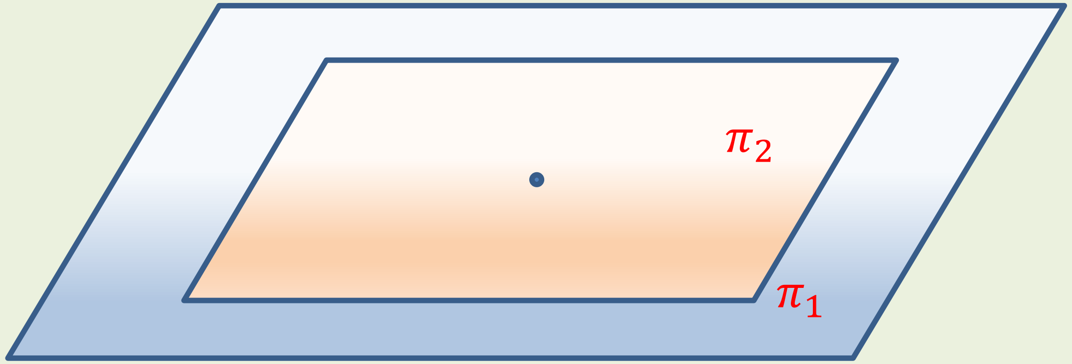
2. Planos paralelos



2. Dos planos son paralelos si sus vectores normales también son paralelos.

$$\boldsymbol{N_1 \times N_2 = 0}$$

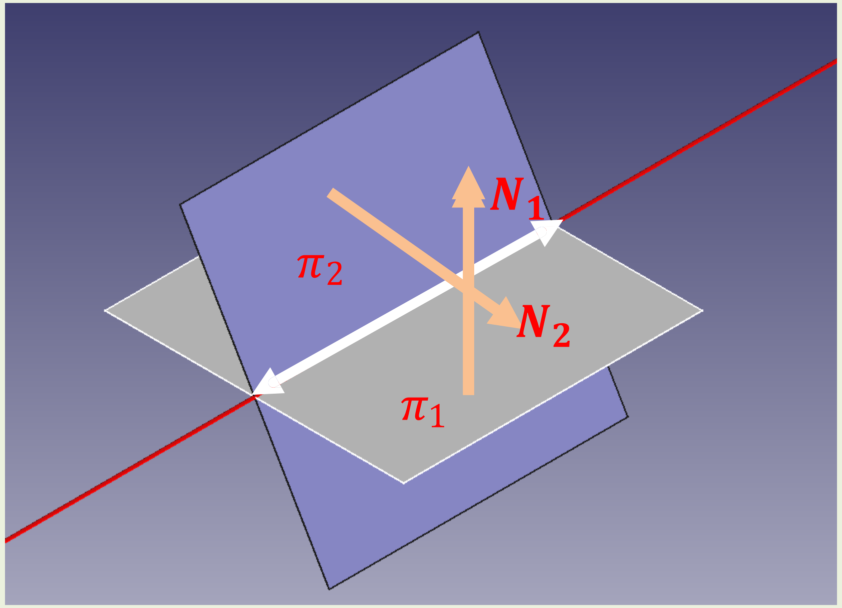
3. Planos son coincidentes



Dos planos son coincidentes si:

1. Son paralelos
2. Si tienen mínimo un punto en común.

4. Planos secantes o que se interceptan



Dos planos se intersectan si no son paralelos.

Esto es, si sus vectores normales no son paralelos: N_1 no es paralelo a N_2

$$\boxed{\boldsymbol{N_1 \times N_2 \neq 0}}$$

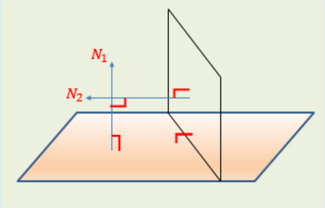
Tienen una recta en común. Se trata de hallar un vector director y un punto para hallar su ecuación.

Método sencillo para saber la posición relativa de dos planos conocidas las ecuaciones implícitas

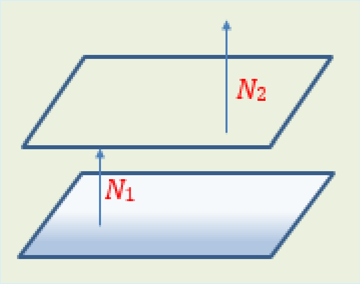
$$\pi_1 \qquad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$\pi_2 \qquad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\pi_1 \quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \longrightarrow N_1$$
$$\pi_2 \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \longrightarrow N_2$$

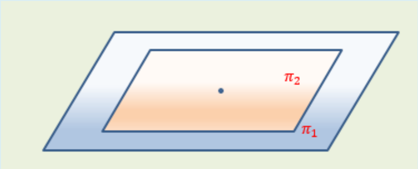
1. Planos perpendiculares: $N_1 . N_2 = 0 = a_1\, a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 .$



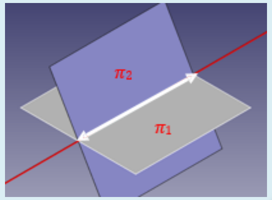
2. Planos paralelos: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{d_1}{d_2}$



3. Planos coincidentes: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$



4. Planos secantes: $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

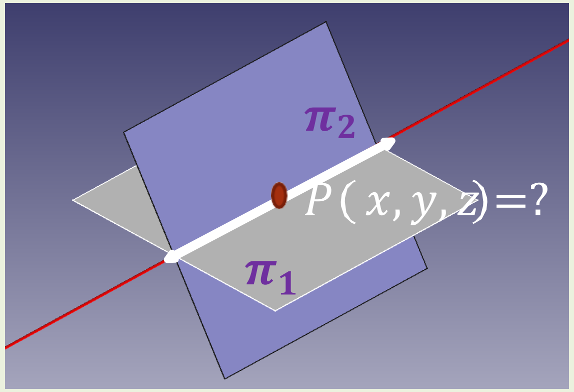


10

El vector director de la recta de intercepción de 2 planos π_1 y π_2 se halla por medio del producto vectorial $N_1 \times N_2$ de los 2 vectores normales a los 2 planos

Hallar las coordenadas de un punto de la línea de intercepción de dos planos conocidas las ecuaciones implícitas de los 2 planos $\boldsymbol{\pi_1}$ y $\boldsymbol{\pi_2}$.

$$\boldsymbol{\pi_1} \qquad \boldsymbol{a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0}$$
$$\boldsymbol{\pi_2} \qquad \boldsymbol{a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0}$$



Recta r: $\begin{cases} \pi_1 & \cancel{a_1x} + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \pi_2 & \cancel{a_2x} + \underline{b_2y + c_2z + d_2} = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} z &= valor \quad z_0 \\ y &= valor \quad y_0 \\ x &= 0 \;\; es \quad x_0 \end{aligned} \longrightarrow P_0(0, y_0, z_0)$$

Ejercicio # 1 de aplicación

Dadas las ecuaciones implícitas de dos planos, probar si son perpendiculares, paralelos, coincidentes o secantes.

$$\boldsymbol{\pi_1} \quad 2\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} - 1 = \mathbf{0} \longrightarrow N_1\langle 2, -3, 1\rangle$$

$$\boldsymbol{\pi_2} \quad -4\boldsymbol{x} + 6\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{z} + 2 = \mathbf{0} \longrightarrow N_2\langle -4, 6, -2\rangle$$

$$\boldsymbol{N_1} . \boldsymbol{N_2} = -8 - 18 - 2 = -28$$

No perpendiculares

¿ Paralelos o coincidentes?

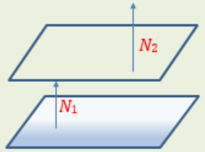
$\pi_1 \quad 2x - 3y + z - 1 = 0 \qquad N_1\langle\ 2, -3,\ 1\rangle$

$\pi_2 \quad -4x + 6y - 2z + 2 = 0 \qquad N_2\langle -4,\ 6, -2\rangle$

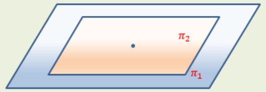
Debemos probar que $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{2}{-4} \qquad \frac{-3}{6} \qquad \frac{1}{-2}$$

Es la misma proporción entre los 3 $\quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$ → **Son paralelos**



Es la misma proporción entre los 4 $\quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$ → **Son coincidente**



Ejercicio # 2 de aplicación

Dadas las ecuaciones de dos planos, probar si son perpendiculares, paralelos, coincidentes o secantes.

$$\boldsymbol{\pi_1} \qquad 2\boldsymbol{x} \text{ -}3\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \text{ -}1 = \mathbf{0} \qquad N_1\langle 2, -3, 1\rangle$$

$$\boldsymbol{\pi_2} \qquad \text{-}4\boldsymbol{x} + 6\boldsymbol{y} \text{ -}2\boldsymbol{z} + 7 = \mathbf{0} \qquad N_2\langle -4, 6, -2\rangle$$

$$\boldsymbol{N_1}.\boldsymbol{N_2} = -8 - 18 - 2 = -28$$

No perpendiculares

$\pi_1 \quad 2x - 3y + z - 1 = 0 \quad N_1\langle\ 2, -3,\ \ 1\rangle$

$\pi_2 \quad -4x + 6y - 2z + 7 = 0 \quad N_2\langle -4, 6, -2\rangle$

Debemos probar que $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{2}{-4} \quad \frac{-3}{6} \quad \frac{1}{-2}$$

Es la misma proporción entre los 3 $$\frac{1}{-2} \quad \frac{-1}{2} \quad \frac{1}{-2}$$ $\longrightarrow$ **Son paralelos**

La última proporción es diferente $$\frac{1}{-2} \quad \frac{-1}{2} \quad \frac{1}{-2} \quad \frac{1}{7}$$ $\longrightarrow$ **No son coincidentes**

Ejercicio # 3 de aplicación

Dadas las ecuaciones de dos planos, probar si son perpendiculares, paralelos, coincidentes o secantes.

$$\boldsymbol{\pi_1} \qquad 2\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} - 1 = \mathbf{0} \qquad N_1\langle\ 2, -3,\ 1\rangle$$

$$\boldsymbol{\pi_2} \qquad -\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{z} + 2 = \mathbf{0} \qquad N_2\langle -1,\ \ 1, -2\rangle$$

$$\boldsymbol{N_1}.\,\boldsymbol{N_2} = \ -2\ -3 - 2 = -7$$

No perpendiculares

$\boldsymbol{\pi_1}$ $\quad 2\boldsymbol{x}$ -3$\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ -1 $= \mathbf{0}$ $\quad N_1\langle 2, -3, \ 1\rangle$

$\boldsymbol{\pi_2}$ $\quad$ -$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ -2$\boldsymbol{z}$ +2$= \mathbf{0}$ $\quad N_2\langle -1, \ 1, -2\rangle$

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{-1}} \qquad \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{1}} \qquad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-2}} \qquad \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$$

Todos son diferentes $\quad \mathbf{-2} \qquad \mathbf{-\ 3} \quad \mathbf{-\ 0.5} \quad \mathbf{-\ 0.5}$

Se interceptan, son secantes.

Halle las ecuaciones: vectorial, paramétrica, analítiuca e implícita del plano $\boldsymbol{\pi_1}$.

Halle las ecuaciones: vectorial, paramétrica y simétrica de la recta de intercepción de $\boldsymbol{\pi_1}$ y $\boldsymbol{\pi}_2$.

Ejercicio # 4 de aplicación

Dadas las ecuaciones de dos planos, probar si son perpendiculares, paralelos, coincidentes o secantes. Si se interceptan halle la ecuación de la recta de intercepción.

23

$$\boldsymbol{\pi_1} \qquad 2\boldsymbol{x} \;\; \text{-}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \;\; \text{-}1 = \mathbf{0} \qquad N_1\langle 2, -1, \; 1\rangle$$

$$\boldsymbol{\pi_2} \qquad 3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} - 3\boldsymbol{z} + 3 = \mathbf{0} \qquad N_2\langle 3, \; 2, -3\rangle$$

3

Resolver el ejercicio hasta probar que se interceptan. Hallar el vector director de la línea de intercepción

En las diapositivas siguientes se halla la ecuación de la línea de intercepción.

Se sabe que los planos se interceptan:

31

$$\pi_1 \qquad 2x - y \quad + z \ - 1 = 0$$
$$\pi_2 \qquad 3x + 2y \ - 3z - 3 = 0$$

Se supone un valor de alguna de las variables, por ejemplo z =0 y se reemplaza en ambas ecuaciones.

$$2x - y \quad + 0 = \ 1$$
$$3x + 2y \ - 3(0) = 3$$

$$2x - y = 1$$
$$3x + 2y = 3$$

Y se procede a su solución:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \quad (1) \\ 3x + 2y &= 3 \quad (2) \end{aligned}$$

Si multiplicamos la ecuación (1) por 2, observamos que el término en y queda $-2y$ y luego si sumo esta ecuación transformada con la (2) el término en y se cancela.

$$2x - y = 1 \quad (1)*2$$

$$2(2x - y = 1)$$

$$4x - 2y = 2$$ ecuación (1) transformada

Sumo con (2)

$$3x + 2y = 3 \quad (2)$$

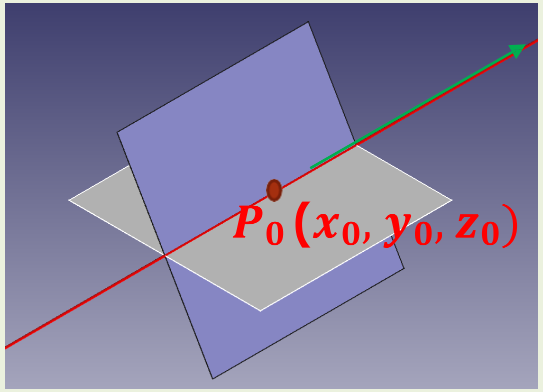
$$7x + 0 = 5$$

$$7x = 5$$

$$\boldsymbol{x = \frac{5}{7} = 0.71}$$

Falta hallar la coordenada y

Con este valor de x voy a la ecuación (1) y lo reemplazo para obtener y



$v = \langle 1,9,7 \rangle$

$$2x \quad - y = 1 \quad (1)$$

$$2 * 0.71 \quad - y \quad = 1$$

1.42 −y=1

1.42−1 =y

0.42= y

El punto de la recta es $P_0(0.71, 0.42, 0)$. Como se conoce el vector director de la recta de intercepción se puede hallar su ecuación.

$P_0(0.71, 0.42, 0) \qquad v = \langle 1,9,7 \rangle$

$$x = x_0 + x_1 \propto$$
$$y = y_0 + y_1 \propto$$
$$z = z_0 + z_1 \propto$$

$$x = 0.71 + 1 \propto$$
$$y = 0.42 + 9 \propto$$
$$z = 0 + 7 \propto$$

Ángulo entre 2 planos

Se define como el **ángulo entre sus respectivos vectores normales** $\boldsymbol{N_1\ y\ N_2}$

$$\emptyset = cos^{-}\left(\frac{N_1.N_2}{|N_1||N_2|}\right)$$

Terminar el ejercicio.

Ejercicio # 5 de aplicación para resolver

Dadas las ecuaciones de dos planos, probar si son perpendiculares, paralelos, coincidentes o secantes. Si se interceptan halle la ecuación de la recta de intercepción.

23

$$\pi_1 \qquad x + 1y - 5z + 4 = 0$$

$$\pi_2 \qquad 2x + 2y - 10z + 8 = 0$$

Bibliografía

- Perez, J. A. y Paniagua j. G. (2016). Geometría Analítica e introducción al Cálculo Vectorial. Instituto Tecnológico Metropolitano **-ITM-**Medellín**. Libro electrónico.**
- a**https://www.sangakoo.com/es/temas/posicion-relativa-de-dos-planos**
- http://www.vadenumeros.es/segundo/ecuaciones-de-un-plano.htm
- https://aga.frba.utn.edu.ar/ecuaciones-del-plano/
- http://matematicasblecua.ftp.catedu.es/bacmat/temario/bac2/mat2_06rectasyplanos_t2.htm

U de A

- https://docs.google.com/viewerng/viewer?url=http://ingenieria2.udea.edu.co/multimedia- static/libros/geometria_vectorial_analitica/pdf/gva_cap04.pdf

- http://ingenieria2.udea.edu.co/multimedia-static/libros/geometria_vectorial_analitica/#pestana7
- http://www.luiszegarra.cl/moodle/pluginfile.php/156/mod_resource/content/1/Teoria_Geo_Vectorial_Cap_1_LZA.pdf